

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
7^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδες 144-145.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185.

3. 1) Λάθος, 2) Λάθος, 3) Λάθος, 4) Σωστό, 5) Λάθος .

ΘΕΜΑ Β

1. Στη σχέση $f(x+y) = \frac{f(x)}{e^y} + \frac{f(y)}{e^x}$ αν θέσουμε $x=y=0$, τότε

$$f(0) = \frac{f(0)}{e^0} + \frac{f(0)}{e^0} \Rightarrow f(0) = 0 .$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (1)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x-x_0=h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0)}{e^h} + \frac{f(h)}{e^{x_0}} - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} f(x_0) + e^h f(h) - e^h e^{x_0} f(x_0)}{e^h e^{x_0} h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} f(x_0)(1 - e^h) + e^h f(h)}{e^h e^{x_0} h} =$$

$$= -\frac{e^{x_0} f(x_0)}{e^{x_0}} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \cdot \frac{1}{e^h} \right) + \frac{1}{e^{x_0}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -f(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h} + \frac{1}{e^{x_0}} = -f(x_0) + \frac{1}{e^{x_0}}$$

$$\text{Γιατί: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)'}{h'} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^0 = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{e^0} = 1 \text{ και από την (1)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f'(x_0) = \frac{1}{e^{x_0}} - f(x_0)$.

2. Από το 1^ο ερώτημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{e^x} - f(x) \Rightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 1 \Rightarrow (e^x f(x))' = (x)' \Rightarrow e^x f(x) = x + c$$

Για $x=0$: $e^0 f(0) = 0 + c \Rightarrow c = 0$, οπότε $e^x f(x) = x + 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{e^x} - f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		ο.μ	

Η f έχει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{e}$.

4. Η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο $[2, 3]$, άρα για

$$2 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3) \Rightarrow \frac{3}{e^3} \leq f(x) \leq \frac{2}{e^2} \quad (2).$$

Αφού η $f(x) - \frac{3}{e^3}$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και όχι παντού μηδέν (γιατί ισχύει μόνο για $x=3$), τότε παίρνουμε:

$$f(x) - \frac{3}{e^3} \geq 0 \Rightarrow \int_2^3 (f(x) - \frac{3}{e^3}) dx > 0 \Rightarrow \int_2^3 f(x) dx > \frac{3}{e^3} \quad (3)$$

$$\text{Όμοια θα έχουμε } \int_2^3 f(x) dx < \frac{2}{e^2} \quad (4)$$

$$\text{Από (3), (4) έχουμε: } \frac{3}{e^3} < \int_2^3 f(x) dx < \frac{2}{e^2} \quad (5)$$

Είναι $f(x) \geq \frac{3}{e^3} > 0$, για κάθε $x \in [2, 3]$, οπότε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$ ισούται με

$$\int_2^3 f(x) dx, \text{ οπότε η (5) γίνεται: } \frac{3}{e^3} < E < \frac{2}{e^2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Για $x \neq 1$, θέτουμε $h(x) = \frac{f(x+2)-5}{x-1}$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 6$ και

$$f(x+2) = (x-1)h(x) + 5. \text{ Επομένως } \lim_{x \rightarrow 1} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)h(x) + 5] = 5.$$

Όμως οι συναρτήσεις f και $g(x) = x + 2$ είναι συνεχείς. Επομένως και η $f(x + 2)$ είναι συνεχής. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x + 2) = f(1 + 2) = f(3) = 5$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6$

Αν θέσουμε όπου $x = u + 2$, τότε, όταν $x \rightarrow 3$ το $u \rightarrow 1$ και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u + 2) - f(3)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u + 2) - 5}{u - 1} = 6. \text{ Άρα } f'(3) = 6.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2 - f(x)}{\eta\mu(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x + 2 - f(x)}{(x - 3)}}{\frac{\eta\mu(x - 3)}{(x - 3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2 - f(x) - 5 + 5}{\frac{\eta\mu(x - 3)}{(x - 3)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x - 3 - (f(x) - 5)}{(x - 3)}}{\frac{\eta\mu(x - 3)}{(x - 3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3) - (f(x) - f(3))}{\eta\mu(x - 3)} = \frac{1 - f'(3)}{1} = 1 - 6 = -5$$

Διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x - 3)}{(x - 3)} = 1, \text{ (θέτουμε } x - 3 = u, (u \rightarrow 0) \text{) οπότε}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1,$$

Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα DeL'Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, 3) \cup (3, \beta)$.

3. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων. Για την h στο διάστημα $[0, 3]$ ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο $[0, 3]$.

$$\bullet \begin{cases} h(0) = -7 < 0 \\ h(3) = 3f(3) - 9 - 7\sin 3 = 15 - 9 - 7\sin 3 = 6 - 7\sin 3 > 0 \\ (\text{αφού } \frac{\pi}{2} < 3 < \pi) \end{cases}$$

και στο δεύτερο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,3)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

4. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$ έχει δυο τουλάχιστον λύσεις μεγαλύτερες του 1, τις x_1 και x_2 με $1 < x_1 < x_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - x^6$, $x \in [x_1, x_2]$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $h'(x) = g'(x) - 6x^5$ και ισχύει $h(x_1) = h(x_2) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$. Έχουμε

