

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

- A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Απάντηση : Θεώρημα (i) σελ. 262 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 7

- A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

(Απάντηση : Ορισμός σελ.141 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 2

- A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

(Απάντηση : Θεώρημα σελ. 246 σχολικού βιβλίου)

Μονάδες 6

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f . **(Απάντηση : Σ δες σελ. 136 α)**

ii. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. **(Απάντηση : Σ δες σελ. 88-89)**

iii. Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$ **(Απάντηση : Λ δες σελ. 185)**

iv. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 **(Απάντηση : Σ δες σελ. 218)**

v. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$
(Απάντηση : Λ δες σελ. 334)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$ για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z|=1$

Μονάδες 7

B2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

Μονάδες 6

Λύση:

B1. $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow (\bar{z}-1)(z+1) = -(z-1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$$z\bar{z} + \bar{z} - z - 1 = -z\bar{z} - z + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

(Απόδειξη: το ότι $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w$ ισχύει γιατί :

$$w \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{w + \bar{w}}{2} = 0 \Leftrightarrow w + \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = -w$$

B2. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $v = \left(z - \frac{1}{z}\right)^4$. Θα δείξω ότι $v \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έχω : } |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$\text{Άρα : } \bar{v} = \left(\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)^4 = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\frac{1}{z}}\right)^4 = \left(\frac{1}{z} - z\right)^4 = \left(-\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^4 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^4 = v$$

$$\text{Δηλ. } \bar{v} = v \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}.$$

(Απόδειξη: το ότι $v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{v} = v$ ισχύει γιατί :

$$v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{v - \bar{v}}{2i} = 0 \Leftrightarrow v - \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = v$$

B3. Σύμφωνα με την εκφώνηση για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει ότι

$$|z_1| = |z_2| = 1. \text{ Άρα ισχύει : } |z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \text{ ομοίως } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}.$$

$$\text{Έχω : } \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) (z_1 + z_2) \leq 4 \Leftrightarrow (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) \leq 4 \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq 2 \quad (1)$$

Η σχέση (1) ισχύει γιατί λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχω :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq 1 + 1 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq 2$$

B4. Έχω τη σχέση $u - ui = \frac{i}{w} - w$

Θέτω $u = x + yi$ και $w = \alpha + \beta i$, όμως $w \in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, άρα $w = \beta i$. Έτσι :

$$u - ui = \frac{i}{w} - w \xLeftrightarrow[u=x+yi]{w=\beta i} x + yi - (x + yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta}, (2) \\ x - y = \beta, (3) \end{cases}$$

$$\text{Η (2) λόγω της (3) γίνεται : } x + y = \frac{1}{x - y} \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , ανήκουν στην (ισοσκελή) υπερβολή : $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $xf(x)+1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

Μονάδες 5

Λύση:

Γ1. Έχω $xf(x)+1 = e^x \Leftrightarrow xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. Αρκεί τώρα να βρω το $f(0)$. Από εκφώνηση η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο

$$x_0 = 0, \text{ δηλ. } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Γ2. Για να δείξουμε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι 1-1 άρα ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Έτσι για κάθε $x \neq 0$ έχω :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x - e^x + 1 = 0. \text{ Η τελευταία εξίσωση για να λυθεί θέλει}$$

προφανή ρίζα, έτσι θέτω $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ προφανής ρίζα. Το πρόσημο της f' , εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο της $g(x)$, οπότε για να βρω το πρόσημο της $g(x)$ θα μελετήσω πρώτα τη $g(x)$ ως προς τη μονοτονία. Έτσι έχω : $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Άρα για :

- $x > 0 \stackrel{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$
- $x < 0 \stackrel{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Δηλαδή :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (αφού είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$) και άρα η f είναι 1-1 οπότε ορίζεται και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} , αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της f .

