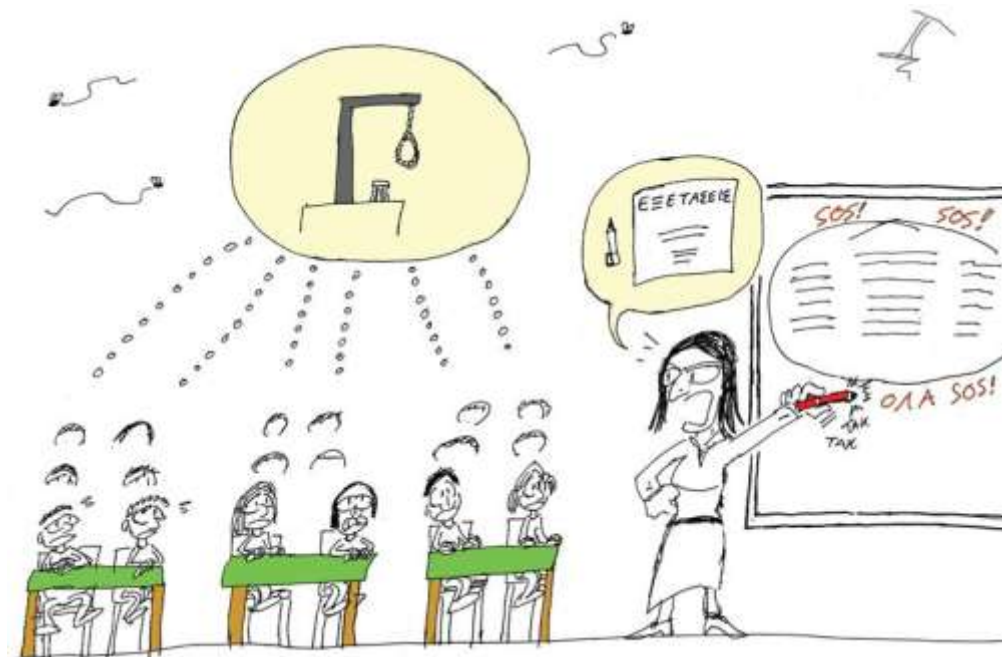


**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ**

2002 - 2013



**ΚΑΙ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :
ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

ΜΑΪΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) . \text{ Μονάδες } 12$$

- B.1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$. **Μονάδες 8**

- B.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[α,β]$ και συνεχής στο $(α,β)$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[α,β]$ μία μέγιστη τιμή. **Μονάδα 1**

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδα 1**

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 . \text{ Μονάδα } 1$$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx . \text{ Μονάδα } 1$$

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . **Μονάδα 1**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. **Μονάδες 7**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \text{ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.}$$

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[α, β]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$, τότε και

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \quad \text{.Μονάδες 2}$$

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f . **Μονάδες 5**

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 12**

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) \quad \text{.Μονάδες 6}$$

ΜΑΪΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 8**

B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. **Μονάδες 2**

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ . **Μονάδες 2**

γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \text{Μονάδες 2}$$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. **Μονάδες 2**

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 . **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ και $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$. **Μονάδες 6**

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$. **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **Μονάδες 6**
- β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 6**
- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} . **Μονάδες 5**
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4°

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) .
Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α, β) . **Μονάδες 8**
- β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$. **Μονάδες 9**
- γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f . **Μονάδες 8**

ΜΑΪΟΥ 2004

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$ **Μονάδες 10**
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. **Μονάδες 2**
- β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ **Μονάδες 2**
- γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0)$ **Μονάδες 2**
- δ.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ . **Μονάδες 2**
- ε.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. **Μονάδες 10**
- β.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**
- γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$. **Μονάδες 8**
- β.** Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 8**
- γ.** Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g' . **Μονάδες 5**
- β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$ **Μονάδες 8**
- γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$ **Μονάδες 6**
- δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. **Μονάδες 6**

ΜΑΪΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$. **Μονάδες 9**

A.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; **Μονάδες 4**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (α, β)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$. **Μονάδες 2**

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$. **Μονάδες 2**

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} . **Μονάδες 2**

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = +\infty$. **Μονάδες 2**

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$. **Μονάδες 2**

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \frac{9}{z_1}$. **Μονάδες 7**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 9**

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 3**

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M . **Μονάδες 7**

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$. **Μονάδες 6**

β. Να βρεθεί το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$. **Μονάδες 6**

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$. **Μονάδες 6**

ΜΑΪΟΥ 2006

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ . **Μονάδες 10**

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ; **Μονάδες 5**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$. **Μονάδες 2**
- β.** Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . **Μονάδες 2**
- γ.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. **Μονάδες 2**
- δ.** Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 2**
- ε.** Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. **Μονάδες 6**
- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. **Μονάδες 8**
- γ. i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$. **Μονάδες 4**
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} . **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. **Μονάδες 9**

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ **Μονάδες 8**

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΜΑΪΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \text{ Μονάδες } 8$$

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**

A.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **Μονάδες 3**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $f(x) \geq 0$

τότε $\int_a^b f(x)dx > 0$. **Μονάδες 2**

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . **Μονάδες 2**

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . **Μονάδες 2**

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε $\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα. **Μονάδες 2**

