

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

4^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 114.

A2.

α) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 128.

β) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 128-129.

γ) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 143.

δ)

1) Α

2) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, οπότε και η σύνθεση $(f \circ f)(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$ και επειδή $f(\alpha), f(\beta) \in [\alpha, \beta]$ τότε $f(f(\alpha)) = f(f(\beta)) \Rightarrow (f \circ f)(\alpha) = (f \circ f)(\beta)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = (f \circ f)(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του *Rolle* στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ε)

1) Α

2) Πράγματι: Για κάθε $x \in f(\Delta)$ ισχύει

$$\begin{aligned} f((f^{-1})(x)) = x &\Rightarrow \left[f((f^{-1})(x)) \right]' = (x)' \Rightarrow f'((f^{-1})(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'((f^{-1})(x))}, \quad x \in f(\Delta). \end{aligned}$$

A3. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού $\alpha^x \geq x+1 \Leftrightarrow \alpha^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha^x - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \alpha^x - x - 1$ είναι $g(x) = \alpha^x - x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \alpha^x \ln \alpha - 1$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = \alpha^0 - 0 - 1 = 0$, άρα $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$.

Επομένως από το Θ. Fermat προκύπτει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

➤ Για $\alpha = e$ είναι: $f(x) = \frac{x-1}{e^x - x}$

B2.

Για να υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που να σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο με $x \leq 0$, θα πρέπει η γωνία της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ να είναι 45° ή 135° .

- Εξετάζουμε αν η εξίσωση $f'(x) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$, έχει μοναδική λύση για $x \leq 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x-1}{e^x - x} \right)' = \frac{(x-1)'(e^x - x) - (x-1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - (x-1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \\ &= \frac{e^x - x - xe^x + x + e^x - 1}{(e^x - x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα με $x \leq 0$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} = 1 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = (e^x - x)^2 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = e^{2x} - 2xe^x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 + x^2 = xe^x \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 + x^2 = xe^x. \quad (2)$$

- Για $x = 0$ η (2) γράφεται: $(e^0 - 1)^2 + 0^2 = 0 \cdot e^0 \Leftrightarrow 0 = 0$, άρα το $x = 0$ είναι ρίζα της (2).

- Για $x < 0$ το δεύτερο μέλος της (2) είναι αριθμός αρνητικός, ενώ το πρώτο μέλος της είναι αριθμός θετικός άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Οπότε η (2) έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$.

- Εξετάζουμε αν η εξίσωση $f'(x) = \varepsilon\varphi 135^\circ = -1$, έχει μοναδική λύση για $x \leq 0$.

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} = -1 \Leftrightarrow 2e^x + (e^x - x)^2 - 1 = xe^x \quad (3)$$

Για $x \leq 0$ το δεύτερο μέλος της (3) είναι αριθμός αρνητικός ή μηδέν, ενώ το πρώτο μέλος της είναι αριθμός θετικός, αφού

$$e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x - x \geq 1 \Rightarrow (e^x - x)^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow 2e^x + (e^x - x)^2 - 1 > 0$$

άρα η εξίσωση (3) είναι αδύνατη.

B3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2e^x - xe^x - 1 = 0$ (3) έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες, έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1, x \in \mathbb{R}$

• Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών

• $h(2) = 2e^2 - 2e^2 - 1 = -1 < 0$

• $h(0) = 2e^0 - 0 \cdot e^0 - 1 = 1 > 0$

• $h(-2) = 2e^{-2} + 2e^{-2} - 1 = 4e^{-2} - 1 < 0$

Άρα $h(-2)h(0) < 0$, $h(0)h(2) < 0$ άρα από το Θ. Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (-2, 0)$ και $x_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $h(x_1) = 0, h(x_2) = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές

Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων με $h(\rho_1) = h(\rho_2) = h(\rho_3) = 0$

Επομένως από το Θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε

$h'(\xi_1) = 0, h'(\xi_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες.