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

$$\text{Έχω : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\text{Άρα : } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Γ3. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$. Τότε $(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Από Γ1. $f(0) = 1$. Αρκεί να βρω το $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{DLH}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } (\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) , εκτός από το σημείο επαφής, δηλαδή ισχύει : $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2f(x) \geq x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το " $=$ ", δηλ. $2f(x) = x + 2$ ισχύει μόνο στο σημείο επαφής της C_f με την (ε) στο σημείο επαφής για $x_0 = 0$. Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x_0 = 0$.

Γ4. Έχω : $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x \cdot \ln(f(x))] = 0$ γιατί :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(f(x))] \stackrel{\Gamma 1.}{=} \ln f(0) = \ln 1 = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν σχέσεις:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $x > 0$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$(\varepsilon) : F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]x^5}{x - 1} + \frac{(\beta - 1)(x + 1)^3}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x , στο διάστημα $(1, 3)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt, \text{ για κάθε } x > 0$$

Μονάδες 6

Λύση :

Δ1. Έχω : $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2$ (1) , για κάθε $x > 0$.

Για να βρούμε τον τύπο της f : παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω :

$$\begin{aligned} \left(2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)}\right)' &= \left(\int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2\right)' \Rightarrow \\ \Rightarrow 2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} f'(x) &= e^{f(x)} f'(x) \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow 2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} = 0 \\ \Rightarrow 2f'(x) &= -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \Rightarrow -2f'(x)e^{-f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow (2e^{-f(x)})' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x=1$ η (1) γίνεται $2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(1) + e^{f(1)} - 1 = 0$, έστω $g(x) = x + e^x - 1$, με $D_g = \mathbb{R}$ τότε : $g(f(1)) = 0 \stackrel{g(0)=0}{\Leftrightarrow} g(f(1)) = g(0)$, όμως $g'(x) = 1 + e^x > 0$ άρα η $g(x) \uparrow \Rightarrow g: "1-1"$, άρα $g(f(1)) = g(0) \stackrel{g: "1-1"}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$.

Άρα στη (2) για $x=1$ έχω : $2e^{-f(1)} = 1 + \frac{1}{1} + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα η (2) για κάθε $x > 0$ γίνεται :

$$\begin{aligned} 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow 2e^{-f(x)} = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow e^{-f(x)} = \frac{x^2 + 1}{2x} \Leftrightarrow \ln e^{-f(x)} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -f(x) &= \ln \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \Leftrightarrow f(x) = -\ln \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^{-1} \Leftrightarrow f(x) = \ln \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), x > 0. \end{aligned}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής, οπότε η συνάρτηση : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ είναι

παραγωγισιμη με $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) = \left(\ln \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{2x}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)' =$

$$\frac{x^2 + 1}{2x} \cdot \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{2x(x^2 + 1)} = \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)}.$$

$$F''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή ή } x = -1 \text{ απορ. αφού από εκφ. } x > 0.$$

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$	+	0	-
$F(x)$	$\cup$		$\cap$

Τα πρόσημα του παραπάνω πίνακα έχω προκύπτουν ως εξής :

$$F''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} > 0 \stackrel{\substack{x(x^2+1)>0 \\ \text{για } x>0}}{\Leftrightarrow} 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1), \text{ όμως πρέπει } x > 0, \text{ άρα τελικά} \\ F''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1).$$

$$F''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x(x^2+1)} < 0 \stackrel{\substack{x(x^2+1)>0 \\ \text{για } x>0}}{\Leftrightarrow} 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \text{ όμως πρέπει } x > 0, \text{ άρα} \\ \text{τελικά } F''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty).$$

Άρα όπως βλέπουμε και από τον πίνακα η $F(x)$ έχει σημείο καμπής το $\Sigma(1, F(1)) \equiv \Sigma(1, 0)$, δηλαδή $x_0 = 1 > 0$.

Έστω (ζ) η εφαπτομένη της C_F στο $M(\xi, F(\xi))$, η $(\zeta) // (\varepsilon) : F(\beta)x - (\beta-1)y + 2012(\beta-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow F'(\xi) = \frac{F(\beta)}{\beta-1}$. Δηλαδή αρκεί να

δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \frac{F(\beta)}{\beta-1}$. Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την $F(x)$ στο $[1, \beta]$.

