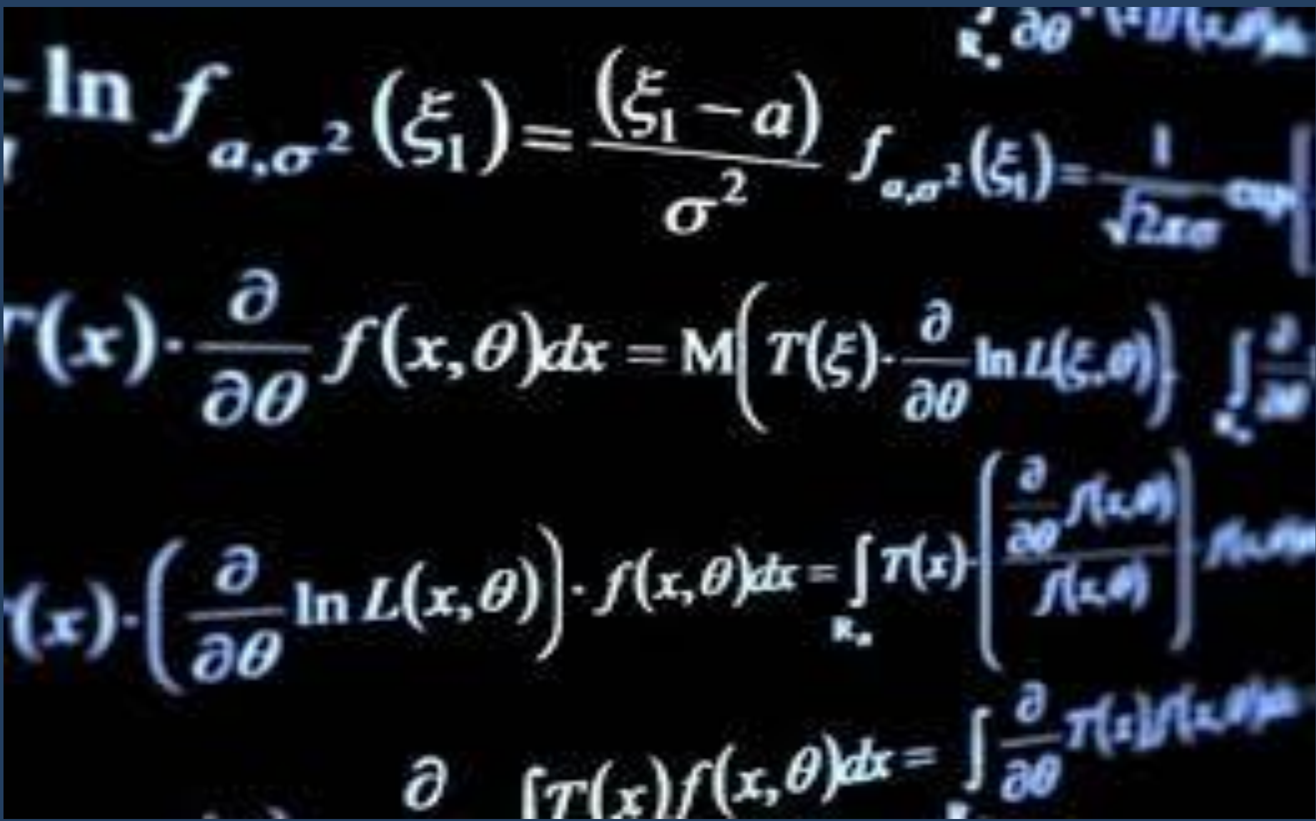
Παύλος Παλαιολόγου

Μαθηματικά Γ΄Λυκείου

Β΄ Τεύχος



Ομάδα προσανατολισμού :

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

www.pitetragono.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Β΄ΤΕΥΧΟΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ :
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε κάθε ενότητα αυτού του βιβλίου θα βρείτε :

- Βασική θεωρία με τη μορφή ερωτήσεων - απαντήσεων
- Παρατηρήσεις και σχόλια στη θεωρία
- Μεθοδολογίες για τη λύση ασκήσεων
- Λυμένα παραδείγματα σε κάθε μεθοδολογία
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Επιλεγμένες ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο
- Επαναληπτικά θέματα από το study4exams
- Ερωτήσεις σωστού – λάθους
- Ισχυρισμούς & αντιπαραδείγματα βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
- Θέματα πανελληνίων εξετάσεων
- Θέματα ανά ενότητα, από την τράπεζα θεμάτων (2023)

Καλή μελέτη
Παύλος Παλαιολόγου
Νοέμβριος 2023

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{Ο}$: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

2.5Α ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

39.ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2007 Β΄, 2012 Β΄, 2020 Ν.Σ. ΕΠΑΝ.)

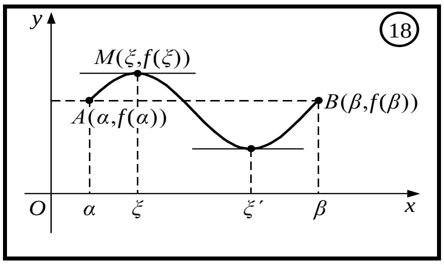
Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β) **και**
- $f(\alpha)=f(\beta)$



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi)=0$**.**

Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

   i. $f(x)=x^2-6x+2$, $[-1,7]$

   ii. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3 & ,x<1 \\ 8x-2x^2 & ,x\geq 1 \end{cases}$ $[-3,3]$

Λύση :

i. Θ. Rolle για την $f(x)=x^2-6x+2$ στο $[-1,7]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,7]$ ως πολυωνυμική
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,7)$ με $f'(x)=2x-6$
- $f(-1)=9$ και $f(7)=9$ άρα $f(-1)=f(7)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,7)$.

Πράγματι : $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3\in(-1,7)$

ii. Πρώτα πρέπει να εξετάσω ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμοτητα της $f(x)$ στο $x_0 = 1$. Έχω :

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+2x+3) = 6$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(8x-2x^2) = 6$

$f(1) = 6$, άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Επίσης :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+3-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{8x-2x^2-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-2x^2+8x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)(x-3)}{x-1} = 4$$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Οπότε Θ. Rolle για την $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3 & ,x<1 \\ 8x-2x^2 & ,x\geq 1 \end{cases}$ στο $[-3,3]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,3]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$
- $f(-3) = 6$ και $f(3) = 6$ άρα $f(-3) = f(3)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-3,3)$.

Πράγματι :

Για $x<1$ $f'(x) = 2x+2$ άρα : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-3,3)$

Για $x>1$ $f'(x) = 8-4x$ άρα : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8-4x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (-3,3)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

2) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i. $f(x) = x^2+2x+1$, [-2,0]

ii. $f(x) = \ln(x+1)$, [0,1]

iii. $f(x) = 1+\eta\mu 3x$, [0,π]

iv. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$, [0,2]

v. $f(x) = \begin{cases} x^2+4x-12 & ,x\leq -2 \\ 4x^2+16x & ,x>-2 \end{cases}$ $[-6,0]$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :</u> ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x) = 0$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$ $\alpha \in \Re$ και $\alpha > 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον x΄x . (2000Β΄)

<u>Λύση :</u>

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$. Για να είναι $(\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 0$. Άρα Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[1,2]$.

- $f(x)$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών
- $f(x)$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων
- $f(1) = \dfrac{1-3+2}{1-\alpha} = 0$, $f(2) = \dfrac{4-6+2}{1-\alpha} = 0$ άρα $f(1) = f(2)$

Οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

4) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = xe^{x-1} + ax^2 - (a+1)x$, με $x, a \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(3-x) + x^3 - 4x + 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,2)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & -1 \le x < 0 \\ x^3 + \gamma, & 0 \le x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α,β,γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [-1,1].

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι :
   i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον x΄x. (η εξίσωση f ΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)).
   ii. Η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

8) Αν $\alpha^2 + \alpha = \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα (-1,1) σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f, όπου $f(x) = (\alpha^2 - \beta)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη στον άξονα των x΄x.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ – ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ Ή ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η λύση πολλών προβλημάτων απαιτεί μια διαδικασία αντίστροφη της παραγώγισης.
Πιο συγκεκριμένα μας δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση F, που η παράγωγος της να δίνει την f. Δηλ. $f(x)=F'(x)$, $x\in\Delta$.
Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αντιπαραγώγιση και η συνάρτηση F παράγουσα ή αρχική της f στο Δ.

ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ)

Στην προσπάθεια να βρούμε την αρχική συνάρτηση, πρέπει να ελέγχουμε αν εμφανίζεται παράγωγος γινομένου, πηλίκου ή παράγωγος σύνθετης συνάρτησης. Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι εξής παρατηρήσεις :

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^{\alpha}=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq-1$
- $\dfrac{1}{x}=\left(\ln|x|\right)'$, $x\neq 0$
- $\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x\neq 0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)'$
- $\eta\mu x=\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=\left(\eta\mu x\right)'$
- $e^x=\left(e^x\right)'$
- $\alpha^x=\left(\dfrac{\alpha^x}{\ln a}\right)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\left(\varepsilon\phi x\right)'$
- $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=\left(-\sigma\phi x\right)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να βρείτε μια παράγουσα F των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)

i. $f(x)=3x^2$

ii. $f(x)=x^3+12x^2-6x-5$

iii. $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x}+2e^x$, $x>0$

iv. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

v. $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}$, $x>0$

Λύση :

i. $F(x)=3\dfrac{x^{2+1}}{2+1}=3\dfrac{x^3}{3}=x^3,\ x\in\mathbb{R}$

ii. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-5x \Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+4x^3-3x^2-5x\ ,x\in\mathbb{R}$.

iii. $F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2e^x \Leftrightarrow F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+2e^x \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=3\ln x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2e^x,\ x>0 \qquad \left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}: \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$

iv. $F(x)=3\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=3\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=6\sqrt{x}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x \qquad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}: \dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{-\frac{1}{2}}\right)$

v. Είναι : $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}=2x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x)=x^2+\ln|x|+\dfrac{1}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}F(x)=x^2+\ln x+\dfrac{1}{x} \qquad x>0.$

10) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

<u>(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγώγισης)</u>

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}\ ,\ x>0$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}\ ,\ x>0$

<u>Λύση :</u>

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=(x^2)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=(x^2\cdot\eta\mu x)'$

Άρα : $F(x)=x^2\cdot\eta\mu x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{x^4}=-\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\left(-\dfrac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x)=-\dfrac{e^x}{x^2} \qquad x>0.$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}=\dfrac{e^x+e^x x\ln x}{x}=\dfrac{e^x}{x}+e^x\ln x=e^x\dfrac{1}{x}+e^x\ln x=(e^x\ln x)'$

Άρα : $F(x)=e^x\ln x \qquad x>0.$

11) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

i. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x+3)$

iii. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2017}$

iv. $f(x) = \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

Λύση :

i. $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = (-\sigma\upsilon\nu x)' \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(-e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$, άρα : $F(x) = -e^{\sigma\upsilon\nu x} \quad x \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x+3) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (x^2 + 3x + 5)' = \left(\dfrac{\left(x^2 + 3x + 5\right)^7}{7}\right)'$

Άρα : $F(x) = \dfrac{\left(x^2 + 3x + 5\right)^7}{7} \quad x \in \mathbb{R}$.

iii. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2017} = \dfrac{\left(x^2 - x + 2017\right)'}{x^2 - x + 2017} = \left(\ln\left|x^2 - x + 2017\right|\right)'$

Άρα : $F(x) = \ln\left|x^2 - x + 2017\right| \quad x \in \mathbb{R}$.

iv. $f(x) = \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}} = \dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}} = \dfrac{2\eta\mu x \cdot (\eta\mu x)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}} = \dfrac{\left(1+\eta\mu^2 x\right)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}} =$

$= 2\dfrac{\left(1+\eta\mu^2 x\right)'}{2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}} = \left(2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)'$

Άρα : $F(x) = 2\sqrt{1+\eta\mu^2 x} \quad x \in \mathbb{R}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

12) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x$

ii. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$

iii. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

iv. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x > 0$

13) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^3$

ii. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $x > 0$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

iv. $f(x) = x\sqrt{x}$

14) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x,\ x>0$

ii. $f(x)=2e^x-\frac{3}{\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=3^{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2,\ x>0$

15) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\eta\mu x-\frac{1}{x^2}+e^{-x},\ x>0$

ii. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\ ,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=2^x-\frac{1}{\eta\mu^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

16) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2},\ x>0$

ii. $f(x)=\frac{(3x-2)^2}{x^2}\ ,\ x<0$

iii. $f(x)=\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2}{\eta\mu^2 x},\ x\in(0,\pi)$

17) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

ii. $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2},\ x>0$

iv. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

vi. $f(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$

18) Να βρείτε μια παράγουσα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^2$

ii. $f(x)=(3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$

iii. $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^3}$

iv. $f(x)=\frac{3x}{(x^2+3)^2}$

v. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

vi. $f(x)=x\sqrt{3x^2+2}$

vii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}$

viii. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ix. $f(x)=\sigma\upsilon\nu 3x-5e^{2x}$

x. $f(x)=2\eta\mu 3x-5\cdot 2^x$

xi. $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

xii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

xiii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

xiv. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$

xv. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x>-3$

xvi. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xvii. $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

19) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε μια παράγουσα G των συναρτήσεων :

i. $g(x)=(x^2+3)f'(x)+2xf(x)$

ii. $g(x)=xf'(x)+f(x)$

iii. $g(x)=f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)\eta\mu x$

iv. $g(x)=\dfrac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}$, $x>1$

v. $g(x)=\dfrac{f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

vi. $g(x)=2f(x)f'(x)+3x^2$

vii. $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)e^{f(x)}$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

viii. $g(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

ix. $g(x)=f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)+f(x)+xf'(x)$

x. $g(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-f'(x)\cdot\eta\mu f(x)$, $x>0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f(x)=0$ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ.ROLLE ΣΕ ΜΙΑ ΑΡΧΙΚΗ $F(x)$ ΤΗΣ $f(x)$

Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τρόποι :

i. Η εξίσωση έχει μια προφανή ρίζα ή
ii. Θ. Bolzano για την f στο [α,β] ή
iii. Σύνολο τιμών της f περιέχει το 0

ή

iv. **Θ. Rolle για την F (παράγουσα της f) στο [α,β]**

Η f(x)=0 έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β) τρόποι :

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για την f στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

Ή

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την F στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση σε διάστημα Δ και δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano, προφανής ρίζα ή σύνολο τιμών, τότε μπορούμε να βρούμε μια αρχική ή παράγουσα συνάρτηση της $f(x)$ (δηλ. μια συνάρτηση $F(x)$ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$) και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε Θ.Rolle για την $F(x)$ στο Δ.

Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε να ισχύει μια σχέση, εργαζόμαστε ως εξής :

1) Βάζουμε όπου ξ το x μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θεωρώ καινούρια συνάρτηση $g(x)$, ώστε να έχουμε εξίσωση $g(x)=0$.

2) Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση $g(x)$, δηλαδή μια συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

3) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Να δείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3+3x^2-8x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Λύση :

Έχω $4x^3+3x^2-8x=4 \Leftrightarrow 4x^3+3x^2-8x-4=0$ έστω $f(x)=4x^3+3x^2-8x-4$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(-1)=3$, $f(2)=24$ άρα $f(-1)\cdot f(2)=72>0$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[-1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$
- $F(-1)=0$, $F(2)=0$, άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,2)$.

21)Αν $8\alpha+3\beta=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση : $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2)

Λύση :

Έχω $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta \Leftrightarrow 4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta=0$ έστω $f(x)=4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x-\beta$ θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$. Αρχικά εξετάζω αν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano για την $f(x)$, έχω :

- $f(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $f(1)=12\alpha+6\beta$, $f(2)=60\alpha+19\beta$ παρατηρώ ότι δεν μπορώ να βγάλω κάποιο συμπέρασμα για το πρόσημο των τιμών $f(1), f(2)$ αλλά ούτε και για το γινόμενο τους $f(1)\cdot f(2)$. Άρα δεν εφαρμόζεται το Θ.Bolzano συνεπώς θα εφαρμόσω Θ.Rolle σε μια αρχική της $f(x)$. Έχω : $F(x)=\alpha x^4+(2\alpha+\beta)x^3+(2\beta+\alpha)x^2-\beta x$ είναι αρχική της $f(x)$ (αφού ισχύει : $F'(x)=f(x)$). Δηλαδή θα δείξω ότι η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ.Rolle για την $F(x)$ στο $[1,2]$.
- $F(x)$ συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική
- $F(x)$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$
- $F(1)=\alpha+2\alpha+\beta+2\beta+\alpha-\beta=4\alpha+2\beta$,
  $F(2)=32\alpha+8\beta+8\beta+4\alpha-2\beta=36\alpha+14\beta$, πρέπει
  $F(1)=F(2) \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=36\alpha+14\beta \Leftrightarrow 32\alpha+12\beta=0 \Leftrightarrow 8\alpha+3\beta=0$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ.Rolle η εξίσωση $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22) Να δειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα :
   i. $4x^3+9x^2-4=0$ στο (-2,1)
   ii. $(3x^2-1)\eta\mu x+(x^3-x)\sigma\upsilon\nu x=0$ στο (0,1)

23) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε : $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}-3\xi^2\right)\cdot\eta\mu\xi+\left(\sqrt{\xi}-\xi^3\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\xi=0$.

24) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-3\alpha x^2=2(\alpha+8)x-4\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2)

25) Αν 26α+3βln3=0, να δείξετε ότι η εξίσωση : $\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}+\eta\mu(\pi x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3)

26) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

27) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2007x^{2006}-2006(\lambda+1)x^{2005}+\lambda=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

1) Αν στη σχέση υπάρχει μόνο $f'(x)$ με κάποιο όρο δίπλα της (ως συντελεστή), τότε διαιρώ όλα με τον ορό αυτό, ώστε να έχω μόνο $f'(x)$, τα πηγαίνω όλα στο 1ο μέλος και το θέτω συνάρτηση $g(x)$. Αν δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στη $g(x)$, τότε βρίσκω (με αντιπαραγωγιση) μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$ και εφαρμόζω Θ. Rolle στην αρχική $G(x)$. Αν η εκφώνηση μας δίνει εξίσωση που περιέχει $f'(x)$ και δεν μας δίνει πληροφορία ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής, τότε δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano και θα πρέπει να εφαρμόσω Θ. Rolle.

2) Αν στη σχέση υπάρχει και $f'(x)$ και $f(x)$, τότε μεταφέρω όλους τους όρους στο 1ο μέλος και προσπαθώ να φτιάξω (με αντιπαραγωγιση) παράγωγο γινομένου ή πηλίκου ή παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28) Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=\ln 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)=2\xi^2-3\xi+1$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $xf'(x)=2x^2-3x+1 \Leftrightarrow$
$\overset{\div x}{\Leftrightarrow} f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x)-2x+3-\dfrac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θέτω $g(x)=f'(x)-2x+3-\frac{1}{x}$ και θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2), όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν γνωρίζω αν η $f'(x)$ είναι συνεχής ώστε και η $g(x)$ συνεχής στο [1,2].

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x)=f(x)-x^2+3x-\ln x$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο [1,2].

- $G(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x)=g(x)$
- $G(1)=f(1)-1+3=f(1)+2$, $\quad G(2)=f(2)-4+6-\ln 2=f(2)+2-\ln 2$

Πρέπει $G(1)=G(2)\Leftrightarrow f(1)+2=f(2)+2-\ln 2\Leftrightarrow f(2)-f(1)=\ln 2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

29)Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f(0)=2f(1)$. Να δείξετε η εξίσωση $f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

<u>Λύση :</u>

$$f'(x)=-\frac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)=-2xf(x)\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+(x^2+1)'f(x)=0\Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)'=0$$

Θέτω $g(x)=(x^2+1)f(x)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1), Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [0,1].

- $g(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (0,1) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(0)=f(0)$, $\quad g(1)=2f(1)$

Πρέπει $g(0)=g(1)\Leftrightarrow f(0)=2f(1)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

30)Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3], παραγωγίσιμη στο (2,3) με $f(3)=2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο Α(1,0).

<u>Λύση :</u>

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$.

Τότε : $(\varepsilon):y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Όμως η (ε) διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,0)$ αν οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή :

$$(\varepsilon):y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\overset{\substack{x=1\\y=0}}{\Leftrightarrow}0-f(\xi)=f'(\xi)(1-\xi)\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$$

Δηλ. αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τ.ω. $f'(\xi)(\xi-1)-f(\xi)=0$

Όμοια αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)(x-1)-f(x)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)(x-1)-f(x)(x-1)'}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)'=0$$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$, $x\in[2,3]$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$. Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ στο $[2,3]$.

- $g(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ ως πράξεις παραγωγίσιμες συναρτήσεων
- $g(2)=f(2)$, $g(3)=\dfrac{f(3)}{2}$

Πρέπει $g(2)=g(3)\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{f(3)}{2}\Leftrightarrow f(3)=2f(2)$ που ισχύει από εκφώνηση.

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

31)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο (1,e). Αν $f(e)=0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f'(\xi)\cdot\ln\xi=-f(\xi)$

32) Αν η συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $x_0\cdot f'(x_0)=2x_0^2-1$.

33)Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ με $f(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $(1-2\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

34)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)-f(0)=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x)-2x=e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

35)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,4]\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(4)-f(2)=\ln 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf'(x)=2x^2-6x+1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (2,4).

36)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) για την οποία ισχύει ότι : $f(2)-f(0)=6$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=3\xi^2-\xi$.

37)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

38)Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

39)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)=e^2-e$ και $f(2)=\dfrac{e^2}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε : $x_0^2\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\cdot x_0-e^{x_0}=0$.

40)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+xf'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

41)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(6)=3f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,6)$ τέτοιο ώστε : $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

42)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(0)=2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi+f(\xi)\eta\mu\xi=0$.

43)Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $2f(1)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

44)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)<0<f(2)$. Να δείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)=xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι γνησίως μονότονη.
ii. Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{G(x)}$

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση της μορφής $f'(x)+g(x)\cdot f(x)=0$ (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) τότε :

1ον βρίσκουμε μια αρχική (παράγουσα) της $g(x)$ τέτοια ώστε $G'(x)=g(x)$

2ον πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

(1) $\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+g(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+G'(x)\cdot e^{G(x)}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{G(x)}\cdot f'(x)+\left(e^{G(x)}\right)'\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{G(x)}\cdot f(x)\right)'=0$.

3ον εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την $h(x)=e^{G(x)}\cdot f(x)$ στο [α,β]

Ειδικά αν έχουμε : 1) $f'(x)+f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{x}

2) $f'(x)-f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με e^{-x}

3) $f'(x)+\lambda f(x)=0$ πολλαπλασιάζουμε με $e^{\lambda x}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-3f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$f'(x)=-3f(x) \Leftrightarrow f'(x)+3f(x)=0 \overset{\substack{g(x)=3\\ άρα\\ G(x)=3x}}{\underset{\cdot e^{3x}}{\Longleftrightarrow}} e^{3x}\cdot f'(x)+3e^{3x}\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3x}\cdot f'(x)+\left(e^{3x}\right)'\cdot f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{3x}\cdot f(x)\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{3x}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{3}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{6}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

46)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση :

$$f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x \\ \acute{\alpha}\rho\alpha \\ G(x)=-x^2}}{\underset{\cdot e^{-x^2}}{<====>}} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Έστω $g(x)=e^{-x^2}\cdot f(x)$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο [1,2]

- $g(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (1,2) ως πράξεις παραγωγισιμων
- $g(1)=e^{-1}\cdot f(1)=0$, $g(2)=e^{-4}\cdot f(2)=0$ άρα ισχύει $g(1)=g(2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

i. $f'(\xi)+f(\xi)=0$
ii. $f'(\xi)-f(\xi)=0$
iii. $f'(\xi)+2f(\xi)=0$
iv. $f'(\xi)=3f(\xi)$
v. $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$
vi. $f'(\xi)=\eta\mu\xi\cdot f(\xi)$

48)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)\cdot e^6$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+3f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

49)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1 και 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi)=5f(\xi)$.

50)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(2)>0$ και $f(1)>0$, για τα οποία ισχύει $\ln f(1)=3+\ln f(2)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2xf(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

51)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\sqrt{e}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi^2 f'(\xi)=f(\xi)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ κ ΡΙΖΕΣ

Α. Η f(x)=0 έχει μια το πολύ ρίζα ρ_1 στο (α,β)

1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ : Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , ή

2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ : Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, και εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στο [ρ_1, ρ_2] $\Rightarrow$ άτοπο!

Β. Η f(x)=0 έχει δυο το πολύ ρίζες στο (α,β)

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και τρίτη ρίζα. Δηλαδή έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με π.χ $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, οπότε εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στα δυο διαστήματα που εμφανίζονται : [ρ_1, ρ_2],[ρ_2, ρ_3] $\Rightarrow$ άτοπο!

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x-3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση :

Έχω την εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 3x - \alpha = 0$. Έστω η συνάρτηση : $g(x) = f(x) - x^2 + 3x - \alpha$. Θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1, \rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x) = f'(x) - 2x + 3$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1) = g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2). Άτοπο γιατί $f'(x) \neq 2x - 3$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

53)Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 - 3x + 1) - f(2x - 5) = 0$.

Λύση :

i. Θα υποθέσουμε ότι η f δεν είναι 1-1, άρα θα υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ τ.ω. $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 < x_2$, τότε εφαρμόζω Θ.Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και
- $f(x_1) = f(x_2)$

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο καθώς $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη.

ii. $f(x^2-3x+1)-f(2x-5)=0 \Leftrightarrow f(x^2-3x+1)=f(2x-5) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x^2-3x+1=2x-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \;\; ή \;\; x=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

54)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $x^6+x^2=ax+\beta$ με $\alpha,\beta \in \Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

55)Να δειχθεί ότι εξίσωση : $e^x+x^2=ax+\beta$ με $\alpha,\beta \in \Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

56)Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

57) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x^2$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

58)Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση : $f(3x-2)-f(2x+1)=0$.

59)Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) : 2x-y+1=0 . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία (η) : y=2x έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.

60) Αν για τη συνάρτηση $f:(1,+\infty) \to \Re$ ισχύει $f^2(x)-3f(x)+2=e^x+x$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

61)Αν για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \Re$ ισχύει $f^2(x)+4f(x)-2x=e^x-3$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ κ ΡΙΖΕΣ

Η f(x)=0 έχει μια ακριβώς ρίζα στο (α,β)

Βήμα 1ο : Η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ_1 στο (α,β) (με προφανή ή Θ. Bolzano ή σύνολο τιμών ή Θ. Rolle)

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Μονοτονία για την f στο [α,β] ή
2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και δεύτερη ρίζα ρ_2, με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow$ Θ. Rolle για την f στο [ρ_1, ρ_2]$\Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 δυο ακριβώς ρίζες στο (α,β)

Βήμα 1ο : Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση για την f στα [α,γ], [γ,β]$\Rightarrow$ η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες : $\rho_1 \in (\alpha,\gamma)$ και $\rho_2 \in (\gamma,\beta)$.

Βήμα 2ο : 1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στα [α,γ] και [γ,β] $\Rightarrow$ υπάρχουν δυο ακριβώς ρίζες ή
2ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι η f(x)=0 έχει και τρίτη ρίζα ρ_3 με π.χ. $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Στη συνέχεια : εφαρμόζω το Θ. Rolle για την f στα [ρ_1, ρ_2],[ρ_2, ρ_3]$\Rightarrow$ άτοπο!

Η f(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες (P πολυώνυμο του x)

Ειδικά αν η συνάρτηση είναι πολυώνυμο P, εκτός από τη μέθοδο της περίπτωσης 4), αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση P(x)=0 έχει ν ακριβώς ρίζες, τότε :

i. Με το Θ. Bolzano Δείχνουμε ότι η εξίσωση έχει ν τουλάχιστον ρίζες. (1)
ii. Επειδή P είναι πολυώνυμο ν βαθμού, έχει το πολύ ν ρίζες (2). οπότε από (1) και (2) $\Rightarrow$η εξίσωση έχει ν ακριβώς ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

62) Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο [1,2] με $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$ και $f'(x) \neq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0$. (Υπόδειξη : Για τουλάχιστον μια Θ.Bolzano στην $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

Λύση :

Θέτουμε όπου x_0 το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Θ. Bolzano για τη $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ στο $[1,2]$

- $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών (η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ άρα και συνεχής στο $[1,2]$ άρα και η $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών)

- $g(1) = f(1) - \frac{1}{2} > 0$ (αφού $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$) άρα και $\frac{1}{2} < f(1) < 1$)

  $g(2) = f(2) - 1 < 0$ (αφού $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1,2]$) άρα και $\frac{1}{2} < f(2) < 1$)

  Δηλαδή $g(1) \cdot g(2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1, \rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$
- $g(\rho_1) = 0$, $g(\rho_2) = 0$ (ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της $g(x) = 0$) άρα ισχύει $g(\rho_1) = g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Άτοπο γιατί $f'(x) \neq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1ο και βήμα 2ο συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$.

63) Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$.

Λύση :

Θέτουμε όπου ξ το x και έτσι έχουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 4x^3 + 2x \Leftrightarrow f'(x) - 4x^3 - 2x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. Θέτω $g(x) = f'(x) - 4x^3 - 2x$.

Βήμα 1ο Αρχικά θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$, όμως δεν μπορώ να εφαρμόσω Θ. Bolzano στη $g(x)$ γιατί δεν έχω κάποια πληροφορία για το πρόσημο της $f'(x)$.

Έτσι θα βρω μια αρχική $G(x)$ της $g(x)$. Έχω $G(x) = f(x) - x^4 - x^2$. Θ. Rolle για τη $G(x)$ στο $[0,1]$.

- $G(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών (η f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής άρα και η $G(x) = f(x) - x^4 - x^2$ συνεχής ως πράξεις συνεχών)
- $G(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $G'(x) = g(x) = f'(x) - 4x^3 - 2x$
- $G(0) = f(0)$, $G(1) = f(1) - 1 - 1 = f(1) - 2$

Πρέπει $G(0) = G(1) \Leftrightarrow f(0) = f(1) - 2 \Leftrightarrow f(1) - f(0) = 2$ που ισχύει από εκφώνηση. Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $G'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Βήμα 2ο Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή δεν γνωρίζω τον τύπο της $f(x)$ δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία της άρα ούτε και της $g(x)$. Άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο τρόπο. Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζω Θ. Rolle για τη $g(x)$ στο $[\rho_1, \rho_2]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών

- $g(x)$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ως πράξεις παραγωγισιμων με $g'(x)=f''(x)-12x^2-2$
- $g(\rho_1)=0$, $g(\rho_2)=0$ (ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της $g(x)=0$) άρα ισχύει $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)-12x^2-2=0 \Leftrightarrow f''(x)=12x^2+2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Άτοπο γιατί $f''(x)<2$ για κάθε $x\in\Re$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Τελικά από βήμα 1ο και βήμα 2ο συμπεραίνω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64)Να αποδείξετε με το θεώρημα Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$ και $g(x)=-x^2+2x+1$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $\mathrm{A}(0,1),\mathrm{B}(1,2)$.

65)Να δειχθεί ότι έχουν ακριβώς μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $2x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ii. $x^3+3x=1-3\eta\mu x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

66)Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2=3\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

67) Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}-1$. (Υπόδειξη : Για τουλ. μια Θ.Bolzano στην $g(x)=f(x)-e^x+1$ και για το πολύ μια Θ.Rolle για τη g με άτοπο)

68) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x)<1$ και $1<f(x)<3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0$.

69)Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 1$ και $1<f(x)<2$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ακριβώς ένα σημείο.

70)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-13x^3-18x^2+2x+1$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1).
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-39x^2-36x+2=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

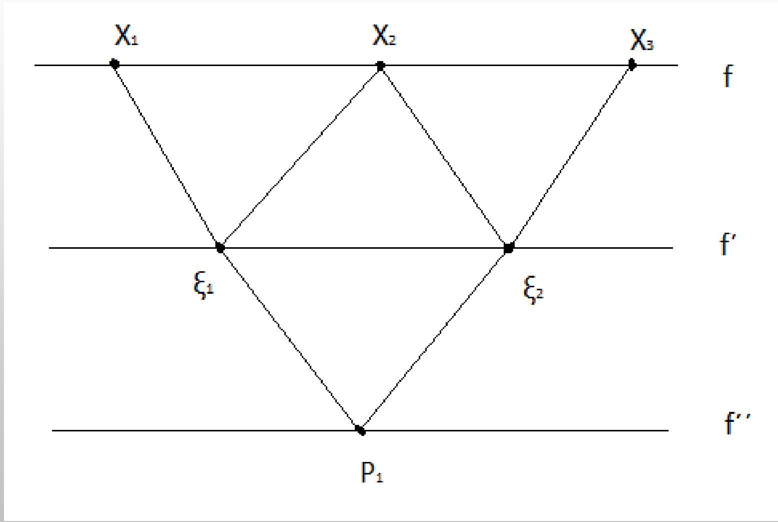
71)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)-f(1)=-e$ και $f''(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=e^{\xi}+1$. (Υπόδειξη : Ύπαρξη ρίζας με Θ. Rolle για την $F(x)=f(x)-e^x-x$ και για το πολύ μια ρίζα Θ.Rolle για τη $g(x)=f'(x)-e^x-1$ με άτοπο)

72)Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)-f(1)=-e-2013$ και $f''(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=e^{\xi}+2014$. (Υπόδειξη : Όμοια με παραπάνω)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : (ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ.ROLLE)

Ισχύει η εξής πρόταση : Ανάμεσα σε δυο ρίζες της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f΄

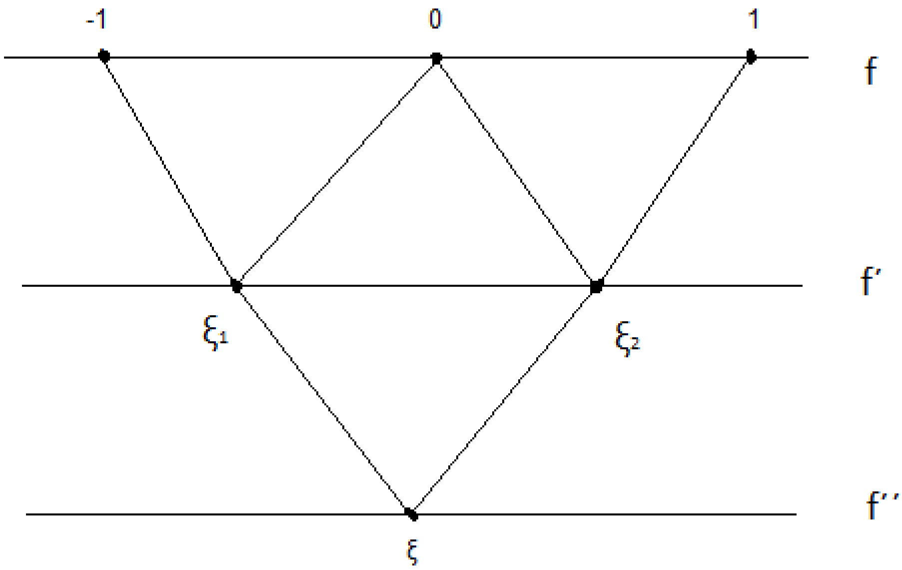
Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)=0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1 \neq x_2$ με $f'(x_1)=f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.R. σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(-1)=f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση :



1) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[-1,0]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[-1,0]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$

- $f(-1) = f(0)$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$

2) Θ. Rolle για την $f(x)$ στο $[0,1]$

- $f(x)$ συνεχής στο $[0,1]$
- $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0) = f(1)$

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$

3) Θ. Rolle για την $f'(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq [-1,1]$

- $f'(x)$ συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- $f'(x)$ παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2)
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγισιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

75)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημενες 1,2,3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

76)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$.

77)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(0) = -1$, $f(1) = e$ και $f(2) = e^2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + x^2 - 3x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία της C_g με τετμημενες στο διάστημα (0,2) στα όποια η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) + 2 = e^{\xi}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

78) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(2)=4$, $f(1)=3$ και $f(x)\le x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=3-2x_0$.

79) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(6,1)$ και $\mathrm{B}(2,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(4+f(x^2-1)\right)=1$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=-\xi$.

80) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(2)f(4)\ne 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(2, f(2)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta):\ f'(4)x-\dfrac{f(2)}{f(4)}y+2017=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(2)f'(2)=f(4)f'(4)$,

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)f''(\xi)+\left(f'(\xi)\right)^2=0$,

iii. η εξίσωση $xf(x)f''(x)+1-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,4)$.

81) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(-2)=16$, $f'(-1)=9$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-2,-1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=e^{-2\xi}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(0, f(0)\right)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)+2f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-2,0)$.

82) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\Re$, για την οποία ισχύει $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(9,2)$ και $\mathrm{B}(4,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(5+f(x^2-1)\right)=2$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $2g(\xi)+\xi=0$.

iv. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\mathrm{M}(x_0,0)$, τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της M σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

2.5Β ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Τ.)

40.ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (2003, 2008 Β΄, 2013, 2016)

Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση :

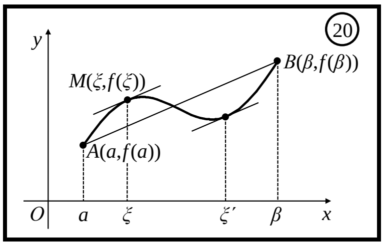
Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Γεωμετρική Ερμηνεία :

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ [α,β]

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με $x\in[0,4]$.

 i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$

 ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

Λύση :

i. Θ.Μ.Τ για την $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,4]$ έχω :

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,4]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{2-0}{4}=\dfrac{1}{2}$

ii. Έχω : $f'(\xi)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{\xi}=2\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x$ με $x\in[0,4]$.
   i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,4]
   ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

3) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

   i. $f(x)=x^3+x$, [0,1] ii. $f(x)=x\ln x$, [1,e] iii. $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5, x<1\\ 2x^2-5x+6, x\geq 1\end{cases}$, [0,2]

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Να δείξετε ότι :
   i. ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, για την f στο διάστημα $[e,e^2]$
   ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(e,e^2)$ τ.ω. $f'(\xi)<0$
   iii. $f(\xi)>\dfrac{1}{\xi}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΤΗΣ $f'(x)=\kappa$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ $f(x)$

Γενικά για να δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\kappa$ τότε :
1ος Θ.Μ.Τ για την f στο [α,β]
2ος Θ. Rolle για τη $g(x)=f(x)-kx$
3ος Θ. Bolzano για την $h(x)=f'(x)-k$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(0)=2$, $f(1)=4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_1,f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000. (Πανελλήνιες 2000)

   <u>Λύση :</u>
   Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$. Η $(\varepsilon)//\ y=2x+2000 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=2\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow f'(x_1)=2$. Δηλαδή αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2$
   Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,1]$
   - Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ (η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής)
   - Η $f(x)$ είναι παραγωγισιμη στο $(0,1)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{4-2}{1}=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,f(-1))$, $\mathrm{B}(2,f(2))$.
   i. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(-1,2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη στην ευθεία AB.
   ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

7) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ να δειχτεί ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» στο διάστημα [α,β].

8) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1)=3$ και $f(2)=15$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4$.

9) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,2)$ και $\mathrm{B}(1,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon):2x+y-3=0$.

10) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(2,6)$ και $\mathrm{B}(0,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon):2x+3y-3=0$.

11) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4)=f(1)+3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$, με $\xi\in(1,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

12) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)=2\beta+6\alpha$ και $f(\beta)=5\beta+3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$, $f'(\xi_3)$

Όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + ... + f'(\xi_\nu) = \lambda$, τότε χωρίζουμε το διάστημα [α,β] σε ν υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε κάθε ένα από αυτά.

Υποπερίπτωση : Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $\kappa_1 f'(\xi_1) + \kappa_2 f'(\xi_2) + \kappa_3 f'(\xi_3) = \lambda$ τότε βρίσκουμε το άθροισμα $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \kappa$ και παίρνουμε αντίστοιχα σημεία γ,δ τέτοια ώστε :

$\gamma - \alpha = \frac{\kappa_1}{\kappa}(\beta - \alpha)$, $\delta - \gamma = \frac{\kappa_2}{\kappa}(\beta - \alpha)$ και $\beta - \delta = \frac{\kappa_3}{\kappa}(\beta - \alpha)$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [α.γ], [γ,δ], [δ,β].

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13)Έστω μια συνάρτηση $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το [0,2] και είναι παραγωγίσιμη στο (1,3), να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.

Λύση :

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [1,3]$ άρα θα έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta) = [f(3), f(1)]$ όμως από εκφώνηση $f(\Delta) = [0,2]$ άρα $f(3) = 0$ και $f(1) = 2$. Για να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$ θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. για την f.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$
   - f συνεχής στο $[1,2]$
   - f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - 2$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$
   - f συνεχής στο $[2,3]$
   - f παραγωγίσιμη στο $(2,3)$

   Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -f(2)$

Άρα τελικά $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2) - 2 - f(2) = -2$.

14)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$

Λύση :

Είναι $\kappa = 2 + 3 \Leftrightarrow \kappa = 5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[0,5]$ σε $[0,\gamma],[\gamma,5]$ ώστε

$\gamma - 0 = \frac{2}{5}(5 - 0) \Leftrightarrow \gamma = 2$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$
   - f συνεχής στο $[0,2]$

- f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{f(2)-f(0)}{2}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,5]$

- f συνεχής στο $[2,5]$
- f παραγωγίσιμη στο $(2,5)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{f(5)-f(2)}{3}$

Τελικά : $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2) = 2\dfrac{f(2)-f(0)}{2}+3\dfrac{f(5)-f(2)}{3} = f(2)-f(0)+f(5)-f(2) =$

$= f(5)-f(0) \overset{f(5)=f(0)+1}{=} f(0)+1-f(0)=1$

15)Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση :</u>

Αφού για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$.

Είναι $\kappa = 3+2 \Leftrightarrow \kappa = 5$. Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε $[\alpha,\gamma],[\gamma,\beta]$ ώστε

$\gamma-\alpha = \dfrac{3}{5}(\beta-\alpha)$, $\beta-\gamma = \dfrac{2}{5}(\beta-\alpha)$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\gamma]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (α,γ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\frac{3}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \dfrac{5}{3}\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\gamma,\beta]$

- f συνεχής στο $[\gamma,\beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (γ,β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma} = \dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\frac{2}{5}(\beta-\alpha)} =$

$= \dfrac{5}{2}\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha}$

Τελικά : $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2) = 3\dfrac{5}{3}\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}+2\dfrac{5}{2}\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\alpha} =$

$= \dfrac{5f(\gamma)-5f(\alpha)}{\beta-\alpha}+\dfrac{5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \dfrac{5f(\gamma)-5f(\alpha)+5f(\beta)-5f(\gamma)}{\beta-\alpha} = \dfrac{5\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} = 0$

καθώς $f(\alpha)=f(\beta)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16) Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle στο [1,3]. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\ ,\xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

17) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(3x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $f(1)=3$ δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in(0,3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=9$.

18) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=2$, $f(2)=4$ και $f(4)=3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον $\xi_1,\ \xi_2\in(1,4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $\mathrm{A}(\xi_1, f(\xi_1))$ και $\mathrm{B}(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

19) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,3] να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (Θ.Μ.Τ. & Θ.Bolzano), (Θ.Μ.Τ. & Θ.Ε.Τ.),

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει μια σχέση της μορφής $g(f(\xi_1), f(\xi_2))=\kappa$ ή $g(f(\xi_1), f(\xi_2))<ή>0$, τότε χωρίζουμε το διάστημα (α,β) σε δυο υποδιαστήματα (α,x_0) και (x_0,β), όπου το x_0 μπορεί να προκύψει από το Θ.Bolzano ή από το Θ.Ε.Τ. και μετά εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20) Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2001)

Λύση :

i. Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

Έστω $g(x)=f(x)-2x$ θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο [α,β]

- g συνεχής στο [α,β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha=2\beta-2\alpha=2(\beta-\alpha)>0$
- $g(\beta)=f(\beta)-2\beta=2\alpha-2\beta=2(\alpha-\beta)<0$ δηλ. $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$

Οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), δηλ. υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-2x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$.

ii. Για να δείξω ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$, θα πρέπει να διασπάσω το διάστημα (α,β) ώστε να εφαρμόσω δυο Θ.Μ.Τ.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x_0]$
- f συνεχής στο $[\alpha, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, x_0)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{2x_0 - 2\beta}{x_0 - \alpha} = \frac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha}$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, \beta]$
- f συνεχής στο $[x_0, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (x_0, β)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{2\alpha - 2x_0}{\beta - x_0} = \frac{2(\alpha - x_0)}{\beta - x_0}$$

Τελικά : $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \dfrac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha} \cdot \dfrac{2(\alpha - x_0)}{\beta - x_0} = \dfrac{2(x_0 - \beta)}{x_0 - \alpha} \cdot \dfrac{-2(x_0 - \alpha)}{-(x_0 - \beta)} = 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, 2\alpha] \to \Re$, με α>0 για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(2\alpha) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :
i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3\alpha - x_0$
ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

22)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι :
i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$
ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$. Να αποδείξετε ότι :
i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 8 - 2x_0$
ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : (ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ Θ.Μ.Τ. & Θ.Rolle)
ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ $f''(\xi)$ - ΠΡΟΣΗΜΟ $f'(\xi)$, $f''(\xi)$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f''(\xi)=0$, ή $f''(\xi)<0$ ή $f''(\xi)>0$ τότε εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ όπου $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και βρίσκουμε τις τιμές $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$ όπου $\xi_1 \in (\alpha,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\beta)$.

- Αν $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
- Αν $f'(\xi_1)\neq f'(\xi_2)$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
  - $f''(\xi)<0$, αν $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$
  - $f''(\xi)>0$, αν $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$

Γενικά για την f εφαρμόζουμε ένα ή δυο Θ.Rolle ή Θ.Μ.Τ. εκμεταλλευόμενοι τα δεδομένα, ενώ για την f' εφαρμόζουμε Θ.Rolle ή Θ.Μ.Τ. εκμεταλλευόμενοι τα ζητούμενα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

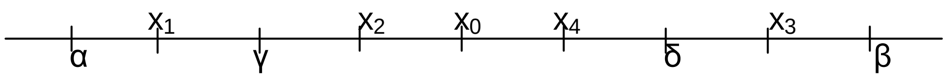
24)Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)<0, f(δ)>0 και γ<δ, να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).
ii. Υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 ∈ (α,β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$.
iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$. *(4ο Πανελλήνιες 2003)*

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]\subseteq[\alpha,\beta]$
f(γ)·f(δ)<0
Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\gamma,\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ της f δηλ. $f(x_0)=0$

ii.

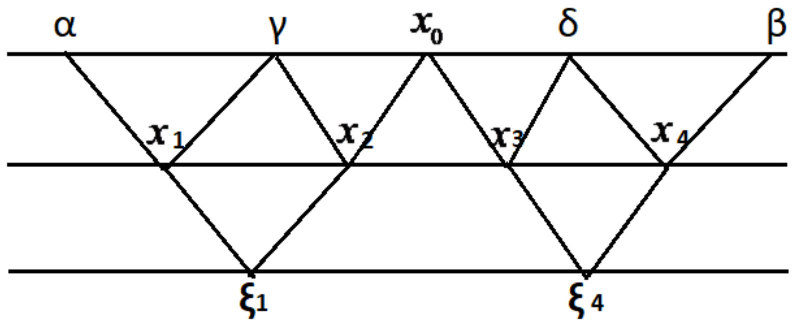


Επειδή f(γ)·f(δ)<0 υποθέτω: f(γ)<0 και f(δ)>0
(Σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια)

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \;\sigma\tau o[\alpha,\gamma] \\ f \;\; \pi\alpha\rho\alpha\gamma. \;\sigma\tau o\;(\alpha,\gamma) \end{array}\right| \overset{\Theta.M.T}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\; 1\, \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\; x_1 \in (\alpha,\gamma) \\ f'(x_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \;\sigma\tau o[\gamma,x_0] \\ f \;\; \pi\alpha\rho\alpha\gamma. \;\sigma\tau o\;(\gamma,x_0) \end{array}\right| \overset{\Theta.M.T}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\; 1\, \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\; x_2 \in (\gamma,x_0) \\ f'(x_2)=\dfrac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma}=\dfrac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma}>0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x_1,x_2] \\ f \text{ παραγ. στο } (x_1,x_2) \end{array}\right| \overset{\Theta.M.T}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \text{Υπάρχει 1 τουλάχιστον } \xi_1 \in (x_1,x_2) \\ \text{και άρα } \xi_1 \in (\alpha,\beta) \\ f''(\xi_1) = \dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \end{array}$$



Όμοια με ΘΜΤ στα [δ,β], [x_0,δ] εξασφαλίζω την ύπαρξη σημείων :

$x_3 \in (\delta,\beta)$: $f'(x_3)<0$

$x_4 \in (x_0,\delta)$: $f'(x_4)>0$ οπότε με ΘΜΤ στο [x_4,x_3] υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_4,x_3)$ και άρα $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_3)-f'(x_4)}{x_3-x_4} < 0$$

iii. Από το ii. διαπιστώνω ότι:

f'' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και

$f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (\alpha,\beta)$ τ.ω. $f''(\xi)=0$.

25)Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$. Αν τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\gamma)$ ώστε να είναι $f''(\xi)=0$.

<u>Λύση :</u>

Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακα άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ΑΒ) είναι ισος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ΒΓ). Δηλ.

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}, \ (1)$$

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (α,β)

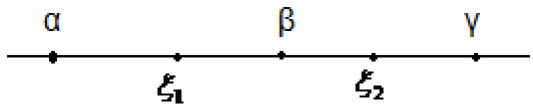
Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\beta,\gamma]$

- f συνεχής στο $[\beta,\gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (β,γ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

Δηλ. λόγο της (1) ισχύει $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta} \Leftrightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$



3) Θ.Rolle. για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[\alpha,\gamma]$
- f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[\alpha,\gamma]$
- f' παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$

Άρα από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

26)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=\alpha+2\beta$, $f(2)=2\alpha+3\beta$ και $f(3)=3\alpha+4\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)=0$. *(Υποδ. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f''(\xi)=0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ.Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1,x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1\neq x_2$ με $f'(x_1)=f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.)*

27)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,5),\ \mathrm{B}(2,-4),\ \Gamma(3,2)$. Να αποδείξετε ότι :

i. υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$, ώστε : $f(x_1)=f(x_2)=0$.
ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$, ώστε $f''(\xi)>0$.

28)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)=0$ και $f(2)>0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(1,3)$ με $\xi_1<\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$
ii. Υπάρχει $\xi\in(1,3)$ ώστε $f''(\xi)<0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Αν έχουμε ως δεδομένο μια ανισοτική σχέση που περιέχει $f'(x)$ και μας ζητείται να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση για την $f(x)$, τότε η απόδειξη ενδεχομένως μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. (υπάρχουν και άλλοι τρόποι όπως θα μάθουμε)

- Μετασχηματίζω την ανισότητα έτσι ώστε να δημιουργηθεί στο κέντρο η διαφορά $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] οπότε έχω : $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Αφού $\xi\in(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha<\xi<\beta$, μορφοποιώ την παράσταση $f'(\xi)$ και έχω ανισότητα της μορφής $\mathrm{A}<f'(\xi)<\mathrm{B}$ η οποία λόγο της (1) αποδεικνύει την ζητούμενη ανισότητα.

- Μπορούμε να αποδείξουμε μια διπλή ανισότητα δυο μεταβλητών α,β χρησιμοποιώντας το Θ.Μ.Τ. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f, ώστε η ανισότητα να πάρει τη μορφή : $\kappa<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\lambda$. Μετά εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [α,β] έτσι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Τέλος ξεκινάμε από ανισότητα $\alpha<\xi<\beta$ και καταλήγουμε σε ανισότητα $\kappa<f'(\xi)<\lambda$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4] με f(0)=1 και $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $9\le f(4)\le 21$.

Λύση :

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[0,4]$

- f συνεχής στο $[0,4]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,4)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{f(4)-1}{4}$

Όμως επειδή από εκφώνηση ισχύει $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in(0,4)$ άρα θα είναι :

$2\le f'(\xi)\le 5\Leftrightarrow 2\le\frac{f(4)-1}{4}\le 5\Leftrightarrow 8\le f(4)-1\le 20\Leftrightarrow 9\le f(4)\le 21$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le x-1$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα ;

Βασική ανισότητα $\boxed{\ln x\le x-1}$

Λύση :

Θα δείξουμε ότι $f(x)\le x-1\Leftrightarrow\ln x\le x-1$ (1) για κάθε $x>0$.

- ✓ Αν $x=1$, τότε προφανώς η (1) ισχύει, ως ισότητα.
- ✓ Αν $0<x\ne 1$, θα δείξουμε ότι $\ln x<x-1\Leftrightarrow f(x)<x-1$ (2)
  - Αν $x>1$, τότε η $(2)\Leftrightarrow f(x)<x-1\overset{x>1}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<1$, (3)

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$

- f συνεχής στο $[1,x]$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η (3) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow \xi > 1$, που ισχύει.

➢ Αν $0 < x < 1$, τότε η $(2) \Leftrightarrow f(x) < x-1 \overset{x<1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1$, (4)

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,1]$

- f συνεχής στο $[x,1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(x,1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Έτσι η (4) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} > 1 \Leftrightarrow \xi < 1$, που ισχύει.

Τελικά $\ln x \le x-1$, για κάθε $x > 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$.

(Η ανισότητα $\boxed{\ln x \le x-1}$, για κάθε $x > 0$ θεωρείται «βασική» και χρησιμοποιείται σε ασκήσεις χωρίς απόδειξη.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

31)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [3,5] και ισχύουν f(3)=4 και $2 \le f'(x) \le 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $8 \le f(5) \le 10$.

32) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,5] με f(1)=3 και $0 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (1,5)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $3 \le f(5) \le 23$.

33)i.Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \le \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \le \dfrac{1}{2}|\beta - \alpha|$.

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x)\right)$

34) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες :

i. $e^x \ge x+1$, $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το ίσον;

ii. $e^x > x$, $x \in \Re$.

iii. $\ln x < x$, $x > 0$.

iv. $\ln x \ge 1 - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

v. $e^{x-1} \ge x$, $x \in \mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ $f'(x)$ ΓΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$. *(3ο Πανελλήνιες 2008)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=x\ln x$. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x,x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ ως πράξεις συνεχών
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ ως πράξεις παραγωγισιμων με $f'(x)=\ln x+1$.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Όμως $\xi\in(x,x+1)$ άρα $\xi<x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow$ $\ln x_1+1<\ln x_2+1\Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1):\xi<x+1\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

36)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ είναι : $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)\Leftrightarrow$

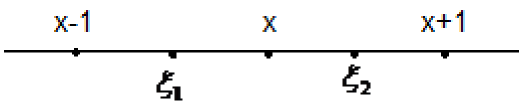
$$\Leftrightarrow\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}<f'(x)<\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$$

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x-1,x]$ και στο $[x,x+1]$

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \text{συνεχής στο}\,[x-1,x]\\ \bullet\ f\ \text{παρ/μη στο}\,(x-1,x)\end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi_1\in(x-1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}$

Επίσης :

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \text{συνεχής στο}\,[x,x+1]\\ \bullet\ f\ \text{παρ/μη στο}\,(x,x+1)\end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$



Έτσι ισχύει ότι :

$$\xi_1<x<\xi_2\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(x)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}>f'(x)>\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x-1)>f'(x)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$$

Δηλαδή η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει για κάθε $x\in\Re$.

37)Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}, x>0$. *(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2006)*

Λύση :

Για κάθε $x>0$ έχουμε : $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}<\frac{1}{x}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\ln x$ στο $[x,x+1]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ συνεχής στο } [x,x+1] \\ \bullet\ f \text{ παρ/μη στο } (x,x+1) \end{array}\right\}$ άρα υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$

και $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Για κάθε $x_1, x_2>0$ είναι $x_1<x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Rightarrow f'(x_1)>f'(x_2) \Rightarrow f' \downarrow (0,+\infty)$

Έτσι ισχύει $\xi \in (x,x+1) \Leftrightarrow x<\xi \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{\ln(x+1)-\ln x}{1} \Leftrightarrow \ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

38)Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Λύση :

Έχουμε να δείξουμε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει :

$(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta] \subseteq \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

- f συνεχής στο $[\alpha,\beta] \subseteq \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}$

Δηλαδή έχουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση (1) που γίνεται $\sigma\upsilon\nu\beta<\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}<\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<f'(\xi)<\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$ (2).

Η $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Έτσι :

$\xi \in (\alpha,\beta) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha<\xi<\beta \overset{f'(x)=\sigma\upsilon\nu x \downarrow(\alpha,\beta)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\beta<\sigma\upsilon\nu\xi<\sigma\upsilon\nu\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [1,7] και παραγωγίσιμη στο (1,7). Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (1,7) να δείξετε ότι $f(1)+f(7)>f(3)+f(5)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

40)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x+1)+f(x+2)>f(x)+f(x+3)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

41)Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε $x>\alpha$.

42) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$. Να δείξετε ότι $f'(x)>\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ για κάθε $x<\alpha$.

43) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Αν ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$.

Θ.Μ.Τ. ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

44)(Άσκηση 6 σελ. 250 σχολικό βιβλίο Β΄ ομάδας)
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [-1,1] και ισχύει $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Αν $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

Λύση :

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \textit{συνεχής στο}\ [-1,0]\\ \bullet\ f\ \textit{παρ/μη στο}\ (-1,0)\end{array}\right\}$$

άρα υπάρχει $\xi_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f(0)+1$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \textit{συνεχής στο}\ [0,1]\\ \bullet\ f\ \textit{παρ/μη στο}\ (0,1)\end{array}\right\}$$

άρα υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-f(0)$

Όμως : $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(-1,1)$, αρα :

$$\left.\begin{array}{l}f'(\xi_1)\le 1\Leftrightarrow f(0)+1\le 1\Leftrightarrow f(0)\le 0\\ f'(\xi_2)\le 1\Leftrightarrow 1-f(0)\le 1\Leftrightarrow f(0)\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45)Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f΄(x)≠0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

ii. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε) : $y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

(3ο Επαναληπτικές Πανελλήνιες 2005)

46)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \le f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(4) - f(-4) = 8$

ii. υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2012$

iii. υπάρχει $x_0 \in (-4,4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$

iv. υπάρχουν x_1, $x_2 \in (-4,4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

47)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = e^{-x^2} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2) - f(x)\right)$

48) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο $x_0 = 1$. Αν επιπλέον δίνεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i. $f\left(x^3\right) > (x+1)f\left(x^2\right) - xf(x)$ για κάθε $x > 1$.

ii. Η εξίσωση : $\frac{f'(\alpha)}{x-3} + \frac{\alpha f(\alpha) + f(\alpha^3) - (\alpha+1)f(\alpha^2)}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (2,3) για κάθε $\alpha > 1$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.5

ΘΕΜΑ 2 #36827
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx,\ x > 0$ και $g(x) = e^{-x},\ x \in R$.
α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$.
(Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 8)
γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.
Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #36851
Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & αν\ x \le 0 \\ x^2 - 3x + 1, & αν\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)
γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1,1] και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.
(Μονάδες 11)

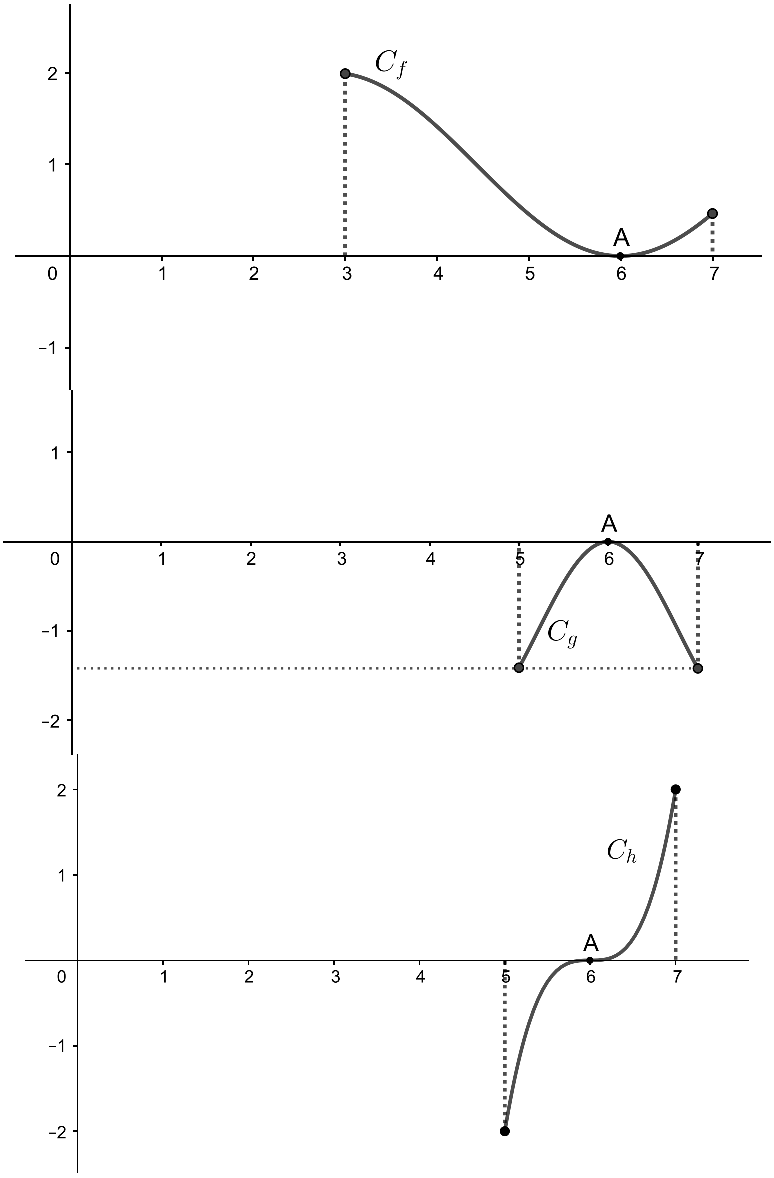
ΘΕΜΑ 2 #24283
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & αν\ x \in [-1,2] \\ x - 1, & αν\ x \in (2,5] \end{cases}$$

1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
(Μονάδες 10)
2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.
(Μονάδες 09)
3) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.
(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2 #31643
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.
α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #36842
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #29150

Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

4) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)

5) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

6) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

2.6Α ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α΄ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ. – ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

41. ΘΕΩΡΗΜΑ (2004 Β΄, 2009, 2014)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

42. ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

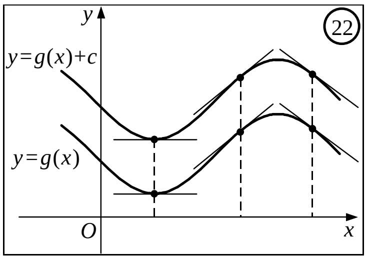
- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη :

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



Σχόλιο :

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμα του **ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.** **(2019)**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\,, & x<0\\ 1\,, & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

43. ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΣΕΛ. 252)
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$,τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in R$. Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο Δ και ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Όταν μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει ότι $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν μπορούμε να βρούμε μια τιμή $f(x_0)$ σε κάποιο $x_0 \in \Delta$, τότε είναι $c = f(x_0)$ οπότε θα ισχύει : $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και : $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

i. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνέχων. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Έχω : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2$ (1). Επίσης από εκφώνηση : $xf'(x) = 3x - 2f(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \dfrac{3x - 2f(x)}{x}$. Άρα η σχέση (1) γίνεται : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + x^2 \dfrac{3x - 2f(x)}{x} - 3x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + 3x^2 - 2xf(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 0$. Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ άρα ισχύει : $g(x) = c$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα και $g(4) = c \Leftrightarrow 4^2 f(4) - 4^3 = c \Leftrightarrow 16 \cdot 3 - 64 = c \Leftrightarrow c = -16$. Άρα $g(x) = -16 \Leftrightarrow x^2 f(x) - x^3 = -16 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^3 - 16}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $\dfrac{f'(x)}{2} = \dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, x>0 , είναι σταθερή.

ii. Αν $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f.

3) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 4e^{-2}$ και : $2\sqrt{x} \cdot f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ για κάθε $x \geq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot f(x)-\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

4) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\Re$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

5) Δίνεται συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\left|e^{f(x)}-e^{f(y)}-\ln x+\ln y\right|\le(x-y)^{2016}$ για κάθε $x,y\in(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(e)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^{\alpha}=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq-1$
- $\dfrac{1}{x}=(\ln|x|)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)'$
- $\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\varphi x)'$
- $-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=(\sigma\varphi x)'$
- $e^x=(e^x)'$
- $\alpha^x=\left(\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right)'$
- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln|f(x)|\right)'$
- $e^{f(x)} \cdot f'(x) = \left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \left(\sqrt{f(x)}\right)'$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \mathbb{R}$ αν ισχύει : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 3$.

Λύση : Έχω : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + c$

Για $x = 1$ έχουμε : $f(1) = \sqrt{1} + \ln 1 + \dfrac{1}{1} + c \Leftrightarrow 3 = 1 + 1 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + 1,\ D_f = (0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 2x + 3$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$
ii. $f'(x) = 3x^2 + x + 1$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
iii. $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in \Delta = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2$
iv. $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$
v. $f'(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 2e$
vi. $f''(x) = 12x - 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(1) = 7$ και $f(1) = 3$
vii. $f''(x) = 6x + 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ και $f(1) = -3$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ αν ισχύει : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2$ $x\in\Delta=(1,+\infty)$ και $f(e)=e^2$

Λύση :

Έχω : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot\ln x+f(x)\cdot\dfrac{1}{x}=2x \Leftrightarrow \left(f(x)\ln x\right)'=(x^2)' \Leftrightarrow$

$f(x)\ln x=x^2+c$. Για $x=e$ έχω : $f(e)\ln e=e^2+c \Leftrightarrow e^2=e^2+c \Leftrightarrow c=0$ άρα

$f(x)\ln x=x^2 \overset{\ln x\neq 0\Leftrightarrow \ln x\neq \ln 1\Leftrightarrow x\neq 1}{<\!=\!=\!=\!=\!>} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ με $x\in(1,+\infty)$ και $x\neq 1$ άρα $D_f=(1,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $(1+x^2)\cdot f'(x)=2x\cdot f(x)$, $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

ii. $x\cdot f'(x)-f(x)=2x^3$, $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

iii. $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=0$

iv. $f'(x)=2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

v. $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=3$

10) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-1$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x<1$
- $(x-1)f'(x)+|f(x)|=0$ για κάθε $x<1$.

Να δείξετε ότι $f(x)=x-1$, $x\leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι : $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

(3ο Πανελλήνιες 2005)

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω :
$2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \dfrac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow \left(2e^{f(x)}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow$
$2e^{f(x)} = e^x + c$. Για $x = 0$ έχω : $2e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow 2e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα
$2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \dfrac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)$, $D_f = \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12)Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = -\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

13)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :
$f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \ln 3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \to \Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$.
ii. $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$.
iii. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.
iv. $f'(x) - e^x\sqrt{f(x) - 1} = 0$, $f(x) > 1$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.
v. $f'(x) = f^2(x)\sigma\upsilon\nu x$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

15)Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(3x - 1) = 2x + 1$. Αν f(2)=5 , να βρείτε τον τύπο της f .

16)Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την όποια ισχύει : $f'(x^2) = 3x - 1$ για κάθε x>0. Αν f(1)=1 , να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{g(x)}$

- Αν έχουμε ισότητα της μορφής : $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$ (1)

  πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

  (1) $\Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + g(x) \cdot e^{G(x)} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + G'(x) \cdot e^{G(x)} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + \left(e^{G(x)}\right)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{G(x)} \cdot f(x)\right)' = 0$.

- Ειδικότερα ισχύει η ισοδυναμία : $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, με $f(0)=1$. Αν ισχύει : $f'(x)=2xf(x)$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχω :

$$f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x\\ άρα\\ G(x)=-x^2}}{\underset{\cdot e^{-x^2}}{<====>}} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f(x)=c$, για $x=0$ έχω : $e^0\cdot f(0)=c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $e^{-x^2}\cdot f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$, $D_f=\mathbb{R}$.

18)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$ και : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2\Leftrightarrow f'(x)+3x^2=f(x)+x^3\Leftrightarrow$ $\left(f(x)+x^3\right)'=f(x)+x^3$, άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)+x^3=c\cdot e^x$ (1) $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)+0^3=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=3$, άρα η (1) γίνεται : $f(x)+x^3=3e^x\Leftrightarrow f(x)=3e^x-x^3$, $x\in\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x)-f(x)=e^x$ όταν $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=2$
ii. $f'(x)\cdot e^x=2x-x^2$, όταν $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

20)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(x)+f(x)=x^2+2x$ $x\in\mathbb{R}$
ii. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=e$ και $f'(x)-2xf(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$
iii. $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\dfrac{1-e}{e}$ και $x^2f'(x)-f(x)=1$ $x>0$
iv. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(x)=3x^2f(x)$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

21)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x)>0$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=f(x)\cdot\ln f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

22)Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=\dfrac{x+1}{x}f(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$, και $xf'(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

24)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$, και $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

25)Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

ii. $\left(f(x)e^x\right)'=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

iii. ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. (Πανελλήνιες 2001)

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5</u> : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν στην ίδια ισότητα περιέχονται οι συναρτήσεις : $f(x)+g(x)$ και $f'(x)+g'(x)$ ή $f(x)+g(x)$ και $f''(x)+g''(x)$, (όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση) και ζητείται να βρούμε τον τύπο της $f(x)$, τότε θέτω $h(x)=f(x)+g(x)$ και με αντιπαραγώγιση βρίσκω την $h(x)$ και στη συνέχεια την $f(x)$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

26)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, $f(x)\neq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

<u>Λύση :</u>

[στη σχέση που δίνεται εμφανίζεται : $f(x)-x^2$ και $f'(x)-2x$]

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, έστω $g(x)=f(x)-x^2$

<u>1ος Τρόπος</u>

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0$

(Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.)

Έχουμε : $g'(x)+2xg(x)=0 \overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} e^{x^2}\cdot g'(x)+2xe^{x^2}\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(g(x)\cdot e^{x^2}\right)'=0$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x)\cdot e^{x^2}=c$

Για $x=0$ είναι : $g(0)\cdot e^0=c \Leftrightarrow f(0)-0=c\Leftrightarrow c=1$, άρα :

$$g(x)\cdot e^{x^2}=1\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{e^{x^2}}\Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

<u>2ος Τρόπος</u>

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=-2xg(x)$

Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τελικά : $g'(x)=-2xg(x)\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{g'(x)}{g(x)}=-2x\Leftrightarrow\left(\ln g(x)\right)'=(-x^2)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $\ln g(x)=-x^2+c$ (1), και για $x=0$, $\ln g(0)=c\Leftrightarrow \ln 1=c\Leftrightarrow c=0$

Άρα : $\ln g(x)=-x^2\Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $\left(xf'(x)-1\right)\cdot\left(f(x)-\ln x\right)=x^2$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=1$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f''(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=2f'(0)=1$ και : $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε :

$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)=f(x)f'(x)\Leftrightarrow$

$\left(f'(x)f(x)\right)'=f(x)f'(x)$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)f'(x)=c\cdot e^x$ (1) $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)f'(0)=c\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$ άρα η (1) γίνεται : $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(e^x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f^2(x)=e^x+c_2$, $x\in\mathbb{R}$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $f^2(0)=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα η (2) γίνεται τελικά : $f^2(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=0$ αδύνατο)

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι : $f^2(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\sqrt{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

29)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(2)=e$, $f'(0)=0$
- $f(x)>0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

30)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=\frac{e}{2}$, $f'(1)=\frac{3e}{2}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x-\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

31)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=-f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\ln 2$, $f'(0)=\frac{1}{2}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

32)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(x)f''(x)-f(x)f'(x)=\left(f'(x)\right)^2$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=e$, $f'(0)=e$
- $f(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

33)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. (Θέμα Γ΄ 2011)

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7</u> : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f(x)$ ΚΑΙ $g(x)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

34)Έστω $f,g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x)=e^{-g(x)}$, $g'(x)=e^{-f(x)}$, για κάθε $x>-1$
- $f(0)=g(0)=0$

Να δείξετε ότι $f=g$ και στη συνέχεια να βρείτε τις συναρτήσεις : f,g.

<u>Λύση :</u> Για κάθε $x>-1$,

είναι : $f'(x)=e^{-g(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{g(x)}} \Leftrightarrow f'(x)e^{g(x)}=1$ (1), ομοίως : $g'(x)e^{f(x)}=1$ (2)

Άρα από (1) και (2) είναι : $f'(x)e^{g(x)}=g'(x)e^{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{g'(x)}{e^{g(x)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=g'(x)e^{-g(x)} \Leftrightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)'=\left(-e^{-g(x)}\right)'$ (1), άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. η (1) γίνεται : (1) : $-e^{-f(x)}=-e^{-g(x)}+c$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $-e^{-f(0)}=-e^{-g(0)}+c \Leftrightarrow c=0$

Άρα : $-e^{-f(x)}=-e^{-g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x>-1$.

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $f'(x)=e^{-g(x)} \Leftrightarrow f'(x)=e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=(x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $e^{f(x)}=x+c_2$ (3)

Για $x=0$ η (3) γίνεται : $e^{f(0)}=0+c_2 \Leftrightarrow c_2=1$, άρα $e^{f(x)}=x+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln(x+1)$ με $x>-1$. Αρα τελικά : $f(x)=g(x)=\ln(x+1)$, $x>-1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35)Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=g(0)=1$,
- $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις : f,g.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 8 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x)=\alpha g(x)$

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x)=ag(x)$, $x\in\Delta$, τότε θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-ag(x)$, $x\in\Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή, δηλ. $h(x)=c$ και στη συνέχεια δείχνω ότι $c=0$.

(σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμφέρει περισσότερο να θέσω $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$, $x\in\Delta$ *και να δείξω ότι ότι είναι σταθερή, δηλ.* $h(x)=\alpha$*)*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

36)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x)\cdot f'(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση :

Έστω : $g(x)=f(x)\cdot f(-x)-1$, θα δείξω ότι $g(x)$ σταθερή, άρα $g(x)=c$ και μετά $c=0$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και επιπλέον $g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-f(x)\cdot f'(-x) \Leftrightarrow g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-1$

Στη σχέση : $f(x)\cdot f'(-x)=1$ αν θέσω όπου x το –x έχω : $f(-x)\cdot f'(x)=1$

Άρα : $g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-1 \Leftrightarrow g'(x)=1-1=0$, άρα $g(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x\in\Re$, δηλ. $g(x)=c$, $x\in\Re$. Όμως $g(0)=f(0)\cdot f(0)-1=0$, άρα $g(0)=c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα : $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $x^2 f'(x)=(x-\ln x)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$. Να δείξετε ότι : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$, $x>0$.

38)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $xf'(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι : $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

39)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x)\cdot f'(-x)=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$.
ii. Να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.
iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 9 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Αν Δ_1,Δ_2 διαστήματα με $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ και έχουμε : $f'(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\Delta_1,\Delta_2$, τότε

- Αν $x\in\Delta_1$, τότε $f(x)=g(x)+c_1$
- Αν $x\in\Delta_2$, τότε $f(x)=g(x)+c_2$

Δηλαδή : $f(x)=\begin{cases} g(x)+c_1, & x\in\Delta_1 \\ g(x)+c_2, & x\in\Delta_2 \end{cases}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Έστω $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1$, για κάθε $x\neq 0$ και $f(1)=5$, $f(-1)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\neq 0$, $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=2x+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (xf(x))'=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$ με $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άρα : $xf(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{x}+c_1, & x<0 \\ x^2-\frac{1}{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$ δηλαδή : $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_1}{x}, & x<0 \\ x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_2}{x}, & x>0 \end{cases}$

Όμως $f(-1)=2 \Leftrightarrow -1-1-c_1=2 \Leftrightarrow c_1=-4$ και $f(1)=5 \Leftrightarrow 1-1+c_2=5 \Leftrightarrow c_2=5$.

Τελικά : $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x}, & x<0 \\ x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}, & x>0 \end{cases}$

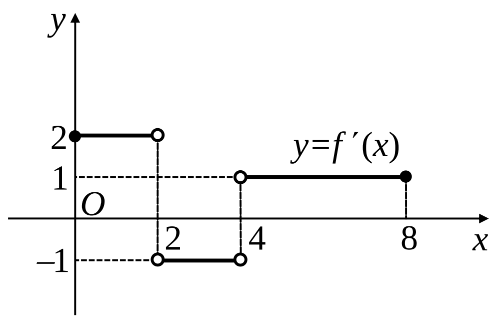
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

41)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-2f(x)=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=4$, $f(-1)=-2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

42)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-f'(x)=2x^2-x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

43)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $(x-1)f'(x)=2x^2+x-3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)=3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.



2.6Β ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β΄ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

44. ΘΕΩΡΗΜΑ (2000, 2006, 2012, 2017, 2019, 2021)
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.
• Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
• Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

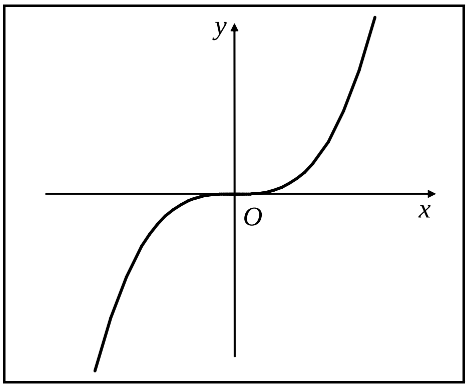
Απόδειξη :

• Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.
• Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Για παράδειγμα : $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Σχόλιο :
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ. ***(2020 Ν.Σ.)***

Για παράδειγμα : η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f και εξετάζουμε αν είναι συνεχής.
ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.
iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.
v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η f γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η f γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$
ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$
iii. $f(x)=xe^x$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+6x-9$,
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3, ή, x=1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-3]$ και στο $[1,+\infty)$
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[-3,1]$.

iii. $f(x)=xe^x$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x+xe^x$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x+xe^x=0\Leftrightarrow e^x(1+x)=0\Leftrightarrow \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x+xe^x>0\Leftrightarrow e^x(1+x)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x+xe^x<0\Leftrightarrow e^x(1+x)<0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x<0\Leftrightarrow x<-1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0 \overset{\substack{x^2>0\\ \gamma\iota\alpha\\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\\ x\in(0.+\infty)}}{<=====>} 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln e\Leftrightarrow x<e$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0 \overset{\substack{x^2>0\\ \gamma\iota\alpha\\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\\ x\in(0.+\infty)}}{<=====>} 1-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln e\Leftrightarrow x>e$$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

46) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$

ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$

iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$

Λύση :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=5x^4+2e^{2x+1}+1>0$ για κάθε $x\in D_f=\Re$ και η f είναι συνεχής, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$.

ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$, $D_f=[0,3]$, $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$ για κάθε $x\in(0,3)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=[0,3]$.

iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=x^2-2x+1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\overset{\Delta=0}{\Leftrightarrow}x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και η f είναι συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$.

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Λύση :

i. $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x+1>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1=0$, παρατηρώ ότι η $x=0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η $f\uparrow\mathbb{R}$ είναι και μοναδική.

Για το πρόσημο της f έχουμε :

- για $x<0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$
- για $x>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 SOS : Αν δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$, τότε βρίσκω την $f''(x)$, στη συνέχεια βρίσκω το πρόσημο της $f''(x)$, άρα και τη μονοτονία της $f'(x)$ και από τη μονοτονία της $f'(x)$ προσδιορίζω το πρόσημο της $f'(x)$ και άρα τη μονοτονία της $f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

48) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2$

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$

Λύση :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=3e^x+2x-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=3e^x+2>0$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Για την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$ έχω για $x=0$, $3e^0-3=0$, άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f'(x)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Τα πρόσημα για την $f'(x)$ προκύπτουν ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2=2ex\ln x-2ex-x^2$, $D_f=(0,+\infty)$,

$f'(x)=2e\ln x+2e-2e-2x=2e\ln x-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e\ln x-2x=0$. Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=\frac{2e}{x}-2$,

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}=2 \Leftrightarrow 2x=2e \Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	γν. αύξουσα -		γν. φθίνουσα -
f	γν. φθίνουσα		γν. φθίνουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Ψάχνω πρώτα το πρόσημο της $f''(x)$, αφού μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, θα μπορώ να λύσω και τις ανισώσεις : $f''(x)>0$, $f''(x)<0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2>0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x>0 \Leftrightarrow x<e$, άρα $f'\uparrow$ στο $(0,e]$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2<0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x<0 \Leftrightarrow x>e$, άρα $f'\downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<e \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $(0,e]$
- $x>e \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Τελικά η $f\downarrow$ στο $D_f=(0,+\infty)$.

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=6e^x+3x^2-6x-6$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+3x^2-6x-6=0$. Αυτή η εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους άρα θα βρω την $f''(x)=6e^x+6x-6$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ αλλά και αυτή η εξίσωση δεν λύνεται άρα θα βρω την $f'''(x)=6e^x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f''\uparrow\mathbb{R}$.

Για την εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ έχω για $x=0$, $6e^0-6=0$ άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f''(x)=0$ και επειδή η $f''\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, θα είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	+	0	+
$f''(x)$	γν. αύξουσα -	0	γν. αύξουσα +
$f'(x)$	γν. φθίνουσα +	0	γν. αύξουσα +
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :
Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(0) \Leftrightarrow f''(x)<0$ άρα $f'\downarrow$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$ άρα $f'\uparrow$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f\uparrow$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f\uparrow$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Τελικά η $f\uparrow$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 SOS : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f και έχουμε :

$f'(x)=g(x)\cdot h(x)$ ή $f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της $h(x)$, άρα και της $f'(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

49) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Επειδή $\eta\mu^2 x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ με ενδιαφέρει αποκλειστικά το πρόσημο το αριθμητή της $f'(x)$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi)$ τότε $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$ και επειδή $g(x)$ είναι συνεχής στο 0 έχουμε $g(x)\uparrow[0,\pi)$.

Άρα για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχω : $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ άρα και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και άρα τελικά $f(x)\uparrow(0,\pi)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

50)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=-2x+3$
ii. $f(x)=-x^2+3x-1$
iii. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$
iv. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$
v. $f(x)=-x^3+x^2-x-1$

51)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
ii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ *(Ομογενείς 2014)*
v. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$
vi. $f(x)=x\ln x$
vii. $f(x)=x\cdot e^x$
viii. $f(x)=2e^x-x+1$
ix. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

x. $f(x) = x(3 - 2\ln x)$

xi. $f(x) = x - \ln x - \dfrac{x^2}{2}$

xii. $f(x) = \ln(x-2) - x + \dfrac{x^2}{2}$

xiii. $f(x) = \ln(x^2+1) - x$

xiv. $f(x) = x - \ln(e^x+1)$ *(Ομογενείς 2011)*

xv. $f(x) = e^{x^3+x} + x^3 - 6x^2 + 12x$

52)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

53)Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x) = \etaμx - x\sigmaυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii. $\etaμx - x\sigmaυνx > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\etaμx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

54)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$.

55)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$.

56)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = e^x + x\ln x - (e+1)x$.

57)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$.

58)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = -\dfrac{2 + x^2e^x + 2xe^x}{2e^x}$.

59)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = -2x^2 + 4x - (x-1)\ln x$.

60)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$.

61)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$.

62)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 6x^2\ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x$.

63)Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln x + x^2 - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1]$.

ii. $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$, $x \in (0,1)$.

iii. $f(x) = \ln(1+x^2)$

64)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και μετά να βρείτε την αντίστροφη της.

ΠΟΛΥ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ Θ.Μ.Τ.

Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, τότε μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, με $x_0\in(\alpha,\beta)$, στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$. Για να δείξω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξω ότι $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\,[0,x]\\ \bullet\ f\ \pi\alpha\rho/\mu\eta\ \ \sigma\tau o\,(0,x)\end{array}\right\}$$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$

Όμως $\xi\in(0,x)\Leftrightarrow\xi<x\overset{f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}<f'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)<f'(x)\cdot x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Άρα $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

66)Δίνεται μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, καθώς δεν επηρεάζει τη μονοτονία της f.
- Βρίσκουμε την f΄(x) για $x < x_0$ και την f΄(x) για $x > x_0$.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f΄(x) για $x < x_0$ και της f΄(x) για $x > x_0$.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα γραφώ τις ρίζες της f΄(x)=0 και τα σημεία αλλαγής τύπου της f

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

67)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & , x\le 1\\ x+2 & , x>1\end{cases}$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Θα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. Έχω :

$f(1)=3$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(4-x^2)=3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

- Για $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)=(4-x^2)'=-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$
- Για $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x+2)'=1$

x	-∞	0		1	+∞
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

68)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1, x\le 2\\ x^2-6x+1, x>2\end{cases}$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Θα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$. Έχω :

$f(2)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+1)=-7$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$

- Για $x\in(-\infty,2)$ είναι $f'(x)=(x^2-2x-1)'=2x-2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	-∞	1		2		3	+∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(2,3]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

69)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, x\le 3 \\ 2x-3, x>3 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, x\le 2 \\ x-3, x>2 \end{cases}$ iii. $f(x)=|x^2-1|$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μας ζητούν να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε θέτουμε :

- $f'(x)\ge 0$ αν f είναι γνησίως αύξουσα
- $f'(x)\le 0$ αν f είναι γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70)Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x^2+\alpha^2)+2\alpha x+3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Λύση :

Είναι $f(x)=2\ln(x^2+\alpha^2)+2\alpha x+3$ και $A_f=\Re$ με :

$$f'(x)=2\frac{2x}{x^2+\alpha^2}+2\alpha=\frac{2\alpha x^2+4x+2\alpha^3}{x^2+\alpha^2}=\frac{2(\alpha x^2+2x+\alpha^3)}{x^2+\alpha^2}$$

Για να είναι f γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ θα πρέπει για κάθε $x\in\Re$ να ισχύει

$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(\alpha x^2+2x+\alpha^3)}{x^2+\alpha^2}\le 0 \Leftrightarrow \alpha x^2+2x+\alpha^3\le 0$ για κάθε $x\in\Re$.

Για να ισχύει αυτό πρέπει : $\alpha<0$ και $\Delta\le 0$

$\Delta\le 0 \Leftrightarrow 4-4\alpha^4\le 0 \Leftrightarrow 1-\alpha^4\le 0 \Leftrightarrow (1-\alpha^2)(1+\alpha^2)\le 0 \Leftrightarrow 1-\alpha^2\le 0 \Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Επιπλέον $\alpha<0$ άρα τελικά $\alpha\in(-\infty,-1]$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ μόνο όταν $\alpha\in(-\infty,-1]\Leftrightarrow \alpha\le -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71)Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+a^2}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

72)Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x)=3x^3-\alpha x^2+9x-1$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

73)Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2-4x+1$ ώστε να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ισχύει ότι : Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα.
Για να επιλύσουμε μια <u>εξίσωση</u> η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (<u>προφανής</u>) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

(Υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f' , βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, της οποίας έχουμε βρει μια προφανή ρίζα ρ. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική, χωρίς η f να είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της. Αρκεί η f να αλλάζει μονοτονία στο ρ.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

74) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+\ln x-1-e$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x+\ln x=1+e$.

<u>Λύση :</u>

i. $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=e^x+1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$.

ii. $e^x+x+\ln x=1+e \Leftrightarrow e^x+x+\ln x-1-e=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
Παρατηρώ ότι $f(1)=e+1+0-1-e \Leftrightarrow f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

75)Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x=x-1$.

