

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 2
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 18 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ;

(Μονάδες 5)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

(Μονάδες 3+7)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx.$$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

δ. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx.$$

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

(Μονάδες 6)

B3. Να ορίσετε την f^{-1} .

(Μονάδες 5)

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη .

(Μονάδες 4)

B5. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την

$$\text{εξίσωση } f(x) = 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το

σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

(Μονάδες 6)

Γ4. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

(Μονάδες 4)

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 5)

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(Μονάδες 5)

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ– Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx$$

(Μονάδες 4)

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν . **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια , διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Επιστημονική επιμέλεια: Συντακτική ομάδα www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών