

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
5^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαια 2, 3)
[Κεφάλαια 1, 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 135.

A2. 1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 143.

2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 163.

3. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 157.

A3. α) 1.Σ - 2.Λ - 3.Λ - 4.Σ, Β) Λ, γ) Σ , δ) Σ , ε) Σ .

ΘΕΜΑ Β

1) Μελέτη της $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

- Πεδίο ορισμού της είναι το $A_f = (0, +\infty)$.
- Είναι συνεχής στο $A_f = (0, +\infty)$, ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων x^2 και $2\ln x$.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}, \quad x > 0.$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		min	

Από τον πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$.

- Είναι $f''(x) = \left(2x - \frac{2}{x}\right)' = 2 + \frac{2}{x^2} > 0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή

στο $A_f = (0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

- Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2 \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 \frac{\ln x}{x}\right) = (+\infty) - 0 = +\infty$, γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0, \text{ επομένως δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.}$$

- Η συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

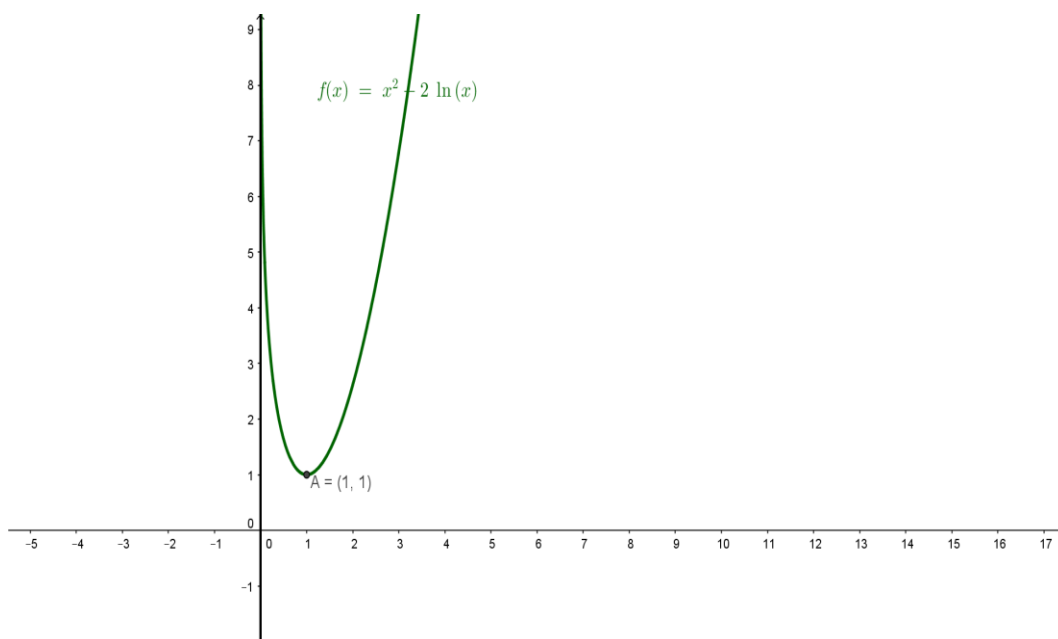
$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{2 \ln x}{x^2}\right) \right] = (+\infty)(1 - 0) = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	0	1	$+\infty$
f'		-	0
f''		+	
f	$+\infty$	$\min$	$+\infty$

