ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ –ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. **1.**Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.
2. Βλέπε Σχολικό βιβλίο σελίδες 70-71.

Α3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Παίρνουμε τη διαφορά

$$g(x_2)-g(x_1)=\frac{f(x_2)}{1+f^2(x_2)}-\frac{f(x_1)}{1+f^2(x_1)}=\frac{f(x_2)\left(1+f^2(x_1)\right)-f(x_1)\left(1+f^2(x_2)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}=$$

$$\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)-f(x_2)f(x_1)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}=\frac{\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(1-f(x_2)f(x_1)\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}$$

- αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_2 > x_1$ θα έχουμε:
  $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0$, επίσης έχουμε
  $0 < f(x_1) < 1,\ 0 < f(x_2) < 1 \Rightarrow 0 < f(x_1)f(x_2) < 1$, οπότε η διαφορά

  $$g(x_2)-g(x_1)=\frac{\left(\overbrace{f(x_2)-f(x_1)}^{+}\right)\left(\overbrace{1-f(x_2)f(x_1)}^{+}\right)}{\left(1+f^2(x_1)\right)\left(1+f^2(x_2)\right)}>0 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1).$$

  Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Ομοίως αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
  Άρα έχουν οι f, g το ίδιο είδος μονοτονίας στο $\mathbb{R}$.

2.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x_2) > g(x_1) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$. Τότε αν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

  $$x_2 > x_1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_2) < g(x_1) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \Leftrightarrow (fog)(x_2) > (fog)(x_1).$$

  Άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
  Αφού η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και ¨1-1¨.

3. Η εξίσωση $f(g(x^3+1)) = f(g(4x^2+2x))$ γίνεται

$$(f\circ g)(x^3+1) = (f\circ g)(4x^2+2x) \overset{f\circ g:'1-1'}{\Leftrightarrow} x^3+1 = 4x^2+2x \Leftrightarrow x^3-4x^2-2x+1=0$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική.
  Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[-1,0]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [-1,0] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(-1)=-2<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_1 \in (-1,0): h(x_1) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο διάστημα $[0,1]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(0)=1>0,\ h(1)=-4<0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_2 \in (0,1): h(x_2) = 0$

- Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[1,5]$.

  $$\left.\begin{array}{c} h \text{ συνεχής στο } [1,5] \text{ (πολυωνυμική)} \\ h(1)=-4<0,\ h(5)=16>0 \end{array}\right\} \overset{\Theta.\ Bolzano}{\Rightarrow}$$ υπάρχει τουλάχιστον ένα

  $x_3 \in (1,5): h(x_3) = 0$

  και επειδή η εξίσωση $h(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ είναι πολυωνυμική 3ου θα έχει το πολύ τρεις ρίζες, άρα έχει ακριβώς τρεις τις x_1, x_2, x_3.

Επίσης έχουμε $-1<x_1<0<x_2<1<x_3<5$, δηλαδή έχουμε δύο θετικές και μια αρνητική.

Σχόλιο: ένας τρόπος για την επιλογή των κατάλληλων διαστημάτων είναι με δοκιμές.

4. Από το ερώτημα (2) η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$(fog)\left(x^3+4\right)>(fog)\left(3x^2\right)\overset{f\circ g:\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3+4>3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)>0 \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} x>-1$$

Άρα $x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Πρέπει: $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

2. $f(x)=\ln(e^x-1)-x=\ln(e^x-1)-x\ln e=\ln(e^x-1)-\ln e^x=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x} \Rightarrow f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$.

Όμως $1-\dfrac{1}{e^x}<1 \Leftrightarrow \ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)<\ln 1 \Leftrightarrow f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

3. Από τα προηγούμενα έχουμε: $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$.Τότε:

$$0<x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^{x_1}}<-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}}<1-\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_1}}\right)<\ln\left(1-\frac{1}{e^{x_2}}\right) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

4. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα είναι ΄1-1΄, που σημαίνει ότι είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}:f(A)\to A$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$ και $1-\dfrac{1}{e^x}$ στο $A_f=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της (πεδίο ορισμού της f^{-1}) είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,0)$ γιατί:

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} u=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1-1=0$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

- Θέτουμε $u=1-\dfrac{1}{e^x}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)=1$.

  Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\right]=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$.

Με $y\in(-\infty,0)$ η εξίσωση

$$y=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\Leftrightarrow e^y=1-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow \frac{1}{e^x}=1-e^y\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{1-e^y}\Leftrightarrow$$

$$x=\ln\left(1-e^y\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-e^y\right).$$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^x\right),\ x<0$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x)=f(x)-h(x)=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)-\ln\frac{1}{x}=\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)+\ln x,\ x>0.$$

Η συνάρτηση t είναι συνεχής, ως άθροισμα των συνεχών $f(x)$, $\ln x$ και γνησίως αύξουσα στο $B=(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι

$t(B)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} t(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} t(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} t(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)+\ln x\right)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\ln x\right)=0+(+\infty)=+\infty$

Επειδή το $0\in(-\infty,+\infty)=t(B)$ υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=h(x_0)$.

6. Από το 2ο ερώτημα έχουμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τότε

$\dfrac{f(1)}{f(2)}>0$, αφού $f(1)<0$ και $f(2)<0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3+x^2+2}{f(2)x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(1)x^3}{f(2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(1)}{f(2)}x\right)=\frac{f(1)}{f(2)}(+\infty)=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$, **(1)** και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, **(2)**, προσθέτουμε τις **(1)** και **(2)**, έτσι έχουμε $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2)$, οπότε $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

2. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \left(f(x) - \alpha\right)\left(\underbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 2}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x) - \alpha^3 + 2f(x) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x + 1 = \alpha^3 + 2\alpha \Leftrightarrow x = \alpha^3 + 2\alpha - 1$$

δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε όπου $f(x) = y \Rightarrow y^3 + 2y = x + 1 \Rightarrow x = y^3 + 2y - 1$.

Άρα $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. 1ος τρόπος: Στην $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$, για $x = 0$ έχουμε

$f^{-1}(0) = 0^3 + 0 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

2ος τρόπος: Αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι 1-1 θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$. Θέτουμε στην $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ όπου $x = x_0$ και έχουμε: $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0 = x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$, οπότε $f(-1) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

4. 1ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και έστω $f(x_1) \geq f(x_2)$. Τότε:

$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \geq 2f(x_2)$ **(3)** και $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ **(4)**

Προσθέτοντας τις (3), (4) έχουμε:

$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$. Άτοπο γιατί $x_1 < x_2$.

Άρα για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Η συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3, $2x - 1$.

Οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, άρα έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. $f^3(x)+2f(x)=x+1 \Rightarrow f(x)\left(\underbrace{f^2(x)+2}_{\neq 0}\right)=x+1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{f^2(x)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)|=\dfrac{|x+1|}{|f^2(x)+2|}\le |x+1|$,

έτσι έχουμε $|f(x)|\le |x+1| \Leftrightarrow -|x+1|\le f(x)\le |x+1|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to -1}(-|x+1|)=\lim\limits_{x\to -1}|x+1|=0$, από το κριτήριο της παρεμβολής

έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0=f(-1)$, άρα συνεχής στο $x_0=-1$.

6. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Έχουμε $f^3(x)+2f(x)=x+1$, **(5)** και $f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0+1$, **(6)**, αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις **(5)** και **(6)**. Έτσι έχουμε $f^3(x)-f^3(x_0)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\big(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\big)+2\big(f(x)-f(x_0)\big)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x)-f(x_0)\big)\left(\underbrace{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)}_{+}+2\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2|}\le |x-x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\le |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le |x-x_0|$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο.**