

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(Απάντηση : Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

(Απάντηση : Θεώρημα σελ. 260 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

(Απάντηση : σελ. 261 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(Απάντηση : Σ δες σελ. 97)

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(Απάντηση : Λ δες σελ. 152)

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$ **(Απάντηση : Σ δες σελ. 178)**

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$ **(Απάντηση : Λ δες σελ. 230)**

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . **(Απάντηση : Σ δες σελ. 192)**

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

Μονάδες 8

- B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \text{ και } |z + w| \leq 10$$

Μονάδες 6

- B4.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z + 2z\bar{z}| = 5$$

Μονάδες 6

Λύση :

- B1.** Παρατηρώ ότι η εξίσωση $2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z| \Leftrightarrow 2x^2 - |w - 4 - 3i|x + 2|z| = 0$ είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με $\alpha = 2$, $\beta = -|w - 4 - 3i|$ και $\gamma = 2|z|$.

Για να έχει αυτή η εξίσωση μια διπλή ρίζα πρέπει :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow (-|w - 4 - 3i|)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i|^2 = 16|z| \quad (1)$$

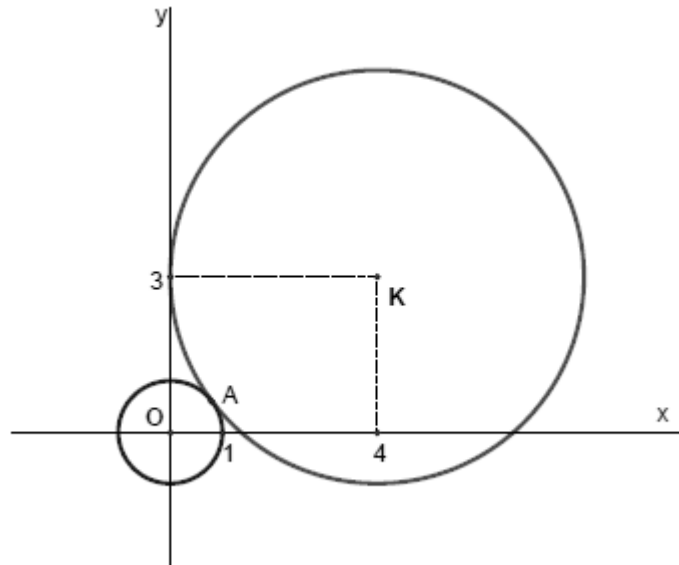
Επίσης αφού η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την

$$x = 1 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{|w - 4 - 3i|}{4} = 1 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) : $|w - 4 - 3i| = 4$ έχω ότι οι εικόνες του μιγαδικού w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

Επίσης η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται : $|w - 4 - 3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow 16 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = 1$ άρα οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$.

- B2.** Για να αποδείξω ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους, αρκεί να δείξω ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται. Έτσι : $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$, επίσης $\rho_1 + \rho_2 = 1 + 4 = 5$ άρα $(OK) = \rho_1 + \rho_2$ άρα οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



B3. Για να αποδείξω ότι $|z - w| \leq 10$ και $|z + w| \leq 10$

1^{ος} τρόπος (Αλγεβρικά)

$$\max|w| = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$$

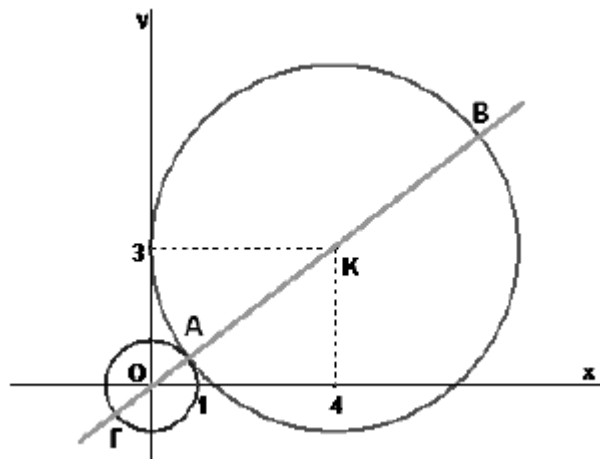
Άρα από τριγωνική ανισότητα έχω

$$|z - w| \leq |z| + |w| \Rightarrow |z - w| \leq 1 + \max|w| \Rightarrow |z - w| \leq 1 + 9 \Rightarrow |z - w| \leq 10$$

$$\text{Επίσης : } |z + w| \leq |z| + |w| \Rightarrow |z + w| \leq 1 + \max|w| \Rightarrow |z + w| \leq 1 + 9 \Rightarrow |z + w| \leq 10$$

