

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
1<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 49.

**A2.**

i) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 15.

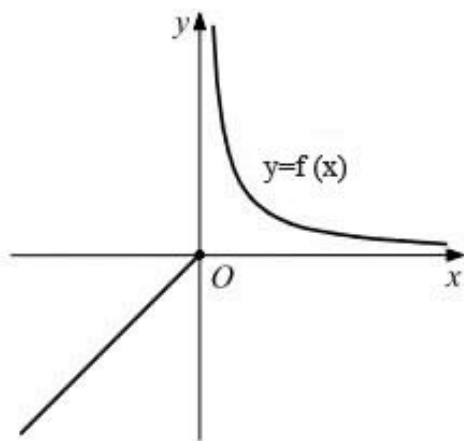
ii) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 51.

iii) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 32.

iv) α) Ψ.

β) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 35. Ως παράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση

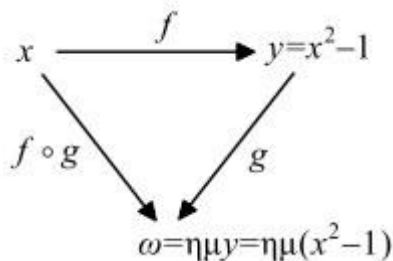
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ η οποία είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.}$$



v) α) Α.

β) Βλέπε Σχολικό Βιβλίο σελίδα 72.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $\varphi(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων  $f(x) = x^2 - 1$  και  $g(x) = \eta\mu x$ .



**A3.** α) (σελ.74-75) Σ, β) (σελ.74) Λ, γ) (σελ.18) Σ, δ) (σελ.60) Σ, ε) (σελ.43) Λ.

## ΘΕΜΑ Β

### B1.

- Έχουμε  $0 < 4$  και  $f(0) > f(4)$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $[0, +\infty)$  τότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$ .
- Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$  με  $x_1 < x_2 \leq 0$ , έχουμε :  

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \geq 0 \xrightarrow{f \downarrow [0, +\infty)} \Leftrightarrow f(-x_1) < f(-x_2) \xrightarrow{f: \text{άρτια}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
 Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$ .
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (-\infty, 0]$ . Τότε το  $f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 4]$ , αφού  

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} f(-u) \stackrel{f: \text{άρτια}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) \stackrel{\text{υπόθεση}}{=} -\infty \text{ και } f(0) = 4.$$
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A_2 = [0, +\infty)$ . Τότε το  $f(A_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 4]$ ,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι:  

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 4] .$$

### B2.

Είναι  $D_f = A = \mathbb{R}$ , οπότε  $D_{f \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}.$

Προφανώς  $f(x) \in \mathbb{R}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα  $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$ .

- Έχουμε:  $-4 \leq x_1 < x_2 \leq 0 \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} \Leftrightarrow f(-4) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f(0) \Leftrightarrow$   

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x_1) < f(x_2) \leq 4 \xrightarrow{f \text{ γν. φθίνουσα } [0, 4]} \Leftrightarrow f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) > (f \circ f)(x_2).$$
 Άρα η  $f \circ f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-4, 0]$ .
- Όμοια αποδεικνύεται ότι η  $f \circ f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 4]$ .

### B3.

Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 0$ . Όμως αν  $x < 4 \xrightarrow{f \text{ γν. φθίνουσα}} \Leftrightarrow f(x) > f(4) = 0$ . Δηλαδή έχουμε:

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  για  $0 < x < 4$ . Τότε  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

### B4.

i) Έχουμε:

$$g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = \cancel{f(1)} - f(0) + 1 + \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)} + 1 + \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)} + 1 + f(4) - \cancel{f(3)} + 1 = -4 + 4 + 0 = 0 .$$

ii) Είναι  $f(\mu+1) = f(\mu) - 1 \Leftrightarrow f(\mu+1) - f(\mu) + 1 = 0 \Leftrightarrow g(\mu) = 0$ .

Επειδή  $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 0$ , (1) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί  $g(0), g(1), g(2), g(3)$  δεν μπορεί να είναι ομόσημοι και οι τέσσερις (αφού τότε το άθροισμά τους θα είναι είτε θετικό, είτε αρνητικό, άτοπο).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν  $g(0)$  ή  $g(1)$  ή  $g(2)$  ή  $g(3) = 0$ , τότε είναι προφανές το ζητούμενο.
- Αν  $g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \neq 0$ , δηλαδή κανένας από τους όρους του γινομένου δεν είναι μηδέν, προκύπτει ότι δύο τουλάχιστον όροι του αθροίσματος της (1) είναι ετερόσημοι.

Έτσι αν  $g(0) > 0$ , τότε κάποιος/οι από τους  $g(1), g(2), g(3)$  είναι αρνητικός/οί. Αν  $g(0) \cdot g(1) < 0$  εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1) \subseteq [0, 3]$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Ομοίως αν  $g(0) \cdot g(2) < 0$  ή  $g(0) \cdot g(3) < 0$  ή  $g(1) \cdot g(2) < 0$  ή  $g(1) \cdot g(3) < 0$  ή  $g(2) \cdot g(3) < 0$ .

