ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

2Ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2)
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=$ **η**.

(Μονάδες 10)

Α2.

1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 3)

2) Πότε μια συνάρτηση f **<u>δεν είναι συνεχής</u>** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

Α3. *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με* ***Σωστό*** *(Σ), αν είναι σωστή, ή με* ***Λάθος*** *(Λ), αν είναι λανθασμένη:*

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Μία συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f^2(x)+1}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

(Μονάδες 5)

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.

(Μονάδες 10)

4. Να επιλυθεί η ανίσωση $(f\circ g)(x^3+4) > (f\circ g)(3x^2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 3)

2. Να βρείτε το πρόσημο της f.

(Μονάδες 4)

3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 5)

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.

(Μονάδες 4)

5. Αν $h(x) = \ln\dfrac{1}{x}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = h(x_0)$.

(Μονάδες 5)

6. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

(Μονάδες 3)

2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 5)

3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.

(Μονάδες 3)

4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 4)

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

(Μονάδες 4)

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**