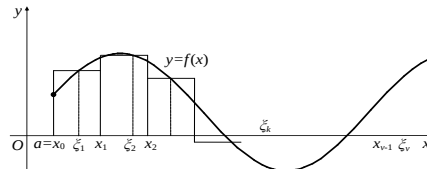


3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

63. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$

Απάντηση :

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$. Στη συνέχεια



επιλέγουμε αυθαίρετα ένα

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x.$$

Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k . Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β , συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β ”. Δηλαδή :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x \right)$$

Σχόλιο :

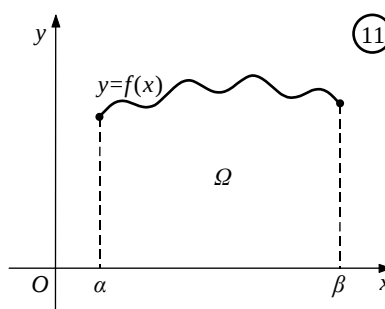
- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια “όρια” εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.
- Στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Γεωμετρική ερμηνεία ορισμένου ολοκληρώματος :

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega).$$

Επομένως,



$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

64. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι :

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f, g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

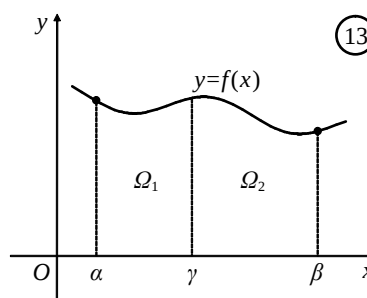
$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3 + 7 = 4.$$

Σημείωση :

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

αφού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$, $E(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

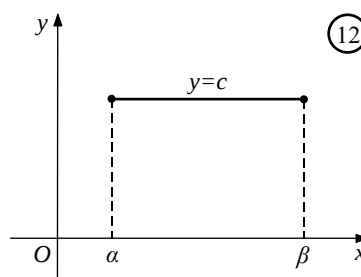
και $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.



δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ε) Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} cdx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).

Δηλ. $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$.



3.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

65. Έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ . Ποια είναι η σχέση της F με την f ;

Απάντηση :

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ .

66. ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)
(2002, 2008 Β', 2010, 2013)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε : $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε : $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

67. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση :

α) Ισχύει ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συμφώνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Θ.Ο.Λ) ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

I. $\int_{\alpha}^{\beta} 1dx = [x]_{\alpha}^{\beta}$

II. $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\kappa} dx = \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_{\alpha}^{\beta}$

III. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{\alpha}^{\beta}$

IV. $\int_{\alpha}^{\beta} e^x dx = [e^x]_{\alpha}^{\beta}$

V. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma υ ν x dx = [\eta μ x]_{\alpha}^{\beta}$

VI. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta μ x dx = [-\sigma υ ν x]_{\alpha}^{\beta}$

VII. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\alpha}^{\beta}$

VIII. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Αν $\int_1^5 f(x)dx = 2$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ και $\int_1^7 f(x)dx = 5$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_5^2 f(x)dx$

ii. $\int_5^7 f(x)dx$

iii. $\int_1^2 f(x)dx$

iv. $\int_2^7 f(x)dx$

Λύση :

i. $\int_5^2 f(x)dx = -\int_2^5 f(x)dx = -3$

ii. $\int_5^7 f(x)dx = \int_5^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = -2 + 5 = 3$

iii. $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx = 2 - 3 = -1$

iv. $\int_2^7 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = 3 - 2 + 5 = 6$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx$ ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx$ iii. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx$ iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} dx =$

Λύση :

i. $\int_1^3 (4x-3)dx = \left[4\frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 = [2x^2 - 3x]_1^3 = (18-9) - (2-3) = 9+1 = 10$

ii. $\int_2^3 (3x^2-2x+5)dx = \left[x^3 - x^2 + 5x \right]_2^3 = (27-9+15) - (8-4+10) = 33-14 = 19$

iii. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx = \int_0^1 (x^2e^x)'dx = [x^2e^x]_0^1 = e - 0 = e$

iv. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\eta\mu x)'x - \eta\mu x(x)'}{x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' dx = \left[\frac{\eta\mu x}{x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_5^7 f(x)dx = 2$ και $\int_3^7 f(x)dx = 3$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_7^5 f(x)dx$

ii. $\int_3^5 f(x)dx$

iii. $\int_5^1 f(x)dx$

4) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 x^4 dx$ ii. $\int_1^3 2x^3 dx$ iii. $\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$ iv. $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$ v. $\int_0^2 3\sqrt{x} dx$ vi. $\int_1^2 \sqrt[3]{x} dx$ vii. $\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

viii. $\int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} dx$ ix. $\int_1^2 (4x-1)dx$ x. $\int_0^{\pi} (2e^x + \eta\mu x)dx$ xi. $\int_1^e (2x \ln x + x)dx$ xii. $\int_0^1 (x - e^x)dx$

5) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1)dx$ ii. $\int_1^2 (t+1)dt$ iii. $\int_0^2 (x^2 + x + 2)dx$ iv. $\int_0^{\pi} (2x\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x)dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + 2\eta\mu x)dx$ vi. $\int_1^2 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2} dx$ vii. $\int_1^4 \frac{2x^2 - 2x - 3}{x} dx$ viii. $\int_0^2 (xe^x + e^x)dx$

ix. $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)dx$ x. $\int_1^4 (2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}})dx$ xi. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

1B. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει : $\int_{\alpha}^3 (3x^2 - \alpha x) dx = 14$.

Λύση :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^3 (3x^2 - \alpha x) dx = 14 &\Leftrightarrow \left[x^3 - \alpha \frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^3 = 14 \Leftrightarrow 27 - \alpha \frac{9}{2} - \left(\alpha^3 - \alpha \frac{\alpha^2}{2} \right) = 14 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 27 - \frac{9\alpha}{2} - \alpha^3 + \frac{\alpha^3}{2} = 14 \Leftrightarrow 54 - 9\alpha - 2\alpha^3 + \alpha^3 = 28 \Leftrightarrow \alpha^3 + 9\alpha - 26 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2 \\ \text{ή} \\ \alpha^2 + 2\alpha + 13 = 0 \quad \text{αδύνατη} \end{cases} . \text{ Άρα } \alpha = 2 . \end{aligned}$$

7) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει

$$f(0) = \frac{1}{2} . \text{ Να υπολογίσετε την παράσταση : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{f(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx .$$

Λύση :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{f(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu x}{f(x)} + \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta\mu x \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(-\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(- \frac{(\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f(x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right)' dx = - \left[\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= - \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{f(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 . \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε να ισχύει : $\int_2^{\kappa} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} dx - \int_{\kappa}^2 \frac{9 - x^2}{x^2 + 4} dx = 12$

9) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε να ισχύει :

$$\int_1^3 \frac{e^x + x^3 - x}{x^2 + 1} dx = \int_3^1 \kappa dx + \int_3^1 \frac{x^3 + 3x - e^x}{x^2 + 1} dx$$

10) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να ισχύει : $\int_{-1}^{\alpha} (\alpha x + 3) dx = 12$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12$, ενώ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = 2x + 2$. Να βρείτε τα α, β, γ .

12) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει :

$$f(1) = 5 \text{ και } \int_1^2 (xf'(x) + f(x)) dx = 1. \text{ Να βρείτε :}$$

i. την τιμή $f(2)$

ii. το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2 (3f(x) + xf'(x)) dx$

13) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει :

$$f'(1) + f(1) = 0 \text{ και } \int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} dx = 2. \text{ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της } C_f \text{ στο σημείο της } M(0, -5).$$

1Γ. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^2 f(t) \sigma \nu \iota x dt \right) dx = 2$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 f(t) dt$

ii. $\int_{-2}^0 \left(\int_1^2 3t^2 f(x) dx \right) dt$

Λύση :

i. Έχω $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^2 f(t) \sigma \nu \iota x dt \right) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma \nu \iota x \left(\int_1^2 f(t) dt \right) dx = 2 \quad (1)$

Έστω $\int_1^2 f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$ τότε : Η (1) γίνεται : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sigma \nu \iota x \left(\int_1^2 f(t) dt \right) dx = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \lambda \sigma \nu \iota x dx = 2 \Leftrightarrow [\lambda \eta \mu \iota x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \Leftrightarrow \lambda \eta \mu \pi - \lambda \eta \mu \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow -\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Δηλ. $\int_1^2 f(t) dt = -2$.

ii. $\int_{-2}^0 \left(\int_1^2 3t^2 f(x) dx \right) dt = \int_{-2}^0 3t^2 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt \stackrel{i.}{=} \int_{-2}^0 3t^2 \cdot (-2) dt = - \int_{-2}^0 6t^2 dt = [-2t^3]_{-2}^0 = -16$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i. Αν ισχύει ότι : $\int_1^2 t^2 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt = 14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x) dx$

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x) dx = 2$, τότε να βρείτε το : $\int_0^3 \left(\int_1^2 f(t) g(x) dt \right) dx$

16) Αν ισχύει ότι $\int_4^5 f(x) dx = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3 \left(\int_4^5 x f(t) dt \right) dx$

17) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1 = \int_1^2 \left(\int_3^x 4 dt \right) dx$ και $I_2 = \int_{-1}^2 \left(\int_1^x 6t^2 dt \right) dx$.

18) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x) f(y) dy \right) dx - 6 \int_0^1 f(x) dx = -9. \text{ Να βρείτε τα ολοκληρώματα :}$$

i. $\int_0^1 f(x) dx$

ii. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^1 f(t) \sin 3x dt \right) dx$

1Δ. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

19) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$. (4^ο 2008)

Λύση : Έστω $\int_0^2 f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)\lambda - 45$

$$\text{Άρα } \int_0^2 f(x) dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^2 [(10x^3 + 3x)\lambda - 45] dx = \lambda \Leftrightarrow \lambda \left[\frac{5x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 - 45[x]_0^2 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 46\lambda - 90 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2. \text{ Άρα } f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

20) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 12x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

21) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 2xf(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

1Ε. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Όταν έχουμε μια συνάρτηση της μορφής : $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \leq x_0 \\ f_2(x), & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$ τότε για να

υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ με $\alpha < x_0 < \beta$, εργαζόμαστε ως εξής :

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0 , καθώς για να έχει νόημα το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα και στο x_0 . Στη συνέχεια έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{x_0} f_1(x)dx + \int_{x_0}^{\beta} f_2(x)dx = \dots$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \eta\mu x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Λύση :

Για $x < 0$ η $f(x) = x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική,

Για $x > 0$ η $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική,

Στο $x_0 = 0$ είναι : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ και $f(0) = 0$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ επομένως η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και στο $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι : } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^0 f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^0 xdx + \int_0^{\pi} \eta\mu xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 = 2 - \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x^2 - 6x + 8, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

1ΣΤ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Συνήθως συναντάμε τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$. Αρχικά λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$, βρίσκουμε το πρόσημο της f (με πινακάκι), βγάζουμε την απόλυτη τιμή, αν είναι απαραίτητο χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

25) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx$

Λύση :

$$\int_0^2 (x^2 - |x-1|) dx$$

Έχω : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

$$\text{Άρα : έστω } f(x) = x^2 - |x-1| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x < 1 \\ x^2 - x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, καθώς από την αρχική της μορφή η $f(x) = x^2 - |x-1|$, είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \left(\frac{8}{3} - 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

26) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\text{i. } \int_0^{10} |x+1| dx \quad \text{ii. } \int_{-2}^2 |3x^2 - 3| dx \quad \text{iii. } \int_1^4 |3x - x^2| dx \quad \text{iv. } \int_1^3 |\ln x| dx \quad \text{v. } \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\begin{aligned}
 \text{I. } & \int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)} f'(x) dx = \left[e^{f(x)} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 \text{II. } & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \left[2\sqrt{f(x)} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 \text{III. } & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln|f(x)| \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 \text{IV. } & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \left[-\frac{1}{f(x)} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 \text{V. } & \int_{\alpha}^{\beta} f^{\kappa}(x) f'(x) dx = \left[\frac{(f(x))^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_{\alpha}^{\beta}
 \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν το ολοκλήρωμα μας θυμίζει κάποια από τις παραπάνω μορφές ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε απευθείας τον αντίστοιχο τύπο. Συνήθως όμως οι συναρτήσεις μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ίδιες. Τότε φτιάχνουμε την $f'(x)$ με κάποια απλή πράξη (π.χ. πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με ένα αριθμό) ώστε να αναχθούμε σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned}
 \text{i. } & \int_0^1 3x^2 e^{x^3+5} dx & \text{ii. } & \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx & \text{iii. } & \int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx \\
 \text{iv. } & \int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} dx & \text{v. } & \int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5 dx
 \end{aligned}$$

Λύση :

$$\begin{aligned}
 \text{i. } & \int_0^1 3x^2 e^{x^3+5} dx = \int_0^1 (x^3+5)' e^{x^3+5} dx = \int_0^1 (e^{x^3+5})' dx = \left[e^{x^3+5} \right]_0^1 = e^6 - e^5 \\
 \text{ii. } & \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^1 (2\sqrt{x^3+1})' dx = \left[2\sqrt{x^3+1} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 \\
 \text{iii. } & \int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+5x+1)'}{x^2+5x+1} dx = \int_0^1 (\ln|x^2+5x+1|)' dx = \left[\ln|x^2+5x+1| \right]_0^1 = \ln 7 \\
 \text{iv. } & \int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} dx = \int_1^2 \frac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2+2x} \right)' dx = \left[-\frac{1}{x^2+2x} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{5}{24} \\
 \text{v. } & \int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5 dx = \int_0^3 (x^2-3x)' (x^2-3x)^5 dx = \int_0^3 \left(\frac{(x^2-3x)^6}{6} \right)' dx = \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6} \right]_0^3 = 0
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

