

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
9^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 133.

A2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 128.

A3. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 162.

A4. α) Σ , β) Λ, γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ .

ΘΕΜΑ Β

1. Ισχύει $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1 = e^x - 4\lambda x - 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x=0$ η g παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat, (αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), επομένως $g'(0) = 0$. Αλλά $g'(x) = e^x - 4\lambda \Rightarrow g'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$.

2. Για $\lambda = \frac{1}{4}$ έχουμε $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$

i) Είναι $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f		min	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $A(0, f(0) = 1)$.

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ τότε

$$f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [1, +\infty), \text{ με } f(0) = e^0 - 0 = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

- Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ τότε

$$f(\Delta_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty), \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = (+\infty)(+\infty - 1) = +\infty.$$

- Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι : $f(A) = [1, +\infty)$.

Αφού $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε

$$f(e^x - x - 2) = 1 \Leftrightarrow e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x - x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2. \quad (1)$$

Επειδή $2 \in f(\Delta_1) = [1, +\infty)$ και $2 \in f(\Delta_2) = [1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο Δ_1 και μία στο Δ_2 . Επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 . Άρα η εξίσωση (1) έχει ακριβώς 2 πραγματικές ρίζες.

ii) Είναι

$$\bullet \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$$

$$\bullet \quad \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $(f(\beta) - 1)(x - 1) + (f(\alpha) - 1)(x - 3) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(1, 3)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (f(\beta) - 1)(x - 1) + (f(\alpha) - 1)(x - 3)$ στο διάστημα $[1, 3]$ και εφαρμόζουμε το θ. Bolzano.

Η g είναι συνεχής σαν πολυωνυμική με $g(1) = -2(f(\alpha) - 1)$ και $g(3) = 2(f(\beta) - 1)$ και επειδή $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow f(\alpha) > 1, f(\beta) > 1$, οπότε $g(1)g(3) = -4(f(\alpha) - 1)(f(\beta) - 1) < 0$, άρα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 3)$. Επιπλέον $g'(x) = (f(\beta) - 1) + (f(\alpha) - 1) > 0$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Γ

1. Η σχέση $f(x) = e^x - \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx$, θέτοντας $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = c$, γίνεται $f(x) = e^x - c$.

$$\text{Τότε } c = \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = \int_0^1 e^{1-x} (e^x - c) dx = \int_0^1 (e - ce^{1-x}) dx = [ex]_0^1 - c \int_0^1 e^{1-x} dx = e + c[e^{1-x}]_0^1 =$$

$$= e + c(1 - e) = e + c - ce \Rightarrow c = e + c - ce \Rightarrow e(1 - c) = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Άρα $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

2. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x = e^x + x - 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, επομένως θα είναι και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Το σύνολο τιμών της θα είναι $g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - 1) = 0 + (-\infty) - 1 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - 1) = (+\infty) + (+\infty) - 1 = +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $g(A) = (-\infty, +\infty)$.

Πρόσημο της g^{-1} :

Είναι

- $g^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(0) \Leftrightarrow x = 0.$

- $g^{-1}(x) > 0 \stackrel{g: \gamma\gamma. \text{ αύξουσα}}{\Leftrightarrow} g(g^{-1}(x)) > g(0) \Leftrightarrow x > 0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g^{-1}	-	0	+

- $g^{-1}(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

3. Είναι $E(\Omega) = \int_0^e g^{-1}(x) dx$ γιατί $g^{-1}(x) > 0$ για $x > 0$. Θέτουμε $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$ και $dx = g'(y) dy$.

- Για $x = 0$ έχουμε $0 = g(y) \Leftrightarrow g(0) = g(y) \Leftrightarrow y = 0$

- Για $x = e$ έχουμε $e = g(y) \Leftrightarrow g(1) = g(y) \Leftrightarrow y = 1.$

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \int_0^e g^{-1}(x) dx = \int_0^1 y g'(y) dy = \int_0^1 y(e^y + 1) dy = \int_0^1 y e^y dy + \int_0^1 y dy =$$

$$= \int_0^1 y(e^y)' dy + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = [y e^y]_0^1 - \int_0^1 e^y dy + \frac{1}{2} = e - [e^y]_0^1 + \frac{1}{2} = e - e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4. Έχουμε $\int_{h(1)}^{h(2)} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{h(1)}^{h(2)} (e^x - 1) dx = 0 \Leftrightarrow [e^x - x]_{h(1)}^{h(2)} = 0 \Leftrightarrow e^{h(2)} - h(2) = e^{h(1)} - h(1). \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = e^{h(x)} - h(x)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με

$G'(x) = e^{h(x)} h'(x) - h'(x)$ και $G(1) = G(2)$ από την (1). Οπότε θα ισχύει το Θ. Rolle, που

σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ έτσι ώστε

$$G'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{h(\xi)} h'(\xi) - h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow h'(\xi) (e^{h(\xi)} - 1) = 0 \Leftrightarrow h'(\xi) = 0 \text{ αφού}$$

$e^{h(\xi)} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{h(\xi)} \neq e^0 \Leftrightarrow h(\xi) \neq 0$, το οποίο ισχύει γιατί από την υπόθεση έχουμε $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

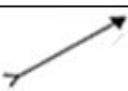
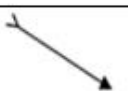
1. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = \frac{1}{x} - f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)'$ Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε $xf(x) = \ln x + c$ και για $x=1$, μας δίνει $c=1$, οπότε έχουμε $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x > 0$.

2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x + 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		max	

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $(1, f(1)) = (1, 1)$.

Επίσης έχουμε:

$$f''(x) = \left(-\frac{\ln x}{x^2} \right)' = -\frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{x^4} = -\frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 1}{x^3} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}.$$

Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)		$\frac{3}{2\sqrt{e}}$	

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(0, \sqrt{e}]$, κυρτή στο $[\sqrt{e}, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e})) = (\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}})$.

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > \sqrt{e}$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$.

Αν τώρα $x > \sqrt{e} + 1$ έχουμε $\sqrt{e} < x-1 < x < x+1$ και εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ στα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$ βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x+1)$ έτσι ώστε

$$\text{να ισχύουν: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f(x) - f(x-1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Αλλά

$$\sqrt{e} < x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \xRightarrow{f' \text{ γν. αύξουσα}} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x) < f(x+1) + f(x-1) \Rightarrow f(x) < \frac{f(x+1) + f(x-1)}{2}, \text{ για κάθε } x > \sqrt{e} + 1.$$

4. i) Αφού η συνάρτηση G μία παράγουσα της g στο $(0, +\infty)$, όπου

$$g(x) = \frac{xf(x) + x - 1}{x^2 + 1} \text{ με } x > 0, \text{ θα ισχύει}$$

$$G'(x) = g(x) = \frac{x \frac{\ln x + 1}{x} + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} \text{ με } x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= G'(x) - G'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} = \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} - \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} = \\
 &= \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} - \frac{-\ln x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} = \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} + \frac{-\ln x + \frac{1}{x}}{x^2 + 1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0
 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε $H(x) = c$ και για $x = 1$, μας δίνει

$$H(1) = G(1) - G(1) - \ln 1 = 0 \Rightarrow c = 0, \text{ οπότε}$$

$$H(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x = 0 \Leftrightarrow G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x, \text{ με } x > 0.$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε, $G(x) = G\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$, οπότε

$$\int_1^e G(x) dx = \int_1^e \left(G\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \right) dx = \int_1^e G\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^e \ln x dx. \quad (1)$$

• Αν

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = \left(-\frac{1}{u^2} \right) du.$$

Για $x = 1$ έχουμε $u = 1$ και για $x = e$ έχουμε $u = \frac{1}{e}$. Οπότε

$$\int_1^e G\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{\frac{1}{e}} G(u) \left(-\frac{1}{u^2} \right) du = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx \quad \text{και}$$

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται } \int_1^e G(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx + 1 > \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx \Rightarrow \int_1^e G(x) dx > \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{G(x)}{x^2} dx.$$

$$\text{iii) Είναι } G'(x) = 0 \Leftrightarrow G'(x) = g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \ln x + x = 0.$$

Έστω $t(x) = \ln x + x$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$t'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση } t \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $t(1)=1>0$ και $t(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\ln 2<0$. Οπότε $t(1)t(\frac{1}{2})<0$. Επομένως ισχύει το

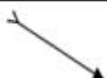
Θ.Bolzano στο $[\frac{1}{2}, 1]$. Θα υπάρχει μοναδικό (αφού t είναι γνησίως αύξουσα)

$$\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ ώστε } t(\xi)=0 \Leftrightarrow G'(\xi)=0.$$

Για $0 < x < \xi$ ^{t : γν.αύξουσα} $\Leftrightarrow t(x) < t(\xi) \Leftrightarrow t(x) < 0 \Leftrightarrow G'(x) < 0$.

Για $\xi < x$ ^{t : γν.αύξουσα} $\Leftrightarrow t(\xi) < t(x) \Leftrightarrow t(x) > 0 \Leftrightarrow G'(x) > 0$.

Η μονοτονία της G φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	ξ	$+\infty$
$G'(x)$	-	0	+
$G(x)$		min	

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση G είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \xi]$, γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $A(\xi, G(\xi))$.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.