Άρα υπάρχει  $\mu \in [0, 3]$  ώστε  $g(\mu) = 0 \Leftrightarrow f(\mu + 1) = f(\mu) - 1$ .

### Θέμα Γ

**Γ1.** Για  $x=0$  η αρχική σχέση γίνεται :

$$f^3(0) + 2f(0) = 2\eta\mu 0 - 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0) + 2] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f^2(0) = -2 \text{ (αδύνατο), άρα } f(0) = 0.$$

**Γ2.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η αρχική σχέση γίνεται :

$$f(x)[f^2(x) + 2] = 2\eta\mu x - 3x \Leftrightarrow \left\{ f^2(x) + 2 > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f(x) = \frac{2\eta\mu x - 3x}{f^2(x) + 2}, \quad \text{ομόσημη του αριθμητή.}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι: } |\eta\mu x| \leq |x| \text{ και αν } x > 0 \text{ τότε } |\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Leftrightarrow \\ & -2x < 2\eta\mu x < 2x \Leftrightarrow \\ & -5x < 2\eta\mu x - 3x < -x \end{aligned}$$

όπου  $-x < 0$  άρα και  $f(x) < 0$  για κάθε  $x > 0$ .

**Γ3.**

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2\eta\mu x - 3x}{f^2(x) + 2} \Leftrightarrow |f(x)| = \left| \frac{2\eta\mu x - 3x}{f^2(x) + 2} \right| \Leftrightarrow \left\{ f^2(x) + 2 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + 2} < 1 \right\} \\ \Leftrightarrow |f(x)| < |2\eta\mu x - 3x| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -|2\eta\mu x - 3x| < f(x) < |2\eta\mu x - 3x| \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} (-|2\eta\mu x - 3x|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |2\eta\mu x - 3x|$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ , οπότε  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Γ4.** Στη σχέση  $f^3(x) + 2f(x) = 2\eta\mu x - 3x$  (1) ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε θέτουμε όπου  $x \rightarrow -x$  και βρίσκουμε  $f^3(-x) + 2f(-x) = -2\eta\mu x + 3x$  (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$f^3(x) + 2f(x) + f^3(-x) + 2f(-x) = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + f^3(-x) + 2[f(x) + f(-x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) + f(-x)][f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x)] + 2[f(x) + f(-x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) + f(-x)] \left[ \underbrace{f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + 2}_{>0} \right] = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

(\*)  $f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + 2 > 0$ , (τριώνυμο ως προς  $f(x)$ ) ομόσημο του  $a=1$  αφού

$$\Delta = f^2(-x) - 4[f^2(-x) + 2] = -3f^2(-x) - 8 < 0$$

Άρα  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $f$  είναι περιττή.

**Γ5.** Θα αποδείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = f(-x_0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) \stackrel{(\Gamma_4)}{=} \lim_{x \rightarrow -x_0} [-f(-x)] = - \lim_{-x \rightarrow x_0} f(-x) \stackrel{-x=u}{=} - \lim_{u \rightarrow x_0} f(u) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } x_0}{=} -f(x_0) \stackrel{(\Gamma_4)}{=} f(-x_0).$$

**Γ6.** Η εξίσωση γίνεται :

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  συνεχής στο  $[0,1]$ , ως πράξεις συνεχών, με

$$g(0) = f(0) - 0 + 1 = 1 > 0$$

$$g(1) = f(1) < 0 \text{ αφού για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) < 0 \text{ (}\Gamma_2 \text{. Ερώτημα)}$$

ή αλλιώς

$$f(1) = \frac{2\eta\mu 1 - 3}{f^2(1) + 2} < 2\eta\mu 1 - 3 < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f^2(x) + 2} < 1 \text{ και στο } (0,1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ισχύει } \eta\mu x < x \Rightarrow \\ \eta\mu 1 < 1 \Rightarrow 2\eta\mu 1 < 2 \Rightarrow \\ 2\eta\mu 1 - 3 < -1 < 0 \end{array} \right\}$$

Από θεώρημα Bolzano για την  $g$  έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0,1)$  ώστε  $g(\xi) = 0$ . Επομένως η αρχική εξίσωση  $f(x) = x - 1$  έχει τουλάχιστον μία λύση στο  $(0,1)$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \end{array} \right. \stackrel{(+)}{\Rightarrow} x_1^3 + 2x_1 + 1 < x_2^3 + 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε θα είναι και "1-1", άρα αντιστρέψιμη.

Αφού η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  έχουμε

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^{(*)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$(*) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το  $\mathbb{R}$  που είναι σύνολο τιμών της  $f$ .