- Από όλα τα παραπάνω η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



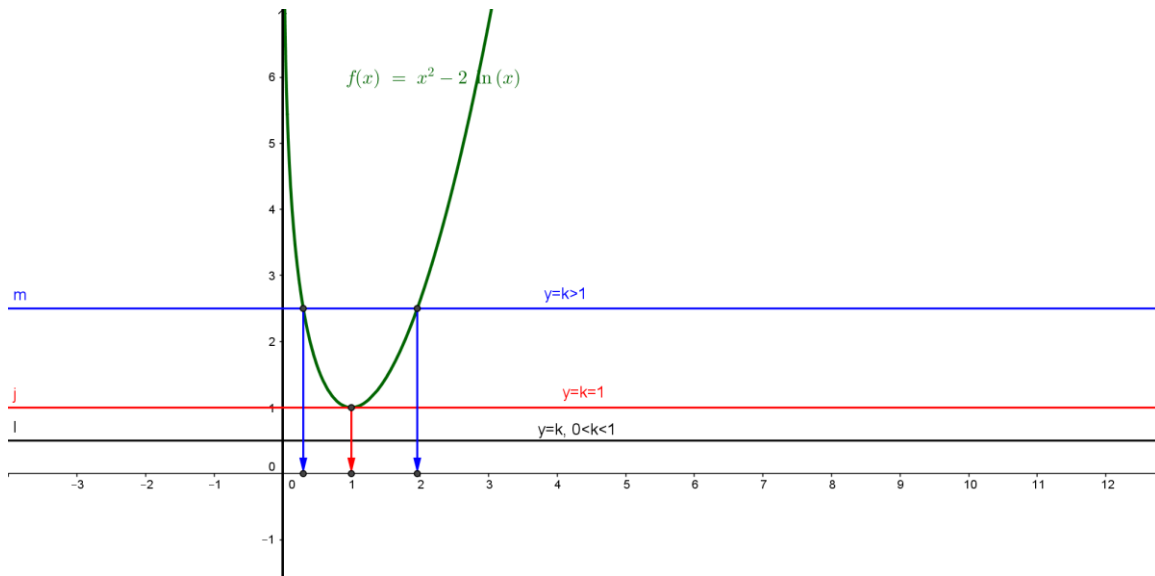
$$2) \quad e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{x^2-1}{2}}\right) \geq \ln x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \ln e \geq \ln x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \geq \ln x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 2 \ln x \Leftrightarrow x^2 - 2 \ln x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ το οποίο ισχύει για κάθε $x > 0$ αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$.

$$3) \quad e^{x^2-k} = x^2 \Leftrightarrow \ln e^{x^2-k} = \ln x^2 \Leftrightarrow (x^2-k) \ln e = 2 \ln x \Leftrightarrow x^2 - k = 2 \ln x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \ln x = k \Leftrightarrow f(x) = k, k > 0.$$

Το πλήθος των ριζών της $f(x) = k, k > 0$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



- $0 < k < 1$, η $f(x) = k$ αδύνατη.
- $k = 1$, η $f(x) = k$ έχει μία λύση την $x = 1$, αφού $f(1) = 1 = k$ και $f(x) > 1$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- $k > 1$, η $f(x) = k$ έχει μία λύση στο $(0, 1)$ αφού $f[(0, 1)] = (1, +\infty)$ και μία λύση στο $(1, +\infty)$ αφού $f[(1, +\infty)] = (1, +\infty)$.

4) Η συνάρτηση g είναι συνεχής για $x > 0$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Θα πρέπει να είναι και συνεχής και στο 0. Δηλαδή θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{f(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - 2 \ln x)'} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{2x - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 1} = -1, \text{ και } g(0) = \alpha. \text{ Άρα } \alpha = -1.$$

5) 1^{ος} τρόπος: Για $\alpha = -1$, η συνάρτηση g είναι συνεχής $[0, e]$ με

$$g(0) = \alpha = -1 < 0 \text{ και } g(e) = \frac{2 \ln e}{e^2 - 2 \ln e} = \frac{2}{e^2 - 2} > 0, \text{ οπότε } g(0)g(e) < 0. \text{ Άρα ισχύει το}$$

Θ. Bolzano που σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in (0, e) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0.$$

2^{ος} τρόπος: Προφανής ρίζα η $x_0 = 1$ γιατί $g(1) = \frac{2 \ln 1}{f(1)} = 0$. Άρα η συνάρτηση g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$ την $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

1) Παραγωγίζοντας την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x) + 6f(x) &= 3x + 2017 \Rightarrow [f^3(x) + 6f(x)]' = (3x + 2017)' \Rightarrow \\ \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 6f'(x) &= 3 \Rightarrow f'(x)(f^2(x) + 2) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{f^2(x) + 2} > 0 \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

2) **1^{ος} τρόπος.** Από το 1) ερώτημα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και 1-1. Άρα η f είναι αντιστρέψιμη και ορίζεται η f^{-1} .