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{\alpha+2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. **Μονάδες 9**

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{\alpha+2i}$ για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2v} = (-z_2)^v$ για κάθε φυσικό αριθμό v . **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. **Μονάδες 7**
- β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες. **Μονάδες 8**
- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 3**
- δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

- α. Ναδειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 8**
- β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 6**

- γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$
για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. **Μονάδες 4**

- δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$. **Μονάδες 7**

ΜΑΪΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{Μονάδες 10}$$

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$; **Μονάδες 5**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$
Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 2**

γ. Όταν η διακινούσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών. **Μονάδες 2**

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ'ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .
Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx \quad \text{Μονάδες 2}$$

ΘΕΜΑ 2°

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **Μονάδες 6**

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . **Μονάδες 7**

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **Μονάδες 6**

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**
- β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 9**
- γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $X = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α . **Μονάδες 6**
- δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

- α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ **Μονάδες 8**
- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$
 Μονάδες 4
- γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

- i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ **Μονάδες 10**
- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 **Μονάδες 3**

ΜΑΪΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1°

- A.** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ . **Μονάδες 10**
- B.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **Μονάδες 2**
- β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ **Μονάδες 2**
- γ.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ **Μονάδες 2**
- δ.** Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **Μονάδες 2**
- ε.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=a$, $x=b$ και τον άξονα $x'x$ είναι :
 $E(\Omega) = \int_a^b f(x) dx$ **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 9**
- β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. **Μονάδες 8**
- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$ **Μονάδες 8**

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. **Μονάδες 5**

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ **Μονάδες 6**

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$ **Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$. **Μονάδες 7**

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΜΑΪΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1°

A1. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; **Μονάδες 4**

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών τους ακτίνων.

β. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και

$$B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

δ. $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 . **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

α. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης. **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι : $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$. **Μονάδες 6**

γ. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει : $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 7**

δ. Για τους μιγαδικούς w του προηγούμενου ερωτήματος να δείξετε ότι : $3 \leq |w| \leq 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ $x \in \mathbb{R}$

α. να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f . **Μονάδες 5**

β. να λύσετε την εξίσωση : $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right]$. **Μονάδες 7**

γ. να αποδείξετε ότι η f έχει δυο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. **Μονάδες 6**

δ. να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) \neq x \text{ και } f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή. **Μονάδες 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι : $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΑΪΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγισιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$. **Μονάδες 10**

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε μιγαδικό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\}$ ισχύει ότι $(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\angle xOy$ και $\angle x'Oy'$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις : $|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2$ και

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

B4. Να αποδείξετε ότι $|z - w| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 8**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 3**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής. **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

- i. $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$
- ii. $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$
- iii. $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγισιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 4**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$ τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$. **Μονάδες 7**

ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$; **Μονάδες 4**

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; **Μονάδες 4**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δυο συζύγων μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

δ. Για κάθε $x \in \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$ ισχύει ότι $(\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$

ε. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[AB]$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις : $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$ και $|w-5\bar{w}| = 12$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$. **Μονάδες 6**

B2. Αν z_1, z_2 είναι δυο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$. **Μονάδες 7**

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$. **Μονάδες 6**

B4. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - w| \leq 4$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες. **Μονάδες 6**

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$. **Μονάδες 6**

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$
-

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη και να βρείτε τον τύπο της. **Μονάδες 10**

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε :

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$ **Μονάδες 5**

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x > 0$, όπου $a > 0$, είναι κυρτή (**Μονάδες 2**). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$. (**Μονάδες 4**).

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$ **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. **Μονάδες 7**

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.) **Μονάδες 4**

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0 < \infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$. (μονάδες 3) **Μονάδες 8**

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\beta = -4$ και $\gamma = 5$ **Μονάδες 9**

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|v| < 4$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και

- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \exp x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $H f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1 \text{ έχει ακριβώς μια λύση.}$$

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ :

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $w = \frac{z-3i}{1+i}$. Αν $w = 2-2i$

α. να βρείτε το μέτρο του z

β. αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

γ. αν $z=x+yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι : $\operatorname{Re}(w) = \frac{x+y-3}{2}$ και $\operatorname{Im}(w) = \frac{-x+y-3}{2}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1-2i$ και $z_2 = 3+4i$.

i. Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x=-1$ και $y=2$.

ii. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .

iii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1| = |z_2|$.

ΘΕΜΑ 3 (2° ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2005)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3+i$ και $z_2 = 1-3i$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι : $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

iii. Θωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2}$, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\operatorname{Im}(w) = -1$.

ΘΕΜΑ 4 (2° ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2006)

Έστω ότι για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει : $(5z-1)^5 = (z-5)^5$.

i. Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

ii. Να δείξετε ότι : $|z| = 1$.

iii. Αν $w = 5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

ΘΕΜΑ 5 (2° ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2007)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1+i$.

i. Να δείξετε ότι : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

ii. Αν για το μιγαδικό z ισχύει : $|z-z_1| = |z-z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι :

a. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

b. Για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

- Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.
- Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
- Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΘΕΜΑ 7

A. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει: $|z - 6 - 8i| = 5$.

