

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 2)
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 49.

2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.

3. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ.

ΘΕΜΑ Β

1.

1^{ος} τρόπος

- Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .

- Έστω x_0 μια ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$, οπότε έχουμε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) + \eta\mu x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -\eta\mu x_0, (1)$$

- Η σχέση $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για $x = x_0$ γίνεται

$$f^2(x_0) + 2f(x_0)\eta\mu x_0 = x_0^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (-\eta\mu x_0)^2 - 2\eta\mu^2 x_0 = x_0^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0$$

$$\Leftrightarrow 0 = x_0^2 + \eta\mu^2 x_0 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 \Leftrightarrow 0 = x_0^2 + 1 \text{ αδύνατο, επομένως } g(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο .}$$

2^{ος} τρόπος

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

- Η σχέση $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται

$$f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + \eta\mu x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 1 > 0 \text{ άρα } g(x) \neq 0 \text{ και αφού είναι συνεχής}$$

θα διατηρεί πρόσημο. Όμως $g(0) = f(0) + \eta\mu 0 = 1 + 0 = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.

1^{ος} τρόπος

- Η σχέση $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ γίνεται
 $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$
 $(f(x) + \eta\mu x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + 1$
- Επειδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο θα έχουμε $g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$, οπότε
 $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ή $g(x) = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow g(x) = f(x) + \eta\mu x = \sqrt{x^2 + 1}$ ή
 $g(x) = f(x) + \eta\mu x = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = -\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}$ ή $f(x) = -\eta\mu x - \sqrt{x^2 + 1}$
και επειδή $f(0) = 1$ έχουμε $f(x) = -\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}$

2^{ος} τρόπος

- Αφού $g(x) > 0$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε

$$g^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \text{ όμως } g(x) = f(x) + \eta\mu x,$$

$$\text{οπότε } f(x) + \eta\mu x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x.$$

$$3. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1} - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\eta\mu x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\eta\mu x}{x} + \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\eta\mu x}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right] = -1 + 0 + 0 = -1$$

β)

1^{ος} τρόπος

$$0 \leq -1 + \sqrt{x^2 + 1} \leq -\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{-\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{-1 + \sqrt{x^2 + 1}} \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0 \text{ και από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0 \text{ με}$$

$$0 \leq -\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty$$

2^{ος} τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[-\frac{\eta\mu x}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] = (+\infty)(0+1) = +\infty$$

Γιατί $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0$ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

1. α) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(0, +\infty)$, θα είναι συνεχής και στο e οπότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = f(e) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow e^-} (2 + \ln^2 x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (\alpha x + \ln(x - e + 1)) = f(e) \\ \Leftrightarrow 3 = \alpha e = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{e}.$$

β) Επειδή $f(1) = 2 + \ln^2 1 = 2 < 6$,

$$f\left(\frac{2e}{e}\right) = \frac{3}{e} 2e + \ln(2e - e + 1) = 6 + \ln(e + 1) > 6, \text{ γιατί}$$

$$e + 1 > e \Leftrightarrow \ln(e + 1) > \ln e \Leftrightarrow 6 + \ln(e + 1) > 6 + 1 = 7 \Leftrightarrow f(2e) > 7$$

δηλαδή $f(1) < 6 < f(2e)$ και η f είναι συνεχής στο $[1, 2e]$ τότε, σύμφωνα με το Θ.
ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2e) : f(x_0) = 6$.

2. α) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow$$

$$4 \ln x_1 + 3 = 4 \ln x_2 + 3 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι 1-1.}$$

$$\text{β)} (f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1 \Rightarrow (f \circ f)(e^{f(x)}) = 2 \ln(\ln x^4 + 3) + 1 \Rightarrow$$

$$f(f(e^{f(x)})) = 2 \ln(4 \ln x + 3) + 1 \Rightarrow f(4 \ln x + 3) = 2 \ln(4 \ln x + 3) + 1$$

Θέτουμε $4 \ln x + 3 = y > 0$, οπότε $f(y) = 2 \ln y + 1$, άρα $f(x) = 2 \ln x + 1, x > 0$.

γ) Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι :

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } 2 \ln x + 1 > 0\} = \left\{x > 0 \text{ και } x > \frac{1}{\sqrt{e}}\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$$

$$(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow f(f(x)) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{x-2014} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \ln x + 1 = e^{x-2014} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x + 1 - e^{x-2014} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - e^{x-2014} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (2)}$$

Θέτουμε $t(x) = 2 \ln x - e^{x-2014} - \frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο $[1, e] \subseteq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ ως

διαφορά συνεχών συναρτήσεων και

$$t(1) = 2 \ln 1 - e^{1-2014} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2013}} < 0$$

$$t(e) = 2 \ln e - e^{e-2014} - \frac{1}{2} = 2 - e^{e-2014} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{e^{2014-e}} > 0, \text{ επομένως ισχύει } t(e)t(1) < 0,$$

οπότε από το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0) = 0$ και

λόγω της (2) έχουμε ισοδύναμα ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία

τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.

ΘΕΜΑ Δ

1.

