

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
6^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαια 2, 3, 4)
[Κεφάλαια 1, 2, 3 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186
2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 185
3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 143
4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Θέτουμε $\frac{f(x)}{x} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = xg(x)$ και η σχέση $f'(x) = \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}}$ γράφεται:

$$(xg(x))' = g(x) - e^{g(x)} \Leftrightarrow g(x) + xg'(x) = g(x) - e^{g(x)} \Leftrightarrow xg'(x) = -e^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$-g'(x)e^{-g(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(e^{-g(x)})' = (\ln x)' \Rightarrow e^{-g(x)} = \ln x + c$$

Για $x = e$ είναι $g(e) = \frac{f(e)}{e} = 0$ άρα $e^0 = \ln e + c \Rightarrow c = 0$, οπότε

$$e^{-g(x)} = \ln x \Leftrightarrow -g(x) = \ln(\ln x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\ln(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = -x \cdot \ln(\ln x).$$

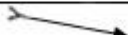
B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (-x \ln(\ln x))' = -\ln(\ln x) - x \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} = -\ln(\ln x) - \frac{1}{\ln x}, \text{ και}$$

$$f''(x) = \left(-\ln(\ln x) - \frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln^2 x} = \frac{1 - \ln x}{x \ln^2 x}.$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x \ln^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Η μονοτονία και το ακρότατο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	1	e	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f'(e) = -1$.

Ισχύει $f'(x) \leq f'(e) = -1 < 0$, για κάθε $x > 1$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1, +\infty)$ επομένως

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x \ln(\ln x)) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x \ln(\ln x)) = (-1)(-\infty) = +\infty.$$

B3. Η εξίσωση γράφεται: $x \cdot \ln(\ln x) = -\ln m \Leftrightarrow f(x) = \ln m$, άρα για κάθε

$m > 0$, $\ln m \in f(A)$, άρα υπάρχει $x_0 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \ln m$.

Το $x_0 \in (1, +\infty)$ είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1, +\infty)$.

B4. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται: $f(x^2 + 2) - f(3x) < 3x - x^2 - 2$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ με $h'(x) = f'(x) + 1 \stackrel{(B2)}{\leq} -1 + 1 = 0$

άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A = (1, +\infty)$.

Η (1) γράφεται $h(x^2 + 2) < h(3x)$ με $x > \frac{1}{3}$ οπότε

$$x^2 + 2 > 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ή } x > 2). \text{ Τελικά } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ή } x > 2$$

ΘΕΜΑ Γ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_g είναι $\frac{1}{2018} = g'(0)$ (1)

Επειδή το σημείο επαφής $A(0, g(0))$ είναι κοινό σημείο της εφαπτομένης και της

C_g , οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της C_g .

Έτσι για $x = 0$, έχουμε: $0 - 2018 \cdot g(0) + 2018 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$ και για $x = 0$ στον τύπο

$$g'(x) = \frac{1}{3g^2(x) + \varepsilon} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + \varepsilon} \stackrel{\text{από (1)}}{=} \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{1}{3 + \varepsilon} = \frac{1}{2018} \Rightarrow$$

$$3 + \varepsilon = 2018 \Rightarrow \varepsilon = 2015$$

β) Από τη σχέση $g'(x) = \frac{1}{3g^2(x) + 2015}$ ισοδύναμα έχουμε:

$$3g^2(x)g'(x) + 2015g'(x) = (x)' \Leftrightarrow [g^3(x) + 2015g(x)]' = (x)'$$

Από τις Συνέπειες του Θ.Μ.Τ., υπάρχει σταθερά c : $g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + c$.

Για $x = 0$, έχουμε: $g^3(0) + 2015 \cdot g(0) = c \Rightarrow 1^3 + 2015 \cdot 1 = c \Rightarrow c = 2016$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $g^3(x) + 2015 \cdot g(x) = x + 2016$ **(2)**.

γ) Επειδή $g'(x) > 0$ η g είναι γνησίως αύξουσα άρα η g είναι “1-1”.

Θέτουμε στη σχέση **(2)** όπου $g(x) = y$ και έχουμε:

$$y^3 + 2015y = x + 2016 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = y^3 + 2015y - 2016$$

Τελικά είναι $g^{-1}(x) = x^3 + 2015x - 2016$ **(3)**.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g''(x) = \frac{-(3g^2(x) + 2015)'}{(3g^2(x) + 2015)^2} \Leftrightarrow g''(x) = \frac{-6g(x)g'(x)}{(3g^2(x) + 2015)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g''(x) = \frac{-6g(x) \cdot \frac{1}{3g^2(x) + 2015}}{(3g^2(x) + 2015)^2} \Leftrightarrow g''(x) = \frac{-6g(x)}{(3g^2(x) + 2015)^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Από τη **(2)** για $g(x) = 0$ βρίσκουμε $x = -2016$, η οποία είναι και η μοναδική της λύση αφού από το γ) ερώτημα g : 1-1.