<u>Λύση :</u>

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x=x-1 \Leftrightarrow \ln x-x+1=0$. Έστω $f(x)=\ln x-x+1$, $D_f=(0,+\infty)$

Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-x+1=0$, παρατηρώ ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

- Αν $x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$
- Αν $x>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$

Οπότε είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, δηλ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. *(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2010)*

Λύση :

i. $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $A_f=\Re$ και $f'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, αφού ισχύει $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι έχω :

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2)\overset{f\uparrow\Rightarrow f\,\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

77)Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^2+6\ln x=4x-3$

ii. $x^2+4x+5=5e^x$

iii. $x\ln x=2x-e$.

78)Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-2x$

ii. $3x^2+2x=5-\ln x$

iii. $e^{x-1}+x^3=3-x$

79)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}=x^2-4$.

80)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3\ln x+3$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3(\ln x+1)}{x}=4-x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :
1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x+3x^5-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^x+3x^5<2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5$

Λύση :

i. $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^x+15x^4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$.

ii. $2e^x+3x^5<2 \Leftrightarrow 2e^x+3x^5-2<0 \Leftrightarrow f(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $f(0)=2e^0+0-2 \Leftrightarrow f(0)=0$, άρα από (1) έχω : $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$

iii. $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5 \Leftrightarrow$

$2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5-2>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5-2 \Leftrightarrow f(x^2-2x)>f(3x-6) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2-2x>3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0$, έχω $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, ή, x=3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

82)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^7-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^x>-x^7+1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x^2-3}-e^{x^2+2x}<(x^2+2x)^7-(2x^2-3)^7$.

83)Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1}\le 1-\ln x$ ii. $e^x+2x<e^{-x}-x^3$ iii. $x^2+4x>\ln\frac{1}{x+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής : $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) > g(x)$, με $x \in \Delta$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
3) μελετάμε την h ως προς τη μονοτονία
4) οι παρακάτω ιδιότητες για την κατάλληλη τιμή του α μας οδηγούν στη ζητούμενη ανισότητα :
   - $x > a \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(a)$ ή
   - $x > a \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(a)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

84)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{e^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Λύση :

i. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 4x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1, ή, x = 5$

x	-∞	-1		5	+∞
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα		γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[5,+\infty)$
$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,5]$.

ii. Πρέπει να αποδείξω ότι ισχύει η σχέση : $\dfrac{e^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi \Leftrightarrow$
$\dfrac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e > \dfrac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e + 1 > \dfrac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi + 1 \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$
Τα $e, \pi \in (-1,5)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα θα ισχύει : $e < \pi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi)$

85) Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 1 \geq 2\ln x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Λύση :

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε $x^2 - 1 \geq 2\ln x \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 1 \leq 0$.

Έστω $f(x) = 2\ln x - x^2 + 1$ με $x \in (0,+\infty)$. Θα δείξουμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - 2x = \dfrac{2 - 2x^2}{x} = \dfrac{2(1 - x^2)}{x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} x = 1 & \delta\epsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ x = -1 & \alpha\pi o\rho. \end{array} \right.$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα

- Για $x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$
- Για $x \ge 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Συνεπώς για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \le 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

86)Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1} > 1 + \ln x$, για κάθε x>1,

ii. $\ln(x+1) < e^{x} - 1$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$

87) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \ge 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

88)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

89)Δίνεται συνάρτηση $\mathrm{f}:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$.

Λύση :

Για κάθε $x > 0$ έχουμε : $xf'(x) - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot (\ln x)' \Leftrightarrow f'(x) > (\ln^2 x)' \Leftrightarrow \left(f(x) - \ln^2 x\right)' > 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln^2 x$, $x > 0$. Τότε ισχύει : $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $g \uparrow (0,+\infty)$.

Οπότε για $x > 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \ln^2 x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

90) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και $xf'(x)>2x^2+1$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>x^2+\ln x$ για κάθε $x>1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-x^2=\ln x$.

91)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Να δείξετε ότι $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

(Θέμα 4ο 2005 Επαναληπτικές)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=f(x+c)-f(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

92)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2017)=f(1)$ και $f'\uparrow\mathbb{R}$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+2016)-f(x)=0$

ii. την ανίσωση : $f(2x+2016)>f(2x)$

Λύση :

i. Έστω $F(x)=f(x+2016)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x+2016)-f(x)=0\Leftrightarrow F(x)=0$ παρατηρώ ότι $F(1)=f(1+2016)-f(1)=0$, δηλ. έχω να λύσω την εξίσωση $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)$. *(αρκεί ν.δ.ο. $F\uparrow\Re\Rightarrow F:"1-1"$)*

Είναι : $F'(x)=f'(x+2016)-f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα : για $x<x+2016\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x+2016)\Leftrightarrow f'(x+2016)-f'(x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F'(x)>0$ και F συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών, άρα $F\uparrow\mathbb{R}\Rightarrow F:"1-1"$.

Τελικά $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)\overset{F"1-1"}{\Leftrightarrow} x=1$.

ii. $f(2x+2016)>f(2x)\Leftrightarrow f(2x+2016)-f(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>F(1)\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2x>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

93)Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, όταν $x\in[0,+\infty)$.

(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2016)

Λύση :

i. $A_f = \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \acute{\eta} \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το $2x$ καθώς $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Άρα $\boxed{f \downarrow (-\infty, 0]}$ και $\boxed{f \uparrow [0, +\infty)}$.

Ακόμα : η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 e^{x^2} \geq 0$ (*) για κάθε $x \in \Re$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x = 0$, όπου f' είναι συνεχής, άρα η $\boxed{f' \uparrow \Re}$.

(*) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2(e^{x^2} - 1) \geq 0$ (από πριν) και $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Έστω $h(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in [0, +\infty)$,
h παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με : $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ έχουμε $x < x + 3 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα «1-1» στο $[0, +\infty)$. Έτσι :

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Καθώς : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

94)Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(3) = f(2)$ και $f' \uparrow \mathbb{R}$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+1) - f(x) = 0$
ii. την ανίσωση : $f(5x+1) > f(5x)$
iii. την εξίσωση : $f(x^2+2) - f(x^2+1) = 0$

95)Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(2x^4+2) - f(2x^2+2) = f(x^4+1) - f(x^2+1)$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^4+2) + f(x^2+3) > f(x^4+1) + f(x^2+4)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ Η΄ ΜΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ ΡΙΖΑ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει :

- Το πολύ μια ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Το πολύ δυο ρίζες, αρκεί να δείξουμε ότι η f΄ είναι γνησίως μονότονη.
- Για να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα δείχνω πρώτα ότι έχει τουλάχιστον 1 ρίζα (με προφανή ή με Bolzano ή με σύνολο τιμών κτλ) και μετά ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

96) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2+2\ln x=2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Λύση : $x^2+2\ln x=2x \Leftrightarrow x^2+2\ln x-2x=0$, έστω $f(x)=x^2+2\ln x-2x$ με $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Βήμα 1 : (Τουλάχιστον 1)

Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο $[1,2]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνέχων
- $f(1)=-1<0$, $f(2)=4+2\ln 2-4=2\ln 2>0$, άρα $f(1)\cdot f(2)<0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[1,2]$

Βήμα 2 : (Το πολύ 1)

$f'(x)=(x^2+2\ln x-2x)'=2x+\dfrac{2}{x}-2=\dfrac{2x^2+2-2x}{x}=\dfrac{2(x^2-x+1)}{x}>0$ γιατί το τριώνυμο x^2-x+1 έχει $\Delta=-3<0$, άρα ισχύει $x^2-x+1>0$. Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in D_f=(0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$. Άρα η ρίζα από το Θ. Bolzano είναι μοναδική.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση :

i. Είναι $A_f=(0,+\infty)$ και $f'(x)=\dfrac{1}{x}+e^{x-1}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα $f\uparrow(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(0,+\infty)$, άρα

$$f(A_f)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{*}{=}(-\infty,+\infty)=\Re$$

* $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+e^{x-1}-1)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+e^{x-1}-1)=+\infty$

Το $2017\in f(A_f)=\Re$, άρα η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_f=(0,+\infty)$ και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x+e^{x-1}-1=0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

98)Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $x^2+\ln(x-1)=4$
ii. $x^3+3x-1=0$ στο Δ=(0,1)
iii. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)
iv. $x^3+x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\Delta=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

99) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια το πολύ ρίζα.

i. $2x+1=\eta\mu x$
ii. $x^3-\lambda x^2+\lambda^2 x-2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$

100) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)
ii. $3e^x+x^3=3x^2-3x$ στο $\Delta=(-1,0)$

101) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x\ln x-2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

102) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμες, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=3x^2+2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2+2}{3f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

103) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(\ln x)=f(1-x)$.

104) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^3+x)-f(2-\ln x)<0$.

105) Δίνεται μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα
iii. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία $45°$. *(Πανελλήνιες 2003)*

106) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x-x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2e^x+x)-f(2+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)=0$

107) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e)=\dfrac{1}{e-1}$ και $xf'(x)+f(x)=\dfrac{1}{x}+f'(x)$ για κάθε $x>1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x+\sqrt{x}+1)^{e^x+1}=(e^x+2)^{2e^x+\sqrt{x}}$

108) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$ και $e^x g'(x)=e^x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τους τύπους των f και g,
ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)$ ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^x[\ln(x^2+1)+x+1]\geq 1$.

109) Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1)<0$
iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε : $f(\xi)+4\xi=\xi^2+3$.

110) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=e$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2}\leq\dfrac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.6

ΘΕΜΑ 4 #33388

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$. (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)|\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta)-f(\alpha)|\le 3|\beta-\alpha|$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4 #26605

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x $\in\mathbb{R}$
- $f(2)=3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. f(x) = $\sqrt{x^2+5}$ για κάθε x $\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x $\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #32524

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

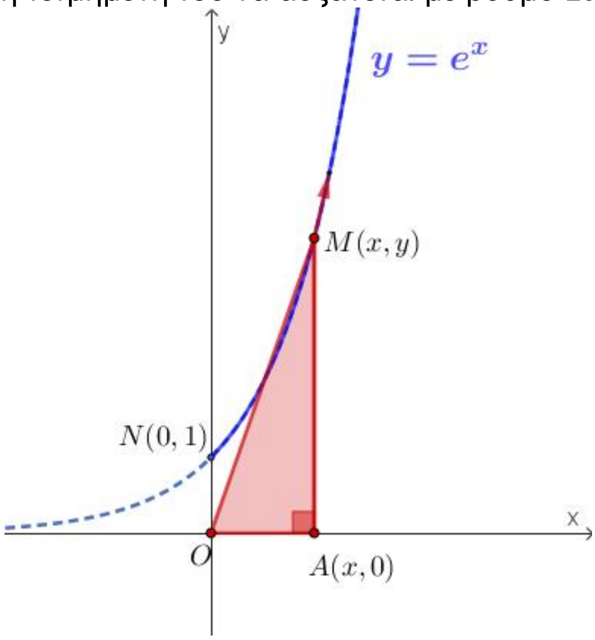
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #28685

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο Ν$(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.



i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0)$, $A(x, 0)$ και $M(x, y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #23376

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

ii. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln\frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #23200

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$ (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = \ln 2$. (Μονάδες 6) δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #23199

Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

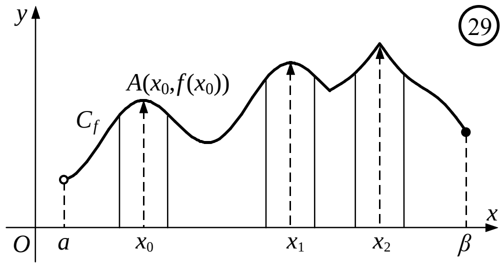
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

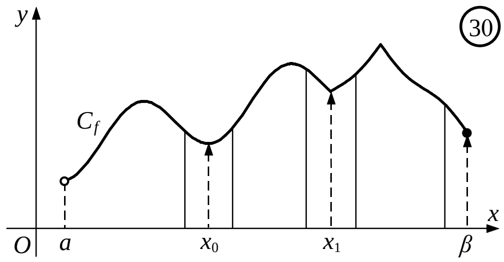
45. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ; **(2012, 2015, 2020 Ν.Σ. ΕΠΑΝ)**

Απάντηση :

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.



β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.



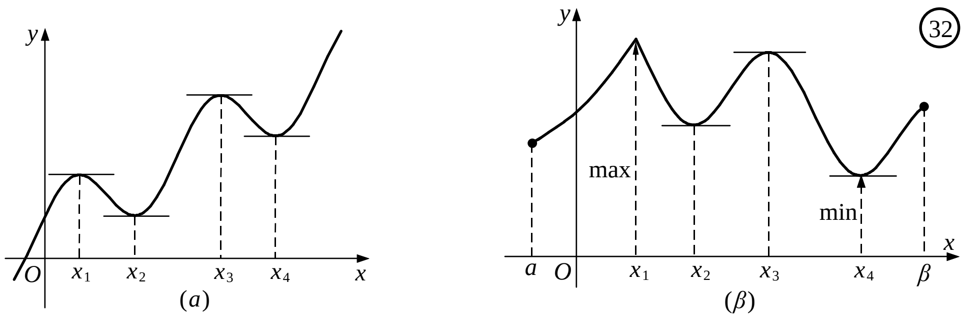
Σχόλια :

- Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

- Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

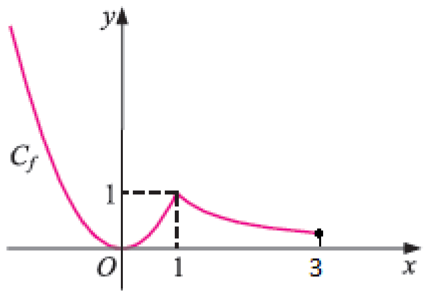
- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

<u>Για παράδειγμα</u> : Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , 1<x\le 3 \end{cases}$



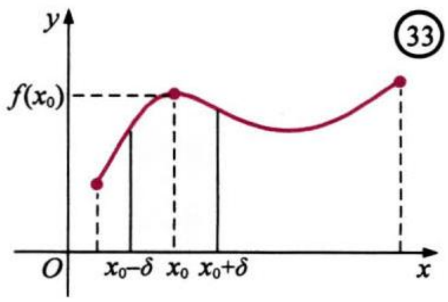
- στο $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.
- στο $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$.
- στο $x_3=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat</u> (2004, 2011, 2013 Β΄ μόνο διατύπωση, 2016 Β΄, 2017 Β΄, 2019 μόνο διατύπωση)

46. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0)=0$

<u>Απόδειξη :</u>

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Άρα :

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική ερμηνεία :

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

47. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; **(2013 Β΄)**
β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

α) Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα ε σ ω τ ε ρ ι κ ά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). (Τα άκρα των κλειστών διαστημάτων)

48. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

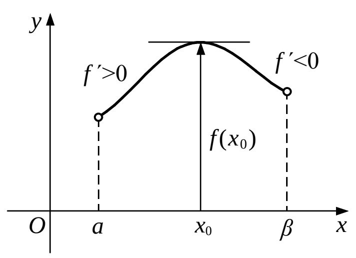
i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(2016, 2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ)**

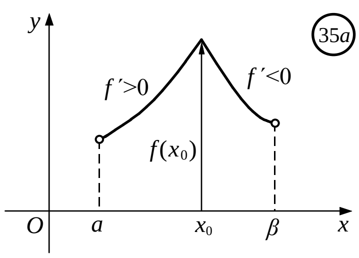
ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(2014 Β΄)**

Απόδειξη :

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

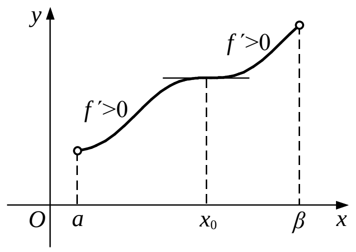


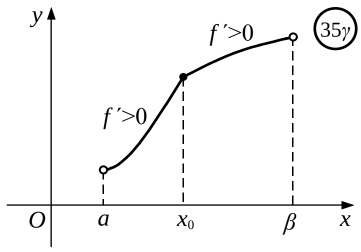


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$.

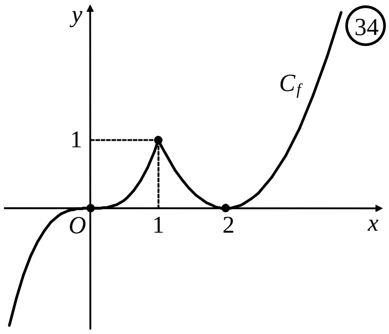
<u>Παράδειγμα 1</u> : Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$ (διπλή) ή $x = 3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘	Ο.Ε.	↗

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = -27$.

Παράδειγμα 2 : Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}.$$



Η f είναι συνεχής στο $\Re$ και παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$,

με : $$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \quad x<1 \\ 2(x-2) & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.

x	-∞	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
f	↗		↗	**Τ.Μ.**	↘	**Τ.Ε.**	↗

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της *f* είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της *f*.

Σχόλια :

- ΄Οπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της *f* στο (α,β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της *f* στο (α,β).
- Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η *f* παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

Παρατηρήσεις : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ***ανοιχτό*** διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
- Αν για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)\neq 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)=0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0.
- Αν $x_0\in\Delta$, τότε δεν είναι ισοδύναμες οι προτάσεις : «Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0» και «Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x»

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➢ **(Θεώρημα Fermat)**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0)=0$.

➢ Οι πιθανές θέσεις που μπορεί να παρουσιάσει ακρότατα μια συνεχής συνάρτηση f είναι :

1)Τα **σημεία** που η **παράγωγος της f είναι ίση με 0**

2)Τα **σημεία** του πεδίου ορισμού της f στα οποία η **f δεν είναι παραγωγίσιμη** (συνήθως τα σημεία αλλαγής τύπου δικλαδης συνάρτησης)

3)Τα **άκρα των κλειστών διαστημάτων** που περιέχονται στο πεδίο ορισμού της f. Αν π.χ. το πεδίο ορισμού της f είναι [α,β] και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε :

a)τοπικό ελάχιστο στο α το f(α).

b)τοπικό μέγιστο στο β το f(β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ – ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f παρουσιάζει μέγιστο Μ και ελάχιστο m και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[m,\mathrm{M}]$. Για την εύρεση του μέγιστου Μ και ελάχιστου m εργαζόμαστε ως εξής :

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+4$, $x\in[-1,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση :

i. Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,2]$ με $f'(x)=6x^2-6x$, οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0 \;\; ή \;\; x=1$. Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 και 1.

ii. Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f και τα άκρα του διαστήματος $[-1,2]$. Δηλαδή οι αριθμοί : $-1,\;\; 0,\;\; 1,\;\; και\;\; 2$.

iii. Η f είμαι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[-1,2]$, επομένως έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta)=[m,\mathrm{M}]$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή της f, δηλαδή η μικρότερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων και M είναι η μέγιστη τιμή της f, δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων. Έχουμε :
$f(-1)=-1$, $f(0)=4$, $f(1)=1$ και $f(2)=8$, επομένως $m=-1$ και $\mathrm{M}=8$ δηλαδή $f(\Delta)=[-1,8]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3-6x^2+1,\; x\in[-2,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot|x-1|,\; x\in[0,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1-x)\cdot e^{x-1} & ,\, 0<x<1\\ 0 & ,\, x=1\\ \ln x & ,\, x>1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2-\beta x+1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=3$ το -1.

Λύση :

Έχω : $f(x)=ax^2-\beta x+1$ με $D_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=(ax^2-\beta x+1)'=2ax-\beta$

- το $x_0=3$ είναι εσωτερικό του $D_f=\mathbb{R}$
- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(3)=0 \Leftrightarrow 6\alpha-\beta=0$ (1)

Επίσης επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$ το -1, είναι $f(3)=-1 \Leftrightarrow 9\alpha-3\beta+1=-1 \Leftrightarrow 9\alpha-3\beta=-2$ (2)

Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases}6\alpha-\beta=0\\ 9\alpha-3\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{9}\\ \beta=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^3-\beta x^2+2x$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

7) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a\ln(x-1)-\beta x^2-4x+1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$.

8) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=1$ το f(1)= -1.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Η f ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα τότε δουλεύουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 οπότε από Θ. Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$ από όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\Re$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$, άρα από Θ. Fermat ισχύει : $f'(x_0)=0$. Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2$ (2)

Στη (2) για $x=x_0$ έχω : $3f^2(x_0)\cdot f'(x_0)+f'(x_0)=3x_0^2+2\Leftrightarrow 3x_0^2+2=0$ αδύνατη. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{e^x}$ δεν έχει ακρότατα.

11) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)=x^3-3x^2+6x-2$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2<2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ $\rightarrow$ FERMAT (ΚΡΥΦΟ FERMAT)

Όταν μας δίνεται δεδομένη μια ανισότητα της μορφής $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε :

- 1ον μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε : $f(x) - g(x) \le 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 2ον θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$, οπότε $h(x) \le 0$, $x \in \Delta$
- 3ον βρίσκουμε ένα x_0 για το οποίο ισχύει $h(x_0) = 0$, οπότε έχουμε : $h(x) \le h(x_0)$, $x \in \Delta$
- 4ον άρα η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat έχουμε : $h'(x_0) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha \ln x - x^2 \le x - 2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι α=3.

Λύση :

Για κάθε $x > 0$ είναι $\alpha \ln x - x^2 \le x - 2 \Leftrightarrow \alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0$ (1).

Έστω $f(x) = \alpha \ln x - x^2 - x + 2$, $x > 0$, με $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x} - 2x - 1$.

Η (1) γίνεται $\alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le 0$ (2) όμως παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$

Άρα για κάθε $x > 0$: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1 \in (0, +\infty)$
- το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό του $(0, +\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \ne 1$. Αν $f(x) \ge 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$. *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2009)*

Λύση :

Είναι $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $A_f = (-1, +\infty)$ και $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha - \dfrac{1}{x+1}$

Για κάθε $x > -1$ είναι $f(x) \ge 1$ (1) όμως παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$

Άρα για κάθε $x > -1$: $(1) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0 \in (-1, +\infty)$
- το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό του $(-1, +\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \ln \alpha = \ln e \Leftrightarrow \alpha = e$.

15) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x^2-x+1)-f(1)\ge x-x^2$, για κάθε $x>0$, (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\zeta): y=-x$.

Λύση : Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$, για να ισχύει $(\varepsilon)//(\zeta): y=-x$, αρκεί να δείξω ότι $\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Για κάθε $x>0$, $(1)\Leftrightarrow f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2\ge 0$.

Έστω $g(x)=f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2$, $x>0$, άρα ισχύει $g(x)\ge 0$, για κάθε $x>0$.
Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)-f(1)-1+1=0$, δηλ. $g(x)\ge 0\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$, για κάθε $x>0$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Επομένως :

- η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$
- το $x_0=1$ είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $g'(1)=0$.

Έχουμε $g'(x)=(2x-1)\cdot f'(x^2-x+1)-1+2x$, άρα
$g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)+1=0\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

16) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ και την $f(x)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|\ge 0$, παρατηρώ ότι $f(0)=|1-1|=0$, άρα $f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλ.

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$
- το $x_0=0$ είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(0)=0$ (1).

Είναι : $$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{x}\overset{\substack{x>0\\ x=|x|}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{|x|}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x+(\kappa-1)x-1}{x}\right|==\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x-1}{x}+\kappa-1\right|\overset{*}{=}|1+\kappa-1|=|\kappa|$$

$$*\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=e^0=1.$$

Τελικά $f'(0)=0\Leftrightarrow|\kappa|=0\Leftrightarrow\kappa=0$ επομένως $f(x)=\left|e^x-x-1\right|$, $x\in\mathbb{R}$.

Όμως από βασική ανισότητα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x\ge x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\ge 0$, άρα :
$f(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17) Αν για κάθε x>0 ισχύει $\ln x+\frac{a}{x}\geq a$, να βρείτε το α.

18) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $\ln(x^2+1)\geq f(x)-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(0,1).

19) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $(1+e^{1-x})f(x)+\sigma\upsilon\nu\pi x\geq 3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(1,2).

20) Αν για τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-\ln x$, ισχύει $f(x)\geq f(1)$ για κάθε x>0, να βρείτε το α.

21) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
- $f(0)=1,\quad f(2)=3$
- $f^2(x)-4f(x)+3\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι : $f'(0)=f'(2)=0$.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, τέτοιο, ώστε : $f''(\xi)=0$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

<u>Λύση :</u> Είναι $f(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(2)=0$, δηλαδή $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\geq f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία $x_1=1,\ x_2=2$.
Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Όμως στα άκρα $x_1=1,\ x_2=2$ του διαστήματος $[1,2]$ η f έχει ελάχιστη τιμή, επομένως η μέγιστη τιμή θα είναι σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[1,2]$. Τελικά η $[1,2]$ έχει δυο θέσεις ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο (1,2).

23) Έστω $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[1,2]$ και $f(\mathrm{A})=[-2,5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1)=2,\ f(2)=4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στο $\mathrm{A}=[1,2]$, άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. έχει μέγιστο και ελάχιστο. Όμως $f(\mathrm{A})=[-2,5] \Leftrightarrow -2 \le f(x) \le 5$ για κάθε $x \in \mathrm{A}=[1,2]$. Όμως $f(1)=2>-2 \ \kappa\alpha\iota\ f(2)=4<5$, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $1,2$ του $\mathrm{A}=[1,2]$. Δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σε εσωτερικά σημεία του $\mathrm{A}=[1,2]$. Έστω $x_1, x_2 \in (1,2)$ με $x_1<x_2$ τα σημεία που η f παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο). Τότε :

- η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1, x_2
- τα x_1, x_2 είναι εσωτερικά του $\mathrm{A}=[1,2]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1, x_2

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Επομένως για να δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$, θα εφαρμόσω Θ.Rolle για την f' στο $[x_1, x_2]$.

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επομένως από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

24) Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2 \cdot \ln^2 x$, $x \in (0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

25) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[0,1]$ και $f(\mathrm{A})=[-1,3]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=1,\ f(1)=2$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Β. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f .
ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.
iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.
v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η $f(x)$ γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα

i. Αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν σε μια ρίζα της $f'(x)=0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.
ii. Αν η $f'(x)$ δεν έχει ρίζες, διαστήματα μονοτονίας είναι τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$
ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$
iii. $f(x)=xe^x$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1$, $D_f=\Re$, $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,3]$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [3,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το $f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 1 = -8$

ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$, $D_f = \Re$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3, ή, x = 1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty,-3]$ και για κάθε $x \in [1,+\infty)$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-3,1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -3$, το $f(-3) = 34$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = 2$

iii. $f(x) = xe^x$, $D_f = \Re$, $f'(x) = e^x + xe^x$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x > 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x < 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) < 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1 + x < 0 \Leftrightarrow x < -1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty,-1]$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$, το $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

iv. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0 \overset{\substack{x^2>0 \\ \text{για} \\ \text{κάθε} \\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow x<e$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0 \overset{\substack{x^2>0 \\ \text{για} \\ \text{κάθε} \\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(0,e]$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=e$, το $f(e)=\frac{1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=-x^2+6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$

iii. $f(x)=x^3-x^2$ iv. $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ v. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$ vii. $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$

28) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

ii. $f(x)=-x^3+3x^2+1$

iii. $f(x)=2x^3-6x+5$ iv. $f(x)=x^3-x^2+x-5$ v. $f(x)=-x^3+x^2-2x+5$

29) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x-x+1$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}+x$ να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

31) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$

ii. $f(x)=e^x(x^2-5x+7)$

iii. $f(x)=e^x-x$

iv. $f(x)=e^x-ex$

v. $f(x)=\ln x-x$ vi. $f(x)=\ln(8x-x^2)$ vii. $f(x)=\ln(x^2-2x)$

viii. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ ix. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ x. $f(x)=x\ln x$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

33) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-4x+1$ στο [1,4] ii. $f(x)=x^2-2x+2$ στο [-2,3]

iii. $f(x)=x^3-12x+7$ στο [0,3] iv. $f(x)=\ln x-x$ στο[1,e]

v. $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ vi. $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

vii. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

34) Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-9x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

36) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-3x^2+6\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=-2$ και είναι $f(-2)=98$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-6$ και $\beta=54$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (-1,2) (ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2004)

37) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2+1-\ln x$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΚΛΑΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου :

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Βρίσκουμε την $f'(x)$ για $x < x_0$ και την $f'(x)$ για $x > x_0$ και τις μελετάμε ως προς το πρόσημο και τις ρίζες.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα γράφω τις ρίζες της $f'(x)$ και τα σημεία αλλαγής τύπου της f.
- Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0, τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, το $f(x_0)$.
- Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε για να εξετάσουμε αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, έχουμε τις εξής περιπτώσεις :
  - Αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0)$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
  - Αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \ge f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-3, x\le 1 \\ x^2-6x+7, x>1 \end{cases}$

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Έχω :

$f(1)=2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+4x-3)=2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2-6x+7)=2$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

- Για $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)=(x^2+4x-3)'=2x+4$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$
- Για $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2-6x+7)'=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

Άρα τελικά :

x	- ∞	-2		1		3	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,3]$
Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1]$ και $[3,+\infty)$
Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-2$ το $f(x_1)=f(-2)=-7$ και στο $x_2=3$ το $f(x_2)=f(3)=-2$
Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3=1$ το $f(x_3)=f(1)=2$

39) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8\,, & x\le -1 \\ x^2-2x-2\,, & -1<x<3 \\ x^2-8x+14\,, & x\ge 3 \end{cases}$:

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο -1 και στο 3. Έχουμε :

- $f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+6x+8)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-2x-2)=1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο -1.
- $f(3)=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x-2)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-8x+14)=-1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο 3.
- Για $x\in(-\infty,-1)$ είναι, $f'(x)=2x+6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$
- Για $x\in(-1,3)$ είναι, $f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(3,+\infty)$ είναι, $f'(x)=2x-8$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$

Άρα τελικά :

x	- ∞	-3		-1		1		3		4	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+		-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

- $f\downarrow(-\infty,-3]$,
- $f\uparrow[-3,-1]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[-3,-1]$ (f συνεχής στο $(-3,-1)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$)
- $f\downarrow(-1,1]$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο -1
- $f\uparrow[1,3)$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο 3
- $f\downarrow[3,4]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ (f συνεχής στο $(3,4)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=-1$)
- $f\uparrow[4,+\infty)$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -3 το $f(-3)=-1$, στο 1 το $f(1)=-3$ και στο 4 το $f(4)=-2$.
- Στα σημεία -1 και 3 η f δεν είναι συνεχής. Έχουμε :
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1<3=f(-1)$, άρα στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1>f(3)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-1=f(3)$, άρα στο 3 δεν μπορεί η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και γενικά τοπικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

40) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-3, x\le 1 \\ x^2-6x+7, x>1 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, x\le 3 \\ x^2-8x+22, x>3 \end{cases}$

iii. $f(x)=x^3-3x|x|$ iv. $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8\,, & x\le -1 \\ x^2-2x-2\,, & -1<x<3 \\ x^2-8x+14\,, & x\ge 3 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- Η Εξίσωση : $f(x)=\kappa$

Όταν μια συνάρτηση $f{:}\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο ίσο με κ μόνο στη θέση $x=x_0$, τότε :

$f(x)=\kappa \Leftrightarrow x=x_0$ και $f(g(x)))=\kappa \Leftrightarrow g(x)=x_0\,, g(x)\in \mathrm{A}$.

- Η Εξίσωση : $f(x)=g(x)$

Έστω οι συναρτήσεις $f,g{:}\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$ τότε : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=x_0$.

Απόδειξη :

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x=x_0$. Επίσης επειδή η g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $g(x)\le g(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Έτσι : $f(x)=g(x) \overset{f(x_0)=g(x_0)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(x_0)+g(x_0)-g(x)=0$

$\underbrace{\left(f(x)-f(x_0)\right)}_{\ge 0}+\underbrace{\left(g(x_0)-g(x)\right)}_{\ge 0}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow x=x_0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mathrm{g(x)-g(x_0)=0\Leftrightarrow g(x)=g(x_0)\Leftrightarrow x=x_0} \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \mathrm{x=x_0}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-2x+e$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Λύση :

i. $f(x) = x\ln x - 2x + e$ με $D_f = (0,+\infty)$, έχω

$f'(x) = (x\ln x - 2x + e)' = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,e)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(0,e]$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (e,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = e\ln e - 2e + e = 0$

ii. Από το i. ισχύει ότι $f(e) = 0$ άρα η $x = e$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0 = e$ το $f(e) = 0$, άρα $f(x) \geq f(\mathrm{e}) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $\mathrm{x} \in (0,+\infty)$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = e$, δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{e}$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{\mathrm{x}^2 + 1}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $f(x) = 3$ β. $f(\mathrm{x}^2 - 1) = 3$ γ. $f(3 - \mathrm{f}(\mathrm{x} - 1)) = 3$.

Λύση :

i. $\mathrm{D_f} = \Re$, $f'(x) = -\dfrac{6x}{(\mathrm{x}^2 + 1)^2}$, $\mathrm{x} \in \Re$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Ε.	γν. φθίνουσα

Τελικά η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$ το $f(0) = 3$.

ii. Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$ το $f(0) = 3$, άρα $f(\mathrm{x}) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 3$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Έτσι :

α. $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

β. $f(\mathrm{x}^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $\mathrm{x} = -1$

γ. $f(3 - \mathrm{f}(\mathrm{x} - 1)) = 3 \Leftrightarrow 3 - \mathrm{f}(\mathrm{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x} - 1) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 1$.

43) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=2x-x^2$ και $g(x)=\ln\left((x-1)^2+1\right)+1$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα των f,g.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=2x-x^2$

Λύση :

i. $D_f=D_g=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

- $f'(x)=2-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο $x=1$ το $f(1)=1$.

- $g'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$.

ii. Η εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=2x-x^2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (1) ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=1$ το $f(1)=1$, άρα $f(x)\le 1 \Leftrightarrow 1-f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.

Η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$, άρα $g(x)\ge 1 \Leftrightarrow g(x)-1\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι

$$(1)\Leftrightarrow f(x)-1=g(x)-1 \Leftrightarrow \left(g(x)-1\right)+\left(1-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 1-f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iii. Αν ισχύει $f(\alpha+\beta)=-f(3\alpha+4\beta)$, να βρείτε τα α,β.

46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f

- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $\mu>0$, τότε ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.
- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο $\mathrm{M}<0$, τότε ισχύει ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$.
  i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.
  ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2e^{x+1}-x^2-3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση :

i. Έχω : $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$ με $D_f=\mathbb{R}$, έχω $f'(x)=(2e^{x+1}-2x-3)'=2e^{x+1}-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2=0\Leftrightarrow e^{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2>0\Leftrightarrow e^{x+1}>1\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2<0\Leftrightarrow e^{x+1}<1\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$, το $f(-1)=2e^0+2-3=1$

Άρα ισχύει $f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$, οπότε και $f(x)>0$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$.

ii. Έχω : $g(x)=2e^{x+1}-x^2-3x$ με $D_g=\mathbb{R}$, επίσης έχω : $g'(x)=(2e^{x+1}-x^2-3x)'=2e^{x+1}-2x-3=f(x)>0$ άρα g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in D_g=\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x)=2e^{x-1}-x^2$ ως προς τη μονοτονία.

49) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x-1$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της.

50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-2x+1$.
  i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
  ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2x\ln x-x^2-x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

51)
i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.
ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\phi(x)=2e^x+x^2-2x$ και να βρείτε το πρόσημο της.
iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^x-1$ και $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Α</u> : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ (ΖΗΤΟΥΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ→ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟ)

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 όταν $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

Αν θέλω να αποδείξω ότι ισχύει μια ανισότητα της μορφής $f(x)\ge g(x)$:
1ον Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
2ον Θεωρούμε το πρώτο μέλος συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$
3ον Βρίσκω τη μονοτονία της $h(x)$ και την εφαρμόζω στο αντίστοιχο διάστημα ώστε να αποδεδειχθεί η ανίσωση **ή**
3ον Βρίσκουμε το ολικό μέγιστο ή ελάχιστο της $h(x)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

52) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-x^2+2013$.
i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
ii. Να αποδείξετε ότι : $x^2-2\ln x\ge 1$ για κάθε $x>0$.

<u>Λύση :</u>

i. $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{2}{x}-2x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{2}{x}-2x=0\Leftrightarrow 2-2x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1, ή, x=-1$ απορρίπτεται.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x > 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x(2-2x^2) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-2x^2 > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-1,1)$ * Επειδή όμως πρέπει $x > 0$, άρα $x \in (0,1)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow x(2-2x^2) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-2x^2 < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ * Επειδή όμως πρέπει $x > 0$, άρα $x \in (1,+\infty)$

*Για την ανίσωση $1-x^2 > 0$, έχω $1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	- ∞	-1		1	+ ∞
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$

ii. Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2012$, τότε ισχύει : $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 2013 \le 2012 \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 \le -1 \Leftrightarrow x^2 - 2\ln x \ge 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

53) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x \ge x+1$ για $x \in \Re$

ii. $e^x - 1 \le xe^x$ για $x \in \Re$

iii. $e^{x-1} \ge 1 + \ln x$ για $x > 0$

iv. $2\ln x \le x^2 - 1$ για χ>0

v. $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$ για $x > 0$

vi. $2e^x \ge 2 + 2x + x^2$ για $x \ge 0$ *(υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f', βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)*

54) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x - xe^x \le 1$ για $x \in \Re$

ii. $e^x \ge x+1$ για x<1

iii. $2\ln x \le x^2 - 1$ για x>0

iv. $\ln x \le x - 1$ για x>0

v. $x^x \ge e^{x-1}$ για x>0 *(υπόδειξη : πρώτα λογαριθμίζω και τα 2 μέλη)*

55) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 2e^x$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $1 + xe^{x-1} \ge 2e^{x-1}$, για κάθε $x \in \Re$.

56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot x^{-\nu}$, $\nu \in N^*$, $x > 0$

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $e^x \cdot \nu^\nu \ge x^\nu \cdot e^\nu$, $\nu \in N^*$, $x > 0$

57) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $x^e \le e^x$, για κάθε $x > 0$.

58) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

i. τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$.

ii. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1)=1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)=x-\ln x$, $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

59) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Β : ΠΡΟΣΗΜΟ ΟΛΙΚΟΥ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f

- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε ισχύει ότι :
  $\left(f(x)\ge 0,\ \text{για κάθε } x\in \mathrm{A}\right)\Leftrightarrow \min f\ge 0$
- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε ισχύει ότι :
  $\left(f(x)\le 0,\ \text{για κάθε } x\in \mathrm{A}\right)\Leftrightarrow \max f\le 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

60) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3x^4-4x^3+\alpha\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

61) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=x\ln x-\lambda x+1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{M}(x,f(x))$ όπου x η θέση ελαχίστου της f.

iii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $x\ln x\ge \lambda x-1$ για κάθε $x>0$.

iv. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=x\ln x$.

62) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda>0$

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

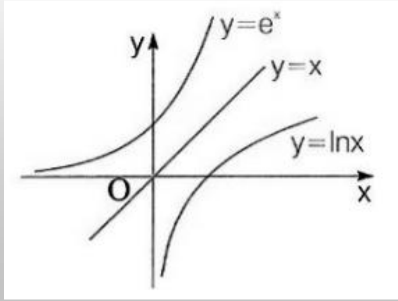
ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $e^x\ge \lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Γ : ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $\ln x \le x-1$

- Η ανισότητα $\boxed{\ln x \le x-1}$ ισχύει για κάθε $x>0$ και μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε (χωρίς απόδειξη) για να βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης. Στην παραπάνω ανισότητα το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=1$.

- Όπως μπορούμε να δούμε στην παρακάτω γραφική παράσταση, ισχύει ακόμα η παρακάτω ανίσωση (χρειάζεται απόδειξη) : $\boxed{\ln x < x < e^x}$ για κάθε $x>0$.



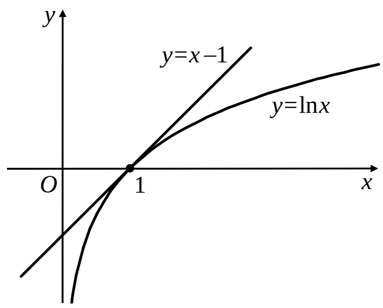
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63) Να δείξετε ότι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$.

Λύση :

Αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x \le x-1 \Leftrightarrow x-1-\ln x \ge 0$ για κάθε $x>0$. Έστω $f(x)=x-1-\ln x$, $x>0$

Έχουμε $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x=1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0 min	↗	

επειδή η f για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει :
$f(x)\ge f(1) \Leftrightarrow x-1-\ln x \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \le x-1$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

64) Να δείξετε ότι :

i. $\ln x < x$ για κάθε $x>0$ ii. $e^x > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ iii. $e^x \ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv. $e^x > \eta\mu x$ για κάθε $x>0$

Λύση :

i. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Επίσης $x-1<x$ για κάθε $x>0$, τελικά : $\ln x < x$ για κάθε $x>0$

ii. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x \le e^x-1 \Leftrightarrow x \le e^x-1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Άρα $e^x > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

iii. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x \le e^x -1 \Leftrightarrow x \le e^x -1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

iv. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Άρα $\ln x < x \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^x \Leftrightarrow x<e^x$, $x>0$
Επίσης γνωρίζουμε ότι : $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=0$.
Άρα για $x>0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x \Rightarrow \eta\mu x<x$
Τελικά για κάθε $x>0$ είναι : $\left.\begin{matrix} x<e^x \\ \eta\mu x<x \end{matrix}\right\} \Rightarrow e^x>\eta\mu x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

65) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

66) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\ln(x-\ln x)$.

67) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{e^x-x}$.

68) Να αποδείξετε ότι :

i. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$, $x>0$

ii. $e^{x-1}\ge x$, $x\in\mathbb{R}$

iii. $xe^{\frac{1}{x}}>x+1$, $x>0$

69) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

- $f(0)=1$
- $f^2(x)=e^x-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f .

70) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\ln(x+3)=x+2$

ii. $e^x-1=\ln(e^x-x)+x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11 : ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για να βρούμε το πλήθος ριζών της $f(x)=0$

1ον Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)$, $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_\kappa$ και μετά τα αντίστοιχα σύνολα τιμών : $f(\mathrm{A}_1), f(\mathrm{A}_2),..., f(\mathrm{A}_\kappa)$

2ον Αν $0\in f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

3ον Αν $0\notin f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

Ομοίως αν έχω την εξίσωση f(x)=κ

1ον Αν $\kappa\in f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

2ον Αν $\kappa\notin f(\mathrm{A}_\iota)$, η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

71) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2002)*

Λύση :

i. Έστω $x_1,x_2\in D_g=\Re$ με

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\Rightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\overset{f\circ g\ '1-1'}{\Rightarrow} x_1=x_2 .$$

Άρα η g είναι 1-1.

ii. $$g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\overset{g:'1-1'}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$$

Έστω $h(x)=x^3-3x+1$, θα δείξω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. $h(x)=x^3-3x+1$, με $D_h=\Re$, $h'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$

x	- ∞	-1		1	+ ∞
$h'(x)$	+	0	-	0	+
h	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ και στο $\mathrm{A}_3=[1,+\infty)$

$h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}_2=[-1,1]$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ άρα $h(\mathrm{A}_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(-1)]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$, $h(-1)=3$

  Άρα $h(\mathrm{A}_1)=(-\infty,3]$. Το $0\in h(\mathrm{A}_1)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ που είναι αρνητική.

- Η h γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=(-1,1)$ άρα $h(A_2)=\left(h(1),h(-1)\right)=(-1,3)$, Το $0\in h(A_2)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2=(-1,1)$ (σε αυτή τη ρίζα δεν γνωρίζω το πρόσημο, μπορεί να είναι αρνητική αν ανήκει στο $(-1,0)$ ή θετική αν ανήκει στο $(0,1)$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_3=[1,+\infty)$ άρα $h(A_3)=[h(1),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x))$,
  $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$, $h(1)=-1$
  Άρα $h(A_3)=[-1,+\infty)$. Το $0\in h(A_3)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_3=[1,+\infty)$ που είναι θετική.