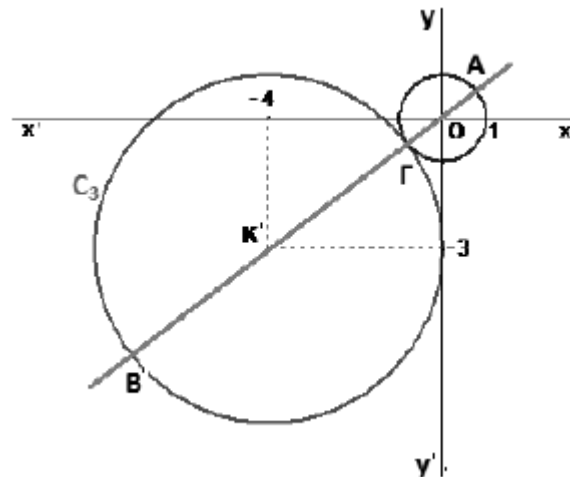
2^{ος} τρόπος (Γεωμετρικά)

$$\max|z - w| = (OK) + \rho_1 + \rho_2 = 5 + 1 + 4 = 10 \text{ άρα } |z - w| \leq 10$$



Η σχέση : $|z + w| = |z - (-w)|$ παριστάνει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z από την εικόνα του μιγαδικού $-w$. Οι εικόνες των μιγαδικών $-w$ είναι συμμετρικές ως προς $O(0,0)$ με τις εικόνες του w . Έτσι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των $-w$ είναι κύκλος με κέντρο $K'(-4,-3)$ και ακτίνα $\rho_3 = 4$, οπότε :

$$\max|z+w| = \max|z-(-w)| = (OK') + \rho_1 + \rho_2 = \sqrt{(-4-0)^2 + (-3-0)^2} + 1 + 4 = 10 \text{ άρα } |z-w| \leq 10$$



$$\begin{aligned} \text{B4. } |2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 &\Leftrightarrow |z \cdot (2z - 3 - 2\bar{z})| = 5 \Leftrightarrow |z| \cdot |2z - 3 - 2\bar{z}| = 5 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |2z - 2\bar{z} - 3| = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |2(x+yi) - 2(x-yi) - 3| = 5 \Leftrightarrow |2x+2yi-2x+2yi-3| = 5 \Leftrightarrow |-3+4yi| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{9+16y^2} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9+16y^2 = 25 \Leftrightarrow 16y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \text{ή} \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Αν $y=1$ τότε από τη σχέση $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
Άρα $z=i$
- Αν $y=-1$ τότε από τη σχέση $|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
Άρα $z=-i$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi)$$

Μονάδες 8

Λύση :

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω :

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 f(x) - x^3 + f(x))' = 0$$

$$\text{Άρα από συνέπιες Θ.Μ.Τ. έχω : } x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c \quad (1)$$

$$\text{Στην (1) για } x=1 \text{ έχω : } f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα η (1) για } c=0 \text{ γίνεται } x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(x^2 + 1) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \text{ με}$$

$$D_f = \mathbb{R}. \text{ Επίσης } f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ έχει $D_f = \mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα ψάξω λοιπόν για πλάγιες – οριζόντιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

Άρα η $(\varepsilon): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

Άρα η $(\varepsilon): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Έχουμε να λύσουμε την ανίσωση :

$$\begin{aligned} f(5(x^2+1)^3 - 8) &\leq f(8(x^2+1)^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 5(x^2+1)^3 - 8 \leq 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow 5(x^2+1)^3 \leq 8(x^2+1)^2 + 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5(x^2+1)^3 \leq 8[(x^2+1)^2 + 1] \Leftrightarrow \frac{5(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2 + 1} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow f(x^2+1) \leq f(2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \text{ έχω } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

Άρα $x \in [-1, 1]$.

Γ4. Έχω να αποδείξω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi).$$

Βάζω όπου $\xi = x$ και έτσι έχω να δείξω ότι η εξίσωση : $\int_0^{x^3 - x} f(t) dt + x(3x^2 - 1) \cdot f(x^3 - x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$. Έχω :

$$\int_0^{x^3-x} f(t)dt + x(3x^2-1) \cdot f(x^3-x) = 0 \Leftrightarrow (x)' \cdot \int_0^{x^3-x} f(t)dt + x \cdot \left(\int_0^{x^3-x} f(t)dt \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \cdot \int_0^{x^3-x} f(t)dt \right)' = 0, \text{ άρα έστω } h(x) = x \cdot \int_0^{x^3-x} f(t)dt \text{ θα δείξω ότι η εξίσωση } h'(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Εφαρμόζω Θ.Rolle για την $h(x)$ στο $[0,1]$

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (Η $f(t)$ και η $g_1(x) = x^3 - x$ είναι συνεχείς, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x^3-x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, οπότε η $h(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών)
- Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $h(0) = 0$, $h(1) = 1 \cdot \int_0^{1-1} f(t)dt = 0$, άρα $h(0) = h(1) = 0$. Από Θ.Rolle η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ για κάθε $x > 0$
- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ με } x > 0 \text{ και } h(x) = (f'(x))^3 \text{ με } x \geq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 4

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$

(μονάδες 3)
Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2 - x)f(x)dx < 1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα x ' x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Μονάδες 8

Λύση :

Δ1. Έχουμε τη σχέση $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ (1) την οποία θα πρέπει να

παραγωγίσουμε ώστε να καταλήξουμε στο ζητούμενο. Θα πρέπει όμως πρώτα να αποδείξω ότι είναι παραγωγισιμη. Έτσι : η $f'(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής άρα

η συνάρτηση $\frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και άρα η συνάρτηση

$\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής άρα τελικά η συνάρτηση

$\int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ είναι παραγωγισιμη οπότε και η

$f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ είναι παραγωγισιμη ως πράξεις παραγωγισιμων με

: $f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt$ (2). Παραγωγίζουμε τη (2) και έχουμε :

$$f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f''(x) = (f'(x))^2 - 1 \Leftrightarrow f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ2.

