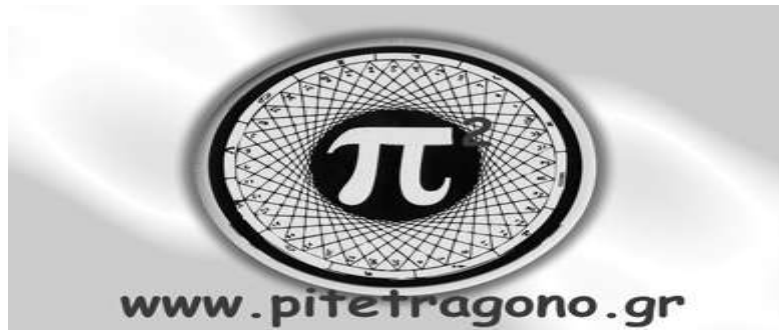




ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΥΛΗ : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1 – 1.3)

3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΙΘΑΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ & Δ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι "1-1".

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι "1-1".

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση : $g(f(x) + \ln x - 1) = g(f(x) - x)$

Γ3. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει : $f(e^{x-2}) = \frac{1}{e^{x-2}} - x + 2$, να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, με $x > 0$.

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{1}{x^2 + 5} - \frac{1}{2x^2 + 1} < \ln \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ είναι :

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \stackrel{f \circ g \text{ "1-1" }}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \text{ αρά η } g \text{ είναι "1-1"}$$

$$[* \ g(x_1), g(x_2) \in A_f = (0, +\infty)]$$

Γ2. $g(f(x) + \ln x - 1) = g(f(x) - x) \Leftrightarrow f(x) + \ln x - 1 = f(x) - x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0$.

Έστω $h(x) = \ln x + x - 1$, με $A_h = (0, +\infty)$, έχω να λύσω την εξίσωση : $h(x) = 0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1) = 0$ άρα η $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ (1)

Επίσης έστω $x_1, x_2 \in A_h$ με :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (3)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2), (3) και έχω :

$$\ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η $h \uparrow$ για κάθε $x \in A_h = (0, +\infty)$, οπότε η $x = 1 \in (0, +\infty)$ είναι και μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Γ3. Είναι : $f(e^{x-2}) = \frac{1}{e^{x-2}} - x + 2$ για κάθε $x > 0$. Θέτω $e^{x-2} = u$ με $u > 0$

Άρα : $e^{x-2} = u \Leftrightarrow \ln e^{x-2} = \ln u \Leftrightarrow (x-2) \ln e = \ln u \Leftrightarrow x-2 = \ln u \Leftrightarrow x = \ln u + 2$ με $u > 0$

Άρα $f(e^{x-2}) = \frac{1}{e^{x-2}} - x + 2 \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{e^{\ln u + 2 - 2}} - (\ln u + 2) + 2 \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{e^{\ln u}} - \ln u - 2 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{u} - \ln u, u > 0$ άρα τελικά : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, x > 0$.

Γ4. $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι έχω :

$$\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln(x^2+5) - \ln(2x^2+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+5} - \ln(x^2+5) < \frac{1}{2x^2+1} - \ln(2x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+5) < f(2x^2+1) \quad (4)$$

[για να ορίζεται η ανίσωση (4) πρέπει $\begin{cases} x^2+5 > 0 \\ 2x^2+1 > 0 \end{cases}$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η ανίσωση (4) ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$]

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \quad (5)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \quad (6)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (5) και (6) και έχω : $\frac{1}{x_1} - \ln x_1 > \frac{1}{x_2} - \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε :

$$f(x^2+5) < f(2x^2+1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+5 > 2x^2+1 \Leftrightarrow x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» .

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f(g(x) - x) - f(\ln x - 1) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αφού δείξετε ότι $g(x) = \ln x + x - 1$, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)$.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση : $g^{-1}(2g(|x| + 1) - 2e) = 1$

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Έχω : $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$ (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με :

$$\bullet \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \quad (2)$$

$$\bullet \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχω :

$$f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι «1-1» .}$$

$$\begin{aligned} \text{Γ2. } f(g(x) - x) - f(\ln x - 1) &= 0 \Leftrightarrow f(g(x) - x) = f(\ln x - 1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow g(x) - x = \ln x - 1 \Leftrightarrow g(x) = \ln x + x - 1 \text{ με } D_g = (0, +\infty) . \end{aligned}$$

Για τις ρίζες της $g(x) = \ln x + x - 1$:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0$, παρατηρώ ότι $g(1) = 0$ άρα η $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$. Θα δείξω τώρα ότι η g είναι γνησίως μονότονη ώστε να είναι και μοναδική.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με :

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (4)$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4), (5) έχω : $\ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_g = (0, +\infty)$ και άρα η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Για το πρόσημο της $g(x) = \ln x + x - 1$:

$$\text{Όταν : } x < 1 \stackrel{g \uparrow}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Rightarrow g(x) < 0$$

$$\text{Όταν : } x > 1 \stackrel{g \uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Γ3. Έχω να λύσω την εξίσωση :

$$g^{-1}(2g(|x|+1)-2e)=1 \Leftrightarrow g(g^{-1}(2g(|x|+1)-2e))=g(1) \Leftrightarrow 2g(|x|+1)-2e=0 \Leftrightarrow$$

$$2g(|x|+1)=2e \Leftrightarrow g(|x|+1)=e \stackrel{g(e)=\ln e+e-1 \Leftrightarrow g(e)=e}{\Leftrightarrow} \text{=====}$$

$$\Leftrightarrow g(|x|+1)=g(e) \stackrel{g \uparrow \Rightarrow g:1-1}{\Leftrightarrow} |x|+1=e \Leftrightarrow |x|=e-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=e-1 \\ \text{ή} \\ x=1-e \end{cases}$$

Γ4. Έχω να λύσω την ανίσωση :

$$x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3} \Leftrightarrow x^2 - 4 < \ln(x^2 + 7) - \ln(2x^2 + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 3) + 2x^2 + 3 < \ln(x^2 + 7) + x^2 + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 + 3) + 2x^2 + 3 - 1 < \ln(x^2 + 7) + x^2 + 7 - 1 \Leftrightarrow g(2x^2 + 3) < g(x^2 + 7) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3 < x^2 + 7 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Δ3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 - 2x) + f(x+2) = f(4x-4)$

Δ5. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ :

Δ1. Στη σχέση : $f(x-y) = f(x) - f(y)$ (1) που ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θέτω $x = y = 0$ και έχω : $f(0) = f(0) - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$, άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Στη σχέση : $f(x-y) = f(x) - f(y)$ θέτω $x = 0$ και έχω :
 $f(-y) = f(0) - f(y) \Leftrightarrow f(-y) = -f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι περιττή.

Δ3. Αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και από Δ1. $f(0) = 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

(επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$)

Άρα η f «1-1» και άρα f αντιστρέψιμη.

Δ4. Η εξίσωση $f(x^2 - 2x) + f(x+2) = f(4x-4)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι έχω :

$$\begin{aligned} f(x^2 - 2x) + f(x+2) &= f(4x-4) \Leftrightarrow f(x^2 - 2x) = f(4x-4) - f(x+2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow f(x^2 - 2x) = f(4x-4-x-2) \Leftrightarrow f(x^2 - 2x) = f(3x-6) \stackrel{f:1-1'}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Δ5. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$ όμως για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) > 0$

Άρα επειδή $x_1 - x_2 < 0$ είναι και $f(x_1 - x_2) > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.