- i. $\int_0^1 2xe^{x^2+1} dx$ ii. $\int_0^2 x^2 e^{x^3+1} dx$ iii. $\int_0^1 2e^{2x} dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ v. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx$
 vi. $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx$ vii. $\int_0^1 \frac{4}{2x+1} dx$ viii. $\int_1^3 \frac{1}{3x-2} dx$ ix. $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2} dx$ x. $\int_1^2 \frac{4}{(2x+1)^2} dx$
 xi. $\int_{-1}^0 (x+1)^9 dx$ xii. $\int_0^3 (x-1)^5 dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3Α : ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις στο $[a, \beta]$

Για να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, πρέπει το ολοκλήρωμα να έχει τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx$ ή να το φέρουμε εμείς στη μορφή αυτή (η προς ολοκλήρωση συνάρτηση να μπορεί να πάρει τη μορφή γινομένου δυο συναρτήσεων) και στη συνέχεια η μια από τις δυο συναρτήσεις να γραφεί με τη μορφή παραγώγου. Ουσιαστικά χρειαζόμαστε την παράγουσα μιας εκ των δυο συναρτήσεων ώστε το ολοκλήρωμα να πάρει την επιθυμητή μορφή. Με παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίζονται ολοκληρώματα της μορφής :

1^η Περίπτωση : $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot e^{kx+\lambda} dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{kx+\lambda}$

2^η Περίπτωση : $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \eta\mu(kx) dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(kx) dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $\eta\mu(kx)$ και της $\sigma\upsilon\nu(kx)$ αντίστοιχα.

3^η Περίπτωση : $\int_{\alpha}^{\beta} P(x) \cdot \ln f(x) dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $P(x)$.

4^η Περίπτωση : $\int_{\alpha}^{\beta} e^{kx+\lambda} \cdot \eta\mu(\gamma x) dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} e^{kx+\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x) dx$ εδώ χρησιμοποιούμε την παράγουσα της $e^{kx+\lambda}$. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζεται η ιδιομορφία ότι κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εμφανίζεται σε κάποιο στάδιο ξανά το αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι θέτουμε το αρχικό ολοκλήρωμα με ένα γράμμα π.χ. I και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς I.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

29) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 x e^x dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx$

Λύση :

i. $\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$

ii. $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = - \int_0^1 x^2 (e^{-x})' dx = - [x^2 e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (x^2)' e^{-x} dx =$
 $= -(e^{-1}) + \int_0^1 2x e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - \int_0^1 2x (e^{-x})' dx = -\frac{1}{e} - [2x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (2x)' e^{-x} dx =$
 $= -\frac{1}{e} - (2e^{-1}) + \int_0^1 2e^{-x} dx = -\frac{3}{e} - [2e^{-x}]_0^1 = -\frac{3}{e} - (2e^{-1} - 2) = 2 - \frac{5}{e}$

30) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi 2x \eta \mu 2x dx$

Λύση : $\int_0^\pi 2x \eta \mu 2x dx = \int_0^\pi 2x \left(-\frac{\sigma \upsilon \nu 2x}{2} \right)' dx = \left[-2x \frac{\sigma \upsilon \nu 2x}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x)' \left(-\frac{\sigma \upsilon \nu 2x}{2} \right) dx =$
 $= [-x \sigma \upsilon \nu 2x]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \left(-\frac{\sigma \upsilon \nu 2x}{2} \right) dx = (-\pi \sigma \upsilon \nu 2\pi) + \int_0^\pi \sigma \upsilon \nu 2x dx = -\pi + \left[\frac{\eta \mu 2x}{2} \right]_0^\pi =$
 $= -\pi + \frac{\eta \mu 2\pi}{2} - \frac{\eta \mu 0}{2} = -\pi$

31) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 (3x^2 + 1) \ln x dx$ ii. $\int_1^e \ln x dx$

Λύση :

i. $\int_1^2 (3x^2 + 1) \ln x dx = \int_1^2 (x^3 + x)' \ln x dx = [(x^3 + x) \ln x]_1^2 - \int_1^2 (x^3 + x) (\ln x)' dx =$
 $= 10 \ln 2 - \int_1^2 (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = 10 \ln 2 - \int_1^2 (x^2 + 1) dx = 10 \ln 2 - \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_1^2 = 10 \ln 2 - \left(\frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 \right) =$
 $= 10 \ln 2 - \frac{10}{3}$

ii. $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e 1 dx =$
 $e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$

32) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$

Λύση : Έχω : $I = \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = \int_0^\pi (e^x)' \eta \mu x dx = [e^x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (\eta \mu x)' dx =$
 $= e^\pi \eta \mu \pi - e^0 \eta \mu 0 - \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x dx = - \int_0^\pi (e^x)' \sigma \upsilon \nu x dx = - [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x (\sigma \upsilon \nu x)' dx =$
 $= -(e^\pi \sigma \upsilon \nu \pi - e^0 \sigma \upsilon \nu 0) + \int_0^\pi e^x (-\eta \mu x) dx = -(-e^\pi - 1) - \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx = e^\pi + 1 - I$

Άρα : $I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi + 1}{2}$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

33) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_0^1 2xe^x dx$ ii. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ iii. $\int_0^1 3xe^x dx$ iv. $\int_1^2 (x+1)e^x dx$ v. $\int_0^2 (1-3x)e^x dx$
vi. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ vii. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ viii. $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$

34) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\pi} x \eta\mu 2x dx$ iv. $\int_0^{\pi} 2x^2 \eta\mu 2x dx$

35) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_1^2 x \ln x dx$ β. $\int_1^2 x \ln 2x dx$ γ. $\int_1^2 2x^2 \ln x dx$ δ. $\int_1^2 (3x^2 - 4x) \ln x dx$

36) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ β. $\int_0^{\pi} e^{2x} \sigma\upsilon\nu x dx$ γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu 2x dx$ δ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$

3Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει :

$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = 2$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\pi, f(\pi))$

έχει εξίσωση : $2x - \pi y - \pi = 0$. Να βρείτε :

- i. τις τιμές $f(\pi)$, $f'(\pi)$ και $f(0)$
ii. το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\pi} x f''(x) dx$

Λύση :

- i. Η ευθεία $(\varepsilon) : 2x - \pi y - \pi = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = \frac{2}{\pi}x - 1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο

σημείο της $M(\pi, f(\pi))$ αν :
$$\begin{cases} f'(\pi) = \frac{2}{\pi} \\ f(\pi) = \frac{2}{\pi}\pi - 1 \Leftrightarrow f(\pi) = 1 \end{cases}$$

Επίσης :

1^{ος} τρόπος : $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} (f(x) \eta\mu x + f''(x) \eta\mu x) dx = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta\mu x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta\mu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) (\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \eta\mu x dx + 0 - \int_0^{\pi} f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - [f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος :

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\eta\mu x dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^\pi (f(x)\eta\mu x + f''(x)\eta\mu x) dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)(\eta\mu x)' dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [-f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x) dx + [f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0] - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0) + \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int_0^\pi x f''(x) dx &= [x f'(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' f'(x) dx = \pi f'(\pi) - 0 - \int_0^\pi f'(x) dx = \pi \frac{2}{\pi} - [f(x)]_0^\pi = \\ &= 2 - f(\pi) + f(0) = 2 - 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

38) Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, με $F(1) = 0$. Να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 F(x) dx$. **(Ολοκλήρωμα Παράγουσας F)**

Λύση :

Είναι : $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } I &= \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (x)' F(x) dx = [x F(x)]_0^1 - \int_0^1 x F'(x) dx = F(1) - \int_0^1 x f(x) dx = \\ &= 0 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = - \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = - \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει

$$f(1) = 5 \text{ και } \int_0^1 f(x) dx = 2. \text{ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : } I = \int_0^1 x f'(x) dx$$

40) Έστω οι συναρτήσεις f, g , με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

$$I = \int_\alpha^\beta (f(x)g''(x) - f''(x)g(x)) dx = g'(\beta)(f(\beta) - g(\beta)).$$

41) Έστω F μια παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, με $F(1) = 0$. Να

$$\text{υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : } I = \int_0^1 F(x) dx.$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

42) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $A(1,2)$ και $B(3,9)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(4,11)$. Να βρείτε :

- i. τις τιμές $f'(1), f'(3)$ ii. το ολοκλήρωμα : $\int_1^3 x f''(x) dx$

43) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει :

$\int_1^3 \int_0^2 x f(t) dt dx = 12$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση : $2x - y - 3 = 0$. Να υπολογίσετε :

- i. τις τιμές $f(2), f'(2)$ ii. το $\int_0^2 f(x) dx$ iii. το $\int_0^2 x^2 f''(x) dx$

44) Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \ln x^3 dx$ με $\lambda > 0$

- i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$.

45) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

46) Δίνεται το ολοκλήρωμα : $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx$ με $\lambda > 1$

- i. Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$ ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

3Γ. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

47) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_{\nu} = \int_0^1 x^{\nu} \cdot e^x dx$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- i. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu} = e - \nu \cdot I_{\nu-1}$ για κάθε $\nu \geq 2$.
ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 x e^x dx$ και $\int_0^1 x^4 e^x dx$

48) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_{\nu} = \int_0^{\pi} x^{\nu} \cdot \sigma \nu \kappa dx$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- i. Να αποδείξετε ότι $I_{\nu} = -\nu \pi^{\nu-1} - \nu(\nu-1) I_{\nu-2}$ για κάθε $\nu \geq 4$.
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} x^5 \cdot \sigma \nu \kappa dx$

49) Αν $I_{\nu} = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2} dt$, $\nu \in \mathbb{N}$,

- i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_{\nu} + I_{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$
ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2 .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

➤ **1^ηπεριπτωση** : Αν $P(x) = \mu Q'(x)$ τότε : $I = \mu [\ln|Q(x)|]_{\alpha}^{\beta}$

➤ **2^ηπεριπτωση** : Αν Βαθμός $P(x) <$ Βαθμός $Q(x)$ τότε :

✓ Αν Βαθμός $P(x) = 0$ και Βαθμός $Q(x) = 1$ έχουμε : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mu}{\alpha x + \beta} dx = \frac{\mu}{\alpha}$

$$[\ln|\alpha x + \beta|]_{\alpha}^{\beta}$$

✓ Αν Βαθμός $P(x) = 1$ και Βαθμός $Q(x) = 2$ με $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $\alpha \neq 0$,

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \text{ τότε : } I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\kappa x + \lambda}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\kappa x + \lambda}{(\alpha_1 x - x_1)(\alpha_2 x - x_2)} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{(\alpha_1 x - x_1)} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B}{(\alpha_2 x - x_2)} dx$$

➤ **3^ηπεριπτωση** : Αν Βαθμός $P(x) \geq$ Βαθμός $Q(x)$ τότε εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση $P(x) : Q(x)$ και έτσι έχουμε : $P(x) = Q(x) \cdot \Pi(x) + \nu(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

50) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\text{i. } \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{5}{3x+2} dx \quad \text{iii. } \int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx \quad \text{iv. } \int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6} dx$$

Λύση :

$$\text{i. } \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+3)'}{x^2+x+3} dx = [\ln|x^2+x+3|]_0^1 = \ln 5 - \ln 3 = \ln \frac{5}{3}$$

$$\text{ii. } \int_0^1 \frac{5}{3x+2} dx = 5 \int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \int_0^1 \frac{(3x+2)'}{3x+2} dx = \frac{5}{3} [\ln|3x+2|]_0^1 = \frac{5}{3} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{5}{3} \ln \frac{5}{2}$$

$$\text{iii. } \int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$$

$$\text{Έχω } \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x-3) + B(x-2) \Leftrightarrow$$

$$2x+1 = Ax - 3A + Bx - 2B \Leftrightarrow 2x+1 = (A+B)x - 3A - 2B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+3B=6 \\ -3A-2B=1 \end{cases}$$

$$\text{άρα } B=7 \text{ και } A+7=2 \Leftrightarrow A=-5$$

Άρα

$$\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx = \int_4^5 \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} dx =$$

$$\int_4^5 \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3} \right) dx = -5 [\ln|x-2|]_4^5 + 7 [\ln|x-3|]_4^5 =$$

$$-5(\ln 3 - \ln 2) + 7(\ln 2 - \ln 1) = -5 \ln 3 + 5 \ln 2 + 7 \ln 2 = 12 \ln 2 - 5 \ln 3$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iv. $\int_4^5 \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx$

Εκτελούμε τη διαίρεση : $(x^2 - 3x + 7) : (x^2 - 5x + 6)$ και έχω :

$$x^2 - 3x + 7 = 1 \cdot (x^2 - 5x + 6) + 2x + 1.$$

Έτσι : $\int_4^5 \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_4^5 \frac{1 \cdot (x^2 - 5x + 6) + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_4^5 \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx + \int_4^5 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx =$
 $= \int_4^5 1 dx + \int_4^5 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx \stackrel{i.}{=} [x]_4^5 + 12 \ln 2 - 5 \ln 3 = 1 + 12 \ln 2 - 5 \ln 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} dx$ ii. $\int_1^2 \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx$ iii. $\int_2^3 \frac{2}{x - 1} dx$ iv. $\int_1^2 \frac{4}{5x + 1} dx$

52) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_3^4 \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx$ ii. $\int_{-1}^0 \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} dx$ iii. $\int_4^5 \frac{2}{x^2 - 1} dx$ iv. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

53) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_1^2 \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx$ ii. $\int_3^4 \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx$ iii. $\int_1^4 \frac{x}{x + 2} dx$ iv. $\int_0^1 \frac{2x}{3x + 1} dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ όπου $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι συνεχής συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ :

- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} (\alpha x + \beta)^{\nu} \cdot (\gamma x + \delta)^{\mu} dx$, $\nu \geq \mu$, θέτουμε $u = \alpha x + \beta$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt[n]{g(x)}) dx$, θέτουμε $u = \sqrt[n]{g(x)}$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt[n_1]{\alpha x + \beta}, \sqrt[n_2]{\alpha x + \beta}) dx$, θέτουμε $u = \sqrt[n]{\alpha x + \beta}$ όπου $\nu = \text{ΕΚΠ}(\nu_1, \nu_2)$
- Αν $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f(e^{ax}) dx$ θέτουμε $u = e^{ax}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

i. $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx$ ii. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ iii. $\int_1^{64} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$ iv. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} - 2}{e^x + 1} dx$

Λύση :

i. $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx$ θέτω $u = x+2$ άρα $du = dx$

Για $x = -2$ είναι $u = 0$

Για $x = -1$ είναι $u = 1$

Άρα : $\int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx = \int_0^1 (x-1)u^4 du \stackrel{u=x+2 \Leftrightarrow x=u-2}{=} \int_0^1 (u-2-1)u^4 du = \int_0^1 (u^5 - 3u^4) du =$
 $= \left[\frac{u^6}{6} - 3\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = -\frac{13}{30}$

ii. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ θέτω $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow u^2 = x+1$ άρα $2udu = dx$

Για $x = 0$ είναι $u^2 = 1 \Leftrightarrow u = 1$ ($u = \sqrt{x+1}$ άρα $u \geq 0$)

Για $x = 3$ είναι $u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 2$

Άρα : $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{x}{u} 2udu = \int_1^2 2x du \stackrel{u^2=x+1 \Leftrightarrow x=u^2-1}{=} \int_1^2 2(u^2-1) du = 2 \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_1^2 = \frac{8}{3}$.

iii. $\int_1^{64} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$ θέτω $u = \sqrt[6]{x}$ άρα $u^3 = \sqrt{x}$, $u^2 = \sqrt[3]{x}$ και $u^6 = x$ άρα $6u^5 du = dx$
 Για $x = 1$ είναι $u = 1$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Για $x = 64$ είναι $u = 2$

$$\begin{aligned}\text{Άρα : } \int_1^{64} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{u^6 + u^2}{u^3} 6u^5 du = \int_1^2 6u^2 (u^6 + u^2) du = \int_1^2 (6u^8 + 6u^4) du = \\ &= 6 \left[\frac{u^9}{9} + \frac{u^5}{5} \right]_1^2 = \frac{5668}{12}\end{aligned}$$

iv. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} - 2}{e^x + 1} dx$ θέτω $u = e^x$ άρα $du = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \ln 3$ είναι $u = e^{\ln 3} = 3$

$$\text{Άρα : } \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} - 2}{e^x + 1} dx = \int_1^3 \frac{u^2 - 2}{u + 1} \frac{du}{e^x} = \int_1^3 \frac{u^2 - 2}{u + 1} \frac{du}{u} = \int_1^3 \frac{u^2 - 2}{u^2 + u} du$$

Εκτελώ τη διαίρεση : $(u^2 - 2) : (u^2 + u)$ και έχω : $u^2 - 2 = 1(u^2 + u) - u - 2$

$$\begin{aligned}\text{Άρα : } I &= \int_1^3 \frac{u^2 - 2}{u^2 + u} du = \int_1^3 \frac{u^2 + u - u - 2}{u^2 + u} du = \int_1^3 \frac{u^2 + u}{u^2 + u} du - \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du = \\ &= \int_1^3 1 du - \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du = \\ &= [u]_1^3 - \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du = 2 - \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du\end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du$ έχω :

$$\frac{u + 2}{u(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 1} \Leftrightarrow u + 2 = A(u + 1) + Bu \Leftrightarrow u + 2 = (A + B)u + A \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα : } I_2 &= \int_1^3 \frac{u + 2}{u^2 + u} du = \int_1^3 \frac{u + 2}{u(u + 1)} du = \int_1^3 \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) du = [2 \ln |u|]_1^3 - [\ln |u + 1|]_1^3 = \\ &= 2 \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln 9 + \ln 2 - \ln 4 = \ln \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Τελικά : } I = 2 - I_2 = 2 - \ln \frac{9}{2}.$$

55) (Συνδυαστικό παραγοντικής – αλλαγής μεταβλητής)

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 x \ln(9 + x^2) dx$.

Λύση :

$$\int_0^1 x \ln(9 + x^2) dx \quad \text{θέτω } u = 9 + x^2 \quad \text{άρα } du = 2x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Για $x = 0$ είναι $u = 9$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } u = 10 \quad \text{άρα έχω : } \int_0^1 x \ln(9 + x^2) dx = \int_9^{10} x \ln u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int_9^{10} \ln u du =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \int_9^{10} (u)' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_9^{10} - \frac{1}{2} \int_9^{10} u (\ln u)' du = \frac{1}{2} (10 \ln 10 - 9 \ln 9) - \frac{1}{2} \int_9^{10} 1 du = \\ &= \frac{1}{2} (10 \ln 10 - 9 \ln 9) - \frac{1}{2} [u]_9^{10} = \frac{1}{2} (10 \ln 10 - 9 \ln 9) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

56) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \text{i. } \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx & \quad \text{ii. } \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx & \quad \text{iii. } \int_0^1 (x+2)(x-1)^5 dx & \quad \text{iv. } \int_0^\pi \sin 3x dx \\ \text{v. } \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx & \quad \text{vi. } \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx & \quad \text{vii. } \int_{-1}^2 x e^{x^2+1} dx & \quad \text{viii. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin(\eta \mu x) dx \end{aligned}$$

57) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \text{i. } \int_1^2 x\sqrt{x^2+1} dx & \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx & \quad \text{iii. } \int_0^\pi \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) dx & \quad \text{iv. } \int_0^1 x(x^2-1)^{99} dx \\ \text{v. } \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx & \quad \text{vi. } \int_0^1 \frac{x^2-2}{(x^3-6x+1)^2} dx & \quad \text{vii. } \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx & \quad \text{viii. } \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx \end{aligned}$$

58) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \text{i. } \int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} dx & \quad \text{ii. } \int_0^1 e^{2x} \sin e^x dx & \quad \text{iii. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{\eta \mu x} dx & \quad \text{iv. } \int_0^\pi \frac{\eta \mu 2x}{\sin^2 x + 1} dx \\ \text{v. } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx & \quad \text{vi. } \int_0^1 2x(x^2+1)^2 dx & \quad \text{vii. } \int_0^1 x \ln(9+x^2) dx & \quad \text{viii. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu 2x}{\eta \mu x + 1} dx & \quad \text{ix. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu 4x dx \\ \text{x. } \int_1^2 \varepsilon \phi x \cdot \ln(\sin x) dx & \quad \text{xi. } \int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx & \quad \text{xii. } \int_1^{e^\pi} \frac{\eta \mu(\ln x)}{x} dx & \quad \text{xiii. } \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx \end{aligned}$$

59) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \text{i. } \int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx & \quad \text{ii. } \int_0^{\pi/2} [\eta \mu(\sin x + x) \eta \mu x - \eta \mu(\sin x + x)] dx & \quad \text{iii. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta \mu x} \cdot \eta \mu 2x dx . \end{aligned}$$

60) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\int_1^9 f(x) dx = 6$. Να υπολογίσετε το $I = \int_2^3 x f(x^2) dx$.

61) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty)$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(3,9). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_1^3 \frac{4f'(x)}{f^2(x) + 2f(x) - 3} dx$.

62) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(0,1). Αν ισχύει : $\int_0^2 (x f''(x) + 3f'(x)) dx = 6$ τότε :

- Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- Να βρείτε το $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x) + 2f(x)} dx$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, ώστε $f'(\xi) = 1$.

5B. ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $x = \alpha + \beta - u$

Αν έχουμε ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ το οποίο δεν υπολογίζεται με κάποια από τις γνωστές μεθόδους, τότε ίσως μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση : $x = \alpha + \beta - u$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα

ολοκληρώματα : i. $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ ii. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\chi x + 1}\right) dx$

Λύση :

Στο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ θέτω $x = \alpha + \beta - u$, άρα $dx = (\alpha + \beta - u)' du \Leftrightarrow dx = -du$

Για $x = \alpha$ είναι $\alpha = \alpha + \beta - u \Leftrightarrow u = \beta$

Για $x = \beta$ είναι $\beta = \alpha + \beta - u \Leftrightarrow u = \alpha$

Άρα : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(\alpha + \beta - u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx$

i. Στο $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ θέτω $x = -1 + 1 - u \Leftrightarrow x = -u$, άρα $dx = -du$

Για $x = -1$ είναι $u = 1$

Για $x = 1$ είναι $u = -1$

Άρα : $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \int_1^{-1} \frac{(-u)^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2}{\frac{1}{e^u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2 e^u}{e^u + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx$

Έτσι : $I_1 + I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow 2I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^2 e^x}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x^2(e^x + 1)}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow 2I_1 = \int_{-1}^1 x^2 dx \Leftrightarrow 2I_1 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{3}$

ii. Στο $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\chi x + 1}\right) dx$ θέτω $x = 0 + \frac{\pi}{2} - u \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$, άρα $dx = -du$

Για $x = 0$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0$

Άρα : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\chi x + 1}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 1}{\sigma\upsilon\chi\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 1}\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\chi u + 1}{\eta\mu u + 1}\right) du =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\chi x + 1}{\eta\mu x + 1}\right) dx$

Έτσι : $I_2 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\chi x + 1}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\chi x + 1}{\eta\mu x + 1}\right) dx \Leftrightarrow$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}\right)^{-1} dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}\right) dx \Leftrightarrow 2I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

64) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

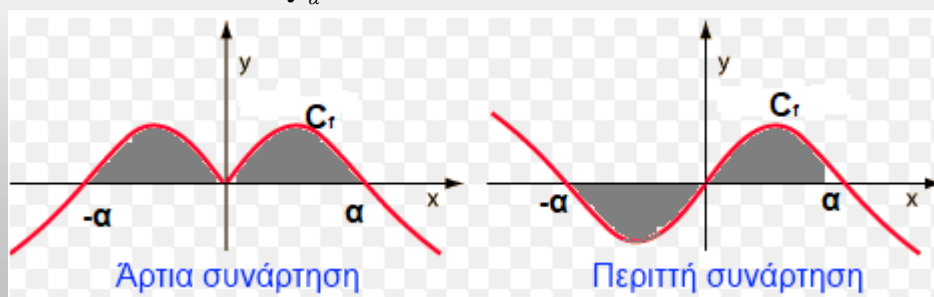
i. $\int_{-1}^1 \frac{x^4 + e^x}{e^x + 1} dx$ ii. $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\varepsilon\phi^3 x + 1} dx$

5Γ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΡΤΙΑΣ – ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η ολοκλήρωση σε συμμετρικό διάστημα : $[-\alpha, \alpha]$, $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$, δηλ. το ολοκλήρωμα έχει **αντίθετα άκρα**.

Θα αποδείξουμε ότι :

- Αν η f είναι άρτια, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$
- Αν η f είναι περιττή, τότε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

- i. Αν η f είναι περιττή, τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- ii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $\int_{-1}^1 \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{1 + x\eta\mu x} dx$

Λύση :

- i. Η $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, άρα για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x) = -f(x)$

Στο $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$, θέτω $x = -u$, άρα $dx = -du$

Για $x = -\alpha$ είναι $u = \alpha$

Για $x = \alpha$ είναι $u = -\alpha$

$$\text{Έτσι : } I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u) du = \int_{\alpha}^{-\alpha} -f(u) du = -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(u) du = -\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = -I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0 \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

ii. Έστω $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{1+x\eta\mu x}$, με $x \in [-1,1]$. Για κάθε $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)}{1-x\eta\mu(-x)} = \frac{\ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)}{1+x\eta\mu x} = \\ &= \frac{\ln 1 - \ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{1+x\eta\mu x} = -f(x), \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή} \end{aligned}$$

$$\text{οπότε από i. } \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{1+x\eta\mu x} dx = 0.$$

66) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

i. Αν η f είναι άρτια, τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-1}^1 \frac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx$

Λύση :

i. Η $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, άρα για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ ισχύει ότι : $f(-x) = f(x)$

$$\text{Έτσι : } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^0 f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \quad (1)$$

$$\text{Στο } \int_{-\alpha}^0 f(x)dx \text{ θέτω } x = -u, \text{ άρα } dx = -du$$

$$\text{Για } x = -\alpha \text{ είναι } u = \alpha$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } u = 0$$

$$\text{Έτσι : } \int_{-\alpha}^0 f(x)dx = \int_{\alpha}^0 f(-u)(-du) = \int_0^{\alpha} f(-u)du = \int_0^{\alpha} f(u)du = \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

$$\text{Άρα : } (1) \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

ii. Είναι $I = \int_{-1}^1 \frac{x\sigma\upsilon\nu x + e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx \quad (1)$

Έστω : $f(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$, με $x \in [-1,1]$ και $-x \in [-1,1]$,

$$f(-x) = \frac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}} = \frac{-x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}} = -f(x), \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

$$\text{και } g(x) = \frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}, \text{ με } x \in [-1,1] \text{ και } -x \in [-1,1],$$

$$g(-x) = \frac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}} = \frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} = g(x), \text{ άρα η } g \text{ είναι άρτια.}$$

$$\text{Έτσι : } (1) \Leftrightarrow I = \int_{-1}^1 \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx \Leftrightarrow I = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I = 0 + 2\int_0^1 \frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}} dx \stackrel{x \in [0,1]}{\Leftrightarrow} I = 2\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \Leftrightarrow I = 2\int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx \Leftrightarrow I = 2[\ln(1+e^x)]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I = 2(\ln(1+e) - \ln 2).$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i. $\int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sigma\upsilon\upsilon\chi} dx$ ii. $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ iii. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\varepsilon\phi^3 x + 1} dx$ iv. $\int_{-2}^2 \frac{x^{15} \eta\mu^2 x}{2 + \sigma\upsilon\upsilon\chi} dx$

68) Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x - 5$. Να βρείτε :

- τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$
- την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $N(-1, f(-1))$
- το ολοκλήρωμα : $I = \int_{-1}^1 (f(x) \cdot \sigma\upsilon\upsilon\chi + x \cdot f''(x)) dx$

5Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής : $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu^{\kappa} x \cdot \sigma\upsilon\upsilon^{\lambda} x dx$,

- αν το $\eta\mu x$ είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u = \sigma\upsilon\upsilon\chi$
- αν το $\sigma\upsilon\upsilon x$ είναι υψωμένο σε **περιττή** δύναμη τότε θέτουμε $u = \eta\mu x$
- Αν και το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\upsilon x$ είναι υψωμένα σε **άρτια** δύναμη, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού : $\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\upsilon 2x}{2}$ και $\sigma\upsilon\upsilon^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\upsilon 2x}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

69) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\upsilon^3 x dx$ ii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x dx$

iii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2 x dx$

Λύση :

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\upsilon^3 x dx$, θέτω $u = \eta\mu x$, άρα $du = \sigma\upsilon\upsilon x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\sigma\upsilon\upsilon x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι : } \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\upsilon^3 x dx &= \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\upsilon^2 x \cdot \sigma\upsilon\upsilon x dx = \int_0^{\pi} (1 - \eta\mu^2 x) \sigma\upsilon\upsilon x dx = \int_0^1 (1 - u^2) \sigma\upsilon\upsilon x \cdot \frac{du}{\sigma\upsilon\upsilon x} = \\ &= \int_0^1 (1 - u^2) du = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. $\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \sigma\upsilon\upsilon 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \sigma\upsilon\upsilon 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\eta\mu 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iii. $\int_0^\pi \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, θέτω $u = \sigma\upsilon\nu x$, άρα $du = -\eta\mu x dx \Leftrightarrow dx = -\frac{du}{\eta\mu x}$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$

Για $x = \pi$ είναι $u = -1$

$$\begin{aligned}\text{Έτσι: } \int_0^\pi \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx &= \int_0^\pi \eta\mu x \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_0^\pi \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \\ &= \int_1^{-1} \eta\mu x \cdot (1 - u^2) u^2 \cdot \left(-\frac{du}{\eta\mu x}\right) = -\int_1^{-1} (u^2 - u^4) du = \int_{-1}^1 (u^2 - u^4) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

70) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^\pi \eta\mu^3 x dx$ ii. $\int_0^\pi \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

71) Αν $I = \int_0^{\pi/2} x \eta\mu^2 x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :
 $I + J$, $I - J$, I , J .

5Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_x^\lambda f(x, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2 x^2}) dx$ θέτουμε $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \eta\mu u$ με $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Για να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής : $\int_x^\lambda f(x, \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}) dx$ θέτουμε $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \epsilon\phi u$ με $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- Αν σε ολοκλήρωμα εμφανίζεται (σε παρανομαστή) η παράσταση $\alpha^2 x^2 + \beta^2$, τότε συνήθως θέτουμε : $x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \epsilon\phi u$ με $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

72) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα : i. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ii. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

iii. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ iv. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ v. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ vi. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \cdot \sqrt{4-\ln^2 x} dx$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$, και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής :

- Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$
- Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης και τελικά το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται : $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} uf'(u)du = [uf(u)]_{\gamma}^{\delta} - \int_{\gamma}^{\delta} f(u)du...$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + x + 1$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^3 f^{-1}(x)dx$.

Λύση :

- $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ είναι 1-1 και άρα είναι και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$, είναι το σύνολο τιμών της $f(x)$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, άρα $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = D_{f^{-1}}$$

- Στο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^3 f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$ άρα είναι $dx = f'(u)du$.

$$\text{Για } x = -1 \text{ είναι } f(u) = -1 \Leftrightarrow f(u) = f(-1) \Leftrightarrow u = -1$$

$$\text{Για } x = 3 \text{ είναι } f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \int_{-1}^3 f^{-1}(x)dx &= \int_{-1}^1 f^{-1}(f(u)) \cdot f'(u)du = \int_{-1}^1 u(3u^2 + 1)du = \int_{-1}^1 (3u^3 + u)du = \\ &= \left[3\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

74) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο : $f(x) = x^3 + 2x + 3$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^6 f^{-1}(x)dx$.

75) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 76) Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
 $f^3(x) + f(x) + 2 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x) dx$.
- 77) Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$ και :
 $xf'(x) \ln x + f(x) = 0$ για κάθε $x > 1$
i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} dx$
- 78) Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x^2}$
i. Να ορίσετε την $f^{-1}(x)$
ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x+e^{x^2}} dx + \int_1^e \frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}} dx$.
- 79) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει
 $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(2, 5)$ και ισχύει :
 $\int_0^2 xf''(x) dx = 0$
i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B .
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.
iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :
 $I = \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{3} f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f^{-1}(x) \right) dx$.
- 80) Θεωρούμε τη συνάρτηση : $f(x) = x - \ln x + e^x$, με $x \in (1, +\infty)$
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$
ii. Να βρεθούν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1, +\infty)$
iv. Έστω $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
 $\Pi - 2 \ln 2$. (4^ο Ομογενείς 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Αν έχουμε μια συναρτησιακή σχέση :

- $f(x) + \mathcal{F}(g(x)) = h(x)$ (1) και θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_{\kappa}^{\lambda} f(x)dx$ ή να δείξουμε μια σχέση που περιέχει αυτό, τότε λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$, ολοκληρώνουμε και αλλάζουμε μεταβλητή και άκρα ολοκλήρωσης.
- $f(h_1(x)) + \mathcal{F}(h_2(x)) = h_3(x)$ (2) τότε θέτουμε $y = h_1(x)$ και η (2) γίνεται $f(y) + \mathcal{F}(g(y)) = h(y)$ ή $f(x) + \mathcal{F}(g(x)) = h(x)$ που είναι η (1).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + f(6-x) = 3$ για κάθε $x \in [1,5]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x \in [1,5]$ είναι : $f(x) + f(6-x) = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - f(6-x)$ (1)

$$\text{Άρα : } \int_1^5 f(x)dx \stackrel{(1)}{=} \int_1^5 (3 - f(6-x))dx = \int_1^5 3dx - \int_1^5 f(6-x)dx = [3x]_1^5 - \int_1^5 f(6-x)dx = 12 - \int_1^5 f(6-x)dx$$

$$\text{Δηλ. } \int_1^5 f(x)dx = 12 - \int_1^5 f(6-x)dx \quad (2)$$

$$\text{Για το } \int_1^5 f(6-x)dx \text{ θέτω } 6-x = u \text{ άρα } -dx = du \Leftrightarrow dx = -du$$