2^{ος} τρόπος. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$ (1) και $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 6f(x_1) = 6f(x_2)$ (2). Προσθέτοντας τις (1), (2) βρίσκουμε:
 $f^3(x_1) + 6f(x_1) = f^3(x_2) + 6f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2017 = 3x_2 + 2017 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Τότε η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

3) Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + 6x$ (3), που είναι γνησίως αύξουσα (g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g'(x) = 3x^2 + 6 > 0$) στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και 1-1.

• Για να έχει η συνάρτηση f σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.

Επιλέγουμε $x_0 = \frac{y_0^3 + 6y_0 - 2017}{3}$ (4) και η αρχική σχέση για $x = x_0$ μας δίνει:

$$f^3(x_0) + 6f(x_0) = 3x_0 + 2017 \xRightarrow{(4)} f^3(x_0) + 6f(x_0) = 3 \cdot \frac{y_0^3 + 6y_0 - 2017}{3} + 2017 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x_0) + 6f(x_0) = y_0^3 + 6y_0 \xRightarrow{(3)} g(f(x_0)) = g(y_0) \xRightarrow{g:1-1} f(x_0) = y_0.$$

• Εύρεση της f^{-1} .

Έστω $y = f(x)$, τότε η αρχική σχέση γίνεται:

$$y^3 + 6y = 3x + 2017 \Leftrightarrow 3x = y^3 + 6y - 2017 \Leftrightarrow x = \frac{y^3 + 6y - 2017}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 6x - 2017}{3}, x \in \mathbb{R}.$

4) α) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = -670$, οπότε θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -670} f(x) = f(-670) = k$.

Η αρχική μας σχέση για $x = -670$ μας δίνει:

$$f^3(-670) + 6f(-670) = 3 \cdot (-670) + 2017 \Rightarrow k^3 + 6k = -2010 + 2017 \Rightarrow k^3 + 6k - 7 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (k-1)(k^2 + k + 7) = 0 \Rightarrow k = 1. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow -670} f(x) = 1.$$

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 + 6x - 2017}{3} \cdot \eta\mu x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 6x - 2017) \cdot \eta\mu x}{3x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 6x - 2017) \cdot \eta\mu x}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 + 6x - 2017}{3x^3} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Θυμίζουμε: $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, οπότε από το

κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

5) Είναι $h(x) = f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 6x - 2017}{3}, x \in \mathbb{R}$ και $h(0) = -\frac{2017}{3}$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$ και $h'(0) = 2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης h στο $A(0, h(0))$ είναι

$$(\varepsilon): y - h(0) = h'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y + \frac{2017}{3} = 2x \Leftrightarrow y = 2x - \frac{2017}{3}.$$

Έχουμε $h''(x) = 2x$ και $h''(0) = 0$. Επίσης αν $x < 0$ τότε $h''(x) < 0$ και αν $x > 0$ τότε $h''(x) > 0$. Δηλαδή στο $A(0, h(0))$ η h'' μηδενίζεται και αλλάζει και πρόσημο. Άρα το σημείο $A(0, h(0))$ είναι σημείο καμπής και η εφαπτομένη (ε) 'διαπερνά' την C_h στο σημείο A .

ΘΕΜΑ Δ

1) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[1, 4]$ και το $0 \in [-2, 3]$ που είναι το σύνολο τιμών της f , τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

2) Από το θεώρημα μεγίστης και ελαχίστης τιμής και επειδή ισχύει:

$$-2 = f_{\min} < 1 = f(4) < 2 = f(1) < f_{\max} = 3, \text{ υπάρχουν}$$

$$x_1, x_2 \in (1, 4), \text{ τέτοια ώστε } f(x_1) = f_{\min} = -2 \text{ και } f(x_2) = f_{\max} = 3.$$

Είναι:

- x_1, x_2 εσωτερικά σημεία του $(1, 4)$.
- f παραγωγίσιμη στα x_1, x_2 .
- f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1, x_2 .

Από τα παραπάνω, λαμβάνοντας το Θ.Fermat, έχουμε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Άρα η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες στα x_1, x_2 .

