ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΛΕΣ ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ & ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :
ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

www.pitetragono.gr

1. ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τα σύνολα των αριθμών είναι τα εξής :

i. Φυσικοί αριθμοί : $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,...\}$

ii. Ακέραιοι αριθμοί : $\mathrm{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

iii. Ρητοί αριθμοί : $Q = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} / \kappa, \lambda \in \mathrm{Z} \right\} \ \lambda \neq 0$

iv. Άρρητοι αριθμοί : $Q' = \{..,-\sqrt{2},...,\pi,..\sqrt{5},...\}$ (οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί)

v. Πραγματικοί αριθμοί : $R = Q \cup Q'$ (οι ρητοί και άρρητοι)

2. ΔΙΑΤΑΞΗ

- **Ορισμός της Διάταξης :** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$
- **Κανόνες Προσήμων Διάταξης :**
  i. ($\alpha > 0$ και $\beta > 0$) $\Rightarrow \alpha + \beta > 0$
  ii. ($\alpha < 0$ και $\beta < 0$) $\Rightarrow \alpha + \beta < 0$
  iii. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \ \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
  iv. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \ \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
  v. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \Re$ (το ¨=¨ ισχύει μόνο όταν α=0)
- **Ιδιότητες των Ανισοτήτων**
  i. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
  iii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
  iv. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
  v. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω :
  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
  vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
- **Διάταξη και Δυνάμεις**
  Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :
  i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$
  ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ (Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε :
  $$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu > \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\pi\varepsilon\rho\rho\iota\acute{\omega}\varsigma \\ \alpha^\nu < \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases})$$
- **Διαστήματα**
  i. Κλειστό διάστημα : $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$
  ii. Ανοιχτό διάστημα : $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta)$
  iii. Ανοιχτό δεξιά διάστημα : $\alpha \leq x < \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta)$
  iv. Ανοιχτό αριστερά διάστημα : $\alpha < x \leq \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta]$
  v. $x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha]$
  vi. $x < \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha)$
  vii. $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, +\infty)$
  viii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

3. ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός τότε:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu-\phi o\rho\varepsilon\varsigma} \ , \ \alpha^{1} = \alpha \ , \ \alpha^{0} = 1 \ (\alpha \neq 0) \ , \ \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \ , \ \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

- Αν ν περιττός : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν ν άρτιος : $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$, $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$, $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

4. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$
$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$$
$$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$$

5. ΡΙΖΕΣ

- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}} = |x|$, $x \in \Re$ και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\nu}} = x$, x θετικός ή 0 και ν θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x}^2 = x$, $\sqrt[3]{x}^3 = x$)
- $\sqrt[\nu]{x^{\mu}} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, x θετικός ή 0 και ν , μ θετικοί ακέραιοι.(Συνήθως : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$)

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ :</u> $\sqrt{x}^2 = x$ ενώ $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.
  π.χ.1 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$
  π.χ.2 $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$
  π.χ.3 $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.
  π.χ.1 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

π.χ.2 $\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}\pm\beta$, $\alpha\pm\sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

π.χ.1 $\frac{2}{\sqrt{5}+2}=\frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)\cdot(\sqrt{5}-2)}=\frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}^2-2^2}=\frac{2\sqrt{5}-4}{5-4}=2\sqrt{5}-4$

π.χ.2 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{6}^2}=\frac{\sqrt{30}+6}{5-6}=-\left(\sqrt{30}+6\right)=-\sqrt{30}-6$

π.χ.3 $\frac{3}{2\sqrt{3}-3}=\frac{3\cdot(2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)\cdot(2\sqrt{3}+3)}=\frac{6\sqrt{3}+9}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-9}=\frac{6\sqrt{3}+9}{12-9}=\frac{3\left(2\sqrt{3}+3\right)}{3}=2\sqrt{3}+3$

6. Η ΕΞΙΣΩΣΗ : αx+β=0

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού έχει τελικά τη μορφή

αx+β=0 ή αx=-β (1)

- Αν α $\neq$ 0, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν α=0 και β $\neq$ 0, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση).
- Αν α=0 και β=0, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x).

7. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (\alpha\neq 0)$ Διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0 τότε $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0 τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0 τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2-3x+2=0$

Είναι $\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1>0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\left\langle\begin{matrix}x_1=2\\x_2=1\end{matrix}\right.$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2+10x+25=0$

Είναι $\Delta=10^2-4\cdot 1\cdot 25=100-100=0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την $x=\frac{-10\pm\sqrt{0}}{2\cdot 1}=\frac{-10}{2}=-5$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2+4x=-3$

$(x-3)^2+4x=-3\Leftrightarrow x^2-6x+9+4x+3=0\Leftrightarrow x^2-2x+12=0$

Είναι $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 12=4-48=-44<0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Προσοχή : Όταν β=0 ή γ=0, τότε η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν β=0 τότε $\alpha x^2+\gamma=0$

π.χ.1 $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=\pm 4$

π.χ.2 $x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$ Αδύνατη.

- Αν γ=0 τότε $\alpha x^2+\beta x=0$

π.χ.1 $x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VIETA

Σε περίπτωση που η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε για το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ ισχύει :

- $S=x_1+x_2 \Leftrightarrow S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $P=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta η εξίσωση : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μετασχηματίζεται : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0 \ (\alpha\neq 0)$ και λύνονται με αντικατάσταση : $x^2=y$ με $y\geq 0$.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $2x^4-7x^2-4=0$

Λύση : Θέτω $x^2=y$ άρα η εξίσωση γίνεται $2y^2-7y-4=0$. Είναι $\Delta=49-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81>0$,

$$y_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 9}{4}=\begin{cases} y=4 \\ \text{ή} \\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- Για $y=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$
- Για $y=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=-\dfrac{1}{2}$ Αδύνατη.

8. ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $x^\nu=\alpha \ \left(\nu\in\mathrm{N}^*, \alpha\in\Re\right)$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

1) Αν α>0 και ν – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{a}$
2) Αν α>0 και ν – άρτιος έχει ακριβώς δυο λύσεις $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu]{a}$
3) Αν α<0 και ν – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{-a}$
4) Αν α<0 και ν – άρτιος δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

π.χ.1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3-27=0 \Leftrightarrow x^3=27 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x=3$

π.χ.2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4-256=0 \Leftrightarrow x^4=256 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{256} \Leftrightarrow x=\pm 4$

π.χ.3) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3+64=0 \Leftrightarrow x^3=-64 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x=-4$

π.χ.4) Να λύσετε την εξίσωση : $x^6+5=0 \Leftrightarrow x^6=-5$ Αδύνατη.

9. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή,
1ον παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,
2ον παίρνω περιορισμούς,
3ον πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4ον ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1}$

Λύση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{8}{(x-1)(x+1)}$ $\quad$ ΕΚΠ $=(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq -1$

$$(x-1)(x+1)\frac{x}{x-1}-(x-1)(x+1)\frac{2}{x+1}=(x-1)(x+1)\frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$x(x+1)-2(x-1)=8 \Leftrightarrow x^2+x-2x+2-8=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή) ή $x=-2$ (δεκτή).

10. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x+\beta>0$ ή $\alpha x+\beta<0$

1ος τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2ος τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
αx+β	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Να λυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x+18\geq 0$

Λύση: 1ος $-3x+18\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -18 \Leftrightarrow x\leq 6$ ή $x\in(-\infty,6]$

Λύση: 2ος Έχω $-3x+18=0 \Leftrightarrow -3x=-18 \Leftrightarrow x=6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
-3x+18	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x+18\geq 0$ τότε $x\in(-\infty,6]$

11. ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ $(\alpha\neq 0)$

Αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και τις τιμές του x που γίνεται θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα λύνω την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ βρίσκω τις ρίζες x_1,x_2 και τις τοποθετώ στο πινακάκι από το οποίο και βρίσκω το πρόσημο τις συνάρτησης στο διάστημα που θέλω.