**Δ2.**

Θα αποδείξουμε ότι:  $-1 < f^{-1}(0) < 0 \stackrel{(f \uparrow)}{\Leftrightarrow} f(-1) < f(f^{-1}(0)) < f(0) \Leftrightarrow -2 < 0 < 1$   
(ισχύει).

**Δ3.**

Για κάθε  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  θα αποδείξουμε ότι ισχύει:  $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$  (1)

- Αν  $x = x_0$  τότε προφανώς η (1) ισχύει σαν ισότητα.
- Αν  $x \neq x_0$  θέτουμε όπου  $x$  το  $f(x)$  και όπου  $x_0$  το  $f(x_0)$  και η σχέση (1) γράφεται.

$$|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))| \leq \frac{1}{2}|f(x) - f(x_0)| \Leftrightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{2}|f(x) - f(x_0)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{2}|x^3 + 2x + 1 - x_0^3 - 2x_0 - 1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x - x_0| \leq |(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) + 2(x - x_0)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x - x_0| \leq |x - x_0| |(x^2 + xx_0 + x_0^2) + 2| \stackrel{(x \neq x_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \left| \underbrace{x^2 + xx_0 + x_0^2}_{(A)} + 2 \right| \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι  $A = x^2 + xx_0 + x_0^2 > 0$  (τριώνυμο ως προς  $x$ ) για κάθε  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  με  $x \neq x_0$

Είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = x_0^2 - 4x_0^2 = -3x_0^2 \leq 0$$

Οπότε το τριώνυμο  $A$  είναι ομόσημο του  $\alpha=1>0$ . Άρα  $A>0$

Επομένως η σχέση (2) ισχύει.

**Δ4.**

Θα δείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$  για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$

Από το (Δ<sub>3</sub>) ερώτημα έχουμε:

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \Leftrightarrow -\frac{1}{2}|x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{1}{2}|x - x_0|\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{2}|x - x_0|\right) = 0$  από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0).$$

**Δ5.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f^{-1}(x) + x^3 + 1$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \\ x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1) + x_1^3 + 1 < f^{-1}(x_2) + x_2^3 + 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις συνεχών με

- $h(0) = f^{-1}(0) + 1 > 0$ , από το Δ<sub>2</sub>.
- $h(-1) = f^{-1}(-1) < f^{-1}(0) < 0$ , από το Δ<sub>2</sub>.

Οπότε  $h(-1) \cdot h(0) < 0$ , άρα από Θ. Bolzano υπάρχει  $\xi \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $h(\xi) = 0$  το οποίο είναι και μοναδικό αφού η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ6.**

i) Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  από το ερώτημα (Δ<sub>3</sub>) ισχύει:

$$|f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow |g(x_1) + x_1 - g(x_2) - x_2| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |g(x_1) - g(x_2) + (x_1 - x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow \frac{|g(x_1) - g(x_2) + (x_1 - x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} + 1 \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} + 1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \leq -\frac{1}{2}.$$

ii) Αφού  $-\frac{3}{2} \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  , για κάθε  $x_1 \neq x_2$  .

Αν  $x_1 < x_2$  , τότε  $g(x_1) - g(x_2) > 0 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$  που σημαίνει ότι η συνεχής συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα και 1-1, οπότε η εξίσωση  $g(x) = 0$  θα έχει το πολύ μία λύση.

iii) Έχουμε από το (Δ5) ότι  $f^{-1}(\xi) + \xi^3 + 1 = 0$  , οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} f^{-1}(-1 + \xi - g(2x + 1 - \eta\mu x)) &< -\xi^3 - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1 + \xi - g(2x + 1 - \eta\mu x)) < f^{-1}(\xi) \stackrel{f^{-1} \uparrow}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow -1 + \xi - g(2x + 1 - \eta\mu x) < \xi \Leftrightarrow g(2x + 1 - \eta\mu x) > -1 \stackrel{g(1) = -1}{\Leftrightarrow} \underset{(*)}{g(2x + 1 - \eta\mu x)} > g(1) \stackrel{g: \gamma\gamma. \phi\theta\acute{\iota}\nu\omicron\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 - \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 .$$

Γιατί:

Για κάθε  $x \neq 0$  έχουμε  $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x| \quad (1)$

Αν  $x > 0$  τότε η (1) γράφεται  $-x < \eta\mu x < x < 2x$  , άρα  $\eta\mu x - 2x < 0$  .

Αν  $x < 0$  τότε η (1) γράφεται  $x < \eta\mu x < -x$  και αφού  $2x < x$  , θα είναι  $2x < x < \eta\mu x < -x$  , άρα  $\eta\mu x - 2x > 0$  .

(\*) Για  $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$  και  $g(1) = f^{-1}(1) - 1 = -1$  .

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β' επιμελήθηκε ο **Ρουσσάλης Ηλίας**, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Το Θέμα Γ' επιμελήθηκε ο **Χήτος Γεώργιος**, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.

Το Θέμα Δ' επιμελήθηκε ο **Παντερής Ανδρέας**, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.