

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
8^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142-143.
2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 34.
3. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 95.
- 4.α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$, στο οποίο είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 2e^{2x} + 5(x-1)^4 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + (x-1)^5) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + (x-1)^5) = +\infty$. Άρα $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

2. 1^{ος} τρόπος: Έχουμε ότι $0 \in f(A) = (-\infty, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής, η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$. Επειδή, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η ρίζα είναι μοναδική. Άρα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο τον άξονα $x'x$.

2^{ος} τρόπος

Προφανής ρίζα η $x = 0$, διότι $f(0) = e^0 + (-1)^5 = 1 - 1 = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδική.

3.

i. Παραγωγίζοντας κατά μέλη την $g^3(x) + 2g(x) = 5f(x), (*)$, έχουμε:

$$3g^2(x)g'(x) + 2g'(x) = 5f'(x) \Leftrightarrow (3g^2(x) + 2)g'(x) = 5f'(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{5f'(x)}{3g^2(x) + 2} > 0, \text{ διότι } f'(x) > 0 \text{ και } 3g^2(x) + 2 > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. 1^{ος} τρόπος:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = 0$. (1)

Για $x = x_0$, από την (*) έχουμε:

$$g^3(x_0) + 2g(x_0) = 5f(x_0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (g^2(x_0) + 2)g(x_0) = 0 \text{ και επειδή } g^2(x_0) + 2 \neq 0, \text{ θα}$$

είναι $g(x_0) = 0$, δηλαδή το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα της $g(x) = 0$. Όμως, η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα είναι μοναδική. Επομένως, η C_g τέμνει τον $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f .

2ος τρόπος

Αφού η συνάρτηση f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$ τότε η σχέση

$$g^3(x) + 2g(x) = 5f(x) \text{ για } x = 0 \text{ μας δίνει:}$$

$$g^3(0) + 2g(0) = 5f(0) \Leftrightarrow g^3(0) + 2g(0) = 0 \Leftrightarrow g(0)(g^2(0) + 2) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0.$$

Δηλαδή το 0 είναι ρίζα της $g(x) = 0$. Όμως, η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική. Επομένως, η C_g τέμνει τον $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f .

$$4. g(f(x)) > g(e^2) \stackrel{g: \gamma\text{ν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x) > e^2 \stackrel{f(1)=e^2}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \stackrel{f: \gamma\text{ν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Α' τρόπος

1. Έστω $x_0 \in [-2, +\infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Έχουμε $\begin{cases} f^2(x) + 3f(x) - x = 0 \\ f^2(x_0) + 3f(x_0) - x_0 = 0 \end{cases}$ και αφαιρώντας βρίσκουμε:

$$f^2(x) - f^2(x_0) + 3f(x) - 3f(x_0) - x + x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f(x) + f(x_0) + 3) = x - x_0 \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| |f(x) + f(x_0) + 3| = |x - x_0| \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} f(x) + f(x_0) + 3 \geq 1 \\ \Rightarrow \end{matrix} |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq |x - x_0| \quad (1)$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής η (1) μας δίνει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Έστω $x_0 \in [-2, +\infty)$. Από το ερώτημα (1) έχουμε:

$$(f(x) - f(x_0))(f(x) + f(x_0) + 3) = x - x_0 \quad (x \neq x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f(x) + f(x_0) + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + f(x_0) + 3} = \frac{1}{2f(x_0) + 3}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{1}{2f(x) + 3}.$$

3. Ισχύει $f(x) \geq -1 \Rightarrow 2f(x) + 3 \geq 1 > 0$, οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [-2, +\infty)$.

Όμως $f''(x) = \frac{-2f'(x)}{(2f(x) + 3)^2} < 0$ που σημαίνει ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε

$$x \in [-2, +\infty).$$

Επίσης $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [-2, +\infty)$, άρα δεν έχει σημεία καμψής.

4. Στη σχέση $f^2(x) + 3f(x) - x = 0$, θέτουμε όπου $x = 4$ και έχουμε:

$$f^2(4) + 3f(4) - 4 = 0 \Rightarrow f(4) = -4 \text{ ή } f(4) = 1.$$

Επειδή όμως $f(x) \geq -1$, τότε θα έχουμε $f(4) = 1$ και $f'(4) = \frac{1}{5}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$

$$\text{είναι: } y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

5. Αφού η f είναι κοίλη στο $[-2, +\infty)$, η εφαπτομένη της θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε θα ισχύει:

$$f(x) \leq \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \Rightarrow 5f(x) \leq x + 1, x \in [-2, \infty).$$

Β' τρόπος

$$f^2(x) + 3f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2\frac{3}{2}f(x) + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - x = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + x \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{γιατί } x \geq -2 \geq -\frac{9}{4}$$

$$\text{η (1) γίνεται } \left(f(x) + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{4} + x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\left(f(x) + \frac{3}{2}\right) - \left(\sqrt{\frac{9}{4} + x}\right)\right) \left(\underbrace{\left(f(x) + \frac{3}{2}\right) + \left(\sqrt{\frac{9}{4} + x}\right)}_{+ f(x) \geq -1 > -\frac{3}{2}}\right) = 0 \text{ οπότε}$$

$$\left(f(x) + \frac{3}{2}\right) - \left(\sqrt{\frac{9}{4} + x}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9 + 4x}}{2}$$

$$1. f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9 + 4x}}{2}, \text{ με } x \geq -2 \text{ συνεχής σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.}$$

2. $f(x) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9+4x}}{2}$ παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{(9+4x)'}{2\sqrt{9+4x}} = \frac{1}{\sqrt{9+4x}} > 0$$

3. $f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{9+4x}} \right)' = \left((9+4x)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} 4(9+4x)^{-\frac{3}{2}} = -2(9+4x)^{-\frac{3}{2}} < 0$ που σημαίνει
ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε $x \in [-2, +\infty)$.