➤ Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$, τότε η f' είναι συνεχής (υποθέτοντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ισχύει $x_1 < x_2$) στο $[x_1, x_2] \subseteq [1, 4]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Επίσης από το (2) ερώτημα έχουμε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, οπότε ισχύει το Θ.Rolle για την f' στο $[x_1, x_2]$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_1, x_2)$ έτσι ώστε να ισχύει $f''(\rho) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $(\rho, f(\rho))$ είναι πιθανό σημείο καμπής.

3) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = -x + 2$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[x_1, x_2] \subseteq [1, 4]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [1, 4]$ και

- $g(x_1) = f(x_1) + x_1 - 2 = -2 + x_1 - 2 = x_1 - 4 < 0$, γιατί $x_1 < 4$.
- $g(x_2) = f(x_2) + x_2 - 2 = 3 + x_2 - 2 = x_2 + 1 > 0$, γιατί $x_2 > 1$.

Δηλαδή $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$, οπότε από το Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 4), \text{ τέτοιο ώστε } g(\xi_0) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_0) = -\xi_0 + 2.$$

4) Η εφαπτομένη της C_f στο $P(\xi, f(\xi))$ είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Αφού πρέπει να διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$, θέτοντας $x=0$ και $y=2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$2 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow 2 - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) + 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $Q(x) = xf'(x) - f(x) + 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [1, 4]$ και

- $Q(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) + 2 = 4 > 0$
- $Q(x_2) = x_2 f'(x_2) - f(x_2) + 2 = -1 < 0$

Δηλαδή $Q(x_1) \cdot Q(x_2) < 0$, οπότε από το Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 4), \text{ τέτοιο ώστε } Q(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) + 2 = 0.$$

5) Στο (1) ερώτημα βρήκαμε $x_0 \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 4]$ έχουμε:

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1, x_0)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{-2}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{1 - x_0}{2}. \quad (1)$$

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_0, 4)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x_0)}{4 - x_0} = \frac{1}{4 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{4 - x_0}{2}. \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1), (2) έχουμε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{1 - x_0}{2} - \frac{4 - x_0}{2} = \frac{1 - x_0 - 4 + x_0}{2} = -\frac{3}{2}.$

6) Το σημείο $K \in (\varepsilon)$, οπότε είναι της μορφής

$$K(x(t), y(t)) \text{ ή } K(x(t), -x(t) + 2) \text{ και}$$

$$\Lambda(x(t), 0), \text{ επίσης έχουμε ότι } x'(t) = 1 \text{ m/sec και}$$

$$x(t_0) = y(t_0) \Leftrightarrow x(t_0) = -x(t_0) + 2 \Leftrightarrow x(t_0) = 1 \text{ m}$$

Για $y = 0$ στην ευθεία (ε) , έχουμε

$$x = 2 \Rightarrow M(2, 0).$$

Οι κάθετες πλευρές ΚΛ, ΛΜ έχουν μήκη

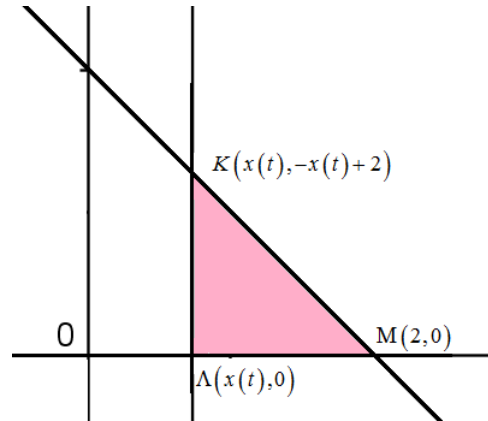
$$(\Lambda M) = |2 - x(t)| \text{ και } (ΚΛ) = |2 - x(t)| \text{ οπότε}$$

$$(ΚΛΜ) = E(t) = \frac{|2 - x(t)|^2}{2} = \frac{1}{2}(2 - x(t))^2.$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη σαν έκφραση παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2(2 - x(t))(2 - x(t))' = -x'(t)(2 - x(t)) \Rightarrow E'(t_0) = -x'(t_0)(2 - x(t_0)).$$

$$E'(t_0) = -1(2 - 1)m^2 / \text{sec} = -1 m^2 / \text{sec}.$$



Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.