- Η $F(x)$ συνεχής στο $[1, \beta]$ (Έδειξα ότι η $F(x)$ είναι παραγωγισιμη άρα και συνεχής)
- Η $F(x)$ παραγωγισιμη στο $(1, \beta)$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1}$

Επειδή $F''(x) < 0$ στο $(1, \beta)$, άρα η $F'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \beta]$, άρα και το παραπάνω $\xi \in (1, \beta)$ είναι μοναδικό.

Δ3. Για να δείξω ότι η εξίσωση : $\frac{[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]x^5}{x-1} + \frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$, αρχικά κάνω απαλοιφή παρανομαστών και έχω : $(x-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]x^5 + (x-1)(\beta-1)(x+1)^3 = 0$.

Έστω : $h(x) = (x-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]x^5 + (x-1)(\beta-1)(x+1)^3 = 0$, τότε θα δείξω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[1,3]$

- Η $h(x)$ συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(3) = 2(\beta-1)(3+1)^3 > 0$ αφού $\beta > 1$
- $h(1) = -2[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] < 0$ γιατί :

$$(\text{από ανισότητα Θ.Μ.Τ.}) \text{ για } \xi \in (1, \beta) \Rightarrow \xi < \beta \stackrel{F''(x) < 0 \Rightarrow F'(x) \downarrow}{\Leftrightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta-1} > f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\beta > 1}{\Leftrightarrow} F(\beta) > (\beta-1)f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - (\beta-1)f(\beta) > 0 \Leftrightarrow F(\beta) + (1-\beta)f(\beta) > 0$$

Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

Δ4. Θα δείξουμε ότι : $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x tf(t) dt$, για κάθε $x > 0$

Για το ολοκλήρωμα στο 1^ο μέλος έχω : θέτω $\frac{t}{x} = u \Rightarrow \frac{1}{x} dt = du \Leftrightarrow dt = xdu$

Όταν $t = x \rightarrow u = 1$, όταν $t = x^2 \rightarrow u = x$. Έτσι έχω να δείξω ότι :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x tf(t) dt \Leftrightarrow \int_1^x f(u)xdu \leq \int_1^x tf(t) dt \Leftrightarrow x \int_1^x f(u)du \leq \int_1^x tf(t) dt$$

Έστω : $\phi(x) = x \int_1^x f(u)du - \int_1^x tf(t)dt$, θα δείξω ότι $\phi(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$.

Η $\phi(x)$ είναι παραγωγισιμη με $\phi'(x) = \int_1^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_1^x f(u)du$

$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(u)du = 0 \Leftrightarrow x = 1$ προφανής ρίζα και $\phi''(x) = f(x) \leq 0$ από εκφώνηση, άρα η $\phi'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x > 0$, οπότε η προφανής ρίζα είναι και μοναδική. Έτσι σχηματίζω τον πίνακα :

x	0	1	$+\infty$
$\phi'(x)$	+	0	-
$\phi(x)$	γν. αύξουσα	T.M.	γν. φθίνουσα

Τα πρόσημα του πίνακα προκύπτουν ως εξής :

Για $x > 1 \xrightarrow{\phi' \downarrow} \phi'(x) < \phi'(1) \Leftrightarrow \phi'(x) < 0$ άρα $\phi(x)$ γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Για $x < 1 \xrightarrow{\phi' \downarrow} \phi'(x) > \phi'(1) \Leftrightarrow \phi'(x) > 0$ άρα $\phi(x)$ γν. αύξουσα στο $(0, 1)$

Άρα στο $x_0 = 1$ η $\phi(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $\phi(1) = 1 \int_1^1 f(u)du - \int_1^1 tf(t)dt = 0$

Άρα ισχύει $\phi(x) \leq \phi(1) \Leftrightarrow \phi(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$.