(α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος C των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z καθώς και η καρτεσιανή εξίσωσή του.

(β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$

(γ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς να βρεθούν αυτοί που έχουν το ελάχιστο μέτρο $|z|$ και το μέγιστο μέτρο $|z|$,

B. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z με $|z + 16| = 4 \cdot |z + 1|$.

(α) Να αποδείξετε ότι $|z| = 4$.

(β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z όταν: $\left| \frac{z}{4} + 4 \right| = |z + 1|$.

ΘΕΜΑ 8

Έστω η εξίσωση $2z^2 + 2z + 1 = 0$.

(α) να λυθεί η εξίσωση.

(β) αν $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ να δείξετε ότι: ο $w = \frac{z_1^2 - z_1^3}{z_1 - z_1^3} \in I$.

(γ) αν $v = (2\lambda + 1) + (\lambda + 3)w$

i. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του v .

ii. την ελάχιστη απόσταση της εικόνας του v από την αρχή των αξόνων καθώς και ποιος είναι ο μιγαδικός με την ελάχιστη απόσταση.

ΘΕΜΑ 9 (4^ο 2004 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\text{να ισχύει: } \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $\operatorname{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$

δ. οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΘΕΜΑ 10

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2} i$,

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας $\rho_1=1$

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας $\rho_2=1$.

ΘΕΜΑ 11 (1991)

Αν $w = \frac{z+ai}{iz+a}$, $a \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq ai$, να αποδειχθεί ότι :

i. Ο w είναι φανταστικός αριθμός, αν-ν , ο z είναι φανταστικός αριθμός.

ii. Ισχύει : $|w|=1$, αν-ν , ο z είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ 12

Αν A, B είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και $z_2 \neq 0$. Να δείξετε ότι :

i. $\vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in I$

ii. $\vec{OA} \parallel \vec{OB} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ (θα μπορούσε να λέει αν O, A, B είναι συνευθειακά)

ΘΕΜΑ 13

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 , για τους οποίους ισχύουν : $w = z - zi$ και $w_1 = \frac{1}{a} + ai$ όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι αν το a μεταβάλετε στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει : $w = \overline{w_1}$, τότε η εικόνα του z ανήκει σε υπερβολή.

ΘΕΜΑ 14

Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί οι οποίοι ανήκουν στον ίδιο κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)^{2009}$ είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ 15 (2^ο 2005 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4+4i \text{ και } 2z_1 - \overline{z_2} = 5+5i, \text{ να βρείτε τους } z_1, z_2.$$

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z-1-3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w-3-i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις : $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$ (1) και $|w - 4| = |w + 4| + 6$ (2)

- Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών τους
- Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z|$ καθώς και τους αντιστοίχους μιγαδικούς.
- Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1) να βρείτε τη μέγιστη τιμή $|z_1 - z_2|$
- Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$
- Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς w που έχουν το ελάχιστο μέτρο.
- Έστω w_1, w_2 δυο μιγαδικοί που ικανοποιούν την (2) $|w_1 - w_2|$

ΘΕΜΑ 15 (2^ο 2009 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + 4|z_1 - z_2|^2 = 0$

ΘΕΜΑ 16 (2^ο 2010 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in R$.

- Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό z .
- Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι : $|w + z| = |z|^2$.
- Αν $z = 2 + i$ και $u = \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι : $u^{2010} = -1$.

ΘΕΜΑ 17 (2010 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν : $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

- Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1, z_2
- Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση : $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$
- Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος ii), να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει : $2\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$
- Αν w_1, w_2 είναι δυο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος ii) με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

ΘΕΜΑ 18 (2010 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει : $|z| = |z - 2i|$

- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1$.
- Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο $\sqrt{2}$.

- iii. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι : $z_1^4 + z_2^4 = -8$.

ΘΕΜΑ 19 (2011 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις :

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1) \text{ και } w(\overline{w} + 3i) = i(3\overline{w} + i) \quad (2)$$

- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή : $y = \frac{1}{4}x^2$
- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι κύκλος κέντρου $K(0,3)$ και ακτίνας $\rho = 2\sqrt{2}$
- Να βρείτε τα σημεία A, B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z=w$.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, και στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ , έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z|$, καθώς και ο $w = -\frac{4}{z-2}$.

- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z
- Να εξετάσετε αν υπάρχουν μιγαδικοί z για τους οποίους να ισχύει $z=w$
- Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z και η συνάρτηση $f(z) = |z| + \operatorname{Re}(z)i$.

- Να βρείτε το $|f(3 + i\sqrt{7})|$
- Αν η εικόνα του $f(z)$ βρίσκεται στη διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $z \geq 0$
- Αν ισχύει $(\operatorname{Re}(f(z)))^2 = 2\operatorname{Re}(z) + 3$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .
- Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του iii), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

ΘΕΜΑ 22

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις :

$$|(1+i)z - 2 - 4i| = \sqrt{18} \text{ και } w = 2z - 11 + 5i. \text{ Να βρείτε :}$$

- Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και του w
- Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$
- Τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

ΘΕΜΑ 23 (4^ο 2007 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι

$$z_2 - z_1 \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι $z_2 - z_1 = 1$.
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.
- Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογίσετε τον z_1 και να αποδείξετε ότι : $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$.