Το μόνο που απομένει είναι να δείξω ότι ρίζα του $A_2=[-1,1]$ είναι θετική, δηλαδή πρέπει να δείξω ότι ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[0,1]$. Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, $h(0)=1$, $h(1)=-1$ άρα $h(0)h(1)<0$ από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Δηλαδή η ρίζα του $A_2=[-1,1]$ είναι θετική και τελικά η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δυο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$.

i. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής στο 0, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2008)*

<u>Λύση :</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

- $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+1>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow \ln x+1<0\Leftrightarrow \ln x<-1\Leftrightarrow x<e^{-1}\Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$
-

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν.φθινουσα	ο.ε.	γν. αύξουσα

Άρα $f'(x)<0$ για $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και f συνεχής στο 0, άρα $f\downarrow\left[0,\frac{1}{e}\right]$

$f'(x)>0$ για $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ δηλ. $f\uparrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

f γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$, άρα $f(A_1)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$

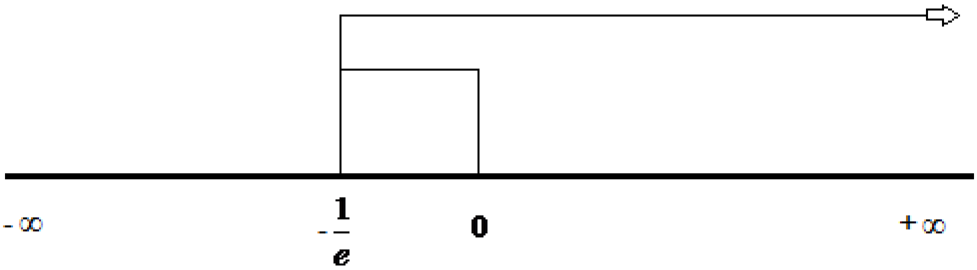
f γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$, άρα

$f(A_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ καθώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x\ln x) = +\infty$.

Τελικά το σύνολο τιμών είναι : $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι : $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

Άρα έχουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωση $f(x) = \alpha$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.
Το σύνολο τιμών είναι :



- αν $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ δεν έχει καμία ρίζα.
- αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δυο ρίζες.
- αν $\alpha \in (0, +\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια ρίζα.
- αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{e}$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = \frac{1}{e}$, καθώς στο $x_0 = \frac{1}{e}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$
- αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \alpha\pi o\rho. \\ \acute{\eta} \\ \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{cases}$

  έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

73) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 2$. Να βρείτε :
  i. Τη μονοτονία της f
  ii. Το σύνολο τιμών της f
  iii. Το πλήθος ριζών της f(x)=0

74) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :
  ii. $2x^3 - 6x + 1 = 0$
  iii. $x^3 - 3x - 1 = 0$

75) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \Re$, ώστε η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \alpha = 0$ να έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,2).

76) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $x^3 - 3x^2 - \alpha = 0$.

77) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3 = \alpha$.

78) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x-2} - \ln(x-1)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

79) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu x + 3x^2 - 4x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2010$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

80) Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1} - \ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

(4ο Θέμα Πανελλήνιες 2006)

81) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f
ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$, για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$, για κάθε $x \in \Re$.
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$.

82) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \ln x - \lambda x$, $\lambda > 0$.

i. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f
ii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$, για την οποία ισχύει $\ln x \leq \lambda x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = \ln x$.

83) Δίνεται η συνάρτηση(x)=x^3–3x–2ημ^{2}θ όπου θ ε IR μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, κ ε Z

i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο
ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2007)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 12 : ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

84) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. Να δείξετε ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος τους.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$, έχουμε : $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\Re$)

Τελικά $A_f=\Re$ και $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f'.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\Re$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\Re$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(-\infty.1]$, άρα $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\dfrac{1}{e^x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0$.

Άρα : $g(A_1)=(-1,e-1]$, το $0\in g(A_1)=(-1,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in A_1=(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = [1,+\infty)$, άρα $g(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x - xe^x - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x) - 1\right) = +\infty\cdot(-\infty) - 1 = -\infty$

Άρα : $g(A_2) = (-\infty, e-1]$, το $0 \in g(A_2) = (-\infty, e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2 = [1,+\infty)$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in A_2 = [1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x < 1$, Τότε για κάθε :

$x < x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_1) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x > x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_1) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

- Αν $x > 1$, Τότε για κάθε :

$x < x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_2) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$x > x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_2) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

x	- ∞	x_1		1	x_2	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο τοπικά ακρότατα, στο x_1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και στο x_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

85) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1 + \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

86) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο.

87) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $-\alpha$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 13 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ή το ελάχιστο ενός μεγέθους που περιγράφεται μέσα από πρόβλημα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αν το πρόβλημα έχει γεωμετρική φύση, κατασκευάζουμε το σχήμα.
ii. βρίσκουμε τη συνάρτηση του μεγέθους που αναφέρεται το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δυο μεταβλητές, βρίσκουμε μια σχέση που τις συνδέει (από την εκφώνηση του προβλήματος ή από το σχήμα) και αντικαθιστούμε τη μια συνάρτηση της άλλης.
iii. Από την εκφώνηση του προβλήματος βρίσκουμε τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η μεταβλητή, οι οποίοι καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
iv. Τέλος κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακρότατων της συνάρτησης, απ' όπου προκύπτει και το αποτέλεσμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

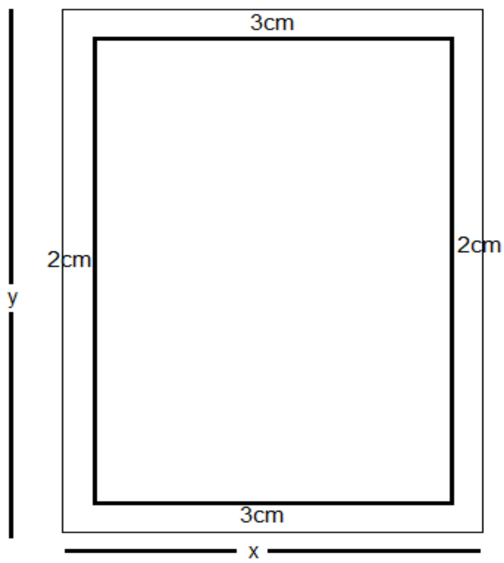
88) Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού $384cm^2$ έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι $3cm$ πάνω και κάτω και $2cm$ δεξιά και αριστερά. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει κάθε σελίδα, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο δυνατό χώρο της σελίδας.

Λύση :

Έστω ότι οι διαστάσεις της σελίδας είναι x,y. Τότε θα είναι $E_{σελίδας}=384 \Leftrightarrow xy=384 \Leftrightarrow y=\frac{384}{x}$ (1)

Οι διαστάσεις του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι $μήκος = x-2-2=x-4$ και $ύψος = y-3-3=y-6$. Άρα το εμβαδόν του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι : $E_{κειμένου}=(x-4)(y-6)$. Ψάχνουμε τις τιμές των x,y ώστε το $E_{κειμένου}$ να γίνεται μέγιστο.

$$E(x)_{κειμένου}\overset{(1)}{=}(x-4)\left(\frac{384}{x}-6\right)=384-6x-\frac{1536}{x}+24=408-6x-\frac{1536}{x}.$$



Το πεδίο ορισμού προκύπτει ως εξής : το μικρότερο μήκος x είναι $x_{\min}=2+2=4$. Για να βρω τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος x θα πρέπει να λάβω υπόψη ότι $xy = 384 \Leftrightarrow y = \frac{384}{x}$. Άρα όσο μεγαλώνει το x τόσο μικραίνει το y. Άρα το μέγιστο x το βρίσκω θέτοντας το μικρότερο y που είναι $y_{\min} = 3+3 = 6$. Άρα $6 = \frac{384}{x_{\max}} \Leftrightarrow x_{\max} = 64$.

Άρα $D_{E_{κειμένου}} = (4,64)$

Θέλω να βρω τις τιμές του x για τις οποίες το $E(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

$$E'(x)_{κειμένου} = \left(408 - 6x - \frac{1536}{x}\right)' = -6 + \frac{1536}{x^2}, \quad E'(x)_{κειμένου} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1536}{x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16, ή, x = -16 \text{ απορ.}$$

x	4	16	64
$E'(x)_{κειμένου}$	+	0	-
$E(x)_{κειμένου}$	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$$E'(x)_{κειμένου} > 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) > 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 256 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-16,16)$ * , όμως $D_{E_{κειμένου}} = (4,64)$ άρα $x \in (4,16)$

$$E'(x)_{κειμένου} < 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) < 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 256 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-16) \cup (16,+\infty)$ *, όμως $D_{E_{κειμένου}} = (4,64)$ άρα $x \in (16,64)$.

*Για την ανίσωση $256 - x^2 > 0$, έχω $256 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 16$

x	- ∞	-16		16	+ ∞
$256 - x^2$	-	0	+	0	-

Από το πινακάκι βλέπουμε ότι το $E(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $x = 16$ την $E(16)_{κειμένου} = 408 - 6 \cdot 16 - \frac{1536}{6} = 216 cm^2$. Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι $x = 16cm$ και $y = \frac{384}{16} = 24cm$.

89) Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\boldsymbol{\Pi(x)}$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\boldsymbol{\Pi(x) = 40000 - 6x}$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

<u>Λύση :</u>

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x$.

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι $K(x) = 4000x$.

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι : $K_{ολ}(x) = 4000x + 1200x = 5200x$.

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

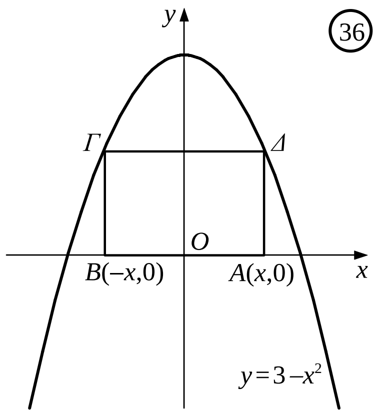
$$P(x) = E(x) - K_{o\lambda}(x) = -6x^2 + 40000x - 5200x = -6x^2 + 34800x .$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34800$, οπότε η $P'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = 2900$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *P* στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

90) Να βρεθεί το $\boldsymbol{x \in [0, \sqrt{3}]}$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.



Λύση :
Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι
$E(x) = (AB)(A\Delta) = 2x(3 - x^2) = -2x^3 + 6x$.
Έχουμε $E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$.
Οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι οι $x = -1$, $x = 1$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *E* φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$	0 min	↗	4 max	↘	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91)Να βρείτε το σημείο της ευθείας y = 3χ-2 που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

92) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

93) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x\ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

94) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

95) Να βρείτε δυο αριθμούς x,y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

96) Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 400τ.μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

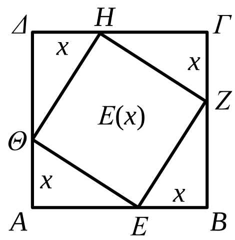
97) Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

98) Ένα σύρμα μήκους 1m κόβεται σε δυο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Να βρείτε τη πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

99) Με συρματόπλεγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

100) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,

i. να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.
ii. να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.



101) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{x^2+1}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Α (3,0).

102) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της $f(x)=\sqrt{3x^2+4}+3$ που η απόσταση του από το σημείου(0,3) να είναι ελάχιστη.

103) Ένας ιχθυοκαλλιεργητικής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μια θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα περιφραχτεί δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-2x^2+600x$ (υποθέσουμε $0<x<300$)
ii. Να υπολογίσετε την τιμή x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής να γίνεται μέγιστο
iii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού. (2000)

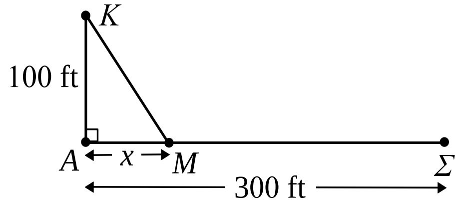
104) Η τιμή Ρ (σε χιλιάδες €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{P}(t)=4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}$

i. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του.
ii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η τιμή του συνεχώς αυξάνεται
iii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μεγίστη.
iv. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται χωρίς όμως να γίνει μικρότερη από την τιμή του τη στιγμή της εισαγωγής του. (2000)

105) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2},0\right)$.

i. Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.
ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

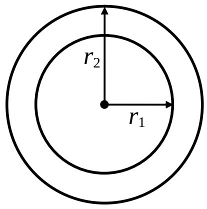
106) Ένας κολυμβητής *Κ* βρίσκεται στη θάλασσα 100ft[1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο *Α* μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του *Σ* βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο *Α*. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



i. Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή *ΚΜΣ* του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο $\mathrm{T}(x)=\dfrac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\dfrac{300-x}{5}$.

ii. Για ποια τιμή του *x* ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του

107) Έστω *Ε* το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $r_1=3$cm και $r_2=5$cm και ότι για $t>0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i. πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii. πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

108) Μία ώρα μετά τη λήψη *x* mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\dfrac{x^3}{4}$, $0<x<3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς *x*, να γίνει μέγιστος.

109) Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μεγίστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ιση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ιση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. (2000)

110) Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής *x* μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=\dfrac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ χιλιάδες δραχμές, $0\leq x\leq 105$. Η είσπραξη από την πώληση των *x* μονάδων είναι $E(x)=420x-2x^2$ χιλιάδες δραχμές. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

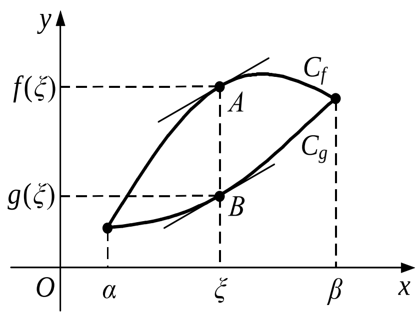
---

[1] 1ft = 30,48 cm

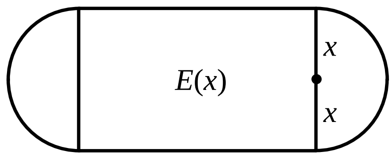
111) Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο : $C(x) = x^3 - 9\nu x^2 + 5\nu^3$ σε δεκάδες ευρώ, x>0. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 10-ν δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

112) Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 100 χιλιάδες δραχμές το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 500 δρχ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

113) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η καρακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $\mathrm{B}(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.

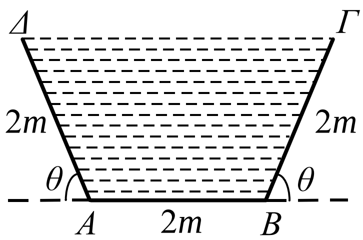


114) Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.

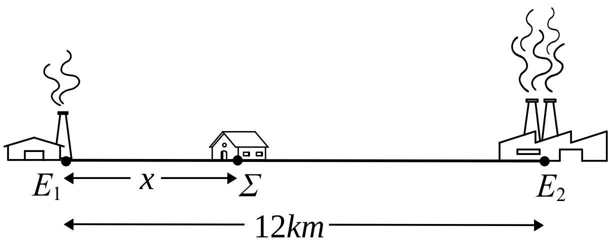


115) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με $\mathrm{E} = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\,\theta)$
ii. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;



116) Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές *P* και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση *d* από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης *d*, να βρείτε σε ποια απόσταση *x* από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.7

ΘΕΜΑ 2 #33633

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 #27082

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)^3-3x,\quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #25124

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-x^3,\ x\in(-\infty,0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #23937

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $\mathrm{A}(1,f(1))$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 #29211

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $x<0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #34025

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f'(x)<0$ με $x\in(1,+\infty)$. (Μονάδες 4)

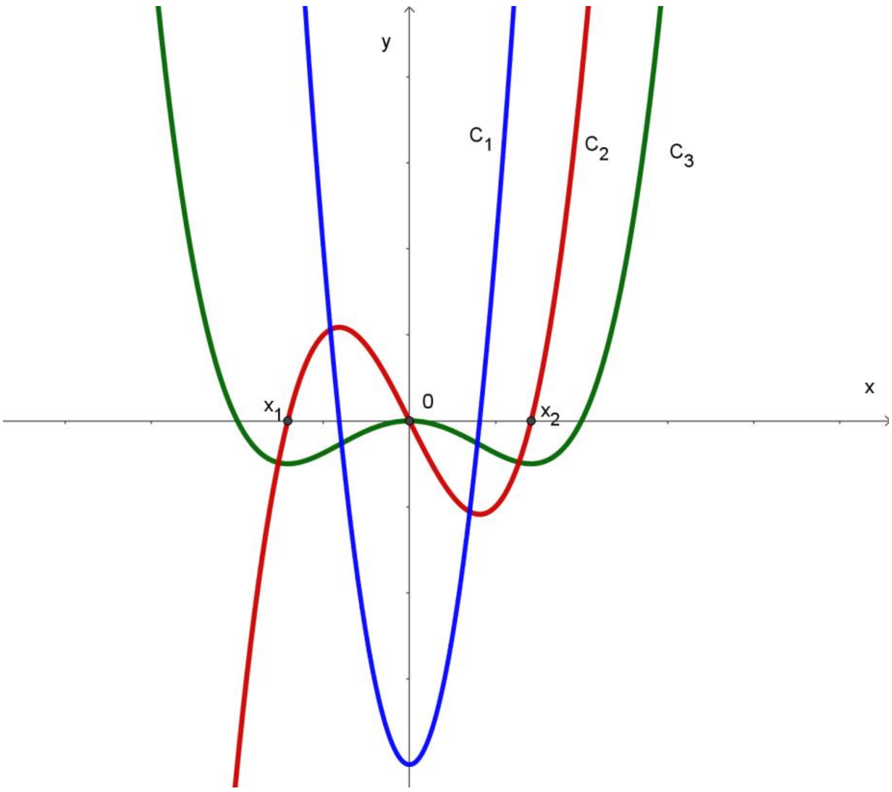
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6) β)

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #32694

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,



α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F .

x	$-\infty$ x_1 0 x_2 $+\infty$
$F' = f$	0 0 0
F	

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F .

(Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F . (Μονάδες 07)

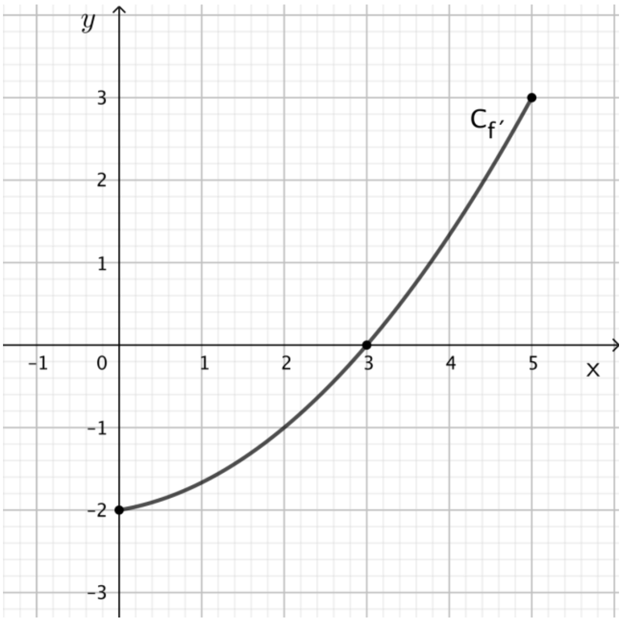
ΘΕΜΑ 2 #26707

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2 #32390

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #25764

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #25761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1,\ x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 #23197

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #29927

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → ℝ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #27455

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #27319

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)\ln x$, x∈(0, +∞)

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x’x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x’x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #23375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right),\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x + f(x)\right) > x,\ x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #23215

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$. (Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

ii.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #36814

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\, m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #33596

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_0^2+\ln x_0-2=0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο Μ

i. είναι κάθετη στην ΑΜ. (Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_0^3-x_0,0)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #27092

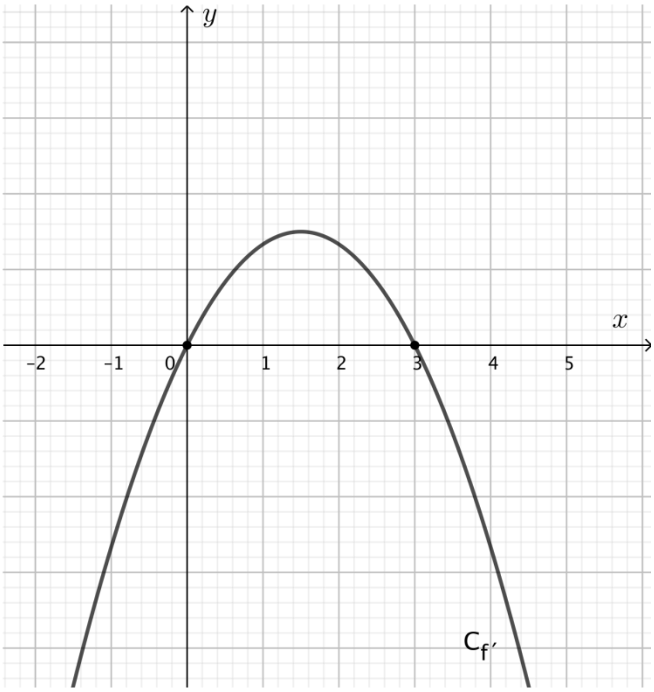
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
(Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f. (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f. (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$.
(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4 #33642

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+2x = f'(x)+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. $f(x)=e^x+x^2, x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o)), x_o \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. (Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #29149

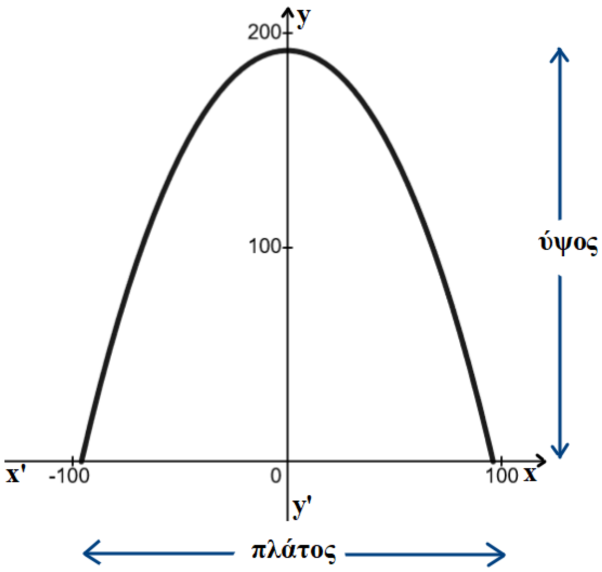
Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$. (Μονάδες 06)

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4 #34441

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι: $\mathrm{K}(x)=20x+\dfrac{2000}{x}+1220$ ευρώ με $x>0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #26633

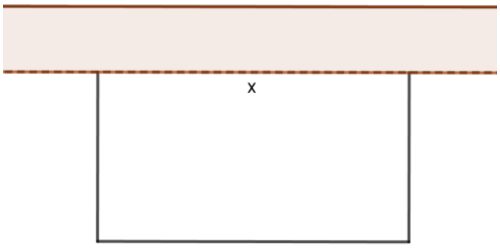
Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο: $E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής. (Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4 #34440

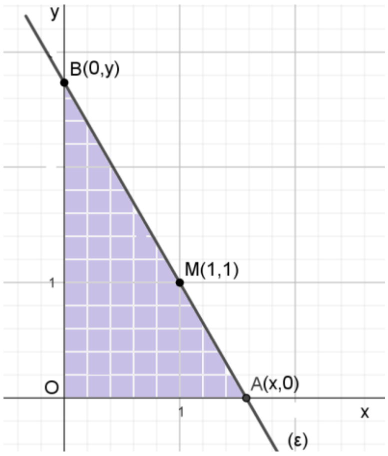
Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0),\ x>0$ και $B(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x = 2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3, E(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $K(x, y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4 #29644

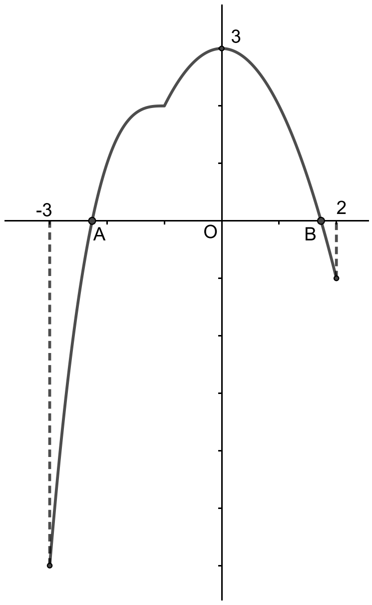
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A και B. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4 #28337

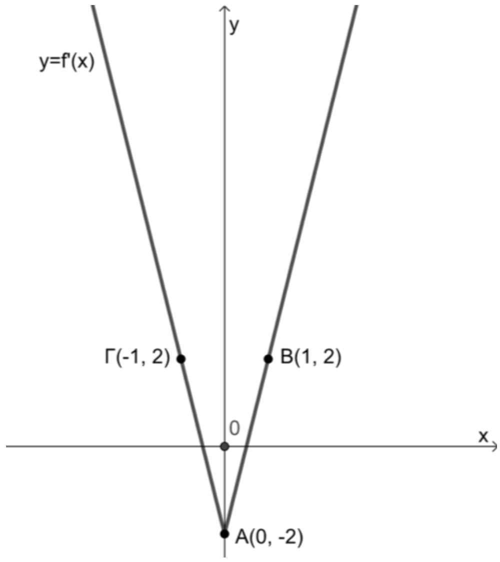
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο A$(0,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο B$(1,2)$ και η άλλη από το Γ$(-1,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

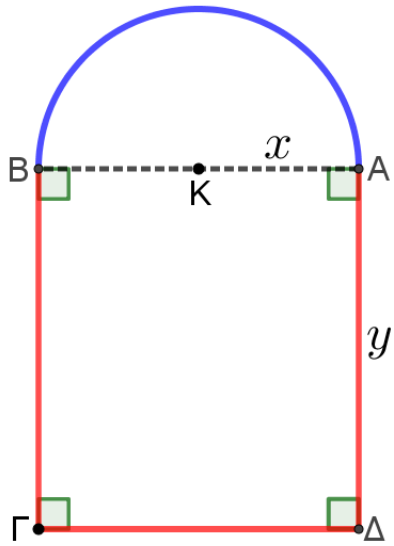
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Δ$(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4 #28534

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\,m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\,m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\,m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to x_0} \frac{ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #27650

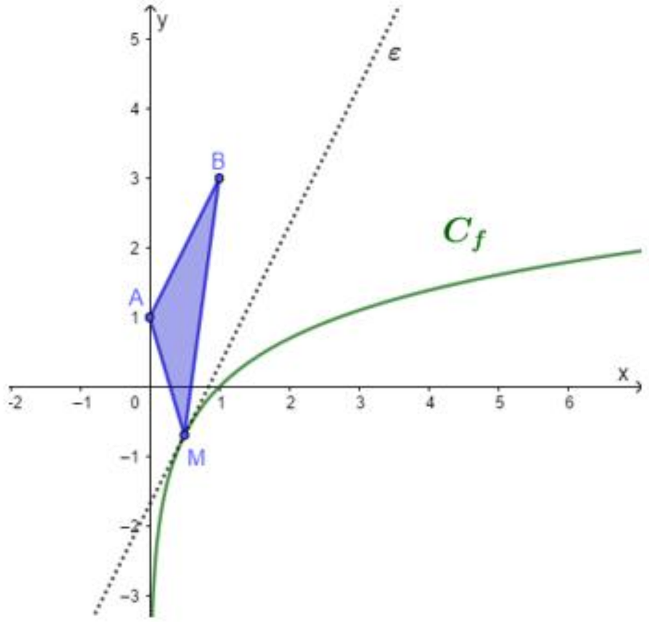
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.



(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #24587

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - lnx_0)$. (Μονάδες 05)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #23311

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

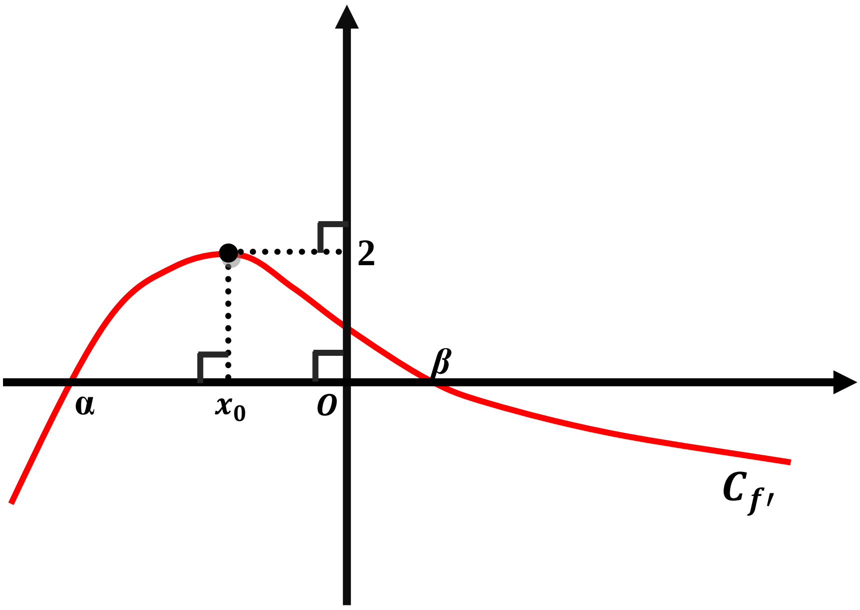
β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #23210

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0,\ f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

49. ΟΡΙΣΜΟΣ (2006, 2010, 2014)
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

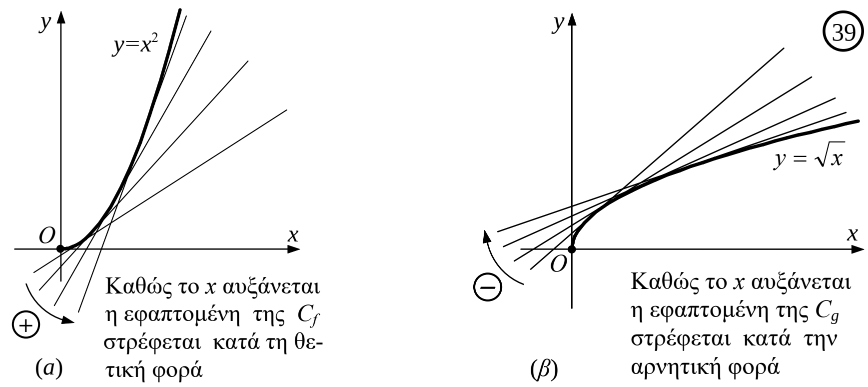
Απάντηση :

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ’ ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.

Σχόλιο :

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ’ ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της *f* σε κάθε σημείο του *Δ* βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



50. ΘΕΩΡΗΜΑ
Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

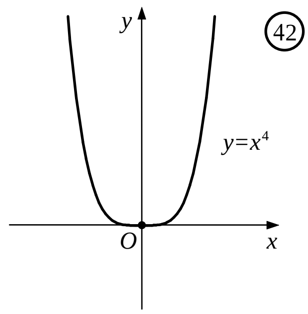
Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* σ’ ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο R, αφού $f''(0) = 0$.



51. ΟΡΙΣΜΟΣ

Πότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Σχόλιο :

Όταν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο** x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.

52. ΘΕΩΡΗΜΑ

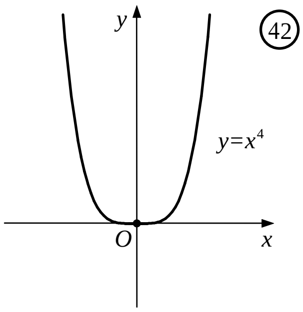
Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση :

Αν το $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



53. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

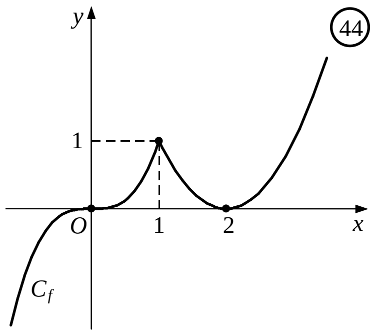
Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η** f'' **μηδενίζεται .**

ii)Τ**α εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η** f'' .

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^4 & , \quad x\geq 1 \end{cases} \qquad (\text{Σχ. } 44)$$



Η *f* είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$ με

$$f''(x)=\begin{cases} 6x & , \quad x<1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x>1 \end{cases}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	−	0 +		+ 0 +	
$f(x)$	κοίλη	κυρτή	κυρτή	κυρτή	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο.

Μέθοδος – Κριτήριο : Πως καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της ;

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Παρατηρήσεις :

- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κυρτή στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f'\uparrow$ στο εσωτερικό του Δ.
  - (Αν f είναι κοίλη στο Δ) $\Leftrightarrow$ $f'\downarrow$ στο εσωτερικό του Δ.
- Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα Δ.
  - $\begin{cases} f''(x_0)=0 \\ f''\ \text{αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του}\ x_0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0\ \text{θέση σ.κ.})$
  - Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.
  - Αν $f''(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο x_0.
  - Αν $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ.
  - Πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι οι ρίζες της f'' στο Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΡΤΩΝ – ΚΟΙΛΩΝ & ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ

i. Βρίσκω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
ii. Βρίσκω την $f'(x)$ και $f''(x)$
iii. Λύνω την εξίσωση $f''(x)=0$ και βρίσκω τα πρόσημα της $f''(x)$
iv. Κάνω πίνακα με το πρόσημο της $f''(x)$, στον οποίο θα συμπληρώσουμε την κυρτότητα της $f(x)$.
v. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_i στα οποία χωρίζεται το π.ο της f από τις ρίζες της $f''(x)$, ισχύει ότι :
   - Αν $f''(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κυρτή στο Δ_i (συμβ. $\cup$)
   - Αν $f''(x)<0$ στο εσωτερικό του Δ_i τότε η f είναι κοίλη στο Δ_i (συμβ. $\cap$)
vi. Αν η κυρτότητα της f αλλάζει σε ένα σημείο x_0, δηλαδή αν η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε η f έχει σημείο καμπής στο x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$ ii. $f(x)=xe^{1-x}$

iii. $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, x<0\\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0\end{cases}$

Λύση :

i. $f(x)=3x^5-5x^4+2$, με $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=(3x^5-5x^4+2)'=15x^4-20x^3$,
$f''(x)=(15x^4-20x^3)'=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$ έχω :
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow 60x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$60x^2$	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$, κυρτή στο $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))\to A(1,0)$.

ii. $f(x)=xe^{1-x}$ με $D_f=\Re$, $f'(x)=(xe^{1-x})'=e^{1-x}-xe^{1-x}$,
$f''(x)=(e^{1-x}-xe^{1-x})'=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=xe^{1-x}-2e^{1-x}$, έχω :
$f''(x)=0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

x	- ∞	2	+ ∞
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Για τα πρόσημα της $f''(x)$ έχω :

$f''(x)>0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \Leftrightarrow x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow xe^{1-x}-2e^{1-x}<0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)<0 \Leftrightarrow x<2$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(2, f(2)) \to \mathrm{A}\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$.

iii. $f(x)=\begin{cases} -3x^2+1, x<0 \\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0 \end{cases}$

- Για $x<0$, $f(x)=-3x^2+1$, $f'(x)=-6x$, $f''(x)=-6<0$
- Για $x>0$, $f(x)=-x^3+3x^2+1$, $f'(x)=-3x^2+6x$, $f''(x)=-6x+6$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x+6=0 \Leftrightarrow x=1$

Θα εξετάσουμε αν η $f(x)$ έχει εφαπτομένη στο $x_0=0$, δηλαδή αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(-x+3)}{x}=0$$ άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

x	- ∞	0		1	+ ∞
$f''(x)$	-		+	0	-
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και στο $[1,+\infty)$, κυρτή στο $[0,1]$ και έχει σημεία καμπής τα $\mathrm{A}(0, f(0)) \to \mathrm{A}(0,1)$ και $\mathrm{B}(1, f(1)) \to \mathrm{B}(1,3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=x^3+3x^2-6x$ ii. $f(x)=3x^5-10x^3+2x+1$

iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ iv. $f(x)=\ln(x^2+1)$

3) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=e^x(x^2+1)$ ii. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ iv. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

4) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = xe^{1-x}$ ii. $f(x) = x^2(2\ln x - 5)$

iii. $f(x) = e^{-x^2}$ iv. $f(x) = \text{εφ}x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

v. $f(x) = x|x|$ vi. $f(x) = \sqrt{|x|}$

5) Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4, x \le 0 \\ x^3 - 6x^2 + 4, x > 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, x \le 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, x > 1 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , \ x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , \ x \ge 0 \end{cases}$ iv. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , \ x < 0 \\ \sqrt{x} & , \ x \ge 0 \end{cases}$

6) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

7) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \Re$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
   ii. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, f(x_1))$, $\mathrm{B}(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Η f(x) ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Για να δείξω ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει σημεία καμπής, υποθέτω ότι υπάρχει x_0 που είναι θέση σημείο καμπής, οπότε αν η $f(x)$ είναι και δυο φορές παραγωγίσιμη, από θεώρημα (ερώτηση 52) θα ισχύει $f''(x_0) = 0$ και με συνεπαγωγές καταλήγω σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) (Άσκηση 5 σελ. 279 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει : $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.
Λύση : $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ (1)
Η $f(x)$ δυο φορές παραγωγίσιμη άρα παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (1) και έχω :
$(f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3)' = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0$ (2)

παραγωγίζω και τα δυο μέλη της (2) και έχω : $(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x)'=0 \Leftrightarrow$
$2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow 2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f'(x))^2+f(x)f''(x)-f''(x)+1=0$ (3). Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στη θέση x_0, δηλ. το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής, και η f δυο φορές παραγωγίσιμη άρα ισχύει : $f''(x_0)=0$, στην (3) για $x=x_0$ έχω :

$$(f'(x_0))^2+f(x_0)f''(x_0)-f''(x_0)+1=0 \overset{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow (f'(x_0))^2+1=0$ που είναι άτοπο, άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)+e^x=3f(x)-\alpha^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου $0<\alpha\neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

11)Έστω μια συνάρτηση $f:(1,3)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x)+xf(x)+x^2-3x+1=0$ για κάθε $x\in(1,3)$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- **(Δεδομένο σημείο καμπής)** Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και στο x_0 η f έχει σημείο καμπής τότε ισχύει : $f''(x_0)=0$. Επειδή όμως αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή, πρέπει για κάθε τιμή της παραμέτρου που θα βρούμε, να εξετάσουμε αν πράγματι το x_0 είναι θέση σημείου καμπής.
- **(Δεδομένη κυρτότητα)** Έστω η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Για να είναι:
  1. η f κυρτή στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$
  2. η f κοίλη στο Δ αρκεί να ισχύει $f''(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\Delta$

  και η ισότητα και στις δυο περιπτώσεις να ισχύει για διακεκριμένες τιμές.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^5-(4\beta+2)x^3+(\alpha-1)x+1$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(1,-4)$.

Λύση : $f'(x)=5\alpha x^4-3(4\beta+2)x^2+\alpha-1$, $f''(x)=20\alpha x^3-6(4\beta+2)x$

Η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0=1$ άρα : $f''(1)=0$ (1)

Το σημείο καμπής $\mathrm{A}(1,-4)$ είναι σημείο της C_f άρα : $f(1)=-4$ (2)

(1) και (2) : $\begin{cases} f''(1)=0 \\ f(1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-6(4\beta+2)=0 \\ \alpha-(4\beta+2)+\alpha-1+1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\alpha-24\beta=12 \\ \alpha-4\beta-2+\alpha=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha - 6\beta = 3 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$. Τέλος επειδή η συνθήκη για το σ.κ. $f''(1) = 0$ είναι απαραίτητη όχι όμως και ικανή, πρέπει να ελέγξω αν οι παραπάνω τιμές είναι δεκτές. Έχω : $f''(x) = 20\alpha x^3 - 6(4\beta + 2)x \Leftrightarrow f''(x) = 60x^3 - 60x$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x = 1, ή, x = -1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$60x$	-		-	0	+		+
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Άρα όπως φαίνεται και από το πινακάκι η $f(x)$ έχει σημείο καμπής στη θέση $x_0 = 1$ και άρα οι τιμές των α,β είναι δεκτές.

13)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\Re$.

Λύση :

$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2$, $f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12$.

Για να είναι η $f(x)$ κυρτή στο $\Re$, πρέπει να ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12\alpha x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 \geq 0$, για το τριώνυμο που πρόεκυψε πρέπει να ισχύει : $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-2,2]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1,4)$.

15)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^3 - 6\alpha x^2 + 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(2,3)$.

16)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

17)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ, ώστε η C_f να έχει στο $x_1 = -1$ ακρότατο το 10 και στο $x_2 = 1$ να έχει σημείο καμπής.

18)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + \lambda x^3 + (3\lambda - 9)x^2 - 7x + 4$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

19)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^4 + 2(\lambda - 3)x^3 + 6\lambda x^2 - 3x + 5$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \geq \lambda x + \beta$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \leq \lambda x + \beta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f'\left(x^2+1\right) > e-1$.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.

iv. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x$.

vi. Να λύσετε την εξίσωσης : $f\left(e^x\right) + e^x = e^{x+1} + 1$

Λύση :

i. $f(x) = e^x - \ln x$, με $D_f = (0,+\infty)$, $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in D_f = (0,+\infty)$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ συνεπώς η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $x^2+1 \in (0,+\infty)$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$,έτσι : $f'\left(x^2+1\right) > e-1 \Leftrightarrow f'\left(x^2+1\right) > f'(1)$, η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η $f' \uparrow$, οπότε,
$f'\left(x^2+1\right) > f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

iii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1, f(1))$, τότε $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y - e = (e-1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = ex - e - x + 1 \Leftrightarrow y = ex - x + 1$

iv. Η $f(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει :
$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x \geq ex - x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$.

v. Η εξίσωση ορίζεται για $x \in (0,+\infty)$ και έχουμε : $\dfrac{f(x)-1}{e-1} = x \Leftrightarrow f(x) = (e-1)x + 1$, όμως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $(\varepsilon): y = ex - x + 1$, με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{A}(1, f(1))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq (e-1)x + 1$ και το «=» μόνο για $x = 1$. Τελικά : $f(x) = (e-1)x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

vi. Η εξίσωση ορίζεται για $e^x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ και έχουμε : $f\left(e^x\right)+e^x = e^{x+1}+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f\left(e^x\right) = e^{x+1} - e^x + 1 \Leftrightarrow$
$f\left(e^x\right) = e^x(e-1)+1 \overset{e^x = y>0}{\Leftrightarrow} f(y) = (e-1)y+1 \overset{v.}{\Leftrightarrow} y = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης $f(x)=e^x(x^2+3)$ σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του σημείου επαφής.

22)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^4$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, f(0))$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1+2x-x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^{x-1}$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} \geq \dfrac{x+2}{x^2-4x+6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi}-2x^2-x\ln x$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\pi}-x\ln x \leq 2x^2-6x+4$ για κάθε $x>0$.

25)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x+a\ln x\right)^2$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta): 8x-2y+2011=0$.
- i. Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της (ε)
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- iii. Να αποδείξετε ότι $3+\left(x+\ln x\right)^2 \geq 4x$ για κάθε $x>0$.

26)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\left(\ln x\right)$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$.
- iii. Να δείξετε ότι $\ln\left(\ln x\right) \leq \dfrac{x}{e}-1$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.
- iv. Να λυθεί η εξίσωση $e\ln x - e^{\frac{x}{e}} = 0$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο σημείο καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-x)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x\le e^x-1\Leftrightarrow x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

Τελικά $D_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f''.