1η περίπτωση: Δ>0

Τιμές του χ	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

2η περίπτωση: Δ=0

Τιμές του χ	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3η περίπτωση: Δ<0

Τιμές του χ	$-\infty$ $+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2-5x+6>0$

Λύση: Έχω : $x^2-5x+6=0$ $\Delta=25-24=1>0$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}x=2\\x=3\end{cases}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-5x+6>0$ τότε $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6\geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6<0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in(2,3)$

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-5x+6\leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in[2,3]$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2-6x+9>0$

Λύση: Έχω : $x^2-6x+9=0$ $\Delta=36-36=0$ άρα $x=3$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
x^2-6x+9	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-6x+9>0$ τότε $x\in\Re-\{3\}$

(Όταν η Διακρίνουσα είναι Ο το τριώνυμο είναι ανάπτυγμα ταυτότητας δηλ. $x^2-6x+9=(x-3)^2$ οπότε μπορούμε να καταλάβουμε ακόμα καλυτέρα γιατί ισχύουν τα πρόσημα στο πινακάκι)

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9\geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x\in\Re$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9<0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα ότι είναι αδύνατη

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2-6x+9\le 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x=3$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $25-x^2\ge 0$

Λύση: Έχω $25-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $25-x^2\ge 0$ τότε $x\in[-5,5]$

12. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)}<0$ γράφεται ισοδύναμα $A(x)\cdot B(x)>0$ ή $A(x)\cdot B(x)<0$ [όπου $B(x)\ne 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4}\le 0$

Λύση: Πρέπει $x^2-5x+4\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$ και $x\ne 4$

Έχω : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4}\le 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4)\le 0$

$(x^2+3x)(x^2-5x+4)=0$

$\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0, ή, x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

ή $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
x^2+3x	+	0	-	0	+		+		+
x^2-5x+4	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4}\le 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4)\le 0$ τότε $x\in[-3,0]\cup(1,4)$. (Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγο του περιορισμού)

- Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}>\Gamma(x)$ γράφεται : $\frac{A(x)}{B(x)}-\Gamma(x)>0 \Leftrightarrow \frac{A(x)-B(x)\cdot\Gamma(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow [A(x)-B(x)\cdot\Gamma(x)]\cdot B(x)>0$ και λύνεται όπως η προηγούμενη.

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}\ge\frac{8}{x^2-1}$

Λύση: Έχω : $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{(x-1)(x+1)}\ge 0$ ΕΚΠ $=(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x+2-8}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-1}\succ 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1)\geq 0$$ Έχω : $(x^2-x-6)(x^2-1)=0$

$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$

ή $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
x^2-x-6	+	0	-		-		-	0	+
x^2-1	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2-x-6}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1)\geq 0$ τότε $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[3,+\infty)$. (Στο (-1,1) είναι ανοιχτό λόγο του περιορισμού)

13. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός : $|\alpha|=\begin{cases}\alpha, \alpha\geq 0\\ -\alpha, \alpha<0\end{cases}$

Ιδιότητες : $|\alpha|^2=\alpha^2$, $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Όταν σε μια άσκηση υπάρχουν απόλυτες τιμές και θέλω να απαλλαγώ από αυτές τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα θετική, τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και η παράσταση που είναι μέσα της γράφεται όπως είναι. Δηλ. **π.χ.1** $|x^2+3|=x^2+3$, επειδή $x^2+3>0$ για κάθε $x\in\Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{7}-2|=\sqrt{7}-2=$, επειδή $\sqrt{7}-2>0$

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή γίνεται παρένθεση και βγαίνει ένα μείων (-) απέξω. Δηλ.

  π.χ.1 $|-x^2-3|=-(-x^2-3)=x^2+3$, επειδή $-x^2-3<0$ για κάθε $x\in\Re$.

  π.χ.2 $|\sqrt{8}-3|=-(\sqrt{8}-3)=-\sqrt{8}+3$, επειδή $\sqrt{8}-3<0$.