1^{ος} τρόπος

Θα δείξουμε ότι $\sqrt{x^2+1} > -x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν ο x είναι θετικός τότε το 1^ο μέλος της (1) είναι θετικό και το δεύτερο αρνητικό οπότε η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x . Αν $x \leq 0$ τότε και τα δύο μέλη της (1) είναι μη αρνητικά συνεπώς υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε ισοδύναμα $x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς x . Άρα τελικά η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ισχύει $x^2+1 > x^2$ και επειδή η $\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, άρα παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$. Όμως από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ισχύει $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο ανισότητες παίρνουμε $\sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

3^{ος} τρόπος

Αν υπάρχει αριθμός x_0 ώστε $f(x_0) = 0$, τότε παίρνουμε ισοδύναμα $\sqrt{x_0^2+1} = -x_0$ και υψώνοντας στο τετράγωνο για εκείνα τα x_0 που επιτρέπεται (προφανώς για $x_0 \leq 0$), παίρνουμε $x_0^2+1 = x_0^2 \Leftrightarrow 1 = 0$, άτοπο. Άρα η συνάρτηση δε μηδενίζεται και από την άλλη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού επιπλέον $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1). Αφού η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \xrightarrow{\sqrt{x} \uparrow} \sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε

$$\sqrt{x_1^2+1} + x_1 < \sqrt{x_2^2+1} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ όπως το θέλαμε.

3.

1ος τρόπος

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{f(x)} \quad (3)$$

2ος τρόπος

Η $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (3) γίνεται ισοδύναμα:

$$f(-x)f(x) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1) - x^2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ που ισχύει.}$$

Για τη μονοτονία έχουμε αποδείξει ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Θα βρούμε τη μονοτονία στο $(-\infty, 0]$. Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε, $-x_1 > -x_2 \geq 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (από το ερώτημα Δ2), άρα παίρνουμε $f(-x_1) > f(-x_2) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

- Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1 < 0 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$, άρα και πάλι $f(x_1) < f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

4.

1ος τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta} \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{1}{f(\beta)} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f(\alpha) = f(-\beta) \stackrel{f \uparrow \text{ άρα } f^{1-1}}{\Leftrightarrow} \alpha = -\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$$

2^{ος} τρόπος

Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta}{(\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta)(\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta)} = \sqrt{\beta^2 + 1} - \beta$$

Άρα $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha = \sqrt{\beta^2 + 1} - \beta$

Εντελώς όμοια παίρνουμε $\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha + \beta = -\alpha - \beta \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι ο 2^{ος} τρόπος δεν απαιτεί τίποτε παραπάνω από γνώσεις Άλγεβρας Α Λυκείου.

5.

1^{ος} τρόπος

Θέτουμε $y = f(x)$, με $y > 0$ και έτσι

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 1} + x = y \\ y > 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 1} = y - x \\ y > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = (y - x)^2 \\ y > 0 \\ y - x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y^2 - 1}{2y} \\ y > 0 \\ y - \frac{y^2 - 1}{2y} \geq 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y^2 - 1}{2y} \\ y > 0 \\ y^2 + 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y^2 - 1}{2y} \\ y > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x > 0$.

Σχόλιο: Από τον παραπάνω τρόπο βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $y = f(x)$ έχει

για κάθε $y \in (0, +\infty)$ μία και μόνο λύση στο $\mathbb{R}$, την $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

η f είναι 1-1 (χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε χρήση της μονοτονίας της) και κατά συνέπεια αντιστρέψιμη με $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και τύπο $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

2ος τρόπος

Δείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 συνεπώς είναι αντιστρέψιμη. Θέτουμε $y = f(x)$, με $y > 0$ (λόγω του Δ1) και έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 1} + x \stackrel{\sqrt{x^2 + 1} - x \neq 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \sqrt{x^2 + 1} - x \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις $y = \sqrt{x^2 + 1} + x$ και $\frac{1}{y} = \sqrt{x^2 + 1} - x$ παίρνουμε

$$2x = y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \quad (4)$$

Λόγω του ότι για να φτάσουμε στη σχέση (4), χάθηκε η ισοδυναμία (διότι αφαιρέσαμε κατά μέλη), έχουμε αποδείξει μόνο τη συνεπαγωγή $f(x) = y \Rightarrow x = g(y)$, με $g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y}$, $y > 0$. Θα πρέπει τώρα να δείξουμε και το αντίστροφο δηλαδή ότι αν

$x = \frac{y^2 - 1}{2y}$, $y > 0$ τότε ισχύει $f(x) = y$. Πράγματι

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right) = \sqrt{\left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right)^2 + 1} + \frac{y^2 - 1}{2y} = \sqrt{\frac{y^4 - 2y^2 + 1 + 4y^2}{4y^2}} + \frac{y^2 - 1}{2y} \\ &= \sqrt{\left(\frac{y^2 + 1}{2y}\right)^2} + \frac{y^2 - 1}{2y} \stackrel{y > 0}{=} \frac{y^2 + 1}{2y} + \frac{y^2 - 1}{2y} = y \end{aligned}$$

Άρα τελικά, $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x > 0$

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο **Συγκελάκης Αλέξανδρος**, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο**, **Μοτσάκο Βασίλειο** και **Σούγελα Ελένη**.