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_1=(-\infty.1]$, άρα $g(\mathrm{A}_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{e^x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0$.

Άρα : $g(A_1)=(-1,e-1]$, το $0\in g(A_1)=(-1,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in A_1=(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[1,+\infty)$, άρα $g(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\ \right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x)-1\right)=+\infty\cdot(-\infty)-1=-\infty$

Άρα : $g(A_2)=(-\infty,e-1]$, το $0\in g(A_2)=(-\infty,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2=[1,+\infty)$.
Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in A_2=[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x<1$, Τότε για κάθε :

$x<x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_1)\Leftrightarrow g(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$

$x>x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_1)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$

- Αν $x>1$, Τότε για κάθε :

$x<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_2)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$

$x>x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_2)\Leftrightarrow g(x)<0\Rightarrow f''(x)<0$

x	- ∞	x_1		1	x_2	+ ∞
$f''(x)$	-	0	+	+	0	-
f	κοίλη	Σ.Κ.	κυρτή	κυρτή	Σ.Κ.	κοίλη

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο σημεία καμπής, στο x_1 και στο x_2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x+e^x-\dfrac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-x\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ στο οποίο συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x(1-\ln x)$. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή σε ένα ακριβώς σημείο $x_0=\alpha$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Θ.Μ.Τ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

ii. $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

Λύση :

i. Αν $\alpha=\beta$, τότε $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\alpha)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(\alpha)\geq 2f(\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)\geq f(\alpha)$ όπου ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

1) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

- f συνεχής στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

2) Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

- f συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα :

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)>2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Αν $\alpha>\beta$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Άρα για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$ ισχύει : $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ii. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $f(x)$ στο $[x,x+1]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x,x+1]$
- Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Όμως $\xi\in(x,x+1)$ άρα $\xi<x+1$ (1). Θα πρέπει να πάρω f' και στα δυο μέλη της (1), πρέπει όμως να γνωρίζω τη μονοτονία της f'. Όμως η f κυρτή στο $\Re$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι η σχέση (1) θα γίνει : $(1):\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Έστω μια κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

ii. $f'(x)<f(x)-f(x-1)<f'(x-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33) Έστω $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι $f'(\alpha)<\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$.

34) Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι $f(x)+f(3x)<2f(2x)$, για κάθε $x>0$.

35) Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0)=0$ και $f'(x)>1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι $x<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$.

36)Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$

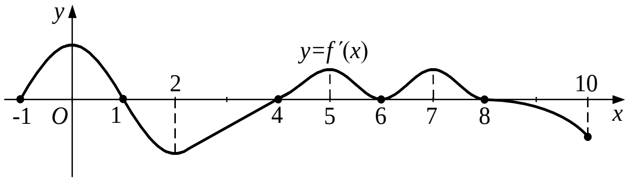
ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iii. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta}{\alpha+\beta}\geq\ln\frac{\alpha+\beta}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta>0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

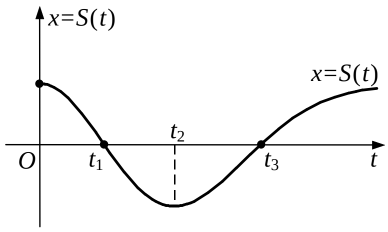
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

38) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
ii. Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

39) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)} + f(x) = x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.
ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(0, f(0))$
iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \le f(x) \le \frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε : $2f(\xi) = (\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}$

40)
i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x\ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$
iv. Να δείξετε ότι : $x + \ln x > \sqrt{4x-3}$ για κάθε x>1.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x) - e^{-x} + 1$
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

42)
i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - 2\ln x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (1,2)
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x - x\ln x$ παρουσιάζει καμπή.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.8

ΘΕΜΑ 2 #35172

Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ln(1 + x^2).

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.(Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #34438

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x)=0$ και $f''(x)=0$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #26736

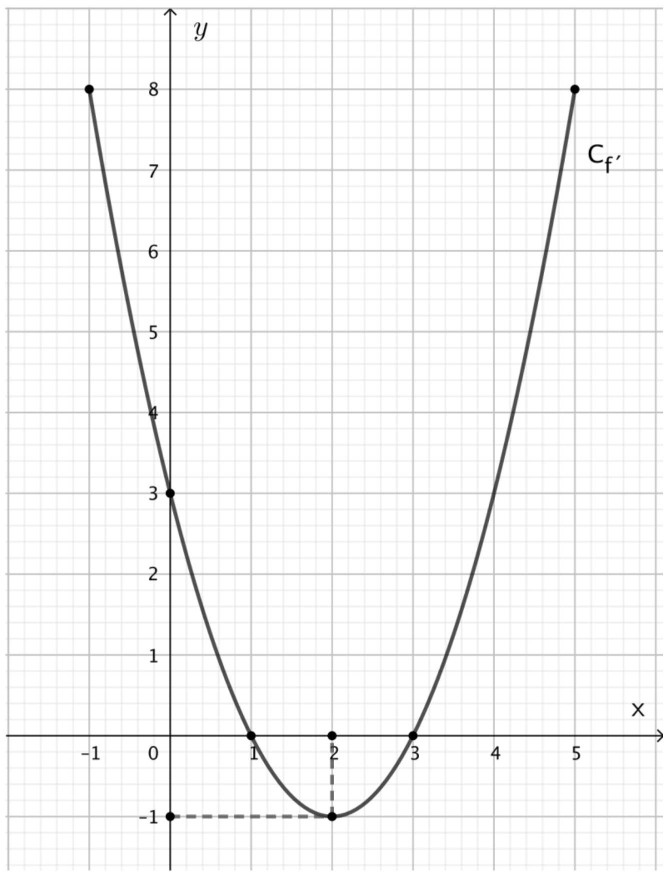
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0=2$; (Μονάδες 06)

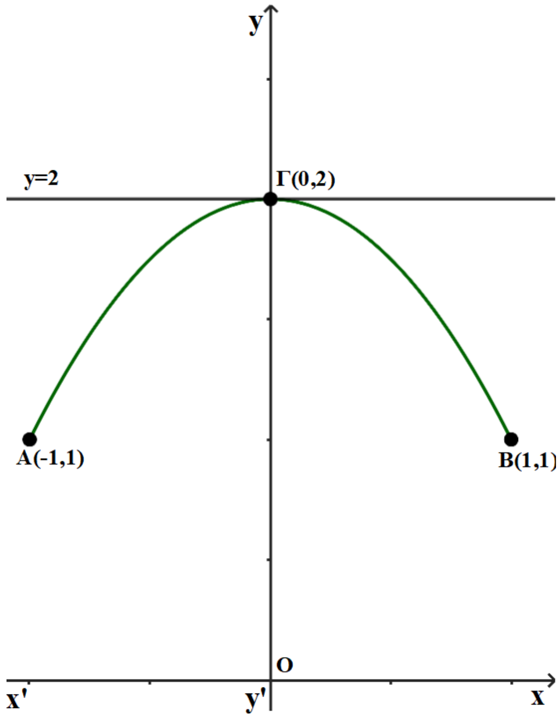
γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2)-1=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=2$.

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2 #32799

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #31527

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)=x^4+3x^2-8,\ x\in\mathbb{R}}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μονάδες 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $\mathrm{A(1,\ f(1))}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το A, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3 #33994

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #31550

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ το οποίο είναι μοναδικό.

(Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0}+x_0$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #31549

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023}>2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022)<f(2021)+f(2023)$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται $e\simeq 2,71$.

ΘΕΜΑ 4 #27667

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}+2023, x\in\mathbb{R}$.

1) Να αποδείξετε ότι:
   i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)
   ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)
2) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 05)
3) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x)=\alpha x-f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho)-f(\rho)$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #25745

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και

$$(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)<0, \text{ για κάθε } x\in(0,2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:
   i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)
   ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

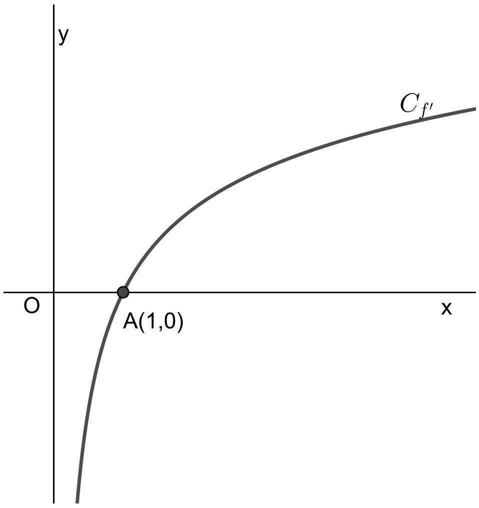
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #27320

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο (0,+ ∞) η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το (0,+ ∞). Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+ ∞) με $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό κ∈(0,+ ∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(κ, $f(\kappa)$) να ισούται με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #24760

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,e)$ με $f'(x_0)=0$.

(Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_0}(1-x_0)+1-\ln x_0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #23312

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και

$f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2,2]$ και κατόπιν ότι $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #23531

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

54. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f;
(2010, 2015 Β΄, 2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ)

Απάντηση :

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

55. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); **(2007, 2016 Β΄)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

56. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$; **(2004 Β΄, 2005, 2011)**

Απάντηση :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως αν $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

57. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση :

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :
Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in R$, αντιστοίχως : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in R$ και $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in R$.

Χρήσιμα σχόλια :

1. Αποδεικνύεται ότι:
—Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
—Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$**, με βαθμό του αριθμητή** $P(x)$ **μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες**.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f **αναζητούμε:**
— **Στα άκρα των διαστημάτων** του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.
—Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

Παρατηρήσεις :

- Η C_f μπορεί να έχει (ένα μόνο) κοινό σημείο με μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της.
- Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η (ε) μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.

58. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα του de L΄Hospital.

Απάντηση :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλιο :

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού, αν υπάρχει άκρο ανοιχτού διαστήματος x_0 (εκτός $\pm\infty$), τότε για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο x_0. Βρίσκω το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, αν κάποιο από αυτά τα όρια είναι $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Άρα για κατακόρυφες ασύμπτωτες ψάχνω στα ανοιχτά άκρα του πεδίου ορισμού της f και στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x-4}$

Λύση :

i. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και είναι συνεχής, άρα για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_0 = 1$. Έχω : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

ii. $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x-4}$, $D_f = (2,4)\cup(4,+\infty)$ και είναι συνεχής, άρα για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_1 = 2$ και στο $x_2 = 4$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\ln(x-2)}{x-4} = +\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης : $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\ln(x-2)}{x-4} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): x = 4$ είναι και αυτή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ v. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

iii. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ iv. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$ vi. $f(x) = \dfrac{x-5}{|x-2|}$

vii. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ viii. $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ix. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x-1}, x\le 0\\ \dfrac{\ln x}{x}, x>0\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της. Για οριζόντια ασύμπτωτη θα ψάξω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\Re$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Αντίστοιχα αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l\in\Re$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$.

Λύση :

$f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$, $D_f=\mathbb{R}$, και είναι συνεχής, άρα για οριζόντια ασύμπτωτη ψάχνω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4}{x^4}=2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4}{x^4}=2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x^2+7x+13}{x^2+2}$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-2}{x+1}$

iii. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΛΑΓΙΕΣ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

➢ Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re \text{ (όχι } \pm\infty) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re \text{ (όχι } \pm\infty)$$

➢ Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re \text{ (όχι } \pm\infty) \text{ και } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re \text{ (όχι } \pm\infty)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

- Η ασύμπτωτη $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν λ=0, ενώ αν $\lambda\neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη. Αυτό σημαίνει ότι για πλάγιες – οριζόντιες μπορώ να ψάχνω ταυτόχρονα, αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda=0$ οριζόντια, αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\neq 0$ πλάγια.
- Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε για την C_f δεν αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η ε μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο κατά 2 βαθμούς του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$ ii. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

Λύση :

i. $f(x)=\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$, $D_f=\Re-\{2,3\}=(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$. Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-9x+1}{x^3-5x^2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-9x+1-2x(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6}\right]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 9x + 1 - 2x^3 + 10x^2 - 12x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2 - 21x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{x^2} = 10$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$, $D_f = \Re = (-\infty, +\infty)$. Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} \overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4x + 5}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = 2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = -1$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x] =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{|x|\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x + 5}{-x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = -2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = -x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ iii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ iv) $f(x) = \frac{\ln(9 - x^2)}{x^2}$

7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ii. $f(x)=\frac{6x^3-5x^2+7}{2x^3+11x-13}$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$

iv. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-1}$

v. $f(x)=3x-5+\frac{7}{e^x+x^2}$

8) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-x+5}{x-1}, x<1\\ \frac{6x-5}{2x-4}, 1\le x\ne 2\end{cases}$.

9) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x+5}{x-2}, x<2\\ \sqrt{x^2+4x+13}, x\ge 2\end{cases}$

10)Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x)=x-\left|e^x-1\right|$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΥΘΕΙΑ $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΤΗΣ C_f - ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

1ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$ ή αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$

2ος τρόπος : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$ ή αντίστοιχα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\frac{2x^2-6x+13}{x-1}$ όταν $x\to-\infty$.

Λύση :

1ος τρόπος : Η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-4)\right]=0$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}-(2x-4)\right]=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2-6x+13-(x-1)(2x-4)}{x-1}\right]=$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13-2x^2+4x+2x-4}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{9}{x-1}\right]=0$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2ος τρόπος : Η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=-4$

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-6x+13}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

Επίσης : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13}{x-1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x+13-2x^2+2x}{x-1}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x+13}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x}{x}\right]=-4$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x-3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon):y=3x-2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to+\infty$.

Λύση : Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon):y=3x-2$ τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=-2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x-3}}{x}=3\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3\quad(1)$$

Αν $\alpha=0$, τότε $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow0=3$, άτοπο

Άρα είναι $\alpha\neq0$, οπότε έχουμε : $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2-\beta x+9}{x^2-3x}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{x^2}=3\Leftrightarrow\alpha=3$

Επίσης : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2-\beta x+9}{x-3}-3x\right]=-2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-\beta x+9-3x^2+9x}{x-3}=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\beta x+9+9x}{x-3}=-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(9-\beta)}{x}=-2\Leftrightarrow9-\beta=-2\Leftrightarrow\beta=11$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

13)Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες τις αντίστοιχες ευθείες :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ την $(\varepsilon): y=x+2$ όταν $x\to-\infty$

ii. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-1}$ την $(\varepsilon): y=2x-3$ όταν $x\to+\infty$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2+5}+x+3$ την $(\varepsilon): y=2x+3$ όταν $x\to+\infty$

14)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές των α,β αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

15)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+\beta x+16}+x$. Να βρείτε :

i. τις τιμές των α,β αν η ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x-5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

16)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+5}+\alpha x$. Να βρείτε :

i. το α αν η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 4x-2y+2011=0$

ii. τις ασύμπτωτες της C_f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$.

Λύση : Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=3x+6$ τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=6$.

Έχω : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\overset{x>0}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(f(x)-3x)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-3x}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{6}{2}=3$$

18)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=5x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \Re$, ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-5x^2-\lambda x+4}{\lambda f(x)+10x-2}=\dfrac{1}{4}$.

<u>Λύση :</u> Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y=5x-2$ τότε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-5x]=-2$.

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-5x^2-\lambda x+4}{\lambda f(x)+10x-2}=\dfrac{1}{4}\overset{\div x}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-5x-\lambda+\dfrac{4}{x}}{\lambda\dfrac{f(x)}{x}+10-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{-2-\lambda}{5\lambda+10}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\lambda+10=-8-4\lambda \Leftrightarrow 9\lambda=-18 \Leftrightarrow \lambda=-2$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

19)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)f(x)-3x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$.

20)Έστω η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

i. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$

(Θέμα Πανελληνίων)

21)Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί :

i. το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-4x^2+\sqrt{x^4+1}}{x^2f(x)-2x^3+x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}}$

ii. ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-2x^2+\lambda x+13}{\lambda f(x)-4x+21}=\dfrac{4}{7}$.

22)Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)f(x)-3x^2+x\right]=2011$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

23)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-2x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}}=-3$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη το $+\infty$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

<u>ΚΑΝΟΝΕΣ DE L΄ HOSPITAL</u>

<u>*Οι μεθοδολογίες και οι ασκήσεις για τους κανόνες De L΄Hospital αναλύθηκαν στις σελίδες : 233 – 237*</u>

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

59. Με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία που ακολουθούμε λέγεται μελέτη συνάρτησης. Ποια βήματα περιλαμβάνει ;

Απάντηση :

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της *f*.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της *f* στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της *f*, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η *f* είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ’ ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της *f*** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της *f*. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της *f*.

Σχόλιο :

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων *O*. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση *f* είναι **περιοδική** με περίοδο *T*, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ’ ένα διάστημα πλάτους *T*.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

ΛΥΣΗ

1. Η *f* έχει πεδίο ορισμού το R.

2. Η *f* είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	-16 Τ.Ε.	$\nearrow$	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

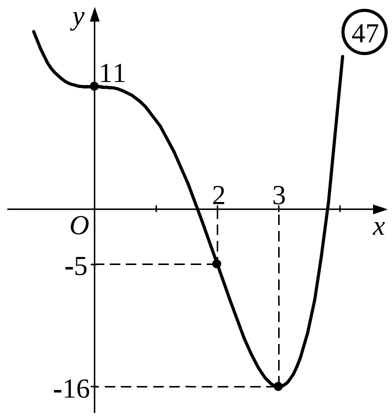
Οι ρίζες της f'' είναι οι $x=0$, $x=2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	11 Σ.Κ.	↘	-5 Σ.Κ.	↗	

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-4x^3+11) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-4x^3+11) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της *f*.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	11 Σ.Κ.	↘	-5 Σ.Κ.	↘	-16 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1}\right)' = \dfrac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Οι ρίζες της f' είναι $-1, 3$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3 Τ.Μ.	↘	‖	↘	5 Τ.Ε.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↘	‖	↗	

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1, \quad \text{οπότε} \quad \lambda=1$$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$, οπότε $\beta=0$.

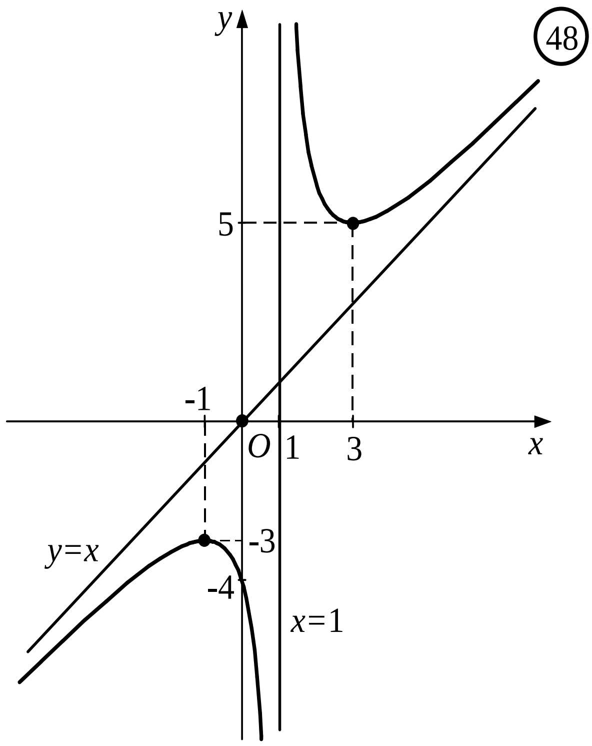
Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Επίσης έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+4}{x-1}=+\infty$.

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{-3}$ Τ.Μ.	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\boxed{5}$ Τ.Ε.	↗	$+\infty$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

   i. $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$

   ii. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

   iii. $f(x)=x^4-2x^2$.

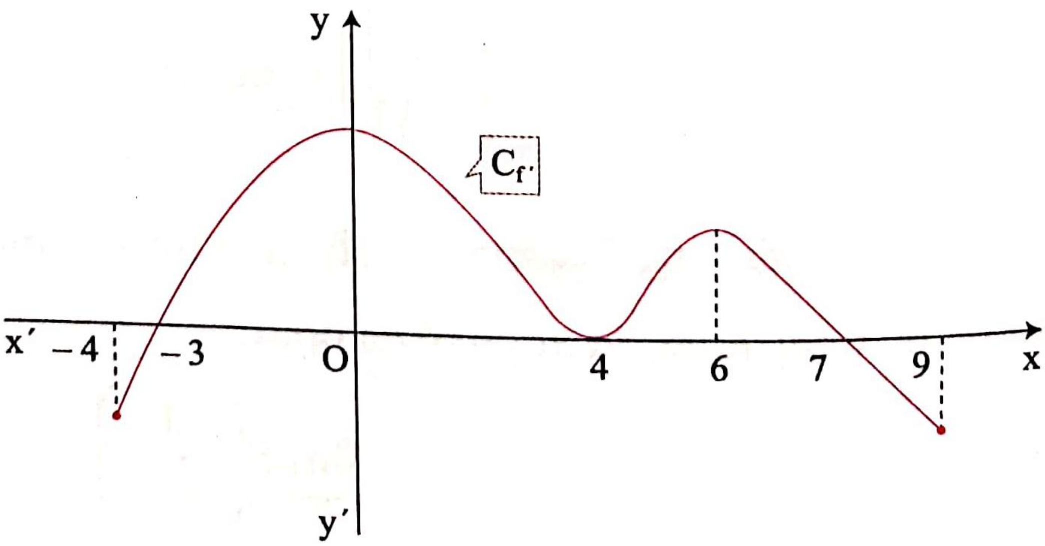
2) Ομοίως τις συναρτήσεις :

   i. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

   ii. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$.

3) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

4) Δίνεται μια συνάρτηση $f:[-4,9]\to\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και ισχύουν : $2f(9)=2f(0)=f(-4)=f(4)=2,\ \ f(6)=3,\ \ f(7)=5,\ \ f(-3)=0$.



   i. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ τέσσερις ρίζες.

   ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

   iii. Με βάση τα δεδομένα και τα συμπεράσματα από το προηγούμενο ερώτημα, να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

   iv. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f\left(\sqrt{3}\right)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

   v. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο καμπής της C_f με οριζόντια εφαπτομένη.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 2.9 – 2.10

ΘΕΜΑ 2 #33995

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y=x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$". (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 #35602

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε’): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #27084

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2 #34439

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$ και $g(x)=\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

Αν $h(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ‘1-1’. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 #31547

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #25748

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. (Μονάδες 8)

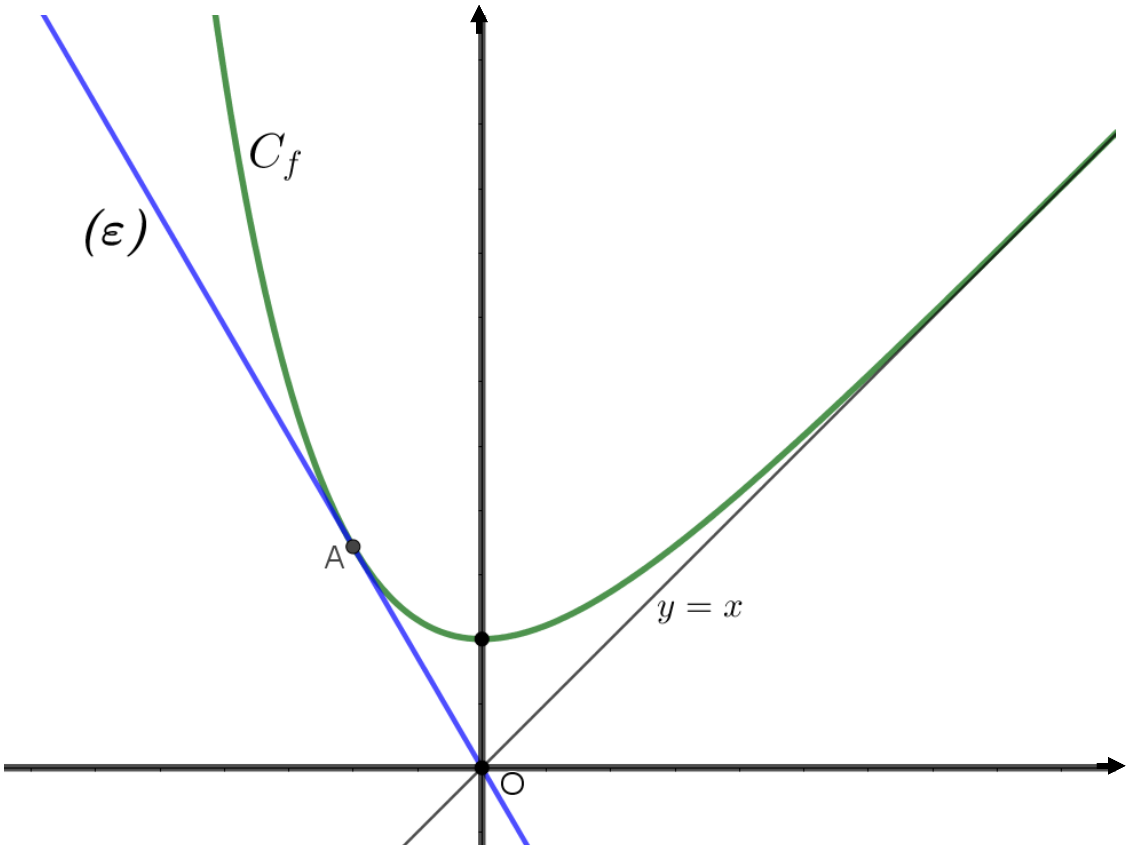
β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #23530

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #33999

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x},\ \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)=-f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1)$, $x>0$ είναι σταθερή. (Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x}\le g(x)\le\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #33648

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln^2 x$ και $g(x)=\ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g. (Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x=\alpha,\ 1<\alpha<e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #31746

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$. (Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #28314

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x>1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #28342

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^{x}$, $x<1$ και $g(x)=\frac{e}{x}$, $x>1$, αντίστοιχα. Έστω $Α(α\,,0)$ με $α<1$.

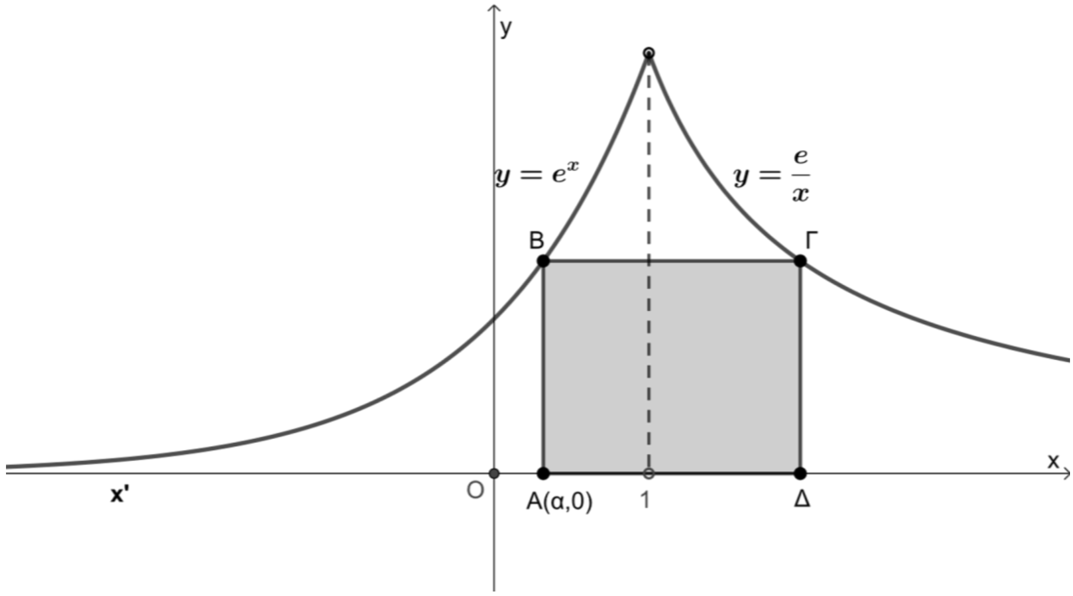
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_{Δ}=e^{1-α}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $Ε(α)=e-αe^{α}$, $α<1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ . (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4 #29130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xημx$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

iii. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $Α\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

iv. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #24759

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #24579

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \ \kappa\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf'(x) > e^x - f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.
   i. Να δείξετε ότι $f(x) > \dfrac{e^x - 1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   iii. Να δείξετε ότι $f(0) \geq 1$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$
   i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (1,e)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο α να είναι παράλληλη στον x΄x.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$
   i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

4) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, x > 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.
   i. Να δείξετε ότι f είναι συνεχής .
   ii. Να βρείτε την $f'(0)$
   iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
   v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   vi. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2 \ln x = \alpha$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.
   i. Να βρείτε τα α,β ώστε το Α(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f .

   Για α=4 και β=-1 ,
   ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
   iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
   iv. Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 1$.

6) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-f(x)=-4e^{-3x}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=2$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)-e^{-4x}$ είναι σταθερή στο R.

ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x\in\Re$.

(ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2007)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

iv. Να αποδείξετε ότι ισχύει f΄(x+1)>f(x+1)−f(x), για κάθε x > 0. (3ο Πανελλήνιες 2008)

8) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1)=1$ και : $xf(x)+x^2f'(x)=1$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex=e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e)=e^2$ και : $xf'(x)-2f(x)=x^2$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x^2\ln x$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x=e^{\frac{a}{x^2}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

10) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(0)=0$ και : $f'(x)-f(x)=e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^{x}$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

11) Για μια πραγματική συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2001)*

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

i. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι α=e
ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
iii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞)
iv. αν β, γ $\in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2009)

13) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \Re$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση : $f''(x) > 4\left(f'(x) - f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $g(x) = f(x)\cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο R.
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. *(Θέμα Πανελληνίων)*

14) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
ii. Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα x΄x , να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15) Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει : $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2e^x$, για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(0, f(0))$ είναι η $(\varepsilon): y = 2x + 2$.
iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην ευθεία (ε) και η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

(Θέμα Β study4exams)

16) Να δείξετε ότι :

i. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$

ii. Η συνάρτηση $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Επιπλέον :

iii. να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Θέμα Γ study4exams)

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ ισχύει $e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2$, να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Θέμα Γ study4exams)

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2+1)\ln x$, $x > 0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

(Θέμα Γ study4exams)

19) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x+2) - 5}{x - 1} = 6$

i. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 5$ και $f'(3) = 6$

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x + 2 - f(x)}{\eta\mu(x-3)}$

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο.

iv. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

20) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(1)=0$
- $2\sqrt{1-x}\,f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $x\in(0,1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3 f^{-1}(x)\right)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$, με $x_0\in(0,1)$.

v. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

21) Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$.

Αν επιπλέον ισχύει : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

iii. Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$

iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

22) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{f(x)}{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ x\,, & x=0\end{cases}$

ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\dfrac{1}{2}x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο κοινό της σημείο με τον άξονα y΄y.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+4x+3)e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(0, f(0))$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα : $(x^2+4x+3)e^x \geq 7x+3$, για κάθε $x \geq -4+\sqrt{3}$.

(Θέμα Γ study4exams)

24) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ.

i. Να δείξετε ότι : $f(\alpha)+f(\beta) \geq 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για κάθε $\alpha,\beta \in \Delta$.

Επιπλέον :

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

iii. Αν $\alpha > \dfrac{1}{e}$, $\beta > \dfrac{1}{e}$ να δείξετε ότι : $\dfrac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\dfrac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\dfrac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$

(Θέμα Γ study4exams)

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|1-\ln x|}{x}$, με $x>0$.

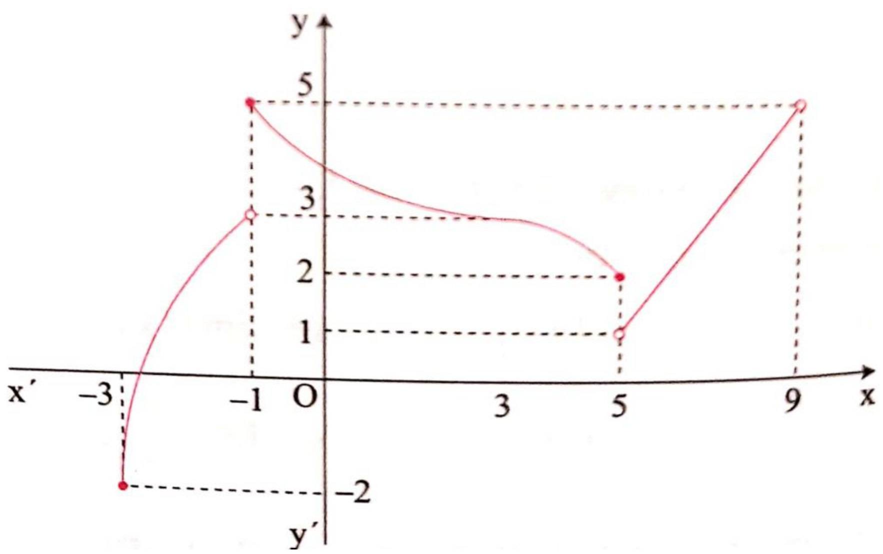
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Αν η τετμημενη του σημείου $\mathrm{M}(x, f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $\mathrm{E}(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ, όπου $\mathrm{A}(x,0)$, $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{B}(0, f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0)=4$.

iii. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι : $x(t)=t+1$ και ότι η συνάρτηση $\mathrm{E}(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1,+\infty)$.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2012)

26) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

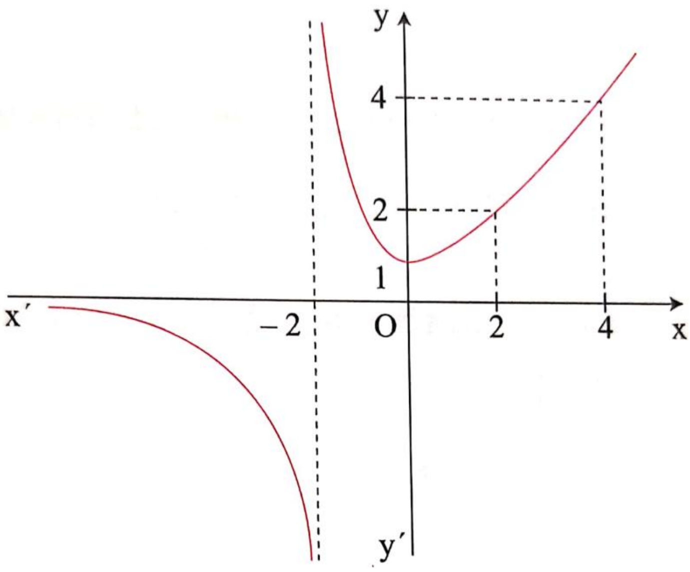
α. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ γ. $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x^2-1\right)$ δ. $\lim\limits_{x\to 3} f\left(f(x)\right)$

iii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

iv. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει : $f'(x_0)=0$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας, θεωρήστε γνωστό ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (3,3) διέρχεται από το σημείο (0,3).

v. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\sqrt{30}+h\right)-f\left(\sqrt{30}\right)}{h}$.

27) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ με $\mathrm{A}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.



i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

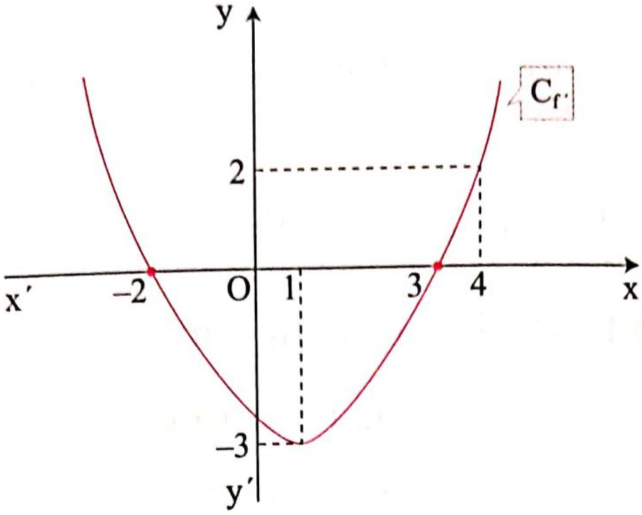
α. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ γ. $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ δ. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right)$

iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $\dfrac{1}{f}$.

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=1$.

v. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x)\right)=2,\ x>0$.

28) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



i. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

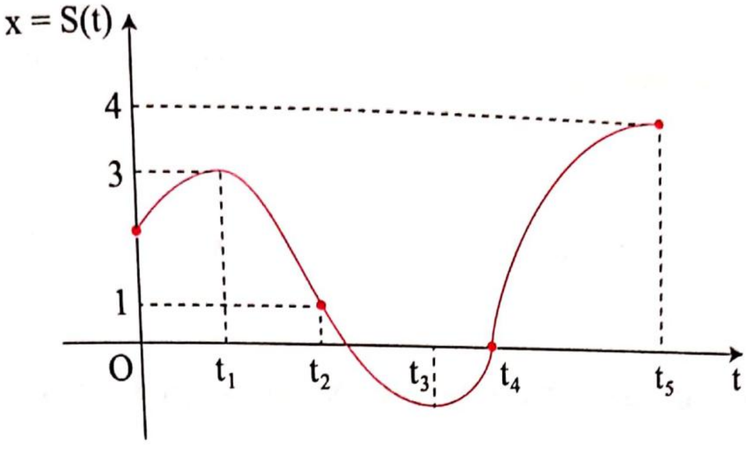
ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(4+h\right)-f\left(4\right)}{h}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=\dfrac{5}{3}$.

iv. Να λύσετε στο διάστημα $[3,+\infty)$ την εξίσωση : $\left(f(x)-f(4)\right)\cdot\left(f(x)+f(4)-2f(3)\right)=0$.

v. Αν $f(1)=4$, τότε να αποδείξετε ότι $f(2)\in(1,4)$.

29) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x=S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



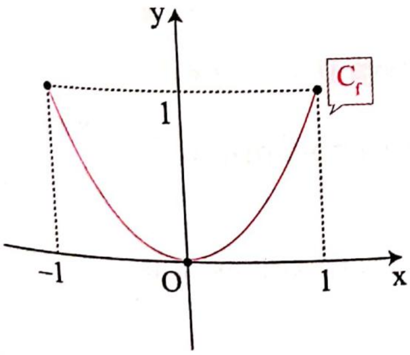
Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_2 και t_4, τότε να βρείτε :

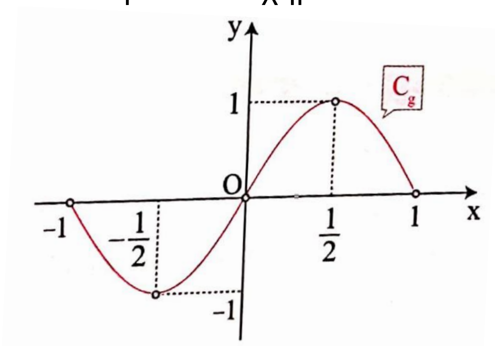
i. Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

iii. Τη μέση ταχύτητα του κινητού κατά το χρονικό διάστημα από $t_1=2$ έως $t_5=12$ και να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε κατά το χρονικό διάστημα από t_1 έως t_5.

30) Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.





Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h:(-1,1)\to\Re$ με τύπο $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της h.

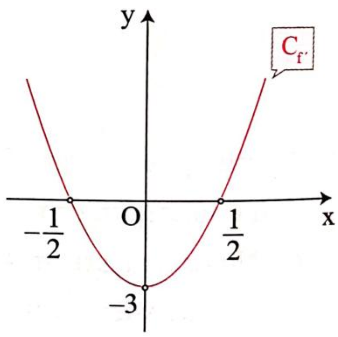
ii. Να κατασκευάσετε τον πίνακα προσήμου της h' και να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h\left(\frac{x^2}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\right)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}$.

v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=2$.

31) Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι : $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^3}=4$ και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο σχήμα.



i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{e^x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu^2 x)-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{2}\right)>1$.

v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

vi. Να λύσετε την ανίσωση : $f(2x)+3x>f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

4) Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2ημx+\frac{1}{ημ^2x} + 3$, όπου $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

5) Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

6) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

7) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0\in[α, β]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

8) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

10) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

12) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

13) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

14) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

15) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

16) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

17) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$

19) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

20) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

21) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x ∈ Δ να ισχύει: f(x) = g(x) + c.

22) Έστω η συνάρτηση f(x) = $\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

23) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ, της εφαπτομένης στο σημείο Α(x_0, f(x_0)), της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι λ = f΄(x_0).

24) Έστω η συνάρτηση f(x) = συνx , όπου x∈IR . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει f ΄(x) = − ημx.

25) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν :

• η f είναι συνεχής στο Δ και

• f΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

26) Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f ΄(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

27) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

28) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_o f(x_o)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

29) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(α,β) τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

30)Έστω συνάρτηση f(x) = εφx.Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR_1=IR–{x/συνx = 0} και ισχύει : $f'(x) = \frac{1}{συν^2 x}$

31) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε x∈IR .

32) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και g(x_o) ≠ 0, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)g'(x_o) - f'(x_o)g(x_o)}{[g(x_o)]^2}$

33) Για κάθε x ≠ 0 ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$

34) Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

35) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

36) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

37) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι +∞ ή –∞, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

38) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

39) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ.

40) Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx με πεδίο ορισμού το R, τότε f ΄(x)= – συνx, για κάθε x∈R.

41) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

42) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει : f΄΄(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

43) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

44) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

45) Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- f(α) = f(β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε: f΄ (ξ) = 0.

46) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

47) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (-1,0).

48) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

49) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

50) Ισχύει : (συνx)΄ = ημx, $x \in R$.

51) Αν f(x) = $α^x$, α > 0, τότε ισχύει $(α^x)' = xα^{x-1}$.

52) Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι: $(cf(x))' = f'(x)$, για κάθε x ∈ Δ.

53) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$, τότε : $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$

54) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

55) Για κάθε x∈ $\mathbb{R}_1$= ℝ–{x/συνx=0} ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

56) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

57) Ισχύει : $(\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, x∈ℝ – {x / ημx ≠ 0}

58) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

59) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει πάντα f(x) = g(x) για κάθε x_0∈Δ

60) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

61) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x) > 0 στο (α,x_0) και f΄(x) < 0 στο (x_0, β), τότε το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f

62) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει :

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

63) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

64) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

65) Η συνάρτηση f(x) = ln |x|, x∈**R***** είναι παραγωγίσιμη στο **R***** και ισχύει : $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

66) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

67) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, όπου $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

68) Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

69) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

70) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

71) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

72) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

73) Για κάθε συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

74) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο [α,β] με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$

75) Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

76) Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

77) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

78) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

79) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x΄x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα x΄x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

81) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

82) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

83) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

2Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1)Λ 2)Λ 3)Σ 4)Σ 5)Λ 6)Σ 7)Λ 8)Σ 9)Λ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Λ 16)Σ 17)Λ 18)Λ 19)Λ 20)Λ 21)Σ 22)Λ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Λ 27)Σ 28)Λ 29)Σ 30)Σ 31)Λ 32)Λ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Λ 38)Λ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Λ 43)Λ 44)Σ 45)Σ 46)Λ 47)Σ 48)Λ 49)Σ 50)Λ 51)Λ 52)Λ 53)Σ 54)Λ 55)Λ 56)Λ 57)Λ 58)Σ 59)Λ 60)Σ 61)Σ 62)Λ 63)Σ 64)Λ 65)Σ 66)Λ 67)Σ 68)Σ 69)Λ 70)Λ 71)Λ 72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Λ 76)Λ 77)Λ 78)Λ 79)Σ 80)Σ 81)Σ 82)Σ 83)Σ

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2017)***

«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

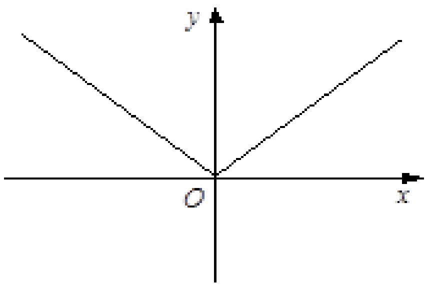
α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$ ενώ,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2019)***
«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta=(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ με:

- συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει όταν η f είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1\ ,\ x<0\\ \ \ 1\ ,\ x>0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2020 Ν.Σ.)***
«Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

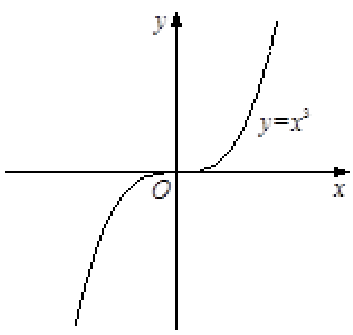
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$.