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - 6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 6\xi^5$. Όμως $g'(\xi) \leq f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \leq 6$. Επομένως $6\xi^5 \leq 6 \Leftrightarrow \xi^5 \leq 1 \Leftrightarrow \xi \leq 1$ που είναι άτοπο αφού $1 < x_1 < \xi < x_2$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\alpha) f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) \left(\underbrace{f^2(x) + 1}_{+} \right) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{f^2(x) + 1},$$

αν $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ και αν $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

$$\beta) f^3(x) + f(x) = 2x \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3f^2(x) + 1} > 0 \Rightarrow f \uparrow$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, μοναδική αφού η f είναι γν. αύξουσα.

$$\gamma) f'(x) = \frac{2}{3f^2(x) + 1} = \text{παραγωγίσιμη} \Rightarrow f''(x) = -\frac{12f(x)f'(x)}{(3f^2(x) + 1)^2},$$

αν $x > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ (κοίλη), αν $x < 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ (κυρτή)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Άρα έχει σημείο καμπής την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

δ) 1^{ος} τρόπος

$$xf'(x) < f(x) < 2x \Leftrightarrow \frac{2x}{3f^2(x) + 1} < \frac{2x}{f^2(x) + 1} < 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3f^2(x)+1} < \frac{2x}{f^2(x)+1} \\ \frac{2x}{f^2(x)+1} < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x)+1 < 3f^2(x)+1 \\ 1 < f^2(x)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2f^2(x) \\ 0 < f^2(x) \end{cases} \text{ ισχύουν}$$

2^{ος} τρόπος

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, x]$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ τ.ω. } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x},$$

Έχουμε: Από το (γ) ερώτημα ότι για $x > 0$ ισχύει $f''(x) < 0$ που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα και από το (β) ερώτημα $f'(0) = 2$. Οπότε,

$$0 < \xi < x \xRightarrow{f' \downarrow} f'(0) > f'(\xi) > f'(x) \Rightarrow 2 > \frac{f(x)}{x} > f'(x) \Rightarrow xf'(x) < f(x) < 2x$$

$$\epsilon) y = f(x) \Rightarrow y^3 + y = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y^3 + y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$$

στ) 1^{ος} τρόπος

Για $x > 0$ έχουμε $f(x) > 0$, οπότε $E = \int_0^5 f(x) dx$ (1)

Θέτουμε $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow dx = (f^{-1}(y))' dy$, για $x = 0 \Rightarrow y = 0$ και για $x = 5 \Rightarrow y = 2$, οπότε η (1) γίνεται:

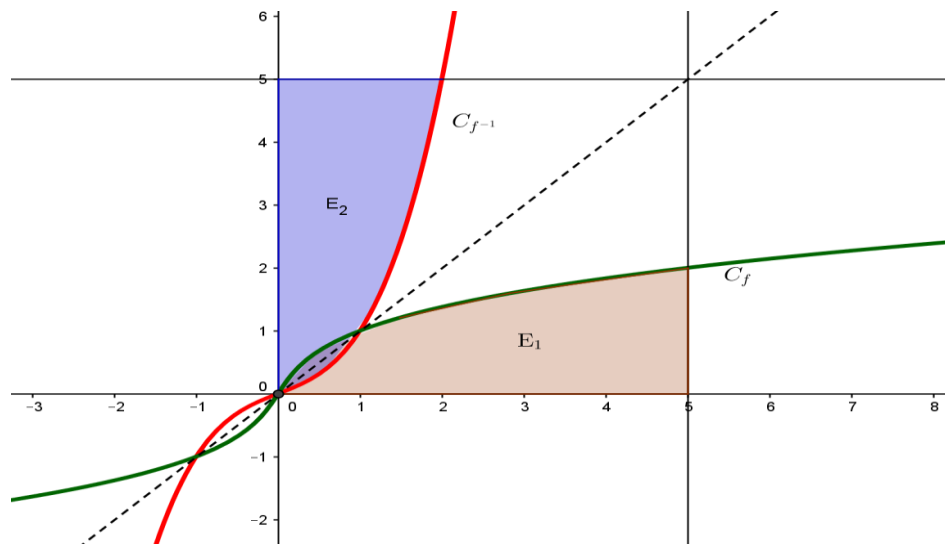
$$E = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^2 y \left(\frac{y^3 + y}{2} \right)' dy = \left[y \frac{y^3 + y}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{y^3 + y}{2} dy =$$

$$\left[y \frac{y^3 + y}{2} \right]_0^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 10 - 3 = 7 \text{ τ.μ}$$

2^{ος} τρόπος

Βάσει όλων των προηγούμενων μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα είναι συμμετρική ως προς $y=x$, διχοτόμο της γωνίας του 1^{ου} τεταρτημορίου.

Λόγω της συμμετρίας για τον υπολογισμό του εμβαδού E_1 αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν E_2 .



$$E_1 = E_2 = \int_0^2 (5 - f^{-1}(x)) dx = \int_0^2 \left(5 - \frac{x^3 + x}{2} \right) dx = 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \int_0^2 (x^3 + x) dx = 10 - 3 = 7 \text{ τ.μ}$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας**, Μαθηματικός-MSc του Γυμνασίου Βάρδας Ηλείας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.