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί:

$$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1-x) \quad \text{και} \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Οπότε η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες, άρα ισοδύναμα και η εξίσωση $f'(x) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

B4. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $x_1 < 0 < x_2$ ως πράξη συνεχών και αφού τα x_1, x_2 είναι διαδοχικές ρίζες της f' (από το B3), τότε διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2) και αφού $f'(0) = 1 > 0$ θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \text{Γ1. Ισχύει: } f'(t) - \gamma f(t) &= -\frac{\gamma}{\alpha} f^2(t) \Leftrightarrow \frac{e^{\gamma t} f'(t) - \gamma e^{\gamma t} f(t)}{f^2(t)} = -\frac{\gamma}{\alpha} e^{\gamma t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(e^{\gamma t})' f(t) - e^{\gamma t} f'(t)}{f^2(t)} &= \frac{\gamma}{\alpha} e^{\gamma t} \Leftrightarrow \left[\frac{e^{\gamma t}}{f(t)} \right]' = \left(\frac{e^{\gamma t}}{\alpha} \right)' \Rightarrow \frac{e^{\gamma t}}{f(t)} = \frac{e^{\gamma t}}{\alpha} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Για } t=0 \text{ η τελευταία μας δίνει: } \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{\alpha} + c \Leftrightarrow \frac{1+\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + c \Leftrightarrow c = \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\text{Άρα: } \frac{e^{\gamma t}}{f(t)} = \frac{e^{\gamma t}}{\alpha} + c \Leftrightarrow \frac{e^{\gamma t}}{f(t)} = \frac{e^{\gamma t}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow f(t) = \frac{\alpha e^{\gamma t}}{e^{\gamma t} + \beta} \Leftrightarrow f(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}}.$$

$$\text{Γ2. Έχουμε: } f'(t) = \left[\frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}} \right]' = -\alpha \frac{(1 + \beta e^{-\gamma t})'}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^2} = \alpha \beta \gamma \frac{e^{-\gamma t}}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^2} > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f :

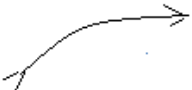
$$\begin{aligned} f''(t) &= \left[\alpha \beta \gamma \frac{e^{-\gamma t}}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^2} \right]' = \alpha \beta \gamma \frac{-\gamma e^{-\gamma t} (1 + \beta e^{-\gamma t})^2 - e^{-\gamma t} 2(-\beta \gamma e^{-\gamma t})(1 + \beta e^{-\gamma t})}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^4} = \\ &= \alpha \beta \gamma \frac{-\gamma e^{-\gamma t} (1 + \beta e^{-\gamma t})^2 + 2\beta \gamma e^{-2\gamma t} (1 + \beta e^{-\gamma t})}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^4} = \alpha \beta \gamma \frac{\gamma e^{-\gamma t} (1 + \beta e^{-\gamma t}) [-(1 + \beta e^{-\gamma t}) + 2\beta e^{-\gamma t}]}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^4} = \\ &= \alpha \beta \gamma^2 e^{-\gamma t} \frac{-1 + \beta e^{-\gamma t}}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^3} = \alpha \beta \gamma^2 e^{-\gamma t} \frac{\beta e^{-\gamma t} - 1}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^3}. \end{aligned}$$

Είναι:

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma^2 e^{-\gamma t} \frac{\beta e^{-\gamma t} - 1}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^3} = 0 \Leftrightarrow \beta e^{-\gamma t} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-\gamma t} = \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow -\gamma t = -\ln \beta \Leftrightarrow t = \frac{\ln \beta}{\gamma}$$

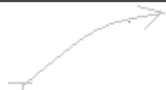
$$f''(t) < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma^2 e^{-\gamma t} \frac{\beta e^{-\gamma t} - 1}{(1 + \beta e^{-\gamma t})^3} < 0 \Leftrightarrow \beta e^{-\gamma t} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-\gamma t} < \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow -\gamma t < -\ln \beta \Leftrightarrow t > \frac{\ln \beta}{\gamma}$$

- Αν $\beta \in (0, 1]$ τότε $\ln \beta \leq 0$, οπότε $f''(t) < 0$ για κάθε $t \geq 0$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

t	0	$+\infty$
f'		+
f''		-
f		

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ αφού είναι συνεχής σ' αυτό και $f''(t) < 0$ στο εσωτερικό του.

- Αν $\beta > 1$ τότε $\ln \beta > 0$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

t	0	$\frac{\ln \beta}{\gamma}$	$+\infty$
f'	+		+
f''	+	0	-
f		σ κ	

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\ln \beta}{\gamma}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\ln \beta}{\gamma}, +\infty\right)$.

Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $t = \frac{\ln \beta}{\gamma}$ και είναι το

$$A\left(\frac{\ln \beta}{\gamma}, f\left(\frac{\ln \beta}{\gamma}\right)\right) = \left(\frac{\ln \beta}{\gamma}, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Γ3. α) Όχι.