Επίσης $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [-2, +\infty)$, άρα δεν έχει σημεία καμπής.

4. $f(4) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9+16}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$, $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$

είναι: $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$

5. Αφού η f είναι κοίλη στο $[-2, +\infty)$, η εφαπτομένη της θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής, οπότε θα ισχύει:

$$f(x) \leq \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \Rightarrow 5f(x) \leq x + 1, x \in [-2, \infty).$$

ΘΕΜΑ Δ

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - g(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - g(1) - (g(1-h) - g(1))}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

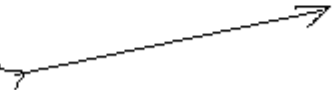
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(1+2h) - g(1)}{h} - \frac{(g(1-h) - g(1))}{h} \right] = 0, (1)$$

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - g(1)^{1+2h=x}}{h} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)^{g=\pi\alpha\rho\alpha\gamma}}{\frac{x-1}{2}} = 2g'(1), (2)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)^{1-h=x}}{h} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)^{g=\pi\alpha\rho\alpha\gamma}}{x-1} = -g'(1), (3)$
- Η (1) με βάση τις (2) και (3) γίνεται $2g'(1) - (-g'(1)) = 0 \Leftrightarrow 3g'(1) = 0 \Leftrightarrow g'(1) = 0$

2.

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x^2 - 4x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 6}{e^{-x}} = (D'Hosp) =$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{-e^{-x}} = (D'Hosp) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (οριζόντια ασύμπτωτη)}$

β) Έχουμε $f'(x) = e^x (x^2 - 2x + 2) > 0 \Rightarrow f \uparrow$

x	$-\infty$ $+\infty$
f'	$+$
f	0  $+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0, +\infty)$

3. Το σημείο $A(x, \sqrt{f(x)})$ της C_h απέχει απόσταση από το $B(1, 0)$,

$$(AB) = d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{f(x)} - 0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + f(x)}, x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{2(x-1) + f'(x)}{2\sqrt{(x-1)^2 + f(x)}} = \frac{\overbrace{2(x-1) + e^x(x^2 - 2x + 2)}^{t(x)}}{2\sqrt{(x-1)^2 + f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $t(x) = 2(x-1) + e^x(x^2 - 2x + 2)$ ως προς το πρόσημο της
 $t'(x) = 2 + x^2 e^x > 0 \Rightarrow t \uparrow$, παρατηρούμε ότι $t(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d' = t$	$-\infty$	0	$+\infty$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση d

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d			

$$\min d(0) = \sqrt{7}$$

Οπότε το σημείο A είναι $A(0, h(0))$ ή $A(0, \sqrt{f(0)} = \sqrt{6})$ ή $A(0, \sqrt{6})$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο A είναι

$$\lambda_{(\varepsilon)} = h'(0) = \frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{0 - \sqrt{6}}{1 - 0} = -\sqrt{6}$$

$$\lambda_{(\varepsilon)} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow (\varepsilon) \perp AB$$

4.

$$\text{Από τη σχέση } \underbrace{g(1) + 2xg(x) - g(x+1) - (f(x) - 6)^2}_{K(x)} \leq 0 = K(0)$$

- έχουμε $K(x) \leq K(0)$, δηλαδή η συνάρτηση $K: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέγιστο

- Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $K(x)$
- Είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat, άρα $K'(0) = 0, (1)$
- Όμως ισχύει

$$K(x) = g(1) + 2xg(x) - g(x+1) - (f(x)-6)^2 \Rightarrow$$

$$K'(x) = 2xg'(x) + 2g(x) - g'(x+1) - 2(f(x)-6)f'(x) \Rightarrow$$

$$K'(0) = 0 \Rightarrow 2g(0) - g'(1) - 2(f(0)-6)f'(0) = 0 \Rightarrow 2g(0) - g'(1) - 2(6-6)f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow 2g(0) - g'(1) = 0 \xrightarrow{\Delta_1} 2g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0, (2)$$
- Η σχέση $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx = 0$ από την (2) γίνεται $\int_0^{g(\alpha)} f(x)dx = 0$
- Αν $g(\alpha) > 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^{g(\alpha)} f(x)dx > 0$, άτοπο
- Αν $g(\alpha) < 0$ και επειδή $f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^{g(\alpha)} f(x)dx < 0$, άτοπο
- Άρα $g(\alpha) = 0, (3)$
- Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τη συνάρτηση $G(x) = g(x) \cdot \text{συν}x$ στο διάστημα $[0, \alpha]$
 - ο $G(x) = g(x) \cdot \text{συν}x$ παραγωγίσιμη στο $[0, \alpha]$ (γινόμενο παραγωγισίμων),
οπότε και συνεχής στο $[0, \alpha]$
 - ο $G(0) = g(0) \cdot \text{συν}0 \stackrel{(2)}{=} 0, G(\alpha) = g(\alpha) \cdot \text{συν}\alpha \stackrel{(3)}{=} 0 \Rightarrow G(0) = G(\alpha)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \alpha) : G'(x_0) = 0$, έχουμε όμως

$$G'(x) = g'(x) \cdot \text{συν}x - g(x) \cdot \eta\mu x \stackrel{x=x_0}{\Rightarrow} g'(x_0) \cdot \text{συν}x_0 - g(x_0) \cdot \eta\mu x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(x_0) = g(x_0) \cdot \frac{\eta\mu x_0}{\text{συν}x_0} \Leftrightarrow g'(x_0) = g(x_0) \cdot \epsilon\phi x_0$$

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.