4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

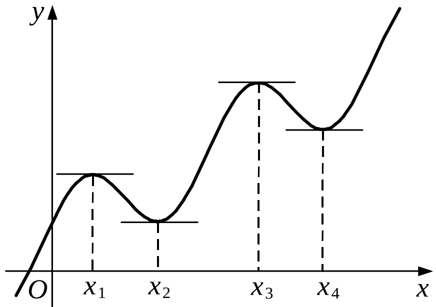
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το τοπικό μέγιστο στη θέση x_1 είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση x_4.



(a)

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής».

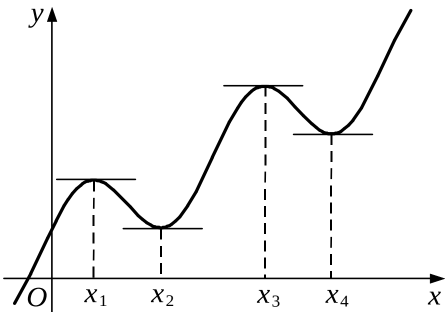
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι στη θέση x_3, αν και έχουμε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, δεν είναι το μέγιστο της συνάρτησης αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



(a)

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Re$, αν για κάποιο $x_0 \in \Re$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακρότατου της f».

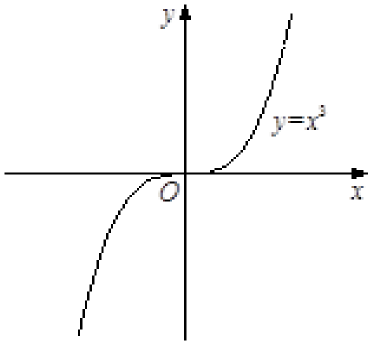
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η ρίζα της παραγώγου είναι το 0, δηλαδή $f'(0) = 0$. Εντούτοις, όπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.



7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ.)***
«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Για κάθε συνάρτηση f κυρτή στο Δ ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ».

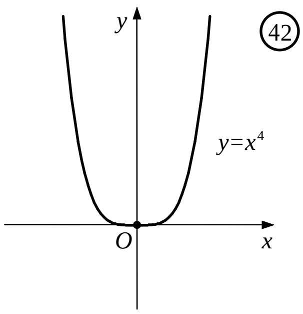
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\Re$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\Re$, αφού $f''(0) = 0$.



8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0,\, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της f ».

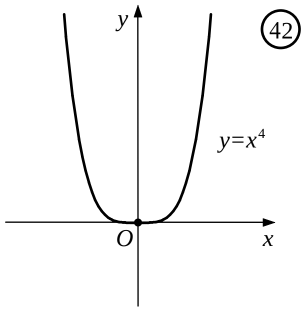
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x)=12x^2$ δηλ. $f''(0)=0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.



3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β΄, 2003, 2015 Β΄)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού
$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε : $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Παρατηρήσεις :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό.

  Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά έχει παράγουσα στο $\Re$ την $F(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$
- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x)=0$	$F(x)=c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=1$	$F(x)=x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=x^{\alpha}$	$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\,,\ c\in\Re\,,\ \alpha\neq-1$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}$	$F(x)=\varepsilon\phi x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^{2}x}$	$F(x)=-\sigma\phi x+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=e^{x}$	$F(x)=e^{x}+c\,,\ c\in\Re$
$f(x)=\alpha^{x}$	$F(x)=\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c\,,\ c\in\Re$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :

  i. Η συνάρτηση F+G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f+g

  ii. Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ :

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της **f** στο **Δ** ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^\alpha=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq-1$
- $\dfrac{1}{x}=(\ln|x|)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=(\sqrt{x})'$
- $\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x)'$
- $e^x=(e^x)'$
- $\alpha^x=\left(\dfrac{\alpha^x}{\ln a}\right)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\phi x)'$
- $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=(-\sigma\phi x)'$

- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$
- $f(x)+x\cdot f'(x)=\left(x\cdot f(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\left(\ln|f(x)|\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $e^{f(x)}\cdot f'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x)\cdot f'(x)=\left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)=\left(\eta\mu f(x)\right)'$
- $\eta\mu f(x)\cdot f'(x)=\left(-\sigma\upsilon\nu f(x)\right)'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=3x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

   Λύση :

   Είναι : $F(x)=3\dfrac{x^{2+1}}{2+1}+c=3\dfrac{x^3}{3}+c=x^3+c,\ x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$

   Η C_F διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,2)$ άρα : $F(1)=2\Leftrightarrow 1^3+c=2\Leftrightarrow c=1$.

   Άρα : $F(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

   (Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)

   i. $f(x)=x^3+12x^2-6x-5$

   ii. $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{x}+2e^x\ ,\ x>0$

   iii. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

iv. $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}$, $x>0$

Λύση :

i. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+12\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-5x+c \Leftrightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}+4x^3-3x^2-5x+c$, $x\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$

ii. $F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2e^x+c \Leftrightarrow F(x)=3\ln|x|+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+2e^x+c \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=3\ln x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2e^x+c$, $x>0$, $c\in\mathbb{R}$ $\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}: \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\right)$

iii. $F(x)=3\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=3\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x)=6\sqrt{x}-5\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x-2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+c$ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $c\in\mathbb{R}$

$\left(\pi\rho o\sigma o\chi\acute{\eta}: \dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{-\frac{1}{2}}\right)$

iv. Είναι : $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2}=2x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x)=x^2+\ln|x|+\dfrac{1}{x}+c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(x)=x^2+\ln x+\dfrac{1}{x}+c$ $x>0$, $c\in\mathbb{R}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγώγισης)

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}$, $x>0$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}$, $x>0$

Λύση :

i. $f(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=(x^2)'\eta\mu x+x^2(\eta\mu x)'=(x^2\cdot\eta\mu x)'$

Άρα : $F(x)=x^2\cdot\eta\mu x+c$, $x\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)=\dfrac{2e^x-xe^x}{x^3}=\dfrac{2xe^x-x^2e^x}{x^4}=-\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=\left(-\dfrac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x)=-\dfrac{e^x}{x^2}+c$ $x>0$, $c\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}=\dfrac{e^x+e^x x\ln x}{x}=\dfrac{e^x}{x}+e^x\ln x=e^x\dfrac{1}{x}+e^x\ln x=\left(e^x\ln x\right)'$

Άρα : $F(x)=e^x\ln x+c \quad x>0, \quad c\in\mathbb{R}$

4. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :
(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)$

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}$

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

Λύση :

i. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=(-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(-e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)'$, άρα : $F(x)=-e^{\sigma\upsilon\nu x}+c \quad x\in\mathbb{R}, \quad c\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)=(x^2+3x+5)^6\cdot(2x+3)=(x^2+3x+5)^6\cdot(x^2+3x+5)'=\left(\dfrac{(x^2+3x+5)^7}{7}\right)'$

Άρα : $F(x)=\dfrac{(x^2+3x+5)^7}{7}+c \quad x\in\mathbb{R}, \quad c\in\mathbb{R}$.

iii. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2017}=\dfrac{(x^2-x+2017)'}{x^2-x+2017}=\left(\ln\left|x^2-x+2017\right|\right)'$

Άρα : $F(x)=\ln\left|x^2-x+2017\right|+c \quad x\in\mathbb{R}, \quad c\in\mathbb{R}$.

iv. $f(x)=\dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{2\eta\mu x\cdot(\eta\mu x)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\dfrac{(1+\eta\mu^2 x)'}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=2\dfrac{(1+\eta\mu^2 x)'}{2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}=\left(2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)'$

Άρα : $F(x)=2\sqrt{1+\eta\mu^2 x}+c \quad x\in\mathbb{R}, \quad c\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

6. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=x$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,3).

7. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

v. $f(x)=x$

vi. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x>0$

vii. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$

viii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x>0$

8. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^3$

ii. $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $x>0$

iii. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}$

9. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{1}{x}+\sigma\upsilon\nu x$, $x>0$

ii. $f(x)=2e^x-\frac{3}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=3^{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2$, $x>0$

10. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\eta\mu x-\frac{1}{x^2}+e^{-x}$, $x>0$

ii. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

iii. $f(x)=2^x-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

11. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2}$, $x>0$

ii. $f(x)=\frac{(3x-2)^2}{x^2}$, $x<0$

iii. $f(x)=\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2}{\eta\mu^2 x}$, $x\in(0,\pi)$

12. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

ii. $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$

iii. $f(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$, $x>0$

iv. $f(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

vi. $f(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$

13. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^2$

ii. $f(x)=(3x^2-2)(x^3-2x+1)^2$

iii. $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^3}$

iv. $f(x)=\dfrac{3x}{(x^2+3)^2}$

v. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

vi. $f(x)=x\sqrt{3x^2+2}$

vii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}$

viii. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

ix. $f(x)=\sigma\upsilon\nu 3x-5e^{2x}$

x. $f(x)=2\eta\mu 3x-5\cdot 2^x$

xi. $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

xii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

xiii. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

xiv. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$

xv. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x>-3$

xvi. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

xvii. $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

2Α. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(1)=7$ και F μια αρχική της f στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει : $F(x)=xf(x)-2x^3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

15. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $F(0)=0$ όπου F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $2xF(x)+x^2f(x)=4x^3-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2Β. ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}(x-1)$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1)=0$.
   i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F\left(F'(x)-2015\right)=0$ έχει μοναδική ρίζα.
   iii. Να δείξετε ότι η F είναι κυρτή.
   iv. Να δείξετε ότι : $F(x-1)+F(x+1)>2F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και F μια αρχική της f, για την οποία ισχύει : $F(1-2x)+F(x^2+2)=x^4+5x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να βρείτε τις τιμές $f(1),\ f(3)$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, με $x_0\in(1,3)$.
   iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$, με $\xi_1<\xi_2$, ώστε : $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}=2$.

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $[0,1]$ με $F(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2F\left(x^2-x\right)=-x(2x-1)f\left(x^2-x\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ με $F(0)=0$. Αν ισχύει $F(x)\le e^x\ln(x+1)$, για κάθε $x>-1$, να δείξετε ότι C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$.

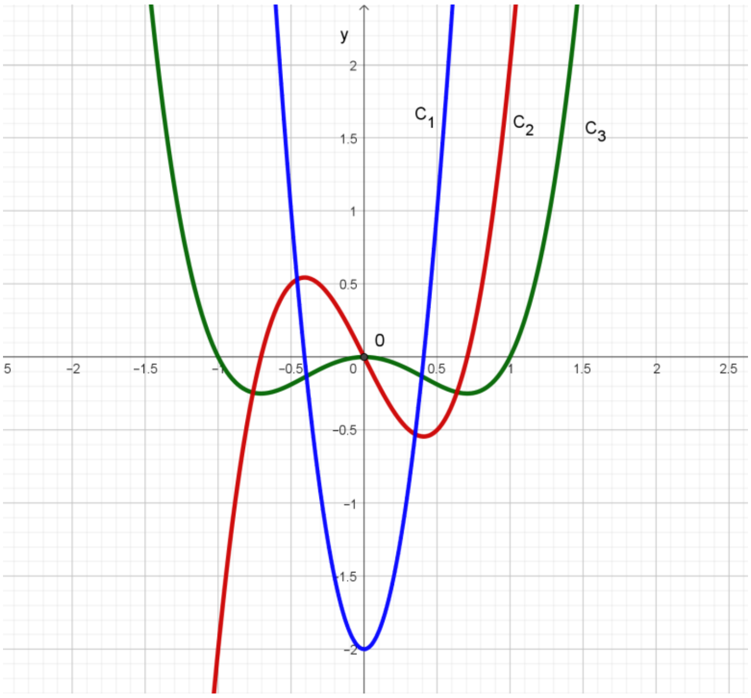
2Γ. ΟΡΙΑ

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Αν F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$, να βρείτε τα όρια :
   i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{(e^x-1)\eta\mu x}$
   ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{f(x)}$
   iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{e^x-x-1}$
   iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(e^{F^2(x)}-1\right)\ln\left|f(x)\right|\right]$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1

ΘΕΜΑ 3 #32693

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 #28338

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f' τέμνονται στο σημείο Α$(-2\,,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)

ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f'είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού και η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο Β$(0\,,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #24769

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$. (Μονάδες 6)

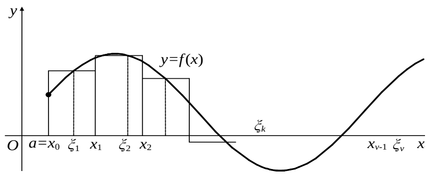
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$. (Μονάδες 5)

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$.



Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

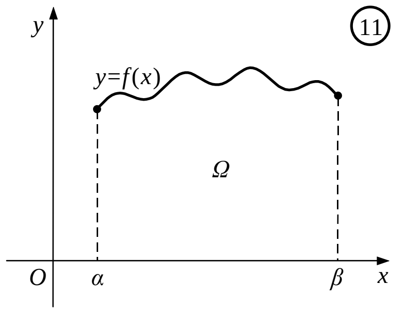
Σχόλιο :

- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος *S* της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια “όρια” εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.

- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα *x* είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :

Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της *f* τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή : $\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f(x)dx = E(\Omega)}$.



Επομένως,

$$\boxed{\text{Αν } f(x) \ge 0, \text{ τότε } \mathrm{E}(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0.}$$

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι :

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f,g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_{0}^{3} f(x)dx = 3$ και $\int_{0}^{4} f(x)dx = 7$, τότε

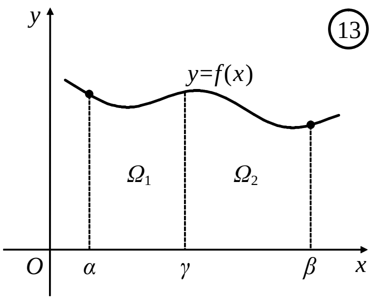
$$\int_{3}^{4} f(x)dx = \int_{3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = -\int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = -3+7 = 4 .$$

Σημείωση :

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

αφού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

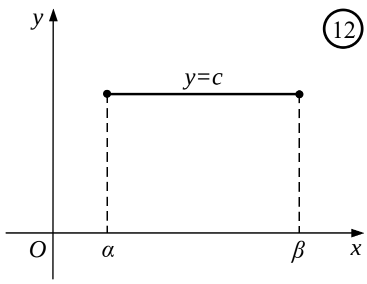
και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ ..

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} c\, dx = c(\beta - \alpha)}$.



3.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

65. Έστω $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ. Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad ,x\in\Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)
(2002, 2008 Β΄, 2010, 2013)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε : $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε : $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$

και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συμφώνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ) ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

I. $\int_{\alpha}^{\beta} 1dx = [x]_{\alpha}^{\beta}$

II. $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\kappa} dx = \left[\dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$

III. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{x}dx = [\ln|x|]_{\alpha}^{\beta}$

IV. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x} dx = [e^{x}]_{\alpha}^{\beta}$

V. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}$

VI. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta}$

VII. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{x^2}dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$

VIII. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = [\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Αν $\int_{1}^{5} f(x)dx = 2$, $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$ και $\int_{1}^{7} f(x)dx = 5$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{5}^{2} f(x)dx$

ii. $\int_{5}^{7} f(x)dx$

iii. $\int_{1}^{2} f(x)dx$

iv. $\int_{2}^{7} f(x)dx$

Λύση :

i. $\int_{5}^{2} f(x)dx = -\int_{2}^{5} f(x)dx = -3$

ii. $\int_{5}^{7} f(x)dx = \int_{5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = -\int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = -2+5=3$

iii. $\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{2} f(x)dx = 2-3=-1$

iv. $\int_{2}^{7} f(x)dx = \int_{2}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{7} f(x)dx = 3-2+5=6$

2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx$ ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx$ iii. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx$ iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx =$

Λύση :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx = \left[4\frac{x^2}{2}-3x\right]_1^3 = \left[2x^2-3x\right]_1^3 = (18-9)-(2-3) = 9+1 = 10$

ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx = \left[x^3-x^2+5x\right]_2^3 = (27-9+15)-(8-4+10) = 33-14 = 19$

iii. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx = \int_0^1 (x^2e^x)'dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 = e-0 = e$

iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\eta\mu x)'x-\eta\mu x(x)'}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\eta\mu x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0-\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_5^7 f(x)dx = 2$ και $\int_3^7 f(x)dx = 3$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_7^5 f(x)dx$

ii. $\int_3^5 f(x)dx$

iii. $\int_5^1 f(x)dx$

4) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x^4dx$ ii. $\int_1^3 2x^3dx$ iii. $\int_1^2 \frac{2}{x^3}dx$ iv. $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ v. $\int_0^2 3\sqrt{x}dx$ vi. $\int_1^2 \sqrt[3]{x}dx$ vii. $\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

viii. $\int_0^1 \frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}dx$ ix. $\int_1^2 (4x-1)dx$ x. $\int_0^{\pi} (2e^x+\eta\mu x)dx$ xi. $\int_1^e (2x\ln x+x)dx$ xii. $\int_0^1 (x-e^x)dx$

5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx$ ii. $\int_1^2 (t+1)dt$ iii. $\int_0^2 (x^2+x+2)dx$ iv. $\int_0^{\pi} (2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x)dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x+2\eta\mu x)dx$ vi. $\int_1^2 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}dx$ vii. $\int_1^4 \frac{2x^2-2x-3}{x}dx$ viii. $\int_0^2 (xe^x+e^x)dx$

ix. $\int_0^1 (2xe^x+x^2e^x)dx$ x. $\int_1^4 (2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}})dx$ xi. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$

1Β. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14$.

Λύση :

$$\int_{\alpha}^{3}(3x^2-\alpha x)dx=14 \Leftrightarrow \left[x^3-\alpha\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{3}=14 \Leftrightarrow 27-\alpha\frac{9}{2}-\left(\alpha^3-\alpha\frac{\alpha^2}{2}\right)=14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27-\frac{9\alpha}{2}-\alpha^3+\frac{\alpha^3}{2}=14 \Leftrightarrow 54-9\alpha-2\alpha^3+\alpha^3=28 \Leftrightarrow \alpha^3+9\alpha-26=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+13)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2 \\ \acute{\eta} \\ \alpha^2+2\alpha+13=0 \quad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \end{cases}$$. Άρα $\alpha=2$.

7) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την παράσταση : $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{f(x)}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx$.

Λύση :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{f(x)}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu x\cdot f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx==\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot f(x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}\right)dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right)'dx=-\left[\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{f(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_{2}^{\kappa}\frac{3x^2-1}{x^2+4}dx-\int_{\kappa}^{2}\frac{9-x^2}{x^2+4}dx=12$

9) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε να ισχύει : $\int_{1}^{3}\frac{e^x+x^3-x}{x^2+1}dx=\int_{3}^{1}\kappa dx+\int_{3}^{1}\frac{x^3+3x-e^x}{x^2+1}dx$

10) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε να ισχύει : $\int_{-1}^{\alpha}(\alpha x+3)dx=12$

11)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^{1} f(x)dx=12$, ενώ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=2x+2$. Να βρείτε τα α,β,γ.

12)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f(1)=5$ και $\int_1^2 (xf'(x)+f(x))dx=1$. Να βρείτε :

i. την τιμή $f(2)$

ii. το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2(3f(x)+xf'(x))dx$

13)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f'(1)+f(1)=0$ και $\int_0^1 \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0,-5)$.

1Γ. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x\,dt\right)dx=2$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 f(t)dt$

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt$

Λύση :

i. Έχω $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x\,dt\right)dx=2 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2$ (1)

Έστω $\int_1^2 f(t)dt=\lambda\in\Re$ τότε : Η (1) γίνεται : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\left(\int_1^2 f(t)dt\right)dx=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\lambda\sigma\upsilon\nu x\,dx=2\Leftrightarrow[\lambda\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\Leftrightarrow\lambda\eta\mu\pi-\lambda\eta\mu\frac{\pi}{2}=2\Leftrightarrow-\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=-2$$

Δηλ. $\int_1^2 f(t)dt=-2$.

ii. $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt=\int_{-2}^{0}3t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt\overset{i.}{=}\int_{-2}^{0}3t^2\cdot(-2)dt=-\int_{-2}^{0}6t^2dt=\left[-2t^3\right]_{-2}^{0}=-16$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15)Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g:\Re \to \Re$.

i. Αν ισχύει ότι : $\int_1^2 t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt = 14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x)dx$

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x)dx = 2$, τότε να βρείτε το : $\int_0^3\left(\int_1^2 f(t)g(x)dt\right)dx$

16)Αν ισχύει ότι $\int_4^5 f(x)dx = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3\left(\int_4^5 xf(t)dt\right)dx$

17)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1 = \int_1^2\left(\int_3^x 4dt\right)dx$ και $I_2 = \int_{-1}^2\left(\int_1^x 6t^2dt\right)dx$.

18)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(y)dy\right)dx - 6\int_0^1 f(x)dx = -9$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 f(x)dx$

ii. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 f(t)\sigma\upsilon\nu 3x dt\right)dx$

1Δ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

19) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$. (4ο 2008)

Λύση : Έστω $\int_0^2 f(t)dt = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)\lambda - 45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^2[(10x^3 + 3x)\lambda - 45]dx = \lambda \Leftrightarrow \lambda\left[\frac{5x^4}{2} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - 45[x]_0^2 = \lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46\lambda - 90 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$. Άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

20) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 12x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

21) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 2xf(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

1Ε. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Όταν έχουμε μια συνάρτηση της μορφής : $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \alpha\nu\ \ x\le x_0 \\ f_2(x), & \alpha\nu\ \ x>x_0 \end{cases}$ τότε για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με $\alpha<x_0<\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0, καθώς για να έχει νόημα το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, πρέπει η f να είναι συνεχής στο [α,β] άρα και στο x_0. Στη συνέχεια έχουμε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{x_0} f_1(x)dx+\int_{x_0}^\beta f_2(x)dx=...$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ \eta\mu x, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Λύση :

Για $x<0$ η $f(x)=x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική,

Για $x>0$ η $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική,

Στο $x_0=0$ είναι : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x=0$ και $f(0)=0$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ επομένως η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\Re$ άρα και στο [-π,π].

Έτσι : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} xdx+\int_{0}^{\pi}\eta\mu xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi=$

$=-\frac{\pi^2}{2}+1+1=2-\frac{\pi^2}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ \ x>0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \alpha\nu\ \ x\le 1 \\ 3x^2-6x+8, & \alpha\nu\ \ x>1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

1ΣΤ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Συνήθως συναντάμε τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$. Αρχικά λύνω την εξίσωση $f(x)=0$, βρίσκουμε το πρόσημο της f (με πινακάκι), βγάζουμε την απόλυτη τιμή, αν είναι απαραίτητο χωρίζουμε το [α,β], και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{0}^{2}(x^2-|x-1|)dx$

Λύση :

$\int_{0}^{2}(x^2-|x-1|)dx$

Έχω : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

Άρα : έστω $f(x)=x^2-|x-1| \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x<1 \\ x^2-x+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, καθώς από την αρχική της μορφή η $f(x)=x^2-|x-1|$, είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Άρα : $\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{1}(x^2+x-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x+1)dx=$

$$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\left(\frac{8}{3}-2+2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_{0}^{10}|x+1|dx$ ii. $\int_{-2}^{2}|3x^2-3|dx$ ii. $\int_{1}^{4}|3x-x^2|dx$ iv. $\int_{1}^{3}|\ln x|dx$ v. $\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

I. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)} f'(x)dx = \left[e^{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

II. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \left[2\sqrt{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

III. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln|f(x)|\right]_{\alpha}^{\beta}$

IV. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

V. $\int_{\alpha}^{\beta} f^{\kappa}(x) f'(x)dx = \left[\frac{\left(f(x)\right)^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν το ολοκλήρωμα μας θυμίζει κάποια από τις παραπάνω μορφές ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε απευθείας τον αντίστοιχο τύπο. Συνήθως όμως οι συναρτήσεις μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ίδιες. Τότε φτιάχνουμε την $f'(x)$ με κάποια απλή πράξη (π.χ. πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με ένα αριθμό) ώστε να αναχθούμε σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}dx$ v. $\int_0^3 (2x-3)\left(x^2-3x\right)^5 dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}dx = \int_0^1 (x^3+5)' e^{x^3+5}dx = \int_0^1 \left(e^{x^3+5}\right)' dx = \left[e^{x^3+5}\right]_0^1 = e^6 - e^5$

ii. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{x^3+1}}dx = \int_0^1 (2\sqrt{x^3+1})'dx = \left[2\sqrt{x^3+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$

iii. $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \frac{(x^2+5x+1)'}{x^2+5x+1}dx = \int_0^1 \left(\ln\left|x^2+5x+1\right|\right)' dx = \left[\ln\left|x^2+5x+1\right|\right]_0^1 = \ln 7$

iv. $\int_1^2 \frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}dx = \int_1^2 \frac{(x^2+2x)'}{\left(x^2+2x\right)^2}dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2+2x}\right)' dx = \left[-\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

v. $\int_0^3 (2x-3)\left(x^2-3x\right)^5 dx = \int_0^3 (x^2-3x)'\left(x^2-3x\right)^5 dx = \int_0^3 \left(\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right)' dx = \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right]_0^3 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^2 x^2e^{x^3+1}dx$ iii. $\int_0^1 2e^{2x}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ v. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}dx$

vi. $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ vii. $\int_0^1 \frac{4}{2x+1}dx$ viii. $\int_1^3 \frac{1}{3x-2}dx$ ix. $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2}dx$ x. $\int_1^2 \frac{4}{(2x+1)^2}dx$

xi. $\int_{-1}^0 (x+1)^9dx$ xii. $\int_0^3 (x-1)^5dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3Α : ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx}$$

όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις στο [α,β]

Για να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, πρέπει το ολοκλήρωμα να έχει τη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ ή να το φέρουμε εμείς στη μορφή αυτή (η προς ολοκλήρωση συνάρτηση να μπορεί να πάρει τη μορφή γινομένου δυο συναρτήσεων) και στη συνέχεια η μια από τις δυο συναρτήσεις να γραφεί με τη μορφή παραγώγου. Ουσιαστικά χρειαζόμαστε την παράγουσα μιας εκ των δυο συναρτήσεων ώστε το ολοκλήρωμα να πάρει την επιθυμητή μορφή. Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται ολοκληρώματα της μορφής :

1η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\cdot e^{\kappa x+\lambda}dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$

2η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\cdot \eta\mu(\kappa x)dx$, $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\eta\mu(\kappa x)$ και της $\sigma\upsilon\nu(\kappa x)$ αντίστοιχα.

3η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\cdot \ln f(x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\mathrm{P}(x)$.

4η Περίπτωση : $\int_\alpha^\beta e^{\kappa x+\lambda}\cdot \eta\mu(\gamma x)dx$, $\int_\alpha^\beta e^{\kappa x+\lambda}\cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x)dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{\kappa x+\lambda}$. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται η ιδιομορφία ότι κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εμφανίζεται σε κάποιο στάδιο ξανά το αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι θέτουμε το αρχικό ολοκλήρωμα με ένα γράμμα π.χ. Ι και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς Ι.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 xe^x dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1) = 1$

ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx = \int_0^1 x^2 e^{-x}dx = -\int_0^1 x^2(e^{-x})'dx = -\left[x^2e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (x^2)'e^{-x}dx =$

$= -(e^{-1}) + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} - \int_0^1 2x(e^{-x})'dx = -\frac{1}{e} - \left[2xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x)'e^{-x}dx =$

$= -\frac{1}{e} - (2e^{-1}) + \int_0^1 2e^{-x}dx = -\frac{3}{e} - \left[2e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e} - (2e^{-1}-2) = 2 - \frac{5}{e}$

30)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2x dx$

Λύση : $\int_0^\pi 2x\eta\mu 2xdx = \int_0^\pi 2x\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)'dx = \left[-2x\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x)'\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx =$

$= \left[-x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)dx = (-\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi) + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 2xdx = -\pi + \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^\pi =$

$= -\pi + \frac{\eta\mu 2\pi}{2} - \frac{\eta\mu 0}{2} = -\pi$

31)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln xdx$ ii. $\int_1^e \ln xdx$

Λύση :

i. $\int_1^2 (3x^2+1)\ln xdx = \int_1^2 (x^3+x)'\ln xdx = \left[(x^3+x)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 (x^3+x)(\ln x)'dx =$

$= 10\ln 2 - \int_1^2 (x^3+x)\frac{1}{x}dx = 10\ln 2 - \int_1^2 (x^2+1)dx = 10\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2 = 10\ln 2 - \left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right) =$

$= 10\ln 2 - \frac{10}{3}$

ii. $\int_1^e \ln xdx = \int_1^e (x)'\ln xdx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - \int_1^e 1dx =$

$e - \left[x\right]_1^e = e - e + 1 = 1$

32)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi e^x\eta\mu xdx$

Λύση : Έχω : $I = \int_0^\pi e^x\eta\mu xdx = \int_0^\pi (e^x)'\eta\mu xdx = \left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\eta\mu x)'dx =$

$= e^\pi\eta\mu\pi - e^0\eta\mu 0 - \int_0^\pi e^x\sigma\upsilon\nu xdx = -\int_0^\pi (e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx = -\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx =$

$-(e^\pi\sigma\upsilon\nu\pi - e^0\sigma\upsilon\nu 0) + \int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx = -(-e^\pi - 1) - \int_0^\pi e^x\eta\mu xdx = e^\pi + 1 - I$

Άρα : $I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi+1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

33)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^x dx$ ii. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ iii. $\int_0^1 3xe^x dx$ iv. $\int_1^2 (x+1)e^x dx$ v. $\int_0^2 (1-3x)e^x dx$

vi. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ vii. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ viii. $\int_0^1 (3x^2-2x+1)e^{2x} dx$

34)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} x^2\sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\pi} x\eta\mu 2x dx$ iv. $\int_0^{\pi} 2x^2\eta\mu 2x dx$

35)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_1^2 x\ln x dx$ β. $\int_1^2 x\ln 2x dx$ γ. $\int_1^2 2x^2\ln x dx$ δ. $\int_1^2 (3x^2-4x)\ln x dx$

36)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} e^{2x}\sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\eta\mu 2x dx$ δ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sigma\upsilon\nu 2x dx$

3Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=2$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(\pi, f(\pi)\right)$ έχει εξίσωση : $2x-\pi y-\pi=0$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(\pi), f'(\pi)$ και $f(0)$

ii. το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\pi} xf''(x)dx$

Λύση :

i. Η ευθεία $(\varepsilon):2x-\pi y-\pi=0 \Leftrightarrow (\varepsilon): y=\frac{2}{\pi}x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(\pi, f(\pi)\right)$ αν : $\begin{cases} f'(\pi)=\frac{2}{\pi} \\ f(\pi)=\frac{2}{\pi}\pi-1 \Leftrightarrow f(\pi)=1 \end{cases}$

Επίσης :

1ος τρόπος : $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\left(f(x)\eta\mu x+f''(x)\eta\mu x\right)dx=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)'dx=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+0-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - [f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

2ος τρόπος :

$$\int_0^{\pi}\left(f(x) + f''(x)\right)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\left(f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x\right)dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [-f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)dx + [f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0] - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right) + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

ii. $\int_0^{\pi} xf''(x)dx = [xf'(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x)'f'(x)dx = \pi f'(\pi) - 0 - \int_0^{\pi} f'(x)dx = \pi\frac{2}{\pi} - [f(x)]_0^{\pi} =$
$= 2 - f(\pi) + f(0) = 2 - 1 + 1 = 2$.

38)Έστω F μια παράγουσα στο $\Re$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx$. ***(Ολοκλήρωμα Παράγουσας F)***

Λύση :

Είναι : $F'(x) = f(x)$, $x \in \Re$.

Έχουμε : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (x)'F(x)dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx = F(1) - \int_0^1 xf(x)dx =$

$$= 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = -\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx = -\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = -\left(\sqrt{2}-1\right) = 1-\sqrt{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 xf'(x)dx$

40) Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)g''(x) - f''(x)g(x))dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$

41) Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I} = \int_0^1 F(x)dx$.

42)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της Α(1,2) και Β(3,9) τέμνονται στο σημείο Γ(4,11). Να βρείτε :

i. τις τιμές $f'(1), f'(3)$ ii. το ολοκλήρωμα : $\int_1^3 xf''(x)dx$

43)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει : $\int_1^3\int_0^2 xf(t)dtdx = 12$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(2, f(2))$ έχει εξίσωση : $2x - y - 3 = 0$. Να υπολογίσετε :

i. τις τιμές $f(2), f'(2)$ ii. το $\int_0^2 f(x)dx$ iii. το $\int_0^2 x^2 f''(x)dx$

44)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I}(\lambda) = \int_\lambda^1 \ln x^3 dx$ με λ>0

i. Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{I}(\lambda)$.

45)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

46)Δίνεται το ολοκλήρωμα : $\mathrm{I}(\lambda) = \int_1^\lambda\left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2}\right)dx$ με λ>1

i. Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{I}(\lambda)$.

3Γ. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu = \int_0^1 x^\nu \cdot e^x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{I}_\nu = e - \nu\cdot\mathrm{I}_{\nu-1}$ για κάθε $\nu\geq 2$.

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 xe^x dx$ και $\int_0^1 x^4 e^x dx$

48)Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_\nu = \int_0^\pi x^\nu \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$, με $\nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{I}_\nu = -\nu\pi^{\nu-1} - \nu(\nu-1)\mathrm{I}_{\nu-2}$ για κάθε $\nu\geq 4$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$

49) Αν $I_\nu = \int_0^1\frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\nu\in\mathrm{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + \mathrm{I}_{\nu+1}$, $\nu\in\mathrm{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

- **1ηπεριπτωση :** Αν $P(x)=\mu Q'(x)$ τότε : $I=\mu\left[\ln|Q(x)|\right]_{\alpha}^{\beta}$
- **2ηπεριπτωση :** Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)<B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)$ τότε :
  - ✓ Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)=0\quad \kappa\alpha\iota\quad B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)=1$ έχουμε : $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mu}{\alpha x+\beta}dx=\frac{\mu}{\alpha}$ $\left[\ln|\alpha x+\beta|\right]_{\alpha}^{\beta}$
  - ✓ Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)=1\quad \kappa\alpha\iota\quad B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)=2$ με $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $\alpha\neq 0$, $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε : $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\kappa x+\lambda}{(\alpha_1 x-x_1)(\alpha_2 x-x_2)}dx$ $=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A}{(\alpha_1 x-x_1)}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{(\alpha_2 x-x_2)}dx$
- **3ηπεριπτωση :** Αν $B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ P(x)\geq B\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ Q(x)$ τότε εκτελούμε την ευκλείδεια **διαίρεση** $P(x):Q(x)$ και έτσι έχουμε : $P(x)=Q(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx$ ii. $\int_0^1\frac{5}{3x+2}dx$ iiii. $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ iv. $\int_4^5\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Λύση :

i. $\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx=\int_0^1\frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3}dx=\left[\ln|x^2+x+3|\right]_0^1=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$

ii. $\int_0^1\frac{5}{3x+2}dx=5\int_0^1\frac{1}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\int_0^1\frac{(3x+2)'}{3x+2}dx=\frac{5}{3}\left[\ln|3x+2|\right]_0^1=\frac{5}{3}(\ln 5-\ln 2)=\frac{5}{3}\ln\frac{5}{2}$

iii. $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Έχω $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 2x+1=A(x-3)+B(x-2)\Leftrightarrow$

$2x+1=Ax-3A+Bx-2B\Leftrightarrow 2x+1=(A+B)x-3A-2B\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=2\\-3A-2B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3A+3B=6\\-3A-2B=1\end{cases}$

άρα $B=7$ και $A+7=2\Leftrightarrow A=-5$

Άρα $\int_4^5\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}dx=$

$\int_4^5\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=-5\left[\ln|x-2|\right]_4^5+7\left[\ln|x-3|\right]_4^5=$

$-5(\ln 3-\ln 2)+7(\ln 2-\ln 1)=-5\ln 3+5\ln 2+7\ln 2=12\ln 2-5\ln 3$

iv. $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$

Εκτελούμε τη διαίρεση : $(x^2-3x+7):(x^2-5x+6)$ και έχω : $x^2-3x+7=1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1$.

Έτσι : $\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{1\cdot(x^2-5x+6)+2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_4^5 \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6}dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=$

$=\int_4^5 1dx+\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx\overset{i.}{=}[x]_4^5+12\ln 2-5\ln 3=1+12\ln 2-5\ln 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$ ii. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ iii. $\int_2^3 \frac{2}{x-1}dx$ iv. $\int_1^2 \frac{4}{5x+1}dx$

52)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-3x+2}dx$ ii. $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_4^5 \frac{2}{x^2-1}dx$ iv. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

53) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ ii. $\int_3^4 \frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2}dx$ iii. $\int_1^4 \frac{x}{x+2}dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{3x+1}dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ :

- Αν $\mathrm{I} = \int_{\kappa}^{\lambda} (\alpha x+\beta)^{\nu} \cdot (\gamma x+\delta)^{\mu} dx$, $\nu \geq \mu$, θέτουμε $u = \alpha x + \beta$
- Αν $\mathrm{I} = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt[\nu]{g(x)}\right)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{g(x)}$
- Αν $\mathrm{I} = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt[\nu_1]{\alpha x+\beta}, \sqrt[\nu_2]{\alpha x+\beta}\right)dx$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}$ οπού $\nu = \text{ΕΚΠ}(\nu_1, \nu_2)$
- Αν $\mathrm{I} = \int_{\kappa}^{\lambda} f\left(e^{\alpha x}\right)dx$ θέτουμε $u = e^{\alpha x}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx$ ii. $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ iii. $\int_{1}^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ iv. $\int_{0}^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$

Λύση :

i. $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx$ θέτω $u = x+2$ άρα $du = dx$

Για $x=-2$ είναι $u=0$

Για $x=-1$ είναι $u=1$

Άρα : $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx = \int_{0}^{1} (x-1)u^4 du \overset{u=x+2 \Leftrightarrow x=u-2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{0}^{1} (u-2-1)u^4 du = \int_{0}^{1} (u^5 - 3u^4) du =$

$= \left[\frac{u^6}{6} - 3\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{13}{30}$

ii. $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ θέτω $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1$ άρα $2udu = dx$

Για $x=0$ είναι $u^2 = 1 \Leftrightarrow u=1$ $(u = \sqrt{x+1}$ άρα $u \geq 0)$

Για $x=3$ είναι $u^2 = 4 \Leftrightarrow u=2$

Άρα : $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_{1}^{2} \frac{x}{u} 2udu = \int_{1}^{2} 2xdu \overset{u^2=x+1 \Leftrightarrow x=u^2-1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{1}^{2} 2(u^2-1)du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^2 = \frac{8}{3}$.

iii. $\int_{1}^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ θέτω $u = \sqrt[6]{x}$ άρα $u^3 = \sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt[3]{x}$ και $u^6 = x$ άρα $6u^5 du = dx$

Για $x=1$ είναι $u=1$

Για $x = 64$ είναι $u = 2$

Άρα : $\int_1^{64} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{u^6+u^2}{u^3}6u^5 du = \int_1^2 6u^2(u^6+u^2)du = \int_1^2 (6u^8+6u^4)du =$

$= 6\left[\frac{u^9}{9}+\frac{u^5}{5}\right]_1^2 = \frac{5668}{12}$

iv. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$ θέτω $u = e^x$ άρα $du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \ln 3$ είναι $u = e^{\ln 3} = 3$

Άρα : $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx = \int_1^3 \frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{e^x} = \int_1^3 \frac{u^2-2}{u+1}\frac{du}{u} = \int_1^3 \frac{u^2-2}{u^2+u}du$

Εκτελώ τη διαίρεση : $(u^2-2):(u^2+u)$ και εχω : $u^2-2 = 1(u^2+u)-u-2$

Άρα : $I = \int_1^3 \frac{u^2-2}{u^2+u}du = \int_1^3 \frac{u^2+u-u-2}{u^2+u}du = \int_1^3 \frac{u^2+u}{u^2+u}du - \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du =$

$\int_1^3 1du - \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du =$

$= [u]_1^3 - \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du = = 2 - \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du$

Για το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du$ έχω :

$\frac{u+2}{u(u+1)} = \frac{\mathrm{A}}{u} + \frac{\mathrm{B}}{u+1} \Leftrightarrow u+2 = \mathrm{A}(u+1)+\mathrm{B}u \Leftrightarrow u+2 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})u+\mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=1\\ \mathrm{A}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{A}=2\\ \mathrm{B}=-1\end{cases}$

Άρα : $I_2 = \int_1^3 \frac{u+2}{u^2+u}du \int_1^3 \frac{u+2}{u(u+1)}du = \int_1^3 \left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du = [2\ln|u|]_1^3 - [\ln|u+1|]_1^3 =$

$= 2\ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln 9 + \ln 2 - \ln 4 = \ln\frac{9}{2}$

Τελικά : $I = 2 - I_2 = 2 - \ln\frac{9}{2}$.

55)**(Συνδυαστικό παραγοντικής – αλλαγής μεταβλητής)**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$.

<u>Λύση :</u>

$\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ θέτω $u = 9+x^2$ άρα $du = 2xdx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 9$

Για $x = 1$ είναι $u = 10$ άρα έχω : $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx = \int_9^{10} x\ln u\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_9^{10}\ln u du =$

$\frac{1}{2}\int_9^{10}(u)'\ln u du = \frac{1}{2}[u\ln u]_9^{10} - \frac{1}{2}\int_9^{10}u(\ln u)'du = \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}\int_9^{10}1du =$

$= \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}[u]_9^{10} = = \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

56)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$ ii. $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ iii. $\int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx$ iv. $\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 3x dx$

v. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ vi. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 x e^{x^2+1}dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)dx$

57)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ ii. $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ iii. $\int_0^\pi \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ iv. $\int_0^1 x(x^2-1)^{99}dx$

v. $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ vi. $\int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2}dx$ vii. $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ viii. $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$

58) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx$ ii. $\int_0^1 e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^x dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}dx$ iv. $\int_0^\pi \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+1}dx$

v. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ vi. $\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^2 dx$ vii. $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x+1}dx$ ix. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 4x dx$

x. $\int_1^2 \varepsilon\phi x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$ xi. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ xii. $\int_1^{e^\pi} \frac{\eta\mu(\ln x)}{x}dx$ xiii. $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

59) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ii. $\int_0^{\pi/2} [\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x + x)]dx$ iii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x}\cdot \eta\mu 2x dx$.

60)Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $\int_4^9 f(x)dx = 6$. Να υπολογίσετε το $I=\int_2^3 xf\left(x^2\right)dx$.

61)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to(1,+\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(3,9). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_1^3 \frac{4f'(x)}{f^2(x)+2f(x)-3}dx$.

62)Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to(0,+\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει : $\int_0^2 \left(xf''(x)+3f'(x)\right)dx = 6$ τότε :

i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ii. Να βρείτε το $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x)+2f(x)}dx$

iii. Να αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε $f'(\xi)=1$.