Θα πρέπει να υπάρχει χρονική στιγμή t ώστε να ισχύει:

$f(t) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma t}} = \alpha \Leftrightarrow 1 + \beta e^{-\gamma t} = 1 \Leftrightarrow \beta e^{-\gamma t} = 0$ που είναι άτοπο. Άρα η είδηση δεν θα φτάσει ποτέ σε όλα τα άτομα.

β) Ο ρυθμός διάδοσης είναι η $f'(t)$, οπότε για να μειώνεται πρέπει $f''(t) \leq 0$.

Από το Γ2 έχουμε: $f''(t) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln \beta}{\gamma}$. Άρα $t = \frac{\ln \beta}{\gamma}$ είναι η χρονική στιγμή που ο ρυθμός διάδοσης της είδησης θα αρχίσει να μειώνεται.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$

Για $f'(1) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ (*)

Έστω x_0 τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\stackrel{\text{θετω } x = x_0 h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0) \frac{1}{h} + f(h) \frac{1}{x_0} - f(x_0)}{x_0(h - 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{f(x_0) \left(\frac{1}{h} - 1 \right)}{x_0(h - 1)} + \frac{1}{x_0^2} \frac{f(h)}{h - 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{-f(x_0) \frac{h - 1}{h}}{x_0(h - 1)} + \frac{1}{x_0^2} \frac{f(h)}{h - 1} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left(-\frac{f(x_0)}{x_0} \frac{1}{h} + \frac{1}{x_0^2} \frac{f(h)}{h - 1} \right) \stackrel{\text{υπαρχουν τα}}{\underset{\text{επι μέρους όρια}}{=}} \lim_{h \rightarrow 1} \left(-\frac{f(x_0)}{x_0} \frac{1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x_0^2} \frac{f(h)}{h - 1} \right) \stackrel{(*)}{=} -\frac{f(x_0)}{x_0} \cdot 1 + \frac{1}{x_0^2} \cdot 1 \\ &= -\frac{f(x_0)}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Άρα $f'(x_0) = -\frac{f(x_0)}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ και επειδή x_0 τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός θα

ισχύει:

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

$$\Delta 2. f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \Rightarrow xf(x) = \ln x + c \quad (3)$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow 1f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0 \quad \text{άρα } xf(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Δ3. α)

$$\bullet f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \quad \mu\epsilon$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e \quad \text{και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e.$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	e	$+\infty$
f'		0 +	-
f		ολ. μέγιστο	

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Επομένως στο $x_0 = e$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο που είναι και ολικό με τιμή $f(e) = \frac{1}{e}$

• Επίσης

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \dots = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \dots 0 < x < e\sqrt{e} \quad \text{και}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dots x > e\sqrt{e}.$$

Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$e\sqrt{e}$	$+\infty$
f''		0	
f		ΣΚ	

$$f(e\sqrt{e}) = \frac{3}{2e\sqrt{e}}$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(0, e\sqrt{e}]$ και κυρτή στο $[e\sqrt{e}, +\infty)$.

Στο $e\sqrt{e}$ η f'' μηδενίζεται και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Επομένως το σημείο $(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}})$ είναι σημείο καμπής.

β)

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Σύνολο τιμών.

$\Delta_1 = (0, e]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$

$\Delta_2 = (e, +\infty)$ η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right) = \left(0, \frac{1}{e} \right)$

Σύνολο τιμών $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$.

- $x^3 = e^x \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln e^x \Leftrightarrow 3 \ln x = x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}$.

Επειδή $\frac{1}{3} \in f(\Delta_1)$, $\frac{1}{3} \in f(\Delta_2)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 ,

έχουμε ότι η $f(x) = \frac{1}{3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2 που είναι θετικές

και καμία δεν είναι e αφού $f(e) \neq \frac{1}{3}$.

Άρα η $x^3 = e^x$ έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες.

γ)

- Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ άρα:

$$e \leq \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln \beta}{\beta} \Leftrightarrow \beta \ln \alpha > \alpha \ln \beta \Leftrightarrow \ln \alpha^\beta > \ln \beta^\alpha \Leftrightarrow \alpha^\beta > \beta^\alpha$$

- Για $\alpha = \ln x$ και $\beta = x - 1$ έχουμε $(\ln x)^{x-1} > (x-1)^{\ln x}$ και για να ισχύει αρκεί να αποδείξουμε ότι: $e \leq \alpha < \beta \Leftrightarrow e \leq \ln x < x - 1$.

- Γνωρίζουμε (εφαρμογή 2 σελ.148) ότι: $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$. Ισότητα ισχύει για $x=1$ άρα $\ln x < x - 1$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.
- Έχουμε $x \geq e^e \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^e \Leftrightarrow \ln x \geq e$.