ΘΕΜΑ 24 (2^ο 2012 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι :

- i. $|z| = 1$
- ii. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.
- iii. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δυο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z .
- iv. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει : $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ 25 (2^ο 2008 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

- α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.
- β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$
- γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$

ΘΕΜΑ 26

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν : $|iz + 6 + 3i| = 3$ και $|w|^2 - 5(w + \bar{w}) + 8 - i^{30} = 0$. Να βρείτε :

- i. Τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων του z και του w .
- ii. Την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$ και του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 27

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z = 2w + 9i$. Αν η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(2, -3)$ και ακτίνα 1, να βρείτε :

- i. Το γεωμετρικό τόπο του z .
- ii. Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΘΕΜΑ 28

Αν z μιγαδικός με $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, τότε :

- i. Αν $\operatorname{Im}(z) = 1$, να βρείτε το $\operatorname{Re}(z)$.
- ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z .
- iii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.
- iv. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί με $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

ΘΕΜΑ 29 (2^ο 2010 ΟΕΦΕ)

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z = \frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

- i. Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Αν $|z|=1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι :

ii. Ο αριθμός $\alpha = \frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_1} + \frac{z_1 + z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

iii. Αν επιπλέον $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι : $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$

- iv. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 12 = 0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε) .

ΘΕΜΑ 30

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z = 2w + 9i$. Αν η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο $K(2,-3)$ και ακτίνα 1, να βρείτε :

- i. Το γεωμετρικό τόπο του z . ii. Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΘΕΜΑ 31 (2^ο 2013 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση : $2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δυο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι : $|z - w| \leq 10$ και $|z + w| \leq 10$

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει : $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$

ΘΕΜΑ 32 (2^ο 2012 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : $|iz - 1| = 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$. (9M)
- ii. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να δείξετε ότι $|z| \leq 2$. (8M)
- iii. Αν z_1, z_2 είναι δυο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB , όπου $K(0,-1)$, είναι ορθογώνιο. (8M)

ΘΕΜΑ 33 (2^ο 2013 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}$.

- i. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, εκτός από ένα σημείο του (7M). Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού. (2M)
- ii. Αν z_1, z_2 είναι δυο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , να αποδείξετε ότι : $|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$ (8M)
- iii. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος i. να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει : $|z| = \sqrt{5}$ (8M)

ΘΕΜΑ 34 (2^ο 2011 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω $W = Z + \frac{4}{Z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει $w=2$

B2. Αν $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$.

B3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

B4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ 35 (2^ο 2012 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 36 \quad (1)$$

$$|2w-1| = |w-2| \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$.

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ - ΑΝΑΛΥΣΗ:

ΘΕΜΑ 1 (ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1995 ΔΕΣΜΕΣ)

A. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$$

B. Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a^2 + if(a)$, $w = f(\beta) + \beta^2 i$ με $\alpha\beta \neq 0$. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

ΘΕΜΑ 2 (3^ο 2004 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$. Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

i. $|z| = 1$ ii. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

iii. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 1)$

ΘΕΜΑ 3 (2^ο 2002 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και $\alpha\beta \neq 0$.

Έστω μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + if(\alpha)$, $w = f(\beta) + i\beta^2$.

α. Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε:

i. $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και ο αριθμός $w + iz$ είναι φανταστικός να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (\alpha, \beta)$, της γραφικής παράστασης της f στο οποίο εφάπτεται ευθεία παράλληλη στον $\chi\chi$.

ΘΕΜΑ 4 (3^ο 2004 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$. Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 5 (ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$, $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

i. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , αν $|z + 1| > |z - 1|$

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος ριζών της f .

ΘΕΜΑ 6 (3^ο 2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x=2$.

β. Αν η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ).

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της εφαπτομένης (ϵ), του άξονα $x'x$ και της ευθείας $X = \frac{3}{5}$.

ΘΕΜΑ 7 (3^ο 2003 ΟΕΦΕ)

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγισιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = f(\alpha) + f(\beta)i$ με $f(\beta) \neq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι :

i. Ο αριθμός $z_1 = \frac{1 + \beta - i\bar{z}}{1 + f(\beta) - i\bar{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(\alpha) = \alpha$.

ii. Αν $z = -i\bar{w}$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων O , είναι κορυφές ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου.

B. Έστω ότι ισχύει $|z - i\bar{w}|^2 = |z|^2 + |i\bar{w}|^2$. Να αποδείξετε ότι :

iii. $\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) = 0$

iv. Οι εικόνες των z, w και η αρχή O είναι συνευθειακά σημεία.

v. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

ΘΕΜΑ 8 (3^ο 2005 ΟΕΦΕ)

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x-1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε, ο αριθμός $w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός.

iii. Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 9 (2^ο 2006 ΟΕΦΕ)

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$.

i. Να δείξετε ότι : $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

ii. Αν $|z| = 1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$.

iii. Να αποδείξετε την ισοδυναμία : w φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) > 1$ και έστω $z = f(\alpha) \cdot i$ και $w = f(\beta) \cdot i$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β)

ΘΕΜΑ 10 (3^ο 2007 ΟΕΦΕ)

Δίνονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ με $zw \neq 0$ για τους οποίους ισχύει : $|z + w| = |z - w|$.

- Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .
- Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και $z = \alpha + f(\alpha)i$, $w = f(\beta) - \beta i$ τότε η εξίσωση $xf'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

ΘΕΜΑ 11 (2^ο 2009 ΟΕΦΕ)

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in \mathbb{C}$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι :

- $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.
- $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$.
- $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$.
- Αν $f(x)$ παραγωγισιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$ με $f(0) - 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ και $f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_0) = 3x_0 - 2$.
- Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y ye^{t^2} dt$ και :

$$\sigma \nu x + \int_0^x |z - 3i| \cdot f(t) dt \geq |3z - i| \cdot x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να βρείτε το $f(0)$
- Να αποδείξετε ότι $|z - 3i| = |3z - i|$
- Να βρείτε το $|z|$
- Να αποδείξετε ότι $|z + z^2 + 3z^3 - 1| = |z + z^2 - z^3 + 3|$
- Να αποδείξετε ότι αν $z \neq i$, τότε ο $w = \frac{z+i}{z-i}$ είναι φανταστικός.

ΘΕΜΑ 13 (3^ο 2004 ΟΕΦΕ)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{a + e^t} dt$, $a > 0$ και τον μιγαδικό $z = g(x) + xi$ με $|\bar{z} + i| \leq |z - 1|$.

- Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται.
- Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν στη γραφική παράσταση της g^{-1} .
- Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $a=1$.
- Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t} dt < \frac{1}{1+e}$.

ΘΕΜΑ 14 (4^ο 2011 ΟΕΦΕ)

A. Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το " $=$ ";

B. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z , με :

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-t)} dt \text{ και } \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1, \text{ όπου } a > 0.$$

- Να αποδείξετε ότι $\frac{z}{1+i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.
- Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ για κάθε $x \geq 0$.
- Να αποδείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφη της.
- Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγισιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot f'(\xi) = 1$.

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = e^x + exi$, με $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$, ώστε ο μιγαδικός αριθμός :

$$u = z^2 + \left(\frac{z - \bar{z} - 2ei}{2} \right)^2 + 2010 \text{ να είναι φανταστικός.}$$

- Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \bar{z}^2 i - z^2 i$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός.
- Να βρείτε για ποια τιμή του x , ο αριθμός w γίνεται ελάχιστος.

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ και η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{|z| \cdot x^2 - |z-2| \cdot x}{x^2 - 4}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, να βρείτε το μιγαδικό z .
- Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(1, \frac{|z|}{3}\right)$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του μιγαδικού z .
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (|z-2| + |z|)x^{2008} + x^{2009} - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
(Τα υποερωτήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους)

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |z-1| + \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}, & x < 1 \\ |z+i| + x - \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z ώστε η f να είναι συνεχής.

ΘΕΜΑ 19

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\beta) \neq 0$ και οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = f(\alpha) + f(\beta)i$ τέτοιοι ώστε $|z - iw|^2 = |z|^2 + |w|^2$.

- Να δείξετε ότι $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}$ και $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$.
- Αν $\alpha < 0 < \beta$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) .

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ και οι μιγαδικοί $z = f(0) + i$ και $w = 1 + f(2)i$ τέτοιοι ώστε $|z + w| = |z - w|$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0, 2]$.

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + f(\alpha)i$ και $w = \beta + f(\beta)i$ για τους οποίους ισχύει $\operatorname{Re}(z\bar{w}) < \operatorname{Im}(zw)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

ΘΕΜΑ 22

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + e^{-x}i$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in (0, 1)$, ώστε ο μιγαδικός $w = z^2 + \frac{1}{z}$ να είναι φανταστικός.

ΘΕΜΑ 23

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ για τον οποίο ισχύει: $|z - 2| < |2z - 1|$. Να αποδείξετε ότι :

- $|z| > 1$,
- Η εξίσωση $5 - \frac{8x}{\pi} = |z| \cdot \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 24

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$ τέτοια ώστε ο αριθμός: $z = \frac{\beta + if(\beta)}{\alpha - if(\alpha)}$ να είναι πραγματικός. Να αποδείξετε ότι :

- $\alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) = 0$,
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ 25

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς: $z = x + \frac{i}{x+i}$, με $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδείξετε ότι από τους μιγαδικούς z της παραπάνω μορφής υπάρχει μόνο ένας, ο οποίος είναι φανταστικός.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{Im}(z) \cdot \eta\mu x)$

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει : $|iz - 4 - 3i| = 5$

- Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$
- Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z που βρίσκεται στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$, ώστε : $4\xi^3 + 7\sin(\pi\xi) + 3 = |z|$

ΘΕΜΑ 27

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x)}{\eta\mu(x^2-4) + \sqrt{x-1}-1} = \frac{2}{9}.$$

Θεωρούμε επίσης και τους μιγαδικούς αριθμούς : $z = x + f(x)i$, με $x \in [1,2]$

- Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον μιγαδικός z , ώστε ο μιγαδικός $w = z(1+i)$ να είναι φανταστικός.