5Β. ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $x=\alpha+\beta-u$

Αν έχουμε ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το οποίο δεν υπολογίζεται με κάποια από τις γνωστές μεθόδους, τότε ίσως μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση : $x=\alpha+\beta-u$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63)Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : i. $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ ii. $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$

Λύση :

Στο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ θέτω $x=\alpha+\beta-u$, άρα $dx=(\alpha+\beta-u)'du \Leftrightarrow dx=-du$

Για $x=\alpha$ είναι $\alpha=\alpha+\beta-u \Leftrightarrow u=\beta$

Για $x=\beta$ είναι $\beta=\alpha+\beta-u \Leftrightarrow u=\alpha$

Άρα : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\beta}^{\alpha}-f(\alpha+\beta-u)du=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$

i. Στο $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$ θέτω $x=-1+1-u \Leftrightarrow x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$

Για $x=1$ είναι $u=-1$

Άρα : $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{1}^{-1}-\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{\frac{1}{e^u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{e^u+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx$

Έτσι : $I_1+I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{e^x+1}dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(e^x+1)}{e^x+1}dx \Leftrightarrow 2I_1=\int_{-1}^{1}x^2dx \Leftrightarrow 2I_1=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow I_1=\frac{1}{3}$

ii. Στο $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx$ θέτω $x=0+\frac{\pi}{2}-u \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=0$ είναι $u=\frac{\pi}{2}$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=0$

Άρα : $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+1}\right)(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u+1}{\eta\mu u+1}\right)du=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx$

Έτσι : $I_2+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\eta\mu x+1}\right)dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)^{-1} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x+1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\right)dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

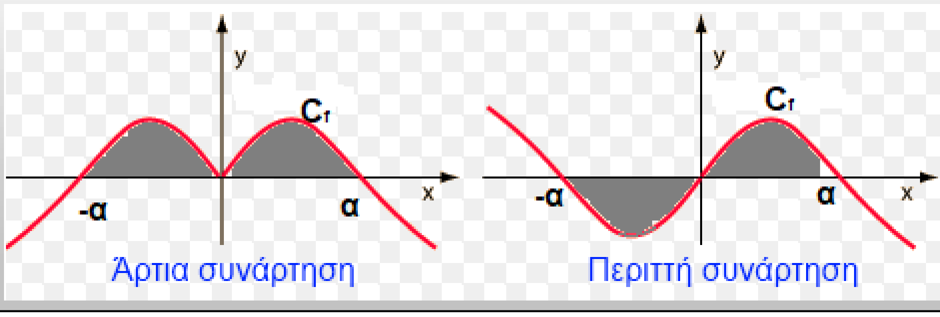
i. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4+e^x}{e^x+1}dx$ ii. $\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\varepsilon\varphi^3 x+1}dx$

5Γ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ – ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η ολοκλήρωση σε συμμετρικό διάστημα : $[-\alpha,\alpha]$, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, δηλ. το ολοκλήρωμα έχει ***αντίθετα άκρα***.

Θα αποδείξουμε ότι :

- Αν η f είναι άρτια, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
- Αν η f είναι περιττή, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι περιττή, τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha]\to\Re$ είναι περιττή, άρα για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x)=-f(x)$

Στο $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, θέτω $x=-u$, άρα $dx=-du$

Για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$

Για $x=\alpha$ είναι $u=-\alpha$

Έτσι : $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{-a}^{a} f(-u)du = \int_{-a}^{a} -f(u)du = -\int_{-a}^{a} f(x)dx = -I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0 \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ii. Έστω $f(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}$, με $x \in [-1,1]$. Για κάθε $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$

$$f(-x) = \frac{\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)}{1-x\eta\mu(-x)} = \frac{\ln\left(\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} = \frac{\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} =$$

$= \dfrac{\ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x} = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή

οπότε από i. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{1+x\eta\mu x}dx = 0$.

66)Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

i. Αν η f είναι άρτια, τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$

Λύση :

i. Η $f:[-\alpha,\alpha] \to \Re$ είναι άρτια, άρα για κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x) = f(x)$

Έτσι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \quad (1)$

Στο $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ θέτω $x = -u$, άρα $dx = -du$

Για $x = -\alpha$ είναι $u = \alpha$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$

Έτσι : $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(x)dx$

Άρα : $(1) \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

ii. Είναι $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx + \int_{-1}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx \quad (1)$

Έστω : $f(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$, με $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$,

$f(-x) = \dfrac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}} = \dfrac{-x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}} = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

και $g(x) = \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$, με $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$,

$g(-x) = \dfrac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}} = \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} = g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

Έτσι : $(1) \Leftrightarrow I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx + \int_{-1}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx \Leftrightarrow I = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} g(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = 0 + 2\int_{0}^{1} \dfrac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} I = 2\int_{0}^{1} \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}dx \Leftrightarrow I = 2\int_{0}^{1} \dfrac{(1+e^{x})'}{1+e^{x}}dx \Leftrightarrow I = 2\left[\ln(1+e^{x})\right]_{0}^{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I = 2\left(\ln(1+e) - \ln 2\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{-1}^{1}\frac{x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$ ii. $\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\varepsilon\varphi^3 x+1}dx$ iv. $\int_{-2}^{2}\frac{x^{15}\eta\mu^2 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx$

68)Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y=2x-5$. Να βρείτε :

i. τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$

ii. την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{N}(-1, f(-1))$

iii. το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^{1}\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+x\cdot f''(x)\right)dx$

5Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής : $\int_{\alpha}^{\beta}\eta\mu^{\kappa}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}x dx$,

- αν το ημx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$
- αν το συνx είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u=\eta\mu x$
- Αν και το ημx και το συνx είναι υψωμένα σε **άρτια** δύναμη, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμου : $\eta\mu^2 x=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 x dx$ ii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^2 x dx$

iii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^3 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

Λύση :

i. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 x dx$, θέτω $u=\eta\mu x$, άρα $du=\sigma\upsilon\nu x dx\Leftrightarrow dx=\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}$

Για $x=0$ είναι $u=0$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $u=1$

Έτσι : $\int_{0}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=\int_{0}^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{\pi}(1-\eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx=\int_{0}^{1}(1-u^2)\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{du}{\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\int_{0}^{1}(1-u^2)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

ii. $\int_{0}^{\pi}\eta\mu^2 x dx=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

iii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$, άρα $du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow dx = -\dfrac{du}{\eta\mu x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \pi$ είναι $u = -1$

Έτσι : $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)\sigma\upsilon\nu^2 x dx =$

$$= \int_1^{-1} \eta\mu x \cdot (1-u^2)u^2 \cdot \left(-\frac{du}{\eta\mu x}\right) = -\int_1^{-1} \left(u^2 - u^4\right) du = \int_{-1}^{1} \left(u^2 - u^4\right) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$ ii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

71) Αν $I = \int_0^{\pi/2} x\eta\mu^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$I + J$, $I - J$, I, J.

5Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \eta\mu u$ με $u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x, \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}\right) dx$ θέτουμε $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\varphi u$ με $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
- Αν σε ολοκλήρωμα εμφανίζεται (σε παρανομαστή) η παράσταση $\alpha^2 x^2 + \beta^2$, τότε συνήθως θέτουμε : $x = \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon\varphi u$ με $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

72)Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ ii. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx$

iii. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ iv. $\int_0^1 \dfrac{1}{x^2+1} dx$ v. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ vi. $\int_1^e \dfrac{\ln^2 x}{x} \cdot \sqrt{4 - \ln^2 x} dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$, και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής :

i. Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$

ii. Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης και τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται : $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} uf'(u)du = [uf(u)]_{\gamma}^{\delta} - \int_{\gamma}^{\delta} f(u)du...$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$.

Λύση :

i. $D_f = \Re$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$, είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $D_f = \Re$, άρα $f(\mathrm{A}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 + x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$

Άρα $f(\mathrm{A}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = D_{f^{-1}}$

ii. Στο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$.

Για $x = -1$ είναι $f(u) = -1 \Leftrightarrow f(u) = f(-1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = -1$

Για $x = 3$ είναι $f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$

Άρα : $\int_{-1}^{3} f^{-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} f^{-1}(f(u))\cdot f'(u)du = \int_{-1}^{1} u(3u^2+1)du = \int_{-1}^{1}(3u^3 + u)du =$

$$= \left[3\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{6} f^{-1}(x)dx$.

75)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

76)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+2=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)dx$.

77)Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e})=2$ και : $xf'(x)\ln x+f(x)=0$ για κάθε $x>1$

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{x}}dx$

78)Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{x^2}$

i. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1\frac{1}{1+x+e^{x^2}}dx+\int_1^e\frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}}dx$.

79)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(2,5)$ και ισχύει : $\int_0^2 xf''(x)dx=0$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$, ώστε $f''(\xi)=0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-1}^5\left(\frac{1}{3}f\left(\frac{x+1}{3}\right)+f^{-1}(x)\right)dx$.

80)Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x)=x-\ln x+e^x$, με $x\in(1,+\infty)$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$
ii. Να βρεθούν τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$
iv. Έστω $\Pi=\int_2^e f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi-2\ln 2$. (4ο Ομογενείς 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση :

- $f(x)+\gamma f\big(g(x)\big)=h(x)$ (1) και θέλουμε να υπολογίσουμε το $I=\int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx$ ή να δείξουμε μια σχέση που περιέχει αυτό, τότε λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$, ολοκληρώνουμε και αλλάζουμε μεταβλητή και άκρα ολοκλήρωσης.
- $f\big(h_1(x)\big)+\gamma f\big(h_2(x)\big)=h_3(x)$ (2) τότε θέτουμε $y=h_1(x)$ και η (2) γίνεται $f(y)+\gamma f\big(g(y)\big)=h(y)$ ή $f(x)+\gamma f\big(g(x)\big)=h(x)$ που είναι η (1).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(6-x)=3$ για κάθε $x\in[1,5]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in[1,5]$ είναι : $f(x)+f(6-x)=3\Leftrightarrow f(x)=3-f(6-x)$ (1)

Άρα : $\int_1^5 f(x)dx\overset{(1)}{=}\int_1^5\big(3-f(6-x)\big)dx=\int_1^5 3dx-\int_1^5 f(6-x)dx=[3x]_1^5-\int_1^5 f(6-x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$

Δηλ. $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx$ (2)

Για το $\int_1^5 f(6-x)dx$ θέτω $6-x=u$ άρα $-dx=du\Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=1$ το $u=5$, ενώ όταν $x=5$ το $u=1$

Άρα $\int_1^5 f(6-x)dx=\int_5^1 f(u)(-du)=\int_1^5 f(u)du=\int_1^5 f(x)dx$

Τελικά η (2) γίνεται : $\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(6-x)dx\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)dx=12-\int_1^5 f(x)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_1^5 f(x)dx=12\Leftrightarrow\int_1^5 f(x)dx=6$.

82)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x-3)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(2-x)+f(x-3)=2$ (1)

Θέτω $2-x=y\Leftrightarrow x=2-y$ άρα η (1) γίνεται : $f(y)+f(2-y-3)=2\Leftrightarrow$

$f(y)+f(-1-y)=2$ ή $f(x)=2-f(-1-x)$ (2)

Άρα :

$\int_{-1}^0 f(x)dx\overset{(2)}{=}\int_{-1}^0\big(2-f(-1-x)\big)dx=\int_{-1}^0 2dx-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=[2x]_{-1}^0-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$

Δηλ. $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ (3)

Για το $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx$ θέτω $-1-x=u$ άρα $-dx=du\Leftrightarrow dx=-du$

Όταν $x=-1$ το $u=0$, ενώ όταν $x=0$ το $u=-1$

Άρα $\int_{-1}^0 f(-1-x)dx=\int_0^{-1} f(u)(-du)=\int_{-1}^0 f(u)du=\int_{-1}^0 f(x)dx$

Τελικά η (3) γίνεται : $\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(-1-x)dx\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)dx=2-\int_{-1}^0 f(x)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int_{-1}^0 f(x)dx=2\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)dx=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

83)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(-x)=x^2\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

84)Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2-x)+f(x+2)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{4} f(x)dx$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στα ολοκληρώματα ισχύουν οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Αν $f(x)\geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$

(αν η f δεν είναι παντού 0 τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Αν $f(x)\geq g(x)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

(αν η f,g δεν είναι ισες τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : $m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq \mathrm{M}(\beta-\alpha)$

Απόδειξη :

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[a,\beta]$. Τότε ισχύει ότι : $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[a,\beta]$

Οπότε : $\int_{\alpha}^{\beta} mdx\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} Mdx$ δηλαδή : $m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$

Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, συχνά χρησιμοποιούμε :

- Τις βασικές ανισότητες :
  - $f^2(x)\geq 0$
  - $|\eta\mu x|\leq|x|$
  - $\ln x\leq x-1,\ x>0$
  - $e^x\geq x+1,\ x\in\Re$
- Τις ανισότητες $\min f\leq f(x)\leq\max f$, $x\in[\alpha,\beta]$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από τη μονοτονία της f και τις σχέσεις $\alpha\leq x\leq\beta$
- Τις ανισότητες που προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ. και τη μονοτονία της f'
- Την ανισότητα που προκύπτει από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx>0$

ii. $\int_1^3 f^2(x)dx>4\int_1^3 f(x)dx-8$.

Λύση :

i. Παρατηρούμε ότι : $\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx=\int_1^3\left(f(x)-3\right)^2dx$

Η συνάρτηση : $g(x)=\left(f(x)-3\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$. Επίσης η g δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $g(2)=\left(f(2)-3\right)^2=4\neq 0$, επομένως : $\int_1^3 g(x)dx>0\Leftrightarrow\int_1^3\left(f^2(x)-6f(x)+9\right)dx>0$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x)dx>4\int_1^3 f(x)dx-8\Leftrightarrow\int_1^3 f^2(x)dx-\int_1^3 4f(x)dx+8>0\overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow\int_1^3\left(f^2(x)-4f(x)+4\right)>0\Leftrightarrow\int_1^3\left(f(x)-2\right)^2>0$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, καθώς η συνάρτηση : $h(x)=\left(f(x)-2\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$. Επίσης η h δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $h(2)=\left(f(2)-2\right)^2=1\neq 0$.

(*) Γενικά ισχύει ότι : $c=\int_\alpha^\beta\frac{c}{\beta-\alpha}dx$, άρα εδώ $8=\int_1^3\frac{8}{3-1}dx=\int_1^3 4dx$.

86) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3\left(x+\frac{1}{x}\right)dx>4$

Λύση :

i. 1ος Τρόπος : για κάθε $x>0$, $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $x_0=1$, το $f(1)=0$, δηλαδή για κάθε $x>0$, $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

2ος Τρόπος : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

ii. Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$.

Έτσι : $\int_1^3 f(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx - \int_1^3 2dx > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx > \int_1^3 2dx \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx > [2x]_1^3 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)dx > 4$.

87) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) \cdot e^x dx > \frac{27}{8}$.

Λύση :

i. $A_f = (0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ έχουμε : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x}$

Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$, δηλαδή για κάθε $x > 0$, $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

ii. Για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ έχουμε :

- $f(x) \geq 1$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $e^x \geq x + 1$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, (εδώ το $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε $f(x) \cdot e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ και η ισότητα δεν ισχύει ούτε για $x = 1$, άρα :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) \cdot e^x dx > \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x+1)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) \cdot e^x dx > \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x) \cdot e^x dx > \frac{27}{8}.$$

88) Να αποδείξετε ότι :

i. Να αποδείξετε ότι $\ln\left(1+x^2\right)\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx<\frac{1}{3}$

Λύση :

i.

ii. Για κάθε $x>0$ ισχύει η ανισότητα $\ln x\le x-1$. Αν θέσω όπου x το $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\Re$, έχω $\ln(x^2+1)\le x^2+1-1\Leftrightarrow \ln(x^2+1)\le x^2$, για κάθε $x\in\Re$

iii. Στην ανισότητα $\ln x\le x-1$ το ''='' ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα για κάθε $x\in[0,1]$, $\ln(x^2+1)\le x^2$ και το ''='' ισχύει μόνο για $x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$

έτσι : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx<\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx<\frac{1}{3}$.

89) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge 1$.

Λύση :

Είναι αδύνατον να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$, για αυτό θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\frac{e^x}{x+1}\ge g(x)$ και μετά να ολοκληρώσουμε. Για κάθε $x\in\Re$ (άρα και για $x\in[0,1]$) ισχύει : $e^x\ge x+1 \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} \frac{e^x}{x+1}\ge 1$, έτσι έχουμε :

$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge \int_0^1 1dx\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge [x]_0^1\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx\ge 1$.

90) Έστω η συνάρτηση $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0\le\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\le 1-\frac{1}{e}$.

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(1,e)$ άρα η $f\uparrow[1,e]$, οπότε στο $x_1=1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$, ενώ στο $x_2=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

ii. Για κάθε $x\in[1,e]$, είναι : $\min f\le f(x)\le \max f\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{e}$, άρα

$$\int_1^e 0dx\le\int_1^e f(x)dx\le\int_1^e \frac{1}{e}dx\Leftrightarrow 0\le\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\le\left[\frac{1}{e}x\right]_1^e\Leftrightarrow \int_1^e 0dx\le\int_1^e f(x)dx\le 1-\frac{1}{e}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)+1\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx\ge 1$

92) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx=1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x)-2f(x)e^x+e^{2x}\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx\le \dfrac{e^2+1}{4}$

93) Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{e^x}{x^2+1}\ge 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx\ge \int_0^1 (x^2+1)dx$

94) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x)=2-e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \left(2-e^{-x^2}\right)dx\ge 2$

95) Δίνεται η συνάρτηση $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο [1,2]

iii. Να αποδείξετε ότι $0\le \int_1^2 \dfrac{x-1}{x+2}dx\le \dfrac{1}{4}$

96) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0\le \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx\le \ln 2$

97) Να αποδείξετε ότι $1\le \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx\le \sqrt{2}$

98) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\varepsilon\varphi x>x$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\le \dfrac{\eta\mu x}{x}\le \dfrac{3}{\pi}$ για κάθε $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ και

ii. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\le \int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\eta\mu x}{x}dx\le \dfrac{1}{2}$.

99) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ και

ii. $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Αν $f(x)\geq 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε : $f(x)=0$

Απόδειξη :

Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0)\neq 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\geq 0$, προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

100) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_1^3 f^2(x)dx = 6\int_1^3 xf(x)dx - 78$. Να βρείτε :

i. $\int_1^3 9x^2 dx$

ii. τον τύπο της f.

Λύση :

i. $\int_1^3 9x^2 dx = \left[3x^3\right]_1^3 = 81-3=78$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x)dx = 6\int_1^3 xf(x)dx - 78 \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x)dx - \int_1^3 6xf(x)dx + \int_1^3 9x^2dx = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^3 \left(f^2(x) - 6xf(x) + 9x^2\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(f(x)-3x\right)^2 dx = 0$

Η συνάρτηση : $g(x)=\left(f(x)-3x\right)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$, ισχύει : $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,3]$ και $\int_1^3 \left(f(x)-3x\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x)dx = 0$. Άρα για κάθε $x\in[1,3]$ είναι :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-3x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)=3x$, $x\in[1,3]$.

Αυτό ισχύει καθώς έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[1,3]$ τέτοιο, ώστε να είναι $g(x_0)\neq 0$. Τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,3]$ και για κάθε $x\in[1,3]$ είναι $g(x)\geq 0$, προκύπτει ότι $\int_\alpha^\beta g(x)dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x\in[1,3]$ είναι $g(x)=0$.

101) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Λύση :

$\int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_0^1 2f(x)\cdot g(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1\left(f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)\right)dx=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)^2dx=0$, η συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)-g(x)\right)^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $h(x)=\left(f(x)-g(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $\int_0^1 h(x)dx=0$, άρα για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $h(x)=0\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

102) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\Re$, $\nu\in N^*$.

i. Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $2\leq e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}}xe^{-\nu x}dx\leq e$ (1993)

103) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο R, δυο φορές παραγωγισιμη, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Έστω $\alpha,\beta\in\Re$ με α<β. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)-f(\alpha)\leq f^2(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ii. $2\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$. (1997)

104) Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\frac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_1^4 f(t)dt$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, x>0..

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\leq e^{\frac{t}{x^2}}\leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t\in[1,4]$ και x>0.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ (1999)

105) Να δείξετε ότι $\int_e^x\frac{\ln x}{\ln t}dt>x-e\ln x$, για κάθε $x>e$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 3.4-3.5

ΘΕΜΑ 2 #33593

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx=2$, $\int_1^3 f(x)dx=4$ και $\int_1^7 f(x)dx=10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

β) $\int_3^7 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

γ) $\int_7^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

δ) $\int_1^3 (f(x)-x)dx$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #35245

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #34565

Θεωρούμε τους αριθμούς α,β με $1<\alpha<\beta$ και την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x)>0$, για κάθε $[\alpha,\beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(a,f(a))$ και $B(\beta,f(\beta))$, με $f(a)\neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)+\lambda a-f(a)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(c)-f(c)-\lambda a+f(a)=0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c)\neq\lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. (Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)}dx$$

ισούται με -1. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #36816

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_o = 0$, για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)
β) Να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 04)
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 09)
δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \leq \frac{1}{4}$$

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #33578

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$. (Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$. (Μονάδες 7)
δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x)\cdot x} dx < 1$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #29837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.
(Μονάδες 9)
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$. (Μονάδες 6)
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x)dx$.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #33998

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5} dt$. (Μονάδες 06)

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου. (Μονάδες 12) γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #32225

Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x)+x)^2=x^2(x+1)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
- $f(1)>-1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\geq -1$. (Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx<\int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #31551

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & , \quad x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$

και $\phi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\phi(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #29549

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0)=f(0)=0 \text{ και } \int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x dx=-\int_0^{\pi}f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 07)

β) $f(\pi)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #27668

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #27322

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t\to+\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t))\cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #26184

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #25766

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	0	+	0	−	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(0)=1$ και $f(2)=5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #24758

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

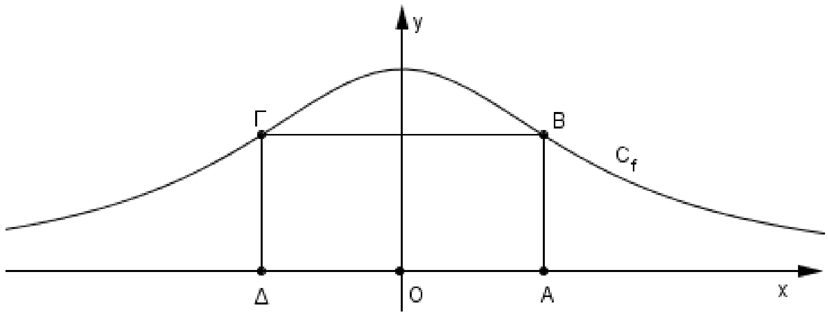
δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #24771

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha, \alpha>0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \alpha>0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #24770

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1, x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\leq 2x-\ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\dfrac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #23957

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot lnx \cdot f(x) + xe^x}{x(f(x) + e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #23219

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx > 1$. (Μονάδες 6)

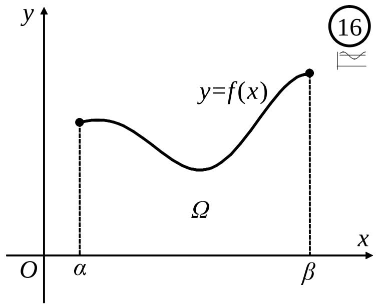
ii. $\int_0^1 xf'(x)dx < 1$. (Μονάδες 6)

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

68. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

Απάντηση :

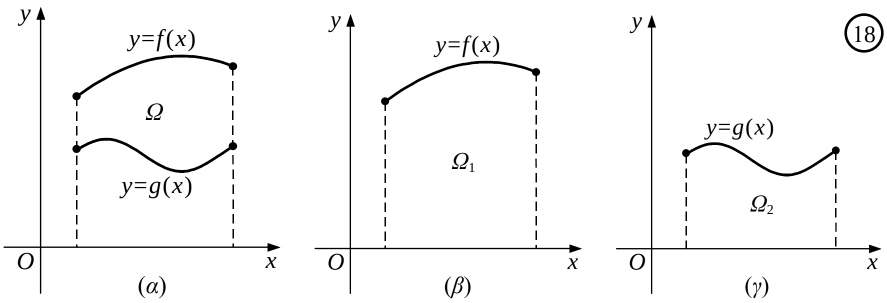
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.



69. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, όταν $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς.

Απάντηση :

Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



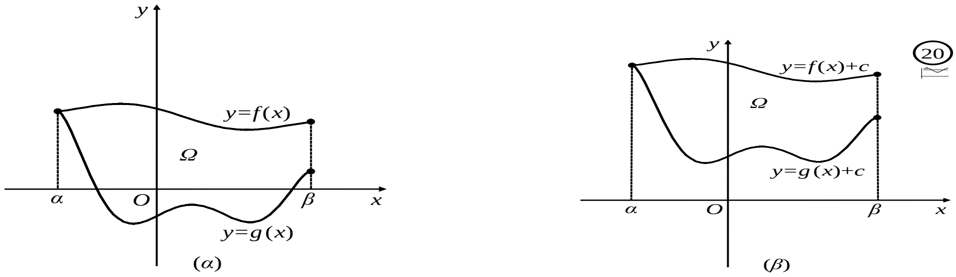
Παρατηρούμε ότι $E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

70. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ δίνεται από τον τύπο: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

Απόδειξη :

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in R$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .

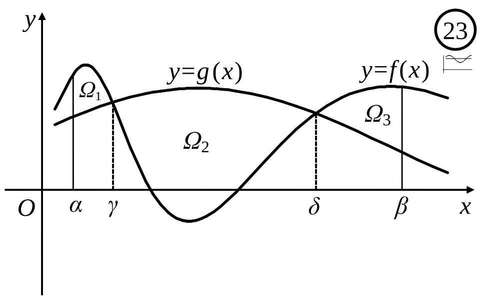


Επομένως, θα έχουμε: $E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$. Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.

71. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$.

Απόδειξη :

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,



$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=\int_\alpha^\gamma(f(x)-g(x))dx$$

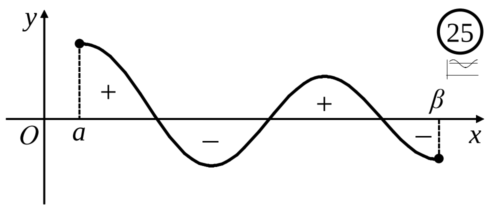
$$+\int_\gamma^\delta(g(x)-f(x))dx+\int_\delta^\beta(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma|f(x)-g(x)|dx+\int_\gamma^\delta|f(x)-g(x)|dx+\int_\delta^\beta|f(x)-g(x)|dx=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|dx$

Σχόλιο

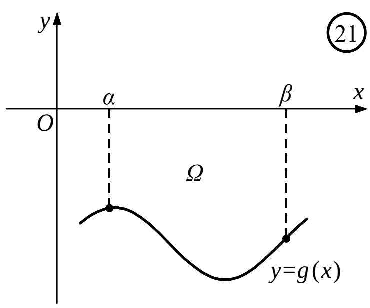
Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).



72. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Απόδειξη :

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$ $=\int_\alpha^\beta[-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$. Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f , $x'x$, $x=\alpha$, $x=\beta$

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

1ον Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο [α,β]

2ον Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο [α,β], λύνοντας την εξίσωση $f(x)=0$ στο [α,β] και σχηματίζοντας πίνακα με το πρόσημο της f στο [α,β], με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε το αντίστοιχο εμβαδόν. Για άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τα α,β.

Σε άλλες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το πρόσημο της f με τη βοήθεια της μονοτονίας της συνάρτησης f.

- Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

- Αν $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με:

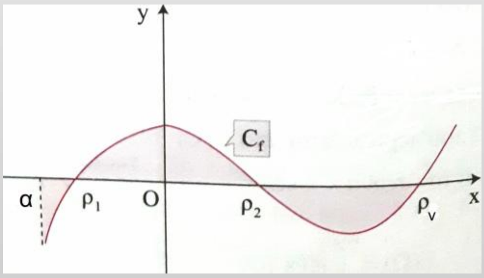
$$\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

- Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β], τότε βρίσκουμε τις ρίζες $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ της εξίσωσης $f(x)=0$ στο [α,β], $(\rho_1<\rho_2<...<\rho_\nu)$ και από τον πίνακα προσήμων το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

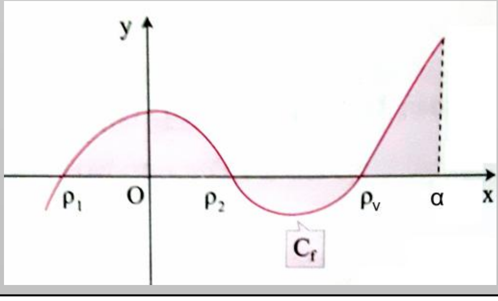
$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{\rho_1}|f(x)|dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2}|f(x)|dx+\int_{\rho_2}^{\beta}|f(x)|dx=\int_{\alpha}^{\rho_1}f(x)dx-\int_{\rho_1}^{\rho_2}f(x)dx+\int_{\rho_2}^{\beta}f(x)dx=...$$

- Αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, τότε υπολογίζω το αντίστοιχο εμβαδόν ανάμεσα στις ρίζες της $f(x)=0$ δηλ. για άκρα ολοκλήρωσης παίρνω τις ρίζες.
- Αν δίνεται μόνο μια κατακόρυφη ευθεία $x=\alpha$ και ρ_1 η μικρότερη ρίζα, ρ_ν η μεγαλύτερη ρίζα τότε :

  Αν $\alpha<\rho_1$ τότε : $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\rho_\nu}|f(x)|dx$

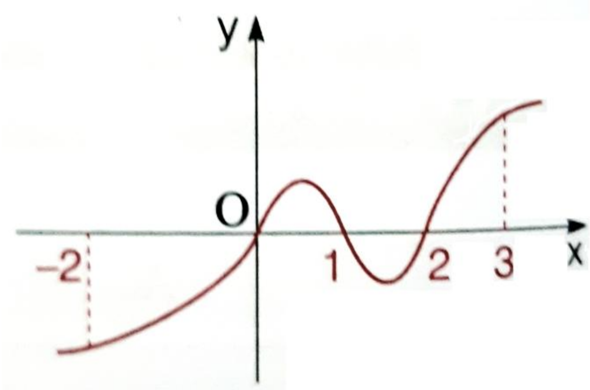


  Αν $\alpha>\rho_\nu$ τότε : $\mathrm{E}=\int_{\rho_1}^{\alpha}|f(x)|dx$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\Re \to \Re$ η οποία είναι συνεχής και ισχύουν :
$\int_{-2}^{0} f(x)dx = -5$, $\int_{0}^{1} f(x)dx = 2$, $\int_{1}^{2} f(x)dx = -3$, $\int_{2}^{3} f(x)dx = 4$



Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f

i. τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$
ii. τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x = -2$
iii. τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$
iv. τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = -2$
v. τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = 3$
vi. τον άξονα x΄x.

Λύση :
Η f είναι συνεχής στο $\Re$, άρα και σε κάθε διάστημα αυτού.
Ο πίνακας προσήμων της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

i. Επειδή $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$, είναι $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{0}^{1} f(x)dx = 2$

ii. Επειδή $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [-2,0]$, είναι $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-2}^{0} f(x)dx = 5$

iii. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx = 3 + 4 = 7$

iv. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε
$\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx = 5 + 2 + 3 = 10$

v. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε
$\mathrm{E}(\Omega) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx = 2 + 3 + 4 = 9$

vi. Από τον πίνακα προσήμων της f, έχουμε $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx = 2 + 3 = 5$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-18x+24$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=5$.

Λύση :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

x	$-\infty$ 1	2		4	5 $+\infty$
$f(x)=3x^2-18x+24$	+	0	-	0	+

Η f είναι συνεχής στο [1,5] και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^5 |f(x)|dx=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx=$

$=\int_1^2 (3x^2-18x+24)dx-\int_2^4 (3x^2-18x+24)dx+\int_4^5 (3x^2-18x+24)dx=$

$=\left[x^3-9x^2+24x\right]_1^2-\left[x^3-9x^2+24x\right]_2^4+\left[x^3-9x^2+24x\right]_4^5=$

$=(20-16)-(16-20)+(20-16)=12$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$ και F μια παράγουσα της f στο $\Re$ με $F(1)=0$.

i. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F, την ευθεία $x=1$ και τους άξονες x΄x και y΄y. ***(Εμβαδόν Παράγουσας)***

Λύση :

i. F παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\Re$ με $F'(x)=f(x)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\Re$, άρα $F\uparrow\Re$.

ii. $F(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=F(1) \overset{F\uparrow\Rightarrow F\text{"}1-1\text{"}}{\Leftrightarrow} x=1$

Για $x>1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x)>F(1) \Leftrightarrow F(x)>0$

Για $x<1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x)<F(1) \Leftrightarrow F(x)<0$

Έτσι :

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$F((x)$	-	0	+

Η f είναι συνεχής στο [0,1] και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)'F(x)dx=$

$=-\left(\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx\right)=-\left(F(1)-\int_0^1 xf(x)dx\right)=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}\tau.\mu.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x-2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=-2$, $x=3$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=3$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+4x-3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=2$, $x=5$. *(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)*

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=4$. *(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)*

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+4+\dfrac{1}{2x+4}$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2002)

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.

(ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001)

12) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-e, x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, x\geq 1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=e$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)

13) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} ax^2, x\le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, x>3 \end{cases}$

i. Αν η f είναι συνεχής να αποδείξετε ότι $a=-\frac{1}{9}$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(4,f(4))

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=2$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2001)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f, C_g, $x=\alpha$, $x=\beta$

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

Έστω f,g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β]. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

1ον θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

2ον λύνουμε την εξίσωση $h(x)=0$ στο [α,β]

3ον σχηματίζουμε πίνακα με το πρόσημο της h στο [α,β], με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε το αντίστοιχο εμβαδόν. Για άκρα ολοκλήρωσης παίρνουμε τα α,β.

Αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$, τότε υπολογίζω το αντίστοιχο εμβαδόν ανάμεσα στις ρίζες της $h(x)=0$ δηλ. για άκρα ολοκλήρωσης παίρνω τις ρίζες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=1-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=-1$, $x=1$.

Λύση : Έστω $h(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow h(x)=e^x+x-1$, με $\mathrm{A}_h=\Re$ η οποία είναι συνεχής το [-1,1] άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}|h(x)|dx$.

Έχω $h(x)=0 \Leftrightarrow e^x+x-1=0$, παρατηρώ ότι η $x=0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$, και για κάθε $x\in\Re$, $h'(x)=e^x+1>0$, άρα η $h\uparrow$ *για κάθε* $x\in\Re$, οπότε και η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

x	$-\infty$ -1	0	1 $+\infty$
$h(x)=e^x+x-1$	$-$		$+$

Τα πρόσημα του παραπάνω πίνακα προκύπτουν ως εξής :

- $x<0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(0) \Leftrightarrow h(x)<0$
- $x>0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$

Άρα τελικά : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}|h(x)|dx=-\int_{-1}^{0}h(x)dx+\int_{0}^{1}h(x)dx=-\int_{-1}^{0}(e^x+x-1)dx+\int_{0}^{1}(e^x+x-1)dx=$

$=-\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x+\frac{x^2}{2}-x\right]_{0}^{1}=-1+\frac{1}{e}+\frac{1}{2}+1+e+\frac{1}{2}-1-1=\frac{1}{e}+e-1$ τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x-5$ και $g(x)=x+1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=-2$, $x=2$.

16) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=3x^2-x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου περικλείεται από τις C_f, C_g .

18) Να δείξετε ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει : $e^{3x}\geq x+1$. Στη συνέχεια αν δίνονται $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-2x}(x+1)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τη C_f, τη C_g, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x=1$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta\in\Re$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία με εξίσωση $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$. (ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΜΕΤΑΞΥ C_f ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

- Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \geq \lambda x + \beta$.
- Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x_0 \in \Delta$ η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει ότι : $f(x) \leq \lambda x + \beta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

Λύση :

i. $\mathrm{A}_f = [0, +\infty)$, και $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, άρα $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $x > 0$.

Άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$ θα έχει εξίσωση :

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

ii. C_f, $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ και $y'y$ δηλ. η ευθεία $x = 0$

Έστω $h(x) = f(x) - y \Leftrightarrow h(x) = \sqrt[3]{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$,

Για το πρόσημο της $h(x)$, θα χρησιμοποιήσουμε την κυρτότητα της f. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$ και η f είναι συνεχής στο $x = 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $\mathrm{A}_f = [0, +\infty)$ και άρα η εφαπτομένη (ε) της C_f βρίσκεται πάνω από τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει ότι : $f(x) \leq y \Leftrightarrow h(x) \leq 0$ και το «=» μόνο για $x = 1$.

Χρειαζόμαστε άλλη μια κατακόρυφη ευθεία η οποία θα προκύψει από τη λύση της εξίσωσης : $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow x = 1$, καθώς η C_f και η (ε) έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\mathrm{M}(1, f(1))$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε :

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |h(x)|dx = -\int_0^1 h(x)dx = -\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - x^{\frac{1}{3}}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(-1, f(-1))$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+5$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): x-2y+11=0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα $y'y$.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\Re$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,f(0))

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες y=x και y=1.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+\alpha$, με $\alpha\in\Re$. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$, τότε :

i. Να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\frac{3}{5}$.

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο Μ(2,f(2))

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τους άξονες x΄x και $y'y$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων, εργαζόμαστε ως εξής :
1ον βρίσκουμε τα σημεία που τέμνονται ανά δυο οι γραφικές παραστάσεις
2ον σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων
3ον χωρίζουμε το χωρίο Ω με κατακόρυφες ευθείες σε επιμέρους χωρία τα οποία σχηματίζονται από δυο μόνο γραφικές παραστάσεις
4ον υπολογίζουμε το εμβαδόν καθενός από τα παραπάνω χωρία και το άθροισμα τους είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της, $f(x)=\ln x$ τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e,1)$.

Λύση :

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(e,1)$ είναι $(\varepsilon): y-1=f'(e)(x-e)$.

Επειδή $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, έχουμε $f'(e)=\dfrac{1}{e}$. Επομένως,

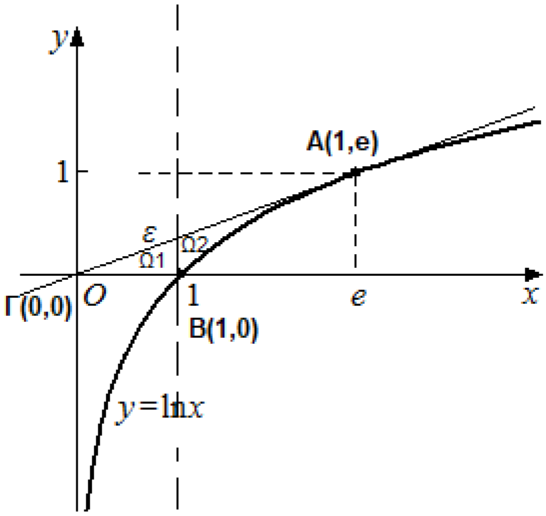
$$(\varepsilon): y-1=\frac{1}{e}(x-e) \Leftrightarrow (\varepsilon): y=\frac{1}{e}x.$$

Έχω εμβαδόν ανάμεσα στη C_f, την $(\varepsilon): y=\dfrac{1}{e}x$ και τον x΄x δηλ. τρεις συναρτήσεις,

$f(x)=\ln x,\ g(x)=\dfrac{1}{e}x,\ h(x)=0$.

- Για σημεία τομής C_f και C_g : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=e$ δηλ. $A(e, f(e)) \to A(e,1)$

  Καθώς η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$, επομένως η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(e,1)$, βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και το «=» μόνο για $x=e$.
- Για σημεία τομής C_f και C_h : $f(x)=h(x) \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ δηλ. $B(1, f(1)) \to B(1,0)$
- Για σημεία τομής C_g και C_h : $g(x)=h(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}x=0 \Leftrightarrow x=0$ δηλ. $\Gamma(1, g(0)) \to \Gamma(0,0)$



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα :

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\int_0^1 \frac{1}{e}xdx+\int_1^e\left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\int_0^1\frac{1}{e}xdx+\int_1^e\frac{1}{e}xdx-\int_1^e \ln xdx=$$

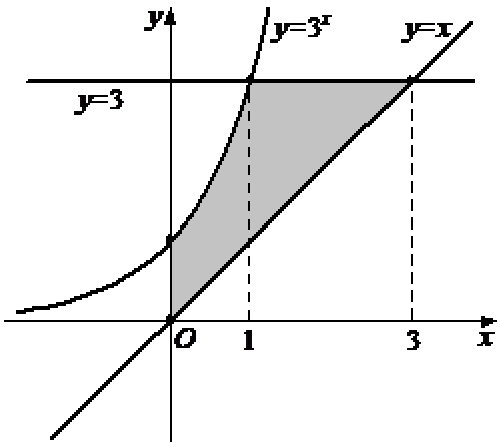
$$=\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e (x)'\ln xdx=\frac{1}{2e}+\frac{e^2}{2e}-\frac{1}{2e}-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e 1dx=\frac{e-2}{2}\tau.\mu.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

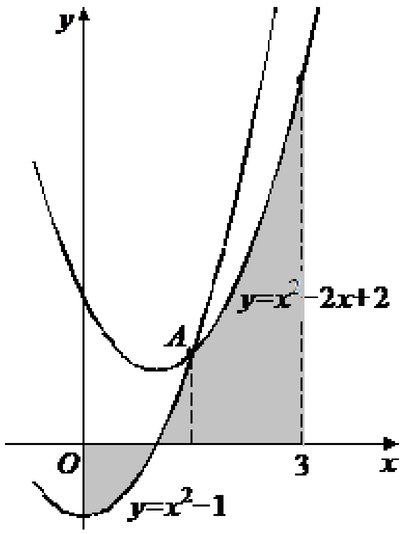
27) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και $h(x)=-x+2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

28) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x}$, με $x>0$, $g(x)=\sqrt{x}$ και $h(x)=\dfrac{3x-4}{4}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

29) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



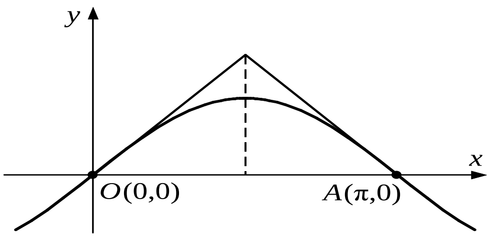
30) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$ και $\mathrm{A}(\pi,0)$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A.

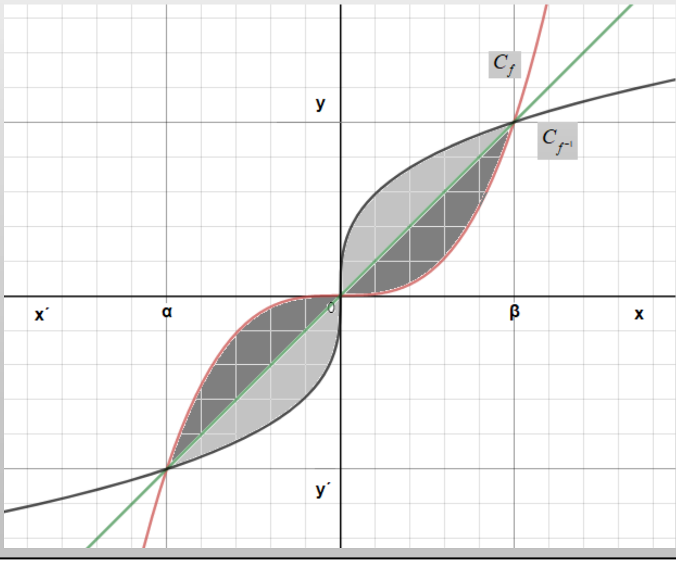


32) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Η f είναι 1-1, οπότε ορίζεται η $f^{-1}(x)$.