δ) Η f πληροί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[x, 3x]$ και $[3x, 4x]$ άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x, 3x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(3x) - f(x)}{2x}$, (1) και υπάρχει $\xi_2 \in (3x, 4x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(4x) - f(3x)}{x}$, (2)

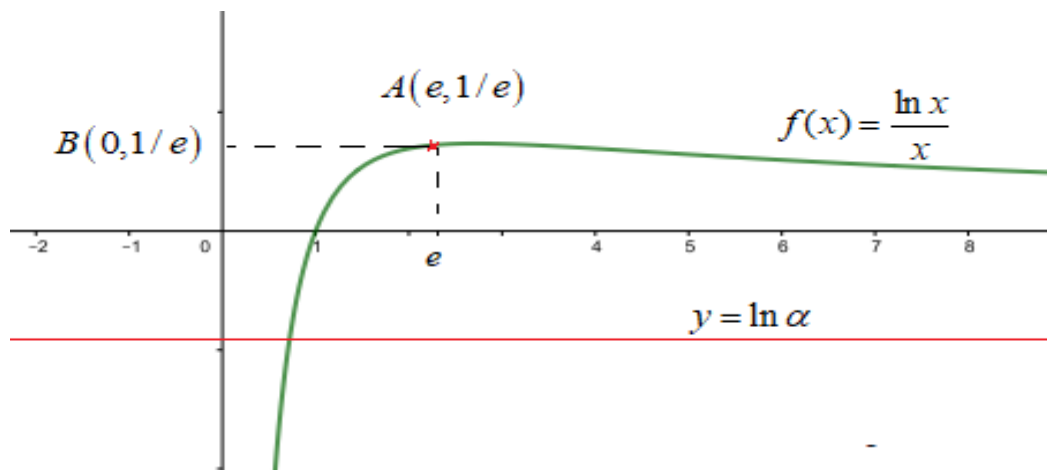
Η f κυρτή στο $[e\sqrt{e}, +\infty)$ επομένως η f' γν. αύξουσα άρα

$$e\sqrt{e} \leq x < \xi_1 < 3x < \xi_2 < 4x \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(3x) - f(x)}{2x} < \frac{f(4x) - f(3x)}{x} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{f(3x) - f(x)}{2} < f(4x) - f(3x) \Leftrightarrow 2f(4x) + f(x) > 3f(3x).$$

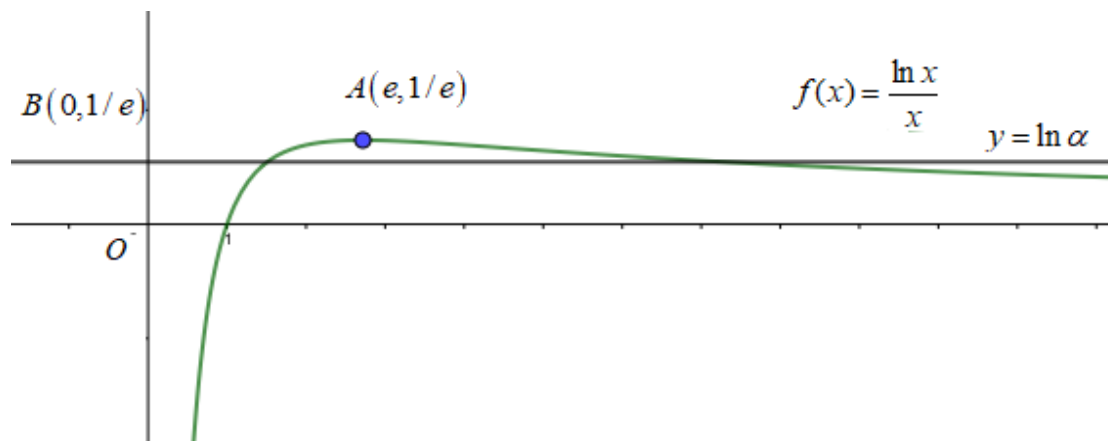
ε) Αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$\alpha^x = x \Leftrightarrow \ln \alpha^x = \ln x \Leftrightarrow x \ln \alpha = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln \alpha \Leftrightarrow f(x) = \ln \alpha.$$

