

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1^ο

A. α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x) = \cos x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

β) Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς σε ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει: $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Να δώσετε τον ορισμό: Πότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο A .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0) > 0$.

δ) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$.

στ) Αν η συνεχής συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a > 0$.

A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του a .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Για $a = 1$:

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ) Να αποδείξετε: ότι $(\sqrt{k})^{\sqrt{k+1}} > (\sqrt{k+1})^{\sqrt{k}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $k \geq 8$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 3ο

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = a + \beta i$ και $w = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$ με $f(\beta) \neq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $z_1 = \frac{1 + \beta - i \cdot z}{1 + f(\beta) - i \cdot w}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(a) = a$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Αν $z = -iw$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω ότι ισχύει $|z - iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) $a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(\alpha) \neq 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Οι εικόνες των z, w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x (t^2 + 1) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - 4 \int_0^1 x \cdot t \cdot f(x) dt \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \text{ με}$$

$$f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=a > 0$.

Αν το a μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{10}{3} \text{ cm/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(a)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $a = 3 \text{ cm}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x \rightarrow +\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να αποδείξετε ότι: $E \leq \ln 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

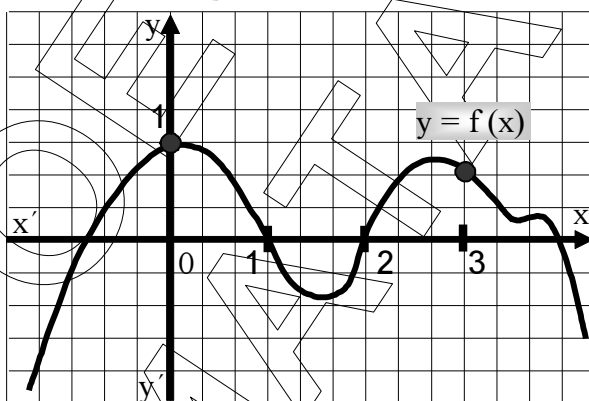
- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Β. Η συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με συνεχή δεύτερη παράγωγο.



Να βρείτε, αν η τιμή των ολοκληρωμάτων I_1 , I_2 , I_3 είναι θετική ή αρνητική.

$$I_1 = \int_0^3 f(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_2 = \int_0^3 f'(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

$$I_3 = \int_0^3 f''(x) dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$	α. $-\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$	β. 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	γ. 1
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$	δ. $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε, ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 2°.

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) - g'(x) = 1, \quad f'(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν στο όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου,

παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3°

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$, $\alpha > 0$ και τον μιγαδικό

$$z = g(x) + xi \text{ με } |\bar{z} + i| \leq |z - 1|.$$

A. Να αποδείξετε, ότι i) η g αντιστρέφεται και ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B. Να αποδείξετε, ότι:

α. $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. $\alpha = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

γ. $\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{\alpha + e^t} dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha + e^t} dt < \frac{1}{1+e}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 4°

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=1$ και

$$f'(x) = g^2(x) \neq 0, \quad f^2(x) + g^2(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

γ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, να δείξετε, ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 9

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\langle 1, 1 \rangle$ αν και μόνο αν για κάθε

$x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2)$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$

και $x = e^2$.

Μονάδες 10**Θέμα 3^ο**

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x - 1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός

$w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9**Θέμα 4^ο**

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = \frac{1}{2}$

και $e^x [f(x) + f'(x)] + \eta \mu x = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$f(x) + f(-x) = \sigma \upsilon \nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

A. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 11

β) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό ή Λάθος**.

α) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\llcorner 1 - 1 \gg$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x) \neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ , τότε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και $a < \beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

Μονάδες 5

β) Αν $|z|=1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, \beta]$ με $f(a) > 1$ και έστω $z = f(a) \cdot i$ και $w = f(\beta) \cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Μονάδες 7**Θέμα 3**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax - 1$ όπου $a > 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 8

γ) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x = a > 1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

Μονάδες 6

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και έστω

$$g(x) = \int_0^1 t \cdot f(xt) dt, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t \cdot f(t) dt$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

γ) $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

δ) Αν $\int_1^2 t \cdot f(t) dt = 3 \int_0^1 t \cdot f(t) dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε: $2g(\xi) = f(\xi)$.