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=f(\alpha)$, $x=f(\beta)$ είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\left|f^{-1}(x)\right|dx$. Αν θέσουμε $x=f(u)$, προκύπτει ότι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f^{-1}(f(u))\right|f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta}|u|f'(u)du=\ldots$
- Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας y=x. Ισχύει λοιπόν ότι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx=2\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-x\right|dx$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τις ευθείες $x=1$, $x=e+1$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in \mathrm{A}_f=(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_f=(0,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη με $\mathrm{A}_{f^{-1}}=f\left(\mathrm{A}_f\right)\overset{f\uparrow \& \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\Re$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E(\Omega)=\int_1^{e+1}\left|f^{-1}(x)\right|dx$

Θέτω $x=f(u)$ άρα $dx=f'(u)du$

Για $x=1$ είναι $f(u)=1\Leftrightarrow f(u)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=1$

Για $x=e+1$ είναι $f(u)=e+1\Leftrightarrow f(u)=f(e)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}u=e$

Άρα τελικά : $E(\Omega)=\int_1^{e+1}\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_1^{e}\left|f^{-1}\left(f(u)\right)\right|\cdot f'(u)du=\int_1^{e}|u|\cdot f'(u)du\overset{u\in[1,e]}{=}$

$$=\int_1^e uf'(u)du=\int_1^e u\left(1+\frac{1}{u}\right)du=\int_1^e (u+1)du=\left[\frac{u^2}{2}+u\right]_1^e=\frac{e^2}{2}+e-\frac{1}{2}-1=\frac{e^2+2e-3}{2}\text{ τ.μ.}$$

34) Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{1}{4}\right]\to\Re$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$

Λύση :

i. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, και για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ είναι : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, άρα είναι και 1-1 και άρα αντιστρέψιμη.

ii. Αρχικά πρέπει να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Έχουμε : $\begin{cases}y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ f(y)=x\end{cases}$ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε :

$f(y)+y=f(x)+x$ (1). Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x=\sqrt{x}$, $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ με

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ και g συνεχής στο 0, άρα $g\uparrow\left[0,\frac{1}{4}\right]$ δηλαδή

g"1−1". Τελικά $(1)\Leftrightarrow g(y)=g(x)\overset{g"1-1"}{\Leftrightarrow}y=x\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow\sqrt{x}-x=x\Leftrightarrow\sqrt{x}=2x$

πρέπει $2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Έτσι : $\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow x=4x^2\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{4}$ δεκτές.

Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας y=x. Έστω

$h(x)=f(x)-x$, $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ είναι $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	−	0	+	0	−

καθώς $h(x)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2x\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 2x \overset{x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]}{\Leftrightarrow} x\geq 4x^2 \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και το πρόσημό της φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, έτσι έχουμε :

$$\mathrm{E}(\Omega)=2\int_0^{\frac{1}{4}}|f(x)-x|dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}|h(x)|dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}h(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{4}}(\sqrt{x}-2x)dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}-2x\right)dx=2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-x^2\right]_0^{\frac{1}{4}}=2\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x^2\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{24}\text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-2$.
  i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
  ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+12x-6$
  i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
  ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$.
  i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
  ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τις ευθείες $x=1$, $x=e+1$ και τον άξονα $x'x$.

38) Έστω η συνάρτηση f(x) = x^5+x^3+x .
  i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
  ii. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
  iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.
  iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3. *(3ο 2003)*

39) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.
  i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
  ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
  iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x.
  iv. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}. *(Θέμα 2ο Πανελλήνιες 2006)*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, με $x>0$, και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$. Να βρείτε ευθεία $x=\lambda$ η οποία να χωρίζει το Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+6x$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x. Να βρείτε ευθεία $y=ax$, με $\alpha>0$, η οποία χωρίζει το Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

42) Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και την ευθεία $y=5$ χωρίζεται από την ευθεία $y=\alpha^2+1$, $\alpha>0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

43) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{x}$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα των x.

ii. Να βρείτε την ευθεία $x=\alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

44) Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-3)$.

i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A,B που η C_f τέμνει τον άξονα των x.

ii. Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7: ΟΡΙΟ ΕΜΒΑΔΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, με $x>0$. Να βρείτε :

i. Το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, με $\lambda>0$ και $\lambda\neq 1$.

ii. Το όρια $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$.

46) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{e}{x}$, $g(x) = \ln x$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $\mathrm{E}(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > e$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{E}(\lambda)$.

47) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, λ > 0.

i. Να δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

ii. Να δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y = λex. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

iii. Να δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $\mathrm{E}(\lambda) = \frac{\mathrm{e} - 2}{2\lambda}$.

iv. Να υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \mathrm{E}(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2005)*

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{6x^3 + 1}{2x^2}$.

i. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ίδια ευθεία (ε), την οποία και να βρείτε.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \alpha$, με α>1

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathrm{E}(\alpha)$. (Θέμα εξετάσεων)

49) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και : $f(x) + f'(x) = 2xe^{-x}$ για κάθε $x \in \Re$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x = \alpha$, με α>0.

v. Να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathrm{E}(\alpha)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 3.7

ΘΕΜΑ 2 #36838

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx$

iii. $\int_1^5 (f(x) + g(x))dx$ (Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #36849

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ 1 - \sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα x'x και των ευθειών x = -2 και x = π. (Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 2 #36837

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο Α(0,2) και τέμνει τον άξονα x'x στο Γ(-1,0).

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

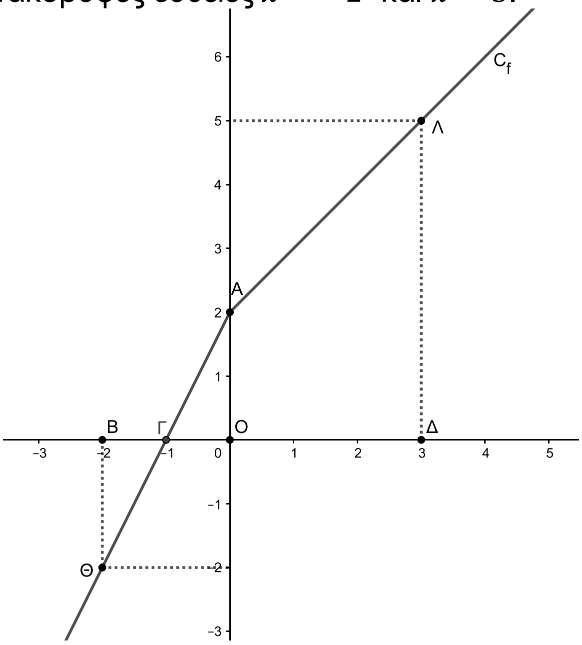
i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

ii. $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

iii. $\int_0^3 f(x)dx$

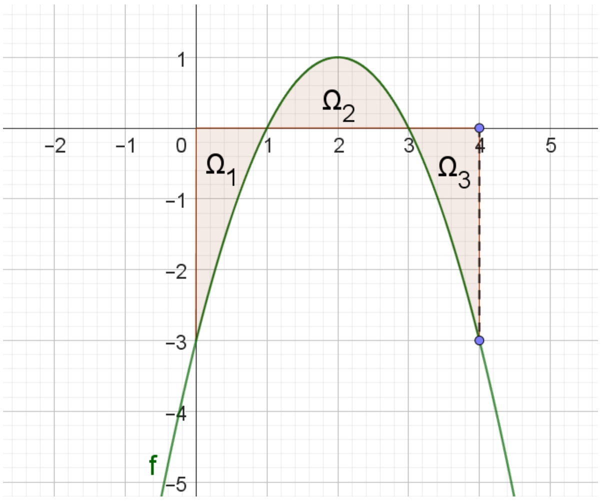
(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2 #33588

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.



α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

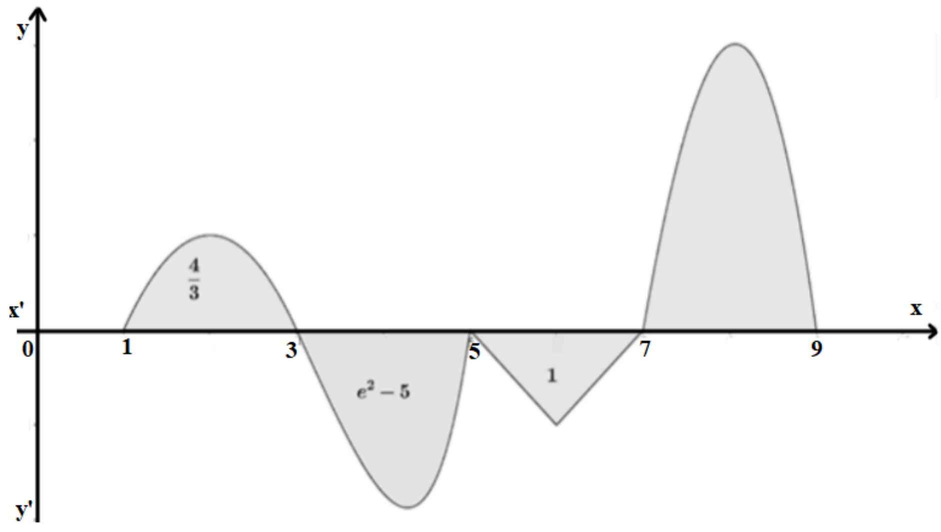
ii. $\int_0^3 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

iii. $\int_0^4 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #32800

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9] \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1,\ 3,\ 5,\ 7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx = 4$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #23218

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

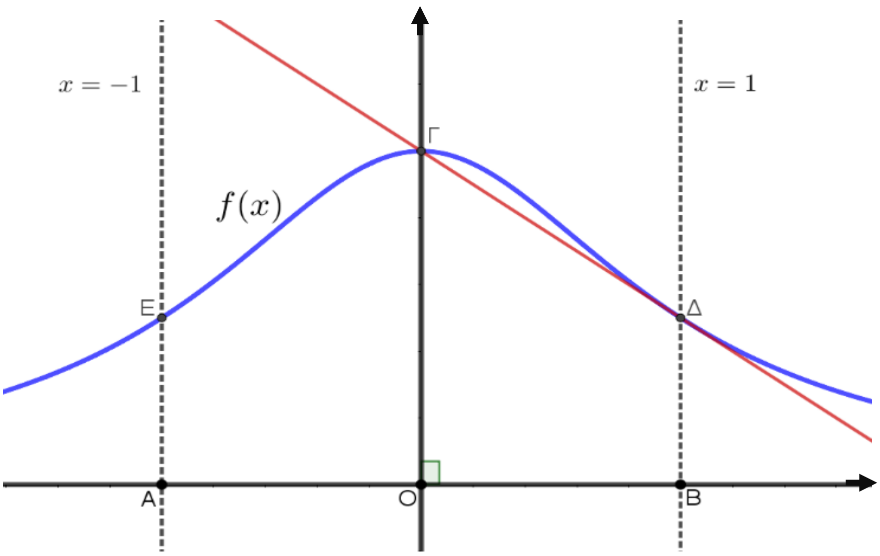
γ) Έστω ότι $\mathrm{K}(-1, \lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #23955

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #24131

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}, \quad x\geq 0.$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 07)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2. Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1},
- $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f^{-1}(x)dx = \alpha$

Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1}, (Μονάδες 04)

ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{0}^{1} f(x)dx$ συναρτήσει του α.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #24275
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}.$$

1) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)
2) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)
3) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με $\mathrm{E}(\Omega)=-\dfrac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #24704
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=lnx+e^x$, $x>0$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. (Μονάδες 9)
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-lnx_0)$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #25147

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0,2\pi]$.

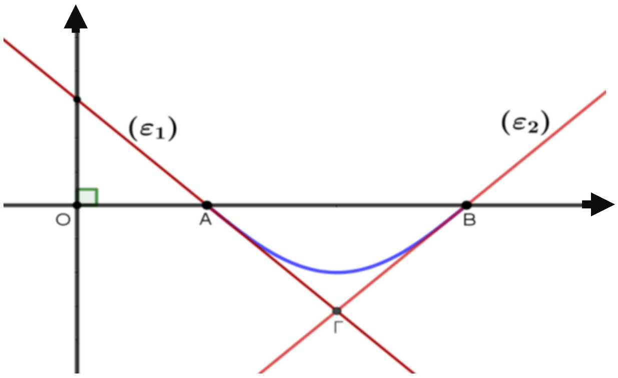
α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #25235

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1)\ y = -x + \frac{\pi}{2}$ και (ε_2): $y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #25259

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon : y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 06)

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,1]$. (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #25746

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$. (Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}<f(1)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #25747

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #25757

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0, & \text{αν } x=1\end{cases}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $\mathrm{E}<\dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #26183

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), 0\le x\le 1\\ 1-\frac{4lnx}{x},\ x>1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=\frac{ln4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 10)

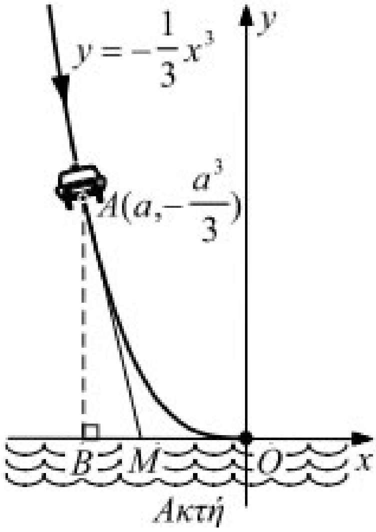
ΘΕΜΑ 4 #27031

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A. (Μονάδες 06)

β)

i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t),$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3. (Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M. (Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #28476

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)(x-1)}{lnx} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1}$$

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 06)

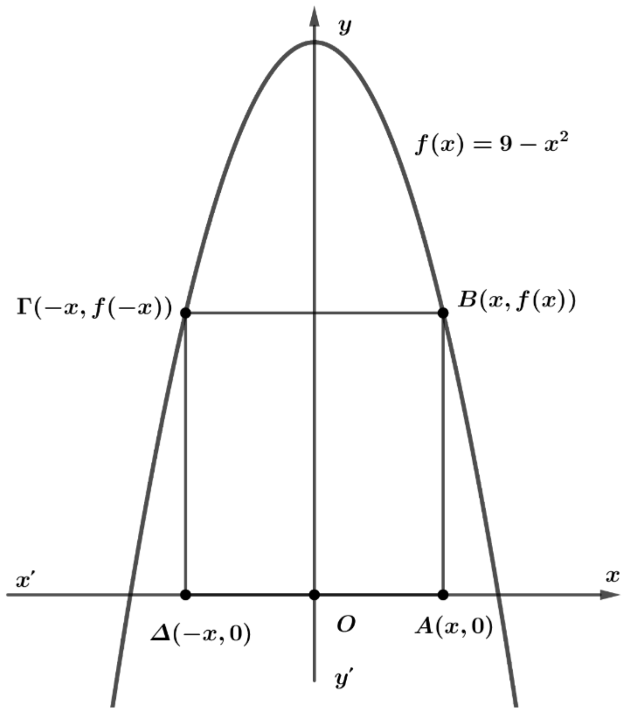
γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #27408

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα x΄x είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα x΄x, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $\Gamma(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση Ε(x) ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα x΄x και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #29646

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f. (Μονάδες 09)

ii. Τα σημεία$A(x_1, f(x_1)$, $B(x_2, f(x_2)$ και $\Gamma(x_3, f(x_3)$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y’y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα y’y. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #28870

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f,η $C_{f'}$ που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.

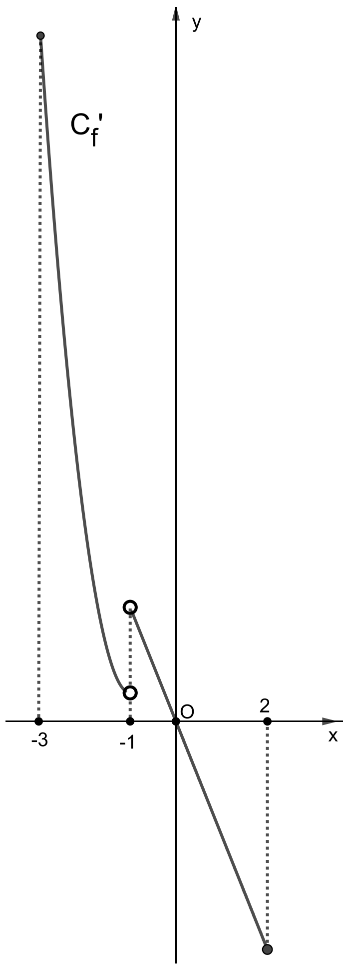
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4 #29645

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$. (Μονάδες 12)

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$. (Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #31148

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in R$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in R$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = ln2$ και $x = 1$, είναι $ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #31149

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $ln(1 + f(x)) - \ln\big(f(x)\big) > f^2(x) \cdot f(ln2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $ln\left(\frac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #31530

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1). (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x_o + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_o - \theta)x - 5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. (Μονάδες 7)

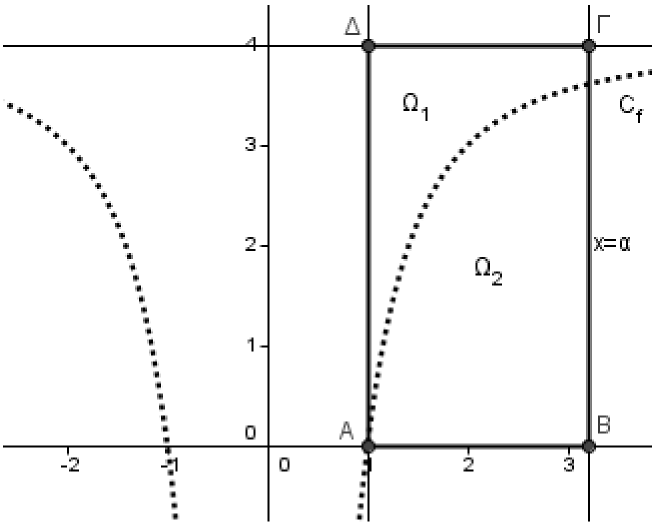
ΘΕΜΑ 4 #31533

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$. (Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.

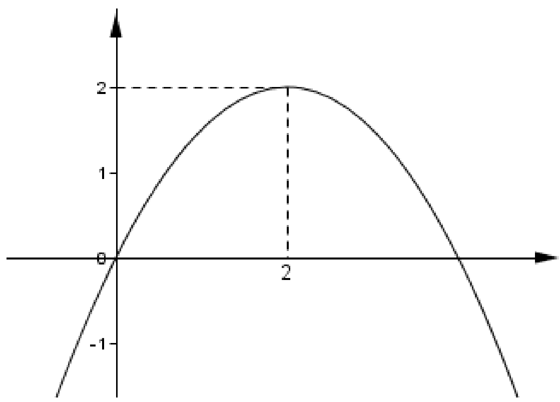


i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1), E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #31534

Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο A(0, 1), να αποδείξετε ότι

$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$ (Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση

$$g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #31792

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \le x < 1 \\ 1 + \frac{(lnx)^2}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #33598

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. (Μονάδες 5)

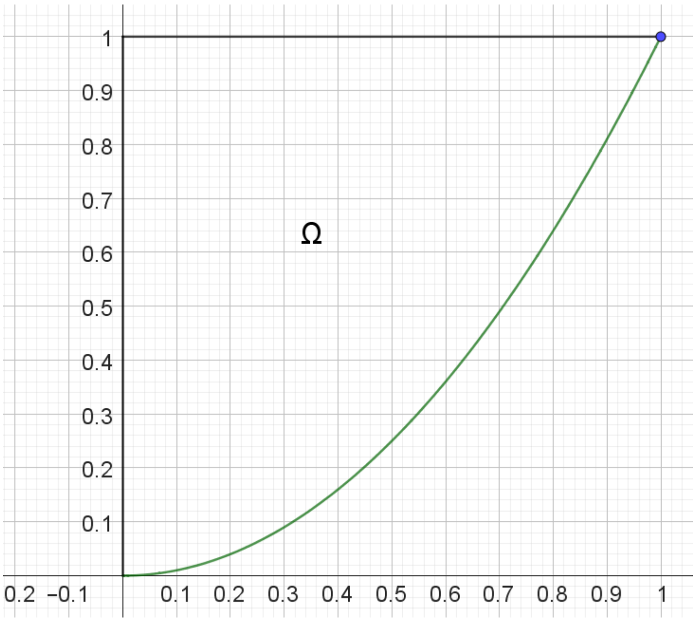
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

ii. $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $\mathrm{E}(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4 #33634

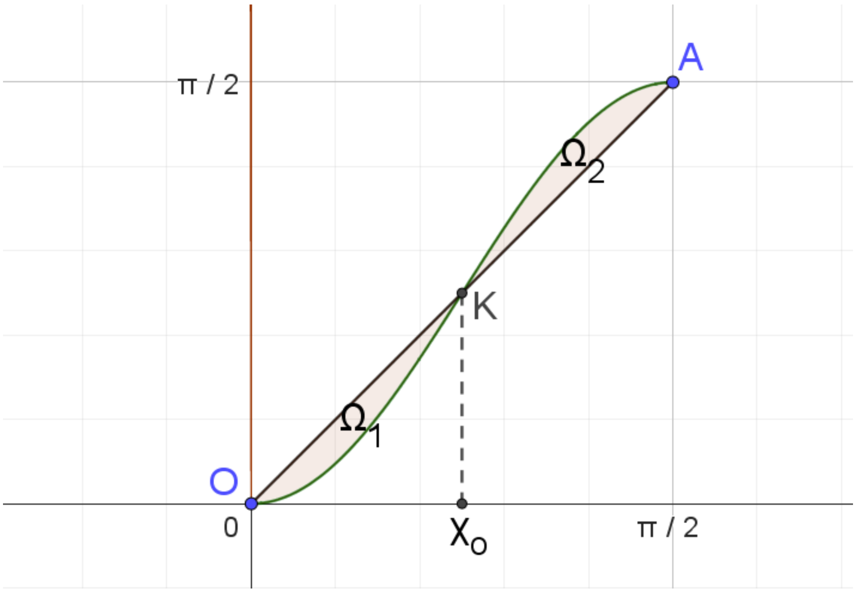
Έστω $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι $I = J = \frac{\pi^2}{8}$. (Μονάδες 7) γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{K}(x_o, f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2. Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy' και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το J. (Μονάδες 6)

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4 #34566

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-ln2$.
- $\beta f^2(\beta)=\alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $ln4$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(a,\beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(a)}{x-a}<f(a)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #35244

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\varepsilon\varphi x-1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

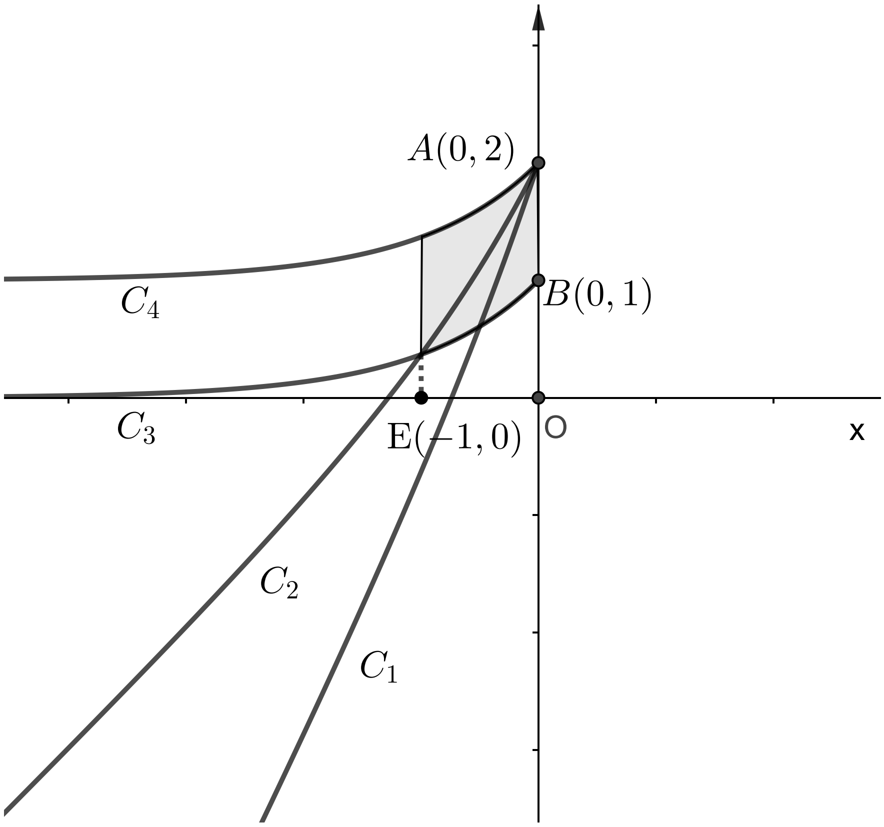
ΘΕΜΑ 4 #35302

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x)=e^x$, $g(x)=e^x+1$ και $h(x)=e^x+x+1,\ x\in(-\infty,0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 09)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.(Μονάδες 07)



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda$ με $\lambda>0$ και $\lambda\neq e$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathrm{E}(\lambda)$

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(e^2, f(e^2)\right)$

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα x΄x. ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$ ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2e}{x}+2\ln x,\quad x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$

iii. Αν ισχύει $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ όπου $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e}{x}+\ln x+1,\quad x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

5) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3\ln x$ με $x > 0$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, με $0 < \lambda \neq 1$.

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{E}(\lambda)$

iv. Να βρείτε το όριο : $\lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{E}(\lambda)$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3, \quad x > 0, \quad \lambda \in \Re$

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη (ε) του προηγούμενου ερωτήματος και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 2$ με $x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^4 = \frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda} - 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda > 0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^4 f^{-1}(x)dx$.

8) Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες με $f''(x) = g''(x) - \frac{1}{x^2}$ για κάθε x>0. Αν οι εφαπτομένες στο κοινό σημείο τους με τετμημενη $x_0 = 1$ είναι παράλληλες να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την C_g και την ευθεία x=e.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, την (ε), τον άξονα y΄y και την ευθεία x=α, α<0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \to -\infty} \mathrm{E}(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=-ln2.

10) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και $xf'(x)-2\ln x>0$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>\ln^2 x$ για κάθε $x>1$.

ii. Αν Ε(λ) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ, λ>1, να αποδείξετε ότι : $\mathrm{E}(\lambda)>\lambda\ln^2\lambda-2\lambda\ln\lambda+2\lambda-2$ και μετά να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$.

i. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=1 και x=2.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τον άξονα x΄x.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε):y=x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και τις ευθείες x=2 και x=λ, λ>2.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{E}(\lambda)$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) τον άξονα x΄x και την ευθεία x=α, α>0.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{a\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)$

iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε(α) τη χρονική στιγμή που είναι α=1.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x}$ και η ευθεία (ε):y=x.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την (ε) και την ευθεία x=λ, 0<λ<e.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=λ , λ>1.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{E}(\lambda)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 3ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

1) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x)$\geq$0 για κάθε x$\in$[α,β].

2) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\,g(x)\,dx .$$

3) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

4) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

5) Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

6) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$

7) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε x ∈ [α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

8) Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

9) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

10) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) < 0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

12) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥0 για κάθε x∈[α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

13)Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f΄, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

14) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to \Re$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

15) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε x∈[α,β], και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

3Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1)Λ 2)Σ 3)Σ 4)Σ 5)Σ 6)Λ 7)Λ 8)Λ 9)Σ 10)Σ 11)Λ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Σ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $\displaystyle 0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. **Μονάδες 6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

β) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

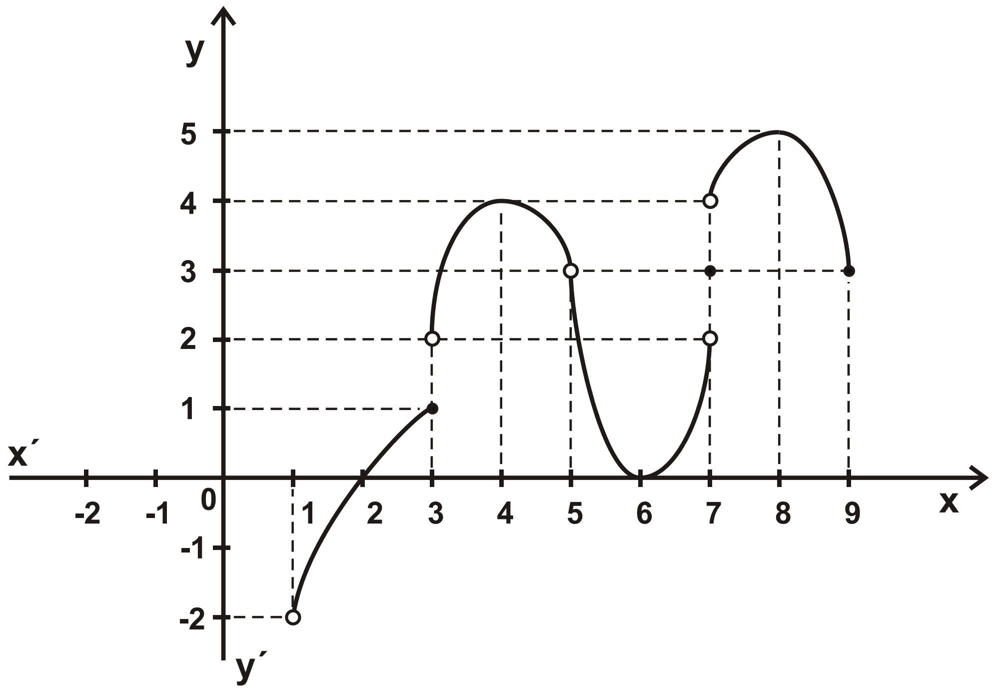
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o) = 0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx\ .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_o=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_o^{\,2} - 2x_o + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \quad \text{για κάθε } x > 1.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell nx,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$ **.**

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_O)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Ν*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.

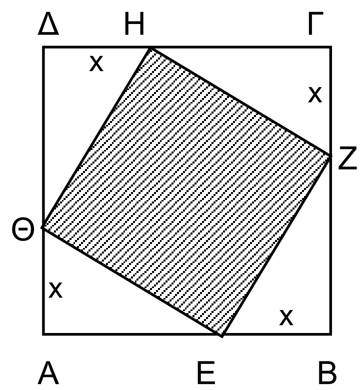
δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in$ (α,β) τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

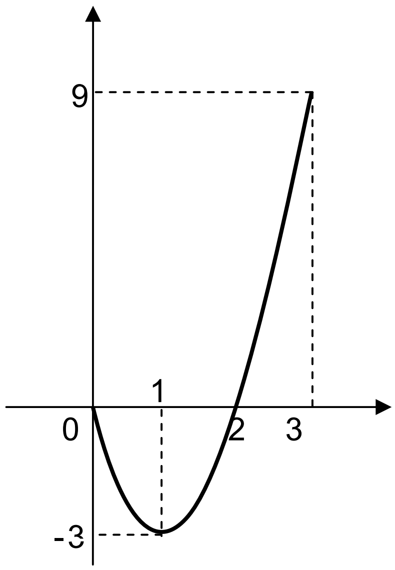
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1$ cm^2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2,\ f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{π}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,\ 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $π<\displaystyle\int_{\frac{-π}{2}}^{2} f(x)\,dx<\dfrac{3π}{2}-1$.

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\dfrac{-π}{2}\cdot x)=f(\dfrac{-π}{2}\cdot e^{-x})$ έχει μοναδική λύση στο (0,1).

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15} .$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

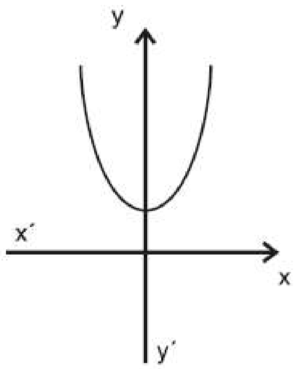
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f\,'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α,\ x_o)\cup(x_o,\ β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

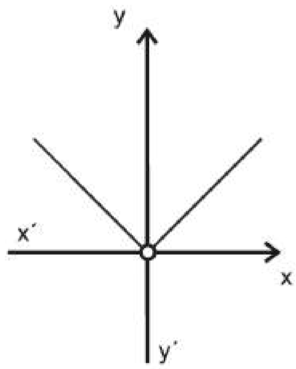
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

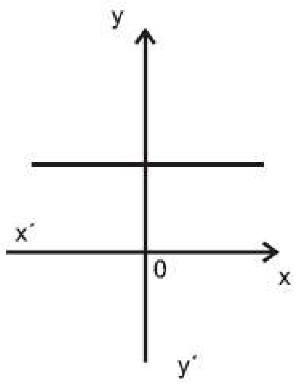
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



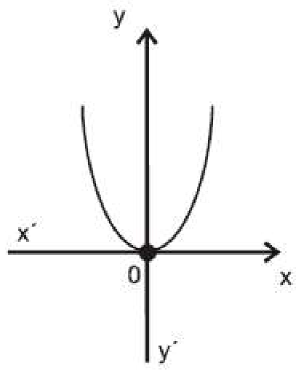
(f)



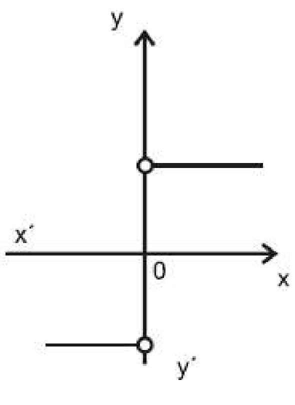
(g)



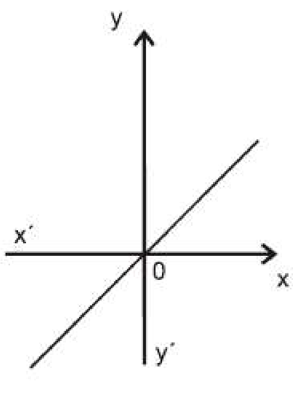
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f,g:(0, +∞) → ℝ, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: ℝ → ℝ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση f: ℝ → ℝ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η f o g με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+1, & x\leq 1 \end{cases}$

Β1. Να υπολογίσετε το α∈ ℝ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0, π] →ℝ, με τύπο: f(x) = 2ημx − x .

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x_o∈[0, π] η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \text{συν}x\,dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2) β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)\text{-}f(2x))\cdot \ln x\right]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: (0, +∞) → ℝ, με τύπο: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα (0, 1).

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(α)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(α)}{x-2}+\dfrac{ημ(πα)}{x}=0$, όπου 0 < α < 1, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0, 1) και μία στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα (0, +∞) με F(e) = e·ln2, να αποδείξετε ότι $\ln 2<F(1)<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

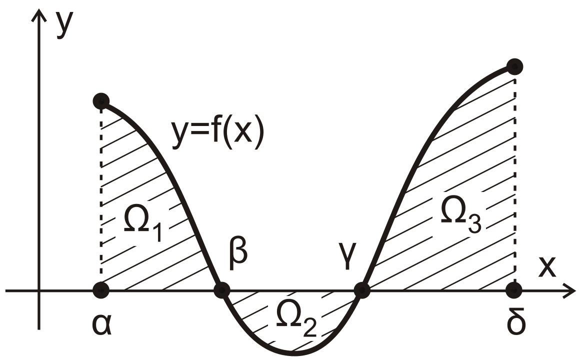
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2),\ \ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\triangle}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Μονάδες 6

B3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

B4. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,\ 2]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 1)$. Έστω το σημείο $A(\dfrac{3}{2},\ 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(0,\ 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\dfrac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)\,dx<1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $(0,\ \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x)=f(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}})\ .$$

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f \circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(f \circ g)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty}\varphi(x) .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ell n\lambda , & x \le 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x , & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad , \text{ με } \lambda > 0 .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,\ 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha,\ f(\alpha))$, με $\alpha \le 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\dfrac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_o, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,\ 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_o) = x_o^{\,2} - (e+2)x_o + e - 1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_o}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_o)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_o}\right)\right],$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο**.**

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ**.**

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_o) > f(\rho)\,(f'(k)+1)$ για κάθε $k \in (\rho,\ 1)$**.**

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $(\ln|x|)' = -\dfrac{1}{x}$, για κάθε x<0.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$.

Μονάδες 5

Β2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Μονάδες 6

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \le h(x) \le g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to 1} h(x) = 2$ (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

Γ2. Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α<2. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες x=-1 και x=+1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 9

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot συν^3x+f'(x)\cdot συν^2x\cdot ημx-1=0$, για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,
- $f(\frac{\pi}{3})=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot ημx-εφx,\ \ x\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{ημx}+\frac{1}{συνx},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $ρ_1,ρ_2$, με $ρ_1<ρ_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(ρ_2)(4ρ_2-\pi)>4\sqrt{2}$, όπου $ρ_2$ η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και $Α_1$ το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (**α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη**.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$, παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(α,β)$, τότε $f(α)\neq f(β)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

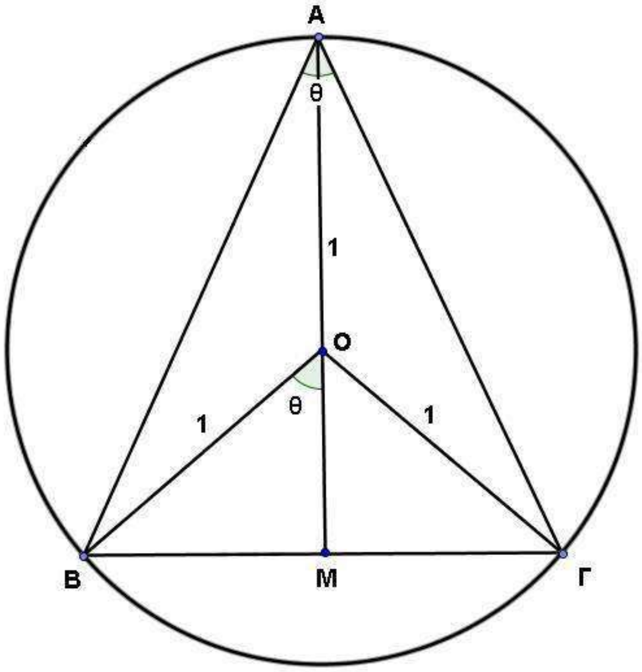
Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x)\, \etaμ \dfrac{1}{3x+1} \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες $\theta_1,\ \theta_2$, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες $\theta_1,\ \theta_2$, του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x\ell nx - \ell n(\lambda x)$, $\quad x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, +\infty)$ και

$g(x) = x^x$, $\quad x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

(Μονάδες 6)

Μονάδες 9

<u>**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_o$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.

(Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_o, ισχύει $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) < \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = (x+\alpha)^2 - 1,\ \ x \in [-1, +\infty),\ \ \alpha \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1}.

Μονάδες 8

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1,\ x \in [-1, +\infty)$, τότε:

Β3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

Μονάδες 6

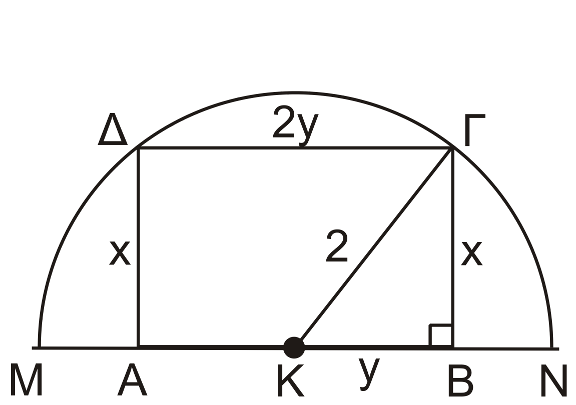
Β4. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -1} \frac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$$, όπου $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και $2y$ cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0,\ 2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^x,\ x \in \left(0,\ 2\right)$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$x \cdot f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right) \cup \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 3

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2020 \cdot \text{συν}x - x = 2020$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0) = \rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **(Δ4)**. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\pi \cdot |F(x)| \leq 2 \cdot |x|.$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = \left(\ell n x_0\right) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x},\ \ x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1},\ \ x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν
- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

και η συνάρτηση $g:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$, $x<0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h.

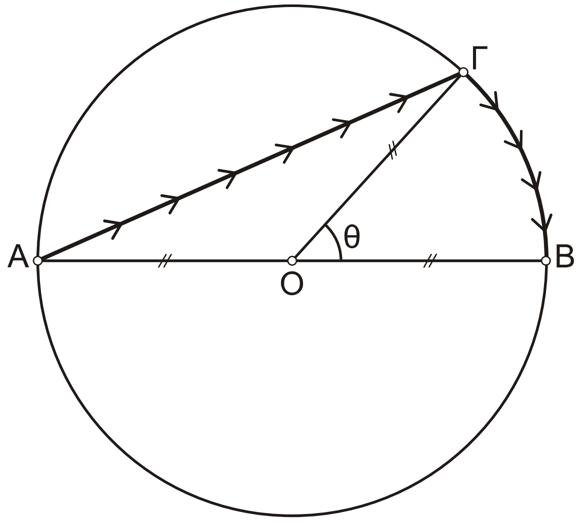
Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

Ι. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\widehat{O}\Gamma=\theta$, $\theta\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

ΙΙ. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $(\theta=0)$.

ΙΙΙ. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $(\theta=\pi)$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta)=\frac{1}{4}\theta+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\ ,\ \ \theta\in[0,\pi].$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S=R\cdot\theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x$

και συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=-x^2+\alpha x\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0\ ,\quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1–1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} & , \ x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2} & , \ x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , \ x<-1\\ 3x^2-1 & , \ x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , \ x\le -1\\ x^3-x & , \ x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \ .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και

$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2).

Μονάδες 8

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$.

Μονάδες 6

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1),\quad x\in(1,+\infty),$$

να εξετάσετε αν $\varphi=h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x}=0$.
- $f'(x)f''(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+3x+1, & -1\le x\le 0 \\ x^x, & 0<x\le \dfrac{2}{e} \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x)\,dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x},\ x>0$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\ , & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha\ , & x\geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x\,f(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}..$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}\, x - 1}{x} = 1$.

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln x .$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \text{συν}\, x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ε_1): $y = -x + 2$ (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία (ε_2): $y = x$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(x)}{x-1} > \dfrac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \geq 2x-2$, για κάθε $x \in [1, 2]$. (μονάδες 2)

ii. $1 < \int_1^2 f(x)dx < \dfrac{3}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \ x \geq 0 \\ -e^{-x}+2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, έχει εξίσωση $y = e \cdot x$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

Μονάδες 6

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια “1-1” συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

γ) Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx \ .$$

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

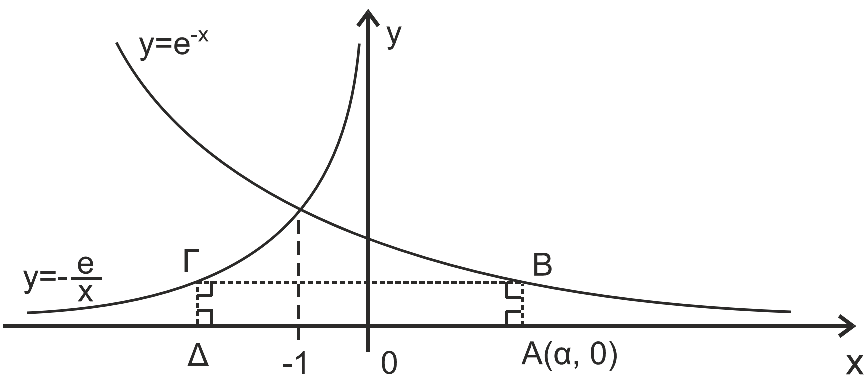
Β3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x)=-\frac{e}{x}.$$

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x'x και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις C_f και C_g, αντίστοιχα.

Έστω Α(α,0) με $α>-1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $\left(-e^{1+α}, e^{-α}\right)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται, ως συνάρτηση του α, από τον τύπο

$$E(α)=e+α\cdot e^{-α}$$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

Μονάδες 7

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Α ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = ημx\,, \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot ημ\dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot συνx\, dx$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