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ο μιγαδικός αριθμός $z = f(0) + f(2)i$ για τον οποίο ισχύει ότι : $\operatorname{Re}(z^2) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

- $f(0) = f(2)$
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ώστε $f(\sin\xi) = f(2 - \eta\mu\xi)$

ΘΕΜΑ 29

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί : $z = f(0) + i$ και $w = f(1) + i$. Αν ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι :

- $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$
- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 30

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί : $z = f(\beta) - i\beta^2$ και $w = f(\alpha) + i\alpha^2$ για τους οποίους ισχύει η σχέση : $|w + \bar{z}| \leq |\bar{w} - z|$. Να αποδείξετε ότι :

- $\operatorname{Re}(zw) \leq 0$
- η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ 31

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ και τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = x^3 + |z| \cdot x - |z|^3$ και η f γνησίως αύξουσα.

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, |z|)$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + |z|^3}{\eta\mu x} = 1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z .

ΤΟ 3^ο ΘΕΜΑ :

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x+4}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$. Μονάδες 6

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x \ln x - 2x$.

α. να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f Μονάδες 4

β. να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$, για κάθε $x > 0$. Μονάδες 4

γ. να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ 4 (3^ο 2006 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$

α. να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

γ. να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ. να αποδείξετε ότι η $f(x)=2009$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της f .

ΘΕΜΑ 5 (3^ο 2005 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- Αν $\alpha = -1$ τότε :
 - Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
 - Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ 6 (3^ο 2008 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

- Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2} f(x) dx$

ΘΕΜΑ 7 (3^ο 2008 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.
 β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
 γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.
 ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

ΘΕΜΑ 8 (2^ο 2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.
 β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$.
 γ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

ΘΕΜΑ 9 (3^ο 2005 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
 β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
 γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην

ευθεία (ϵ): $y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

ΘΕΜΑ 10 (3^ο 2010 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

- Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
 Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
 Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.
 Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 11 (4^ο 2005 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3}$ με $\alpha, k \in \mathbb{R}$ και $x \neq 3$.

- α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.
 β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ 12

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 13

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$ και το σημείο $x_0 = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{x-a}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex$.

β. Για $a = -1$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 15 (2^ο 2000)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία $y=3$, τέμνει τη C_f , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

ii. Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

iii. Υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

ΘΕΜΑ 16 (ΔΕΣΜΕΣ 1994)

Δίνεται ο θετικός πραγματικός a και η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το a , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-2x} f(x)$, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι : $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 18 (3^ο 2001 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+a, x \leq 1 \\ (1-e^{-x+1})\ln(x-1), x \in (1,2] \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$

- Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$
- Να βρείτε το a , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
- Για $a=-1$ να δείξετε ότι Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τ.ω. η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον $x'x$.

ΘΕΜΑ 19

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση :

$$\int_0^x (1+t^2)f(t)dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$

ΘΕΜΑ 20 (3^ο 2001 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι Υπάρχει ένα μόνο σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, όπου x_0 είναι η θέση τοπικού ακρότατου της f .

ΘΕΜΑ 21 (3^ο 2001 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$, $\lambda > 0$, είναι : $E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$.
- Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο

ΘΕΜΑ 22

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει : $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt$, $x > 0$.

- Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη στο $(0, +\infty)$.
- Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, $x > 0$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ 23 (2^ο 2001 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ)

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

ΘΕΜΑ 24 (3^ο 2001 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Για μια πραγματική συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 25 (2^ο 2004 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^2}$, με $x > 0$.

- Να βρείτε την ασύμπτωτη (ϵ) της C_f στο $+\infty$.
- Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.
- Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες/s, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του E ως προς τον χρόνο, τη στιγμή που είναι $\alpha=2$.

ΘΕΜΑ 27

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) + f(x) = -x - 1$ και $f(0) = 1$.

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x=\alpha$, με $\alpha \in (0,1)$
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

$$\text{είναι ίσο με } E(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

ΘΕΜΑ 28

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 4$, για την οποία ισχύουν: $f'(x) > f(x)$ και $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- Τον τύπο της f
- Τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και

$$x = \ln \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 29

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγισιμη για την οποία ισχύει : $\int_e^x \frac{f(t)}{t} dt = f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε :

- Τον τύπο της f
- Την εφαπτομένη (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (ε).

ΘΕΜΑ 30

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$ με $x > 0$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.
- Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$.
- Να βρείτε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του λ το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 31 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγισιμη για την οποία ισχύει ότι $f(0) = -1$, $f(1) = e$ και $f(2) = e^2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + x^2 - 3x$.

- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία της C_g με τετμημενες στο διάστημα $(0,2)$ στα οποία η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) + 2 = e^\xi$.

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι :

- Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$
- Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

ΘΕΜΑ 33

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγισιμη, για την οποία ισχύει $f(1) = \alpha + 2\beta$, $f(2) = 2\alpha + 3\beta$ και $f(3) = 3\alpha + 4\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$, ώστε $f''(\xi) = 0$. (Υποδ. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(\xi) = 0$, πρέπει να εφαρμόσουμε το Θ. Rolle για την $f'(x)$ σε κάποιο διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δυο αριθμούς $x_1 \neq x_2$ με $f'(x_1) = f'(x_2)$. Οι τιμές αυτές μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ σε δυο διαστήματα ξένα μεταξύ τους.)