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις με βάση τον ορισμό. $|\mathrm{A}(x)|=\begin{cases}\mathrm{A}(x), \alpha\nu, \mathrm{A}(x)\geq 0\\ -\mathrm{A}(x), \alpha\nu, \mathrm{A}(x)<0\end{cases}$. Δηλ

  $$|x+3|=\begin{cases}x+3, \alpha\nu, x+3\geq 0\\ -(x+3), \alpha\nu, x+3<0\end{cases} \Leftrightarrow |x+3|=\begin{cases}x+3, \alpha\nu, x\geq -3\\ -x-3, \alpha\nu, x<-3\end{cases}$$

Το ίδιο μπορεί να γίνει με πινακάκι και περιπτώσεις : Μηδενίζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκω τη ρίζα ή τις ρίζες της και κάνω πινακάκι. Από το πινακάκι διακρίνω τις αντίστοιχες περιπτώσεις και βγάζω το πρόσημο της παράστασης στο διάστημα που θέλω. Δηλ. $|x+3|$, το $x+3$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+

- Αν $x \geq -3$ ή $x \in [-3,+\infty)$ τότε $|x+3| = x+3$ (αφού $x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in [-3,+\infty)$)
- Αν $x < -3$ ή $x \in (-\infty,-3)$ τότε $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ (αφού $x+3<0$ για κάθε $x \in (-\infty,-3)$)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Συχνά σε εξισώσεις με απόλυτη τιμή καταλήγουμε σε μια από τις εξισώσεις :

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1** $|f(x)| = \alpha$ για α>0 δίνει f(x)=α ή f(x)= -α για α=0 δίνει f(x)=0 και για α<0 είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x-1| = 3$

Λύση: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=4$ ή $2x=-2 \Leftrightarrow x=2$ ή x=-1

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2** $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x+5| = |x|$

Λύση: $|2x+5| = |x| \Leftrightarrow 2x+5=x$ ή $2x+5=-x \Leftrightarrow x=-5$ ή $x=-\frac{5}{3}$

π.χ.2 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+3| = 3|x-2|$

Λύση: $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3=3(x-2) \Leftrightarrow x+3=3x-6 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

ή $x+3=-3(x-2) \Leftrightarrow x+3=-3x+6 \Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

- **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3** $|f(x)| = |g(x)| + h(x)$ Σε αυτή την περίπτωση βρίσκω τις ρίζες των $f(x)=0$ και $g(x)=0$, φτιάχνω πινακάκι στο οποίο βάζω τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων και στη συνέχεια διακρίνω περιπτώσεις για τα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x+2| = 2|x-1|+1$

Λύση: $|x+2| = 2|x-1|+1$ (1) Έχω :

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty,-2)$ η (1) γίνεται : $-(x+2) = -2(x-1)+1 \Leftrightarrow -x-2=-2x+2+1 \Leftrightarrow$
  $x=5$ αδύνατο γιατί $x \in (-\infty,-2)$
- Αν $x \in [-2,1)$ η (1) γίνεται : $x+2=-2(x-1)+1 \Leftrightarrow x+2=-2x+2+1 \Leftrightarrow$
  $3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ (δεκτή)
- Αν $x \in [1,+\infty)$ η (1) γίνεται : $x+2=2(x-1)+1 \Leftrightarrow x+2=2x-2+1 \Leftrightarrow x=3$ (δεκτή)

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

1) $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$ (α>0)

2) $|x| > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha$ ή $x < -\alpha$ (α>0)

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $|2x-5| < 6$

Λύση: $|2x-5| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x-5 < 6 \Leftrightarrow -1 < 2x < 11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x+7| > 2$

Λύση: $|3x+7| > 2 \Leftrightarrow 3x+7 > 2 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x+7 < -2 \Leftrightarrow 3x < -9 \Leftrightarrow x < -3$ (2)

Αν συναληθευσω της (1) και (2) $x \in (-\infty,-3) \cup \left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x+2| \geq 3|x-1|$

Λύση: $|3x+2| \geq 3|x-1| \Leftrightarrow |3x+2|^2 \geq 9|x-1|^2 \Leftrightarrow 9x^2+12x+4 \geq 9x^2-18x+9 \Leftrightarrow$

$30x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{30} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

π.χ.4 Να λυθεί η ανίσωση : $-3|x+2|+|x-1| < x-3$

Λύση: $-3|x+2|+|x-1| < x-3$ (1)