Μονάδες 6



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1^ο

A. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq \kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in A$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f .
2. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.
4. Αν για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ , τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.
6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$.

Μονάδες 12

Θέμα 2°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a = 2$.

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Θέμα 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0.$$

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ και

$$z = a + i \cdot f(a), w = f(\beta) - \beta i \text{ τότε η εξίσωση } x \cdot f'(x) = f(x)$$

έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Μονάδες 7

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ όπου $t, x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g .

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{1+x^2} \leq g(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x) + g(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι $E = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις

ΟΕΦΕ 2007
ΘΕΜΑΤΑ



08
επαναληπτικά
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = vx^{v-1}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτίνων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β. Είναι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

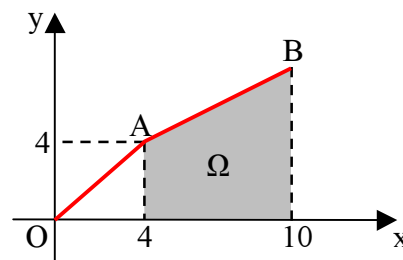
γ. Είναι: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

δ. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με $z_1 \neq z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος που η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα OA και AB . Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = 36$ τ.μ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:



α. $F(0) =$ β. $F(4) =$ γ. $F(10) =$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \lambda, & \text{αν } x > 0 \\ (\mu - 1)x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η f να είναι συνεχής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

δ. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. i. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{1+x-e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμψής της γραφικής της παράστασης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

γ. Να παραστήσετε γραφικά την f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = \ln \frac{1}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν:

$$\int_1^x f(t) dt - 2 = x \int_0^x g(t) dt \quad (1) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0 \quad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2g(0)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

β. $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. $\int_1^x f(t) dt \leq \int_1^0 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

δ. Η εξίσωση $f(x) = 2g(x) + 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2009 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 9

Β. α. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.

β. Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα $f(a)$ και $f(b)$.

δ. Για τις συναρτήσεις f, g που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[a,b]$ ισχύει:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b .$$

ε. Αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της συνάρτησης $f(x)$, η $f(x)=y$ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1 - 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in \mathbf{C}$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.

Μονάδες 4

β. $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbf{R}$.

Μονάδες 4

γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$.

Μονάδες 4

δ. αν $f(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0)-2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ και $f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0)=3x_0-2$.

Μονάδες 7

ε. αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w=2z_1+2z_2$ και A, B οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x+2+2\ln x$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 6

γ. Αν $g(x)=\frac{x \ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ ώστε: $g(x)\geq g(x_0)$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει: $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{e^x}$ και $f(1)=\frac{1}{e}$.

A. Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$.

Μονάδες 8

B. α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x=1$.

Μονάδες 2

β. Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$.

Μονάδες 7

Γ. Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τον x ' x και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t>1$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$.

Μονάδες 3



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία

παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Μονάδες 10)

B.1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

B.2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 2)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ αναγκαστικά $z_1 = z_2 = 0$.

β) Αν $g(x) \neq \alpha$ κοντά στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$ και $\lim_{y \rightarrow \alpha} f(y) = l$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l.$$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta)$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f'(\beta) = 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ και $f(x) \leq 0$ στο $[2, 5]$,

$$\text{τότε } \int_5^2 f(x)dx \geq 0.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z = \frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

- α) Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

(Μονάδες 6)

- β) Αν $|z|=1$ (1) και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha = \frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

(Μονάδες 7)

- ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

(Μονάδες 7)

- γ) Δίνεται η ευθεία (ε): $3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)**ΘΕΜΑ 3^ο**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x > 0$ ισχύουν $x f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

(Μονάδες 2)

- β) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(Μονάδες 5)

ε) Να εξετασθεί η h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε x_1, x_2 με $x_2 > x_1 > 0$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\int_3^x \left(\int_1^u f(t) dt \right) du \geq 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in R. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\int_1^3 f(t) dt = 2$.
(Μονάδες 7)

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η ευθεία $4x + y - 3 = 0$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4}$.
(Μονάδες 5)

γ) Αν για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $h(x) = \int_1^x f(t) dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}$.
(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + 3 = 2\xi$.
(Μονάδες 6)