ΘΕΜΑ 34

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \leq f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- $f(4) - f(-4) = 8$
- υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $y = x + 2012$
- υπάρχει $x_0 \in (-4,4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4,4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

ΘΕΜΑ 35

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ ii. $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x$

ΘΕΜΑ 36

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x \ln x - 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο M της C_f με τετμημένη $\xi \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x - x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(2e^x + x) - f(2 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 0$

ΘΕΜΑ 38

Δίνεται η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e) = \frac{1}{e-1}$ και

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + f'(x) \text{ για κάθε } x > 1.$$

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x + \sqrt{x} + 1)^{e^x+1} = (e^x + 2)^{2e^x+\sqrt{x}}$

ΘΕΜΑ 39

Δίνεται η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(2^x + x) - f(4 - x^3) < 0$

ΘΕΜΑ 40

Δίνονται οι παραγωγισιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ και $e^x g'(x) = e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τους τύπους των f και g ,
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$ ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $e^x [\ln(x^2 + 1) + x + 1] \geq 1$.

ΘΕΜΑ 41

Δίνεται η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x) - 2xf(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$.

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2} \leq \frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$.

ΘΕΜΑ 42 (2^ο 2007 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x} & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x & x \geq 0 \end{cases}$.

- A) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$
- B) Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 3$
- Γ) Αν $\alpha = \beta = 3$ να υπολογίσετε το $\int_0^{\pi} f(x) dx$ (2^ο 2007 Β')

ΘΕΜΑ 43 (3^ο 2007 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \ln x$, $x > 0$

- A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$
- B) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$
- Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t) dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 44 (3^ο 2009 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $\ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2)$, $x > -1$

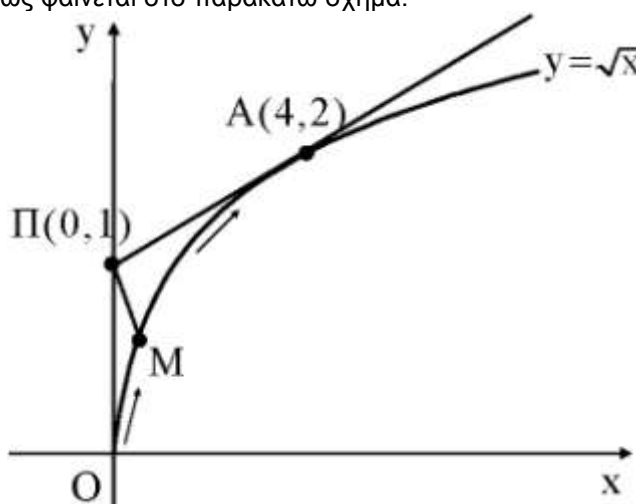
όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

- A. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.
- B. Έστω ότι $\lambda = -1$
- α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$.

ΘΕΜΑ 45 (3^ο 2011 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0, 1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16t \text{ m/min}$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t^2$
- Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4, 2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d=(\text{ΠΜ})$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Οxy.

ΘΕΜΑ 46 (3^ο 2012 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $xf(x)+1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

ΘΕΜΑ 47 (3^ο 2013 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi) \quad (2013\text{B}')$$

ΘΕΜΑ 48 (3^ο 2009 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x-\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η τιμή του α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = e \cdot x$.

β. Για $\alpha = -1$,

i. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα,

ii. να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 49 (3^ο 2010 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\ln x$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $\psi'\psi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

ΘΕΜΑ 50 (3^ο 2011 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.
 Γ3. Να αποδείξετε ότι: $xf'(x) < f(x) + \ln 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 51 (3^ο 2012 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
 Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0.
 Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$.

ΘΕΜΑ 52 (3^ο 2013 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} \ln^2 x + x$, $x > 0$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
 Γ2. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό a τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(a, a+1)$ η εξίσωση $f(x^4+2x)=f(4)$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
 Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την ανίσωση $x \ln^2 x < 2 - 2x$

ΘΕΜΑ 53

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγισιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση: $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα Πανελληνίων)

ΘΕΜΑ 54

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 55

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, ώστε: $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^\xi}$

ΘΕΜΑ 56

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$
- Να δείξετε ότι: $x + \ln x > \sqrt{4x - 3}$ για κάθε $x > 1$.

ΘΕΜΑ 57

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x) - e^{-x} + 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

ΘΕΜΑ 58

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - 2\ln x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$
- Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ στο οποίο η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x - x \ln x$ παρουσιάζει καμπή.

ΘΕΜΑ 59

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf'(x) > e^x - f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

- Να δείξετε ότι $f(x) > \frac{e^x - 1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Να δείξετε ότι $f(0) \geq 1$

ΘΕΜΑ 60

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (1, e)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο α να είναι παράλληλη στον $x'x$.

ΘΕΜΑ 61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ΘΕΜΑ 62

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- Να δείξετε ότι f είναι συνεχής.
- Να βρείτε την $f'(0)$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2 \ln x = \alpha$.

ΘΕΜΑ 63

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.

- Να βρείτε τα α, β ώστε το $A(1,3)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
Για $\alpha=4$ και $\beta=-1$,
- Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
- Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 1$.

