ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

6Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαια 1, 2, 3 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 3

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος** αν είναι λανθασμένη:

α) Εάν $\alpha<\beta$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

β) $\int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int_{u_2}^{u_1} f(u)du$, όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, στον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, ισούται με $\int_\beta^\alpha f(x)dx$.

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(1,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(e)=0$
- $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x>1$.

Β1. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-x\cdot\ln\left(\ln x\right)$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(\ln x\right)^x=\dfrac{1}{m}, x\in\left(1,+\infty\right)$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m>0$.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2+2)-f(3x)<3x-x^2-2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{3g^2\left(x\right)+\varepsilon}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου ε μία σταθερά στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο της $A(0,g(0))$ έχει εξίσωση:

$$x-2018y+2018=0$$

α) Να βρείτε τον αριθμό ε.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι $g^3(x)+2015\cdot g(x)=x+2016$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

γ) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και έχει τύπο $g^{-1}(x)=x^3+2015x-2016$.

Μονάδες 4

δ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g.

Μονάδες 6

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{g^{-1}(x)}{x\cdot g(x)\cdot(g^2(x)+2015)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{\ln x}{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$f(x)\le x-1$ για κάθε $x>0$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Για $\alpha=1$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

(β) Να δείξετε ότι $f(x)\le\frac{1}{e}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 3

(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x+2\lambda x=0$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,+\infty)$, για κάθε $\lambda<-\frac{1}{e}$.

Μονάδες 4

(δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $1-\ln\xi=\frac{\xi^2}{e^2-e}$.

Μονάδες 5

(ε) Αν η αντίστροφη της f στο $(0,e]$ είναι συνεχής να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=\frac{1}{e}$.

Μονάδες 5

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**