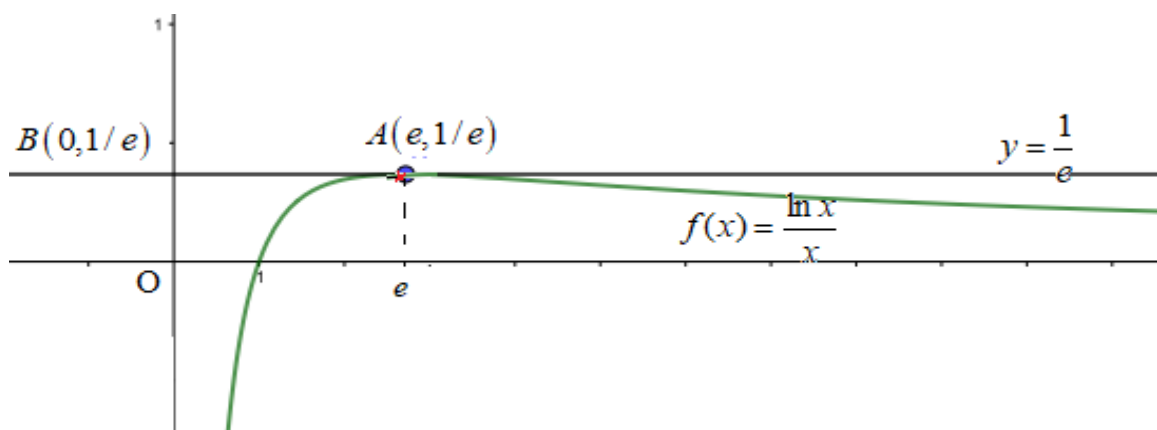
- Αν $\ln \alpha \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha \leq 1$ τότε $\ln \alpha \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα, επομένως οι γραφικές παρατάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.



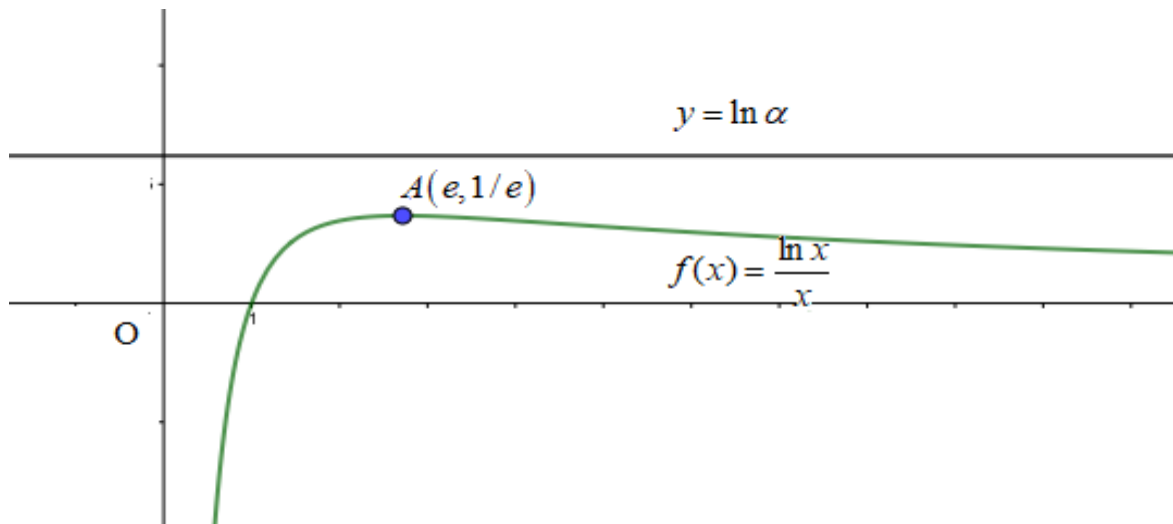
- Αν $0 < \ln \alpha < \frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 < \alpha < e^{\frac{1}{e}}$ τότε $\ln \alpha \in f(\Delta_1)$ και $\ln \alpha \in f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες, επομένως οι γραφικές παρατάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.



- Αν $\ln \alpha = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = e^{\frac{1}{e}}$ τότε $\ln \alpha \in f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα, επομένως οι γραφικές παρατάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.



- Αν $\ln \alpha > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha > e^{\frac{1}{e}}$ τότε $\ln \alpha \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα, επομένως οι γραφικές παρατάσεις δεν έχουν κοινά σημεία.



Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β΄ επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας** Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Το Θέμα Γ΄ επιμελήθηκε ο **Κωνσταντόπουλος Λεωνίδας** Μαθηματικός-MSc του 10ου & 19ου Γυμνασίου Πάτρας.

Το Θέμα Δ΄ επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας** Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.