ΘΕΜΑ 64 (3^ο 2007 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω η παραγωγισιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι :

- i) Η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 65 (4^ο 2007 ΕΣΠΕΡΙΝΑ)

Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.
- iii) Αν για τη $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει : $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. (ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2007)

ΘΕΜΑ 66

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1) = 1$ και : $xf(x) + x^2 f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex = e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 67

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e) = e^2$ και : $xf'(x) - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2 \ln x$
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x^2}}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 68

Δίνεται παραγωγισιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(0) = 0$ και : $f'(x) - f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = xe^x$
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ΤΟ 4^ο ΘΕΜΑ :

ΘΕΜΑ 1 (4^ο 2001)

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt) dt$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Έστω ακόμη η συνάρτηση g που ορίζεται από τον τύπο: $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε πραγματικό αριθμό

x .

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \ln 2x)$

ΘΕΜΑ 2 (4^ο 2002 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2f(x) = x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(α) να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(γ) να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{(\ln x)^2}$ (4^ο 2002B)

ΘΕΜΑ 3 (4^ο 2002 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^\alpha \ln x$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$

ισχύει: $f(x) \leq 1$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το πρόσημο της f .

δ. Να δείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.

ΘΕΜΑ 4 (4^ο 2003 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται μια συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

$f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα

iii. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της

g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

ΘΕΜΑ 5 (4^ο 2004 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
 β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.
 γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.
 δ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ 6 (4^ο 2005 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

- α. Να δείξετε ότι:
 i. $f(0) = 0$
 ii. $f'(0) = 1$.
 β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.
 γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
 i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.
 ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

ΘΕΜΑ 7 (4^ο 2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x + 1) - (x + 1) \ln x$ με $x > 0$.

- α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$.
 γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $a \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(a+1)^a = a^{a+1}$.

ΘΕΜΑ 8 (4^ο 2007 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ και $f(0) = 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή.
 ii. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$.
 iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(x) = \int_0^x f(t)dt$.
 iv. Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$.

ΘΕΜΑ 9

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει για κάθε $x > 0$, $f(x) \neq 0$ και

$$f(x) = 1 + \int_1^x \frac{f^2(t) + f(t)}{t^2 + t} dt.$$

- i. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$
 ii. Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα
 iii. Να δείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$

ΘΕΜΑ 10 (4^ο 2009 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x-1$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x > 0$.

β. Αν $h(x) = f(x) - g(x)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $0 \leq h(x) \leq e-2$, για κάθε $x \in [1, e]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e e^{h(x)} [h(x) + 1] h'(x) dx$.

ΘΕΜΑ 11 (4^ο 2010 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) = -f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^x(f(x) - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{είναι σταθερή.}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

ΘΕΜΑ 12 (4^ο 2010 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta \mu^3 x} = +\infty$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt$, $x \geq 0$

$$\text{και να λύσετε στο } \mathbb{R} \text{ την ανίσωση } \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0$$

ΘΕΜΑ 13 (4^ο 2011 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2 \int_0^x f(t) dt = (\ln(x+1))^2$, $x > -1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x > -1$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \leq e^{x+1}, \quad \text{για κάθε } x > -1$$

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e-1$

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1)$, $x > -1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^2 = 2^{x+1}$, $x > -1$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x=1$ και $x=3$

ΘΕΜΑ 14 (4^ο 2011 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$$

$$\text{ii) } f'(0) < f(1) \leq f(0) \text{ και}$$

$$\text{iii) } f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$. (3M)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (5M)

Αν επιπλέον $g(x)=f(x) \leq x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{xg(x)}$ (6M)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$ (5M)

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e \leq \frac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = 2 \quad (6M)$$

ΘΕΜΑ 15 (4^ο 2012 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 2$$

$$\bullet f(0)=2 \text{ και}$$

$$\bullet \text{ η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=f'(2)=2$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Αν επιπλέον δίνεται ότι $f(\xi) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 16 (4^ο 2012 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A=(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν σχέσεις:

$$\bullet f(A) = (-\infty, 0]$$

$$\bullet \text{ η παράγωγος της } f \text{ είναι συνεχής στο } (0, +\infty), \text{ και}$$

$$\bullet 2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)$, $x > 0$ (8M)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη

της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: F(\beta)x - (\beta-1)y + 2012(\beta-1) = 0$ (6M)

Δ3. Αν $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]x^5}{x-1} + \frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x , στο διάστημα $(1, 3)$ (5M)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt$, για κάθε $x > 0$ (6M)

ΘΕΜΑ 17 (4^ο 2013 ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3 \int_1^x 2tf(t)dt + x^3 = 3x^2f(x) + 3x - 8, x > 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $x > 0$ καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ασύμπτωτη ($y = x$) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)-2}{x-1}$ για κάθε $x > 1$

ΘΕΜΑ 18 (4^ο 2013 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

$$\bullet f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2}{f(t)} dt \right) du \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\bullet f(x)f'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ και } f(0) = 0$$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x > 0 \text{ και } h(x) = (f'(x))^3 \quad \text{με } x \geq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2$ για κάθε $x > 0$

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$
β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. g(x) \geq 2 - x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

$$\beta. \int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$$

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$