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty,-2)$ η (1) γίνεται : $3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow x < -10$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x \in (-\infty,-2)$ παίρνουμε $x \in (-\infty,-10)$
- Αν $x \in [-2,1)$ η (1) γίνεται : $-3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x \in [-2,1)$ παίρνουμε $x \in \left(-\frac{2}{5},1\right)$
- Αν $x \in [1,+\infty)$ η (1) γίνεται : $-3(x+2)+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$, οπότε αν το συναληθευσουμε με το $x \in [1,+\infty)$ παίρνουμε $x \in [1,+\infty)$. Άρα οι λύσεις της ανισώσεις είναι $x \in (-\infty,-10)$ ή $x \in \left(-\frac{2}{5},1\right)$ ή $x \in [1,+\infty)$ δηλ. $x \in (-\infty,-10)$ ή $x \in \left(-\frac{2}{5},+\infty\right)$

14. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

- **ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**
  1. **ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ** **π.χ.1** $2y^2 - 5y = y(2y-5)$,

     π.χ.2 $x(x-3) - 2(3-x) = x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2)$
  2. **ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ** **π.χ.2** $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2+5)$

- **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**
  1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
  2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
  3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

  π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

  i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x-1)(4x+1)$

  ii) $(3x-1)^2 - 81 = (3x-1)^2 - 9^2 = (3x-1-9)(3x-1+9) = (3x-10)(3x+8)$

- **ΤΡΙΩΝΥΜΟ**
  - αν Δ>0 όπου x_1, x_2 οι ρίζες, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
  - αν Δ=0 όπου x_1 η διπλή ρίζα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = a(x-x_1)^2$
  - αν Δ<0 τότε δεν παραγοντοποιείται

  π.χ.1 $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

  π.χ.2 $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

- **ΣΧΗΜΑ HORNER**

15. ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ : $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$, $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ : $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων : i) $(x+2)^2$ ii) $(2x-3)^2$ iii) $(x+\sqrt{2})^2$ iv) $(x-\frac{3}{2})^2$
   v) x^2-9 vi) $4x^2-25$ vii) x^3-8 viii) x^3+27 ix) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ x) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$
   xi) $(-4x+5)^2$ xii) $(-2x-3)^2$ xiii) $(x+1)^3$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $3x-18=0$ ii) $-3(x+2)-2(x-1)=8+x$
   iii) $(2x+1)^2+5=4(x^2-10)$ iv) $(x+1)^3+x^2-1=0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $x^2-5x+6=0$ ii) $x^2-6x+9=0$ iii) $(x-2)^2+3x=2$
   iv) $x^2-9x=0$ v) $x^2-9=0$ vi) $2x^2-72=0$

4. Να λύσετε την εξίσωση : $x^4-5x^2+6=0$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $x^3-8=0$ ii) $x^4-16=0$ iii) $2x^7-x=0$ iv) $x^3+8=0$ v) $x^6+2=0$

6. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$

7. Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $-x^2+3x-2<0$ ii) $x^2+2x+1\geq 0$ iii) $x^2-2x+1\leq 0$
   iv) $-2x^2+2x-1<0$ v) $2x^2-32\leq 0$ vi) $x^2-9<0$ vii) $x^2-9x\leq 0$ viii) $2x^2-3x-2\geq 0$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $\frac{x^2-9}{x+4}\geq 0$ ii) $\frac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4}<0$ iii) $\frac{2x-1}{5-x}\leq -1$ iv) $\frac{x^2}{16-x^2}>0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $|x-2|=5$ ii) $|3x-1|=2|x+1|$ iii) $|x+2|+|x-2|=|3x-1|$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $|x-1|<2$ ii) $|x+2|>3$ iii) $|2x+1|>2|x+3|$ iv) $2|x|+3|x-1|>5x-2$

11. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.
    i) $\frac{x^2-25}{x+5}$ ii) $\frac{x^3-9x}{x+3}$ iii) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ iv) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$ v) $\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$ vi) $\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$
    vii) $\frac{(x-2)(x-3)-(3-x)(x-7)}{x^2-9}$ viii) $\frac{x^2+2x+4}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^3-8}$ ix) $\frac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}$