α. Από εκφώνηση έχω ότι $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα από συνέπιες Θ.Bolzano η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Στην (1) για $x=1$ έχω :

$$f(1) = 1 + \int_1^1 \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du \Leftrightarrow f(1) = 1 > 0. \text{ Άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) \neq 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα από συνέπιες Θ.Bolzano η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Στην (2) για $x=1$ έχω :

$$f'(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \Leftrightarrow f'(1) = 1 > 0. \text{ Άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

β. Έχω : $(f'(x))^2 = f(x)f''(x) + 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επίσης δείξαμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα $f'(x) = \sqrt{f(x)f''(x) + 1}$. Επίσης από εκφώνηση η $f'(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής, άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ δηλ. ισχύει :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{f(x)f''(x) + 1} = \sqrt{f(0)f''(0) + 1} \stackrel{f(0)=0}{=} \sqrt{1} = 1.$$

(από εκφώνηση η $f''(x)$ συνεχής άρα $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = l \in \mathbb{R}$)

Δ3.

α. Από εκφώνηση η $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και μας ζητείται να αποδείξουμε ότι $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(το μυαλό μας πηγαίνει σε ανίσωση που προκύπτει από κυρτότητα και εφαπτομένη)

$$\text{Έχω : } g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \stackrel{\Delta 1.}{\Leftrightarrow} g'(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1 - (f'(x))^2}{f^2(x)} \Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{f^2(x)}.$$

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1, g(1))$

(διαλέγω να βρω εφαπτομένη στο 1 γιατί από Δ2α. έχω πληροφορίες για το $f(1), f'(1)$)

$$\text{τότε : } (\varepsilon) : y - g(1) = g'(1)(x - 1). \quad g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1, \quad g'(1) = -\frac{1}{f^2(1)} \Leftrightarrow g'(1) = -1.$$

Άρα : $(\varepsilon): y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+2$. Η $g(x)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλ. $g(x) \geq y \Leftrightarrow g(x) \geq -x+2$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

β. Θα δείξουμε ότι $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$.

(για να αποδείξουμε μια ανίσωση με ολοκληρώματα, θα πρέπει να ξεκινήσουμε από ανίσωση χωρίς ολοκληρώματα)

$$\begin{aligned} \text{Έχω } g(x) \geq -x+2 &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2-x \stackrel{\substack{f(x)>0 \\ \text{απο} \\ \Delta 2.α}}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq f(x)(2-x) \text{ και το «}=\text{» ισχύει μόνο για} \\ x=1 \text{ (το σημείο επαφής). Άρα : } \int_0^1 f'(x)dx &> \int_0^1 f(x)(2-x)dx \Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 f(x)(2-x)dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(1)-f(0) > \int_0^1 f(x)(2-x)dx \Leftrightarrow 1 > \int_0^1 f(x)(2-x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1. \end{aligned}$$

Δ4. Ζητείται να βρούμε το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της $h(x) = (f'(x))^3$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, δηλ. $E(\Omega) = \int_0^1 |h(x)|dx$. Επειδή από $\Delta 2.α$.

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty), \text{ άρα και } h(x) = (f'(x))^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty). \text{ Έτσι}$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (f'(x))^3 dx = \int_0^1 (f'(x))^2 \cdot f'(x)dx = \left[(f'(x))^2 \cdot f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 2f'(x) \cdot f''(x) \cdot f(x)dx =$$

$$(\text{από } \Delta 1. \text{ έχω : } f''(x) \cdot f(x) = (f'(x))^2 - 1)$$

$$= (f'(1))^2 \cdot f(1) - (f'(0))^2 \cdot f(0) - \int_0^1 2f'(x) \cdot ((f'(x))^2 - 1)dx =$$

$$(\text{έχω ότι } f(0) = 0, f'(0) = 1, f(1) = 1, f'(1) = 1)$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 ((f'(x))^3 - f'(x))dx = 1 - 2 \underbrace{\int_0^1 (f'(x))^3 dx}_{E(\Omega)} + 2 \int_0^1 f'(x)dx = 1 - 2E(\Omega) + 2[f(x)]_0^1 =$$

$$1 - 2E(\Omega) - + (f(1) - f(0)) = 1 - 2E(\Omega) + 2 = 3 - 2E(\Omega).$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = 3 - 2E(\Omega) \Leftrightarrow 3E(\Omega) = 3 \Leftrightarrow E(\Omega) = 1 \text{ τ.μ.}$$