Επίσης είναι:

- $x < -2016 \stackrel{g \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} g(x) < g(-2016) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0 \Leftrightarrow g''(x) > 0$
Άρα η g είναι κυρτή στο $(-\infty, -2016]$.
- Όμοια αν $x > -2016 \Leftrightarrow g''(x) < 0$ και η g είναι κοίλη στο $[-2016, +\infty)$.

Επειδή $g''(-2016) = 0$ και η $g''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2016, το σημείο $A(-2016, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_g .

$$\epsilon) f(x) = \frac{g^{-1}(x)}{x \cdot g(x)(g^2(x) + 2015)}, \text{ δηλαδή } f(x) = \frac{x^3 + 2015x - 2016}{x(g^3(x) + 2015g(x))}, \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2015x - 2016}{x(x + 2016)}, \text{ άρα } f(x) = \frac{x^3 + 2015x - 2016}{x^2 + 2016x} \quad (4)$$

Η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = 0$, $x = -2016$.

$$\text{Επειδή } \lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2015x - 2016}{x^3 + 2016x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2015}{x^2} - \frac{2016}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{2016}{x}\right)} = 1 \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2015x - 2016}{x^2 + 2016x} - \frac{x^3 + 2016x^2}{x^2 + 2016x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 2015x - 2016 - x^3 - 2016x^2}{x^2 + 2016x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2016x^2 + 2015x - 2016}{x^2 + 2016} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(-2016 + \frac{2015}{x} - \frac{2016}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2016}{x^2} \right)} = -2016 \in \mathbb{R} \text{ η ευθεία } y = x - 2016 \text{ είναι πλάγια}$$

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και $-\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x + 1$ με $g(1) = f(1) - 1 + 1 = 0$, αφού $f(1) = \frac{\ln 1}{\alpha} = 0$

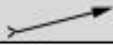
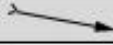
Είναι $g(x) = f(x) - x + 1 \leq 0$, $x > 0 \Rightarrow g(x) \leq g(1)$, $x > 0$, άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ και αφού είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων από Θ . Fermat έχουμε $g'(1) = 0$.

$$\text{Είναι } g'(x) = f'(x) - 1 = \left(\frac{\ln x}{\alpha x} \right)' - 1 = \frac{\alpha - \alpha \ln x}{(\alpha x)^2} - 1, \text{ οπότε}$$

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 0}{\alpha^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Δ2. (α) Για $\alpha = 1$ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$				

Ο.Μ.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f(e) = \frac{1}{e}$.

Έστω $A_1 = (0, e]$ και $A_2 = [e, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, e]$, άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right].$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [e, +\infty)$, άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right].$$

$$\text{Οπότε } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right] \cup \left(0, \frac{1}{e} \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right].$$

(β) Αφού η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = e$ το $f(e) = \frac{1}{e}$, θα είναι

$$f(x) \leq f(e), x > 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}, x > 0$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2\lambda x$, $x > 0$.

Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0 < \rho_1 < \rho_2$.

Η g πληροί το Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_1) = 0$.

Είναι $g'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + 2\lambda$, $x > 0$ και

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x}{x} + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \ln x + \lambda x = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = -\lambda \Leftrightarrow f(x) = -\lambda$$

Από το παραπάνω ερώτημα Δ2(β) έχουμε ότι $f(x) \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow -\lambda \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \lambda \geq -\frac{1}{e}$ που είναι άτοπο, αφού $\lambda < -\frac{1}{e}$.

(δ)

1^{ος} τρόπος

Θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$1 - \ln \xi = \frac{\xi^2}{e^2 - e} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = \frac{1}{e^2 - e} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{e^2 - e}.$$

Η f πληροί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1, e]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{\frac{1}{e}}{e - 1} = \frac{1}{e^2 - e}$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (1 - \ln x)(e^2 - e) - x^2, [1, e]$.

Εφαρμόζουμε BOLZANO

$$g(1) = e^2 - e - 1 > 0, \quad g(e) = -e^2 < 0 \Rightarrow \xi \in (1, e) : g(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \ln \xi)(e^2 - e) - \xi^2 = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = \frac{1}{e^2 - e} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{e^2 - e}$$

$$(ε) \text{ Είναι } E = \int_0^{\frac{1}{e}} |f^{-1}(x)| dx, \text{ θέτουμε } x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u) du$$

Για $x = 0 \Rightarrow 0 = f(u) \Leftrightarrow f(1) = f(u) \Leftrightarrow u = 1$, και για

$$x = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{e} = f(u) \Leftrightarrow f(e) = f(u) \Leftrightarrow u = e, \text{ αφού η } f \text{ γν. αύξουσα άρα και } 1 - 1 \text{ στο}$$

$$A_1 = (0, e].$$

Οπότε

$$E = \int_1^e |f^{-1}(u)| f'(u) du = \int_1^e u f'(u) du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e f(u) du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e \frac{\ln u}{u} du =$$

$$= [u f(u)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{u} \ln u du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e (\ln u)' \ln u du =$$

$$\left[uf(u) \right]_1^e - \left[\frac{\ln^2 u}{2} \right]_1^e = ef(e) - f(1) - \left(\frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} \right) = e \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tau. \mu.$$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα Β & Δ επιμελήθηκε ο **Παντελής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.