Όταν $x=1$ το $u=5$, ενώ όταν $x=5$ το $u=1$

$$\text{Άρα } \int_1^5 f(6-x)dx = \int_5^1 f(u)(-du) = \int_1^5 f(u)du = \int_1^5 f(x)dx$$

$$\text{Τελικά η (2) γίνεται : } \int_1^5 f(x)dx = 12 - \int_1^5 f(6-x)dx \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx = 12 - \int_1^5 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_1^5 f(x)dx = 12 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x)dx = 6.$$

82) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2-x) + f(x-3) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

Λύση : Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(2-x) + f(x-3) = 2$ (1)

Θέτω $2-x = y \Leftrightarrow x = 2-y$ άρα η (1) γίνεται : $f(y) + f(2-y-3) = 2 \Leftrightarrow$

$$f(y) + f(-1-y) = 2 \quad \text{ή} \quad f(x) = 2 - f(-1-x) \quad (2)$$

Άρα :

$$\int_{-1}^0 f(x)dx \stackrel{(2)}{=} \int_{-1}^0 (2 - f(-1-x))dx = \int_{-1}^0 2dx - \int_{-1}^0 f(-1-x)dx = [2x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f(-1-x)dx = 2 - \int_{-1}^0 f(-1-x)dx$$

$$\text{Δηλ. } \int_{-1}^0 f(x)dx = 2 - \int_{-1}^0 f(-1-x)dx \quad (3)$$

$$\text{Για το } \int_{-1}^0 f(-1-x)dx \text{ θέτω } -1-x = u \text{ άρα } -dx = du \Leftrightarrow dx = -du$$

Όταν $x=-1$ το $u=0$, ενώ όταν $x=0$ το $u=-1$

$$\text{Άρα } \int_{-1}^0 f(-1-x)dx = \int_0^{-1} f(u)(-du) = \int_{-1}^0 f(u)du = \int_{-1}^0 f(x)dx$$

$$\text{Τελικά η (3) γίνεται : } \int_{-1}^0 f(x)dx = 2 - \int_{-1}^0 f(-1-x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = 2 - \int_{-1}^0 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{-1}^0 f(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

83) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) + f(-x) = x^2 \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

84) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2-x) + f(x+2) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 f(x) dx$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Στα ολοκληρώματα ισχύουν οι παρακάτω ανισοτικές σχέσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$

(αν η f δεν είναι παντού 0 τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Αν $f(x) \geq g(x)$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

(αν η f, g δεν είναι ίσες τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$

Απόδειξη :

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει ότι : $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Οπότε : $\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx$ δηλαδή : $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$

Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, συχνά χρησιμοποιούμε :

➤ Τις βασικές ανισότητες :

- $f^2(x) \geq 0$
- $|\eta\mu x| \leq |x|$
- $\ln x \leq x - 1, x > 0$
- $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

➤ Τις ανισότητες $\min f \leq f(x) \leq \max f, x \in [\alpha, \beta]$

➤ Τις ανισότητες που προκύπτουν από τη μονοτονία της f και τις σχέσεις $\alpha \leq x \leq \beta$

➤ Τις ανισότητες που προκύπτουν από το Θ.Μ.Τ. και τη μονοτονία της f'

➤ Την ανισότητα που προκύπτει από την κυρτότητα μιας συνάρτησης και την εφαπτομένη της σε ένα σημείο.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9)dx > 0$

ii. $\int_1^3 f^2(x)dx > 4\int_1^3 f(x)dx - 8$.

Λύση :

i. Παρατηρούμε ότι : $\int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9)dx = \int_1^3 (f(x) - 3)^2 dx$

Η συνάρτηση : $g(x) = (f(x) - 3)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,3]$. Επίσης η g δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $g(2) = (f(2) - 3)^2 = 4 \neq 0$, επομένως : $\int_1^3 g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9)dx > 0$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x)dx > 4\int_1^3 f(x)dx - 8 \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x)dx - \int_1^3 4f(x)dx + 8 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_1^3 (f^2(x) - 4f(x) + 4)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 (f(x) - 2)^2 dx > 0$. Η ανισότητα αυτή ισχύει, καθώς η συνάρτηση : $h(x) = (f(x) - 2)^2$ είναι συνεχής στο $[1,3]$ και ισχύει : $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,3]$. Επίσης η h δεν είναι παντού ίση με το μηδέν στο $[1,3]$, καθώς $h(2) = (f(2) - 2)^2 = 1 \neq 0$.

(*) Γενικά ισχύει ότι : $c = \int_a^b \frac{c}{\beta - \alpha} dx$, άρα εδώ $8 = \int_1^3 \frac{8}{3-1} dx = \int_1^3 4dx$.

86) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Να αποδείξετε ότι :

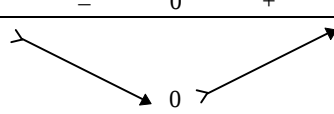
i. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii. $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx > 4$

Λύση :

i. 1^{ος} Τρόπος : για κάθε $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 0$, δηλαδή για κάθε $x > 0$, $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2^{ος} Τρόπος : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

ii. Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το " $=$ " ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι : } \int_1^3 f(x) dx > 0 &\Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx - \int_1^3 2 dx > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx > \int_1^3 2 dx \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx > [2x]_1^3 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx > 4. \end{aligned}$$

87) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.

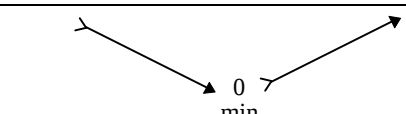
i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) \cdot e^x dx > \frac{27}{8}$.

Λύση :

i. $A_f = (0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ έχουμε : $f(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$

Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 1$, δηλαδή για κάθε $x > 0$, $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

ii. Για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ έχουμε :

- $f(x) \geq 1$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $e^x \geq x + 1$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, (εδώ το $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε $f(x) \cdot e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ και η ισότητα δεν ισχύει ούτε για $x = 1$, άρα :

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) \cdot e^x dx > \int_{\frac{1}{2}}^2 (x + 1) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) \cdot e^x dx > \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) \cdot e^x dx > \frac{27}{8}.$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

88) Να αποδείξετε ότι :

- Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x^2) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \frac{1}{3}$

Λύση :

-
- Για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\ln x \leq x-1$. Αν θέσω όπου x το $x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχω $\ln(x^2+1) \leq x^2+1-1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Στην ανισότητα $\ln x \leq x-1$ το "=" ισχύει μόνο για $x=1$
Άρα για κάθε $x \in [0,1]$, $\ln(x^2+1) \leq x^2$ και το "=" ισχύει μόνο για $x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$
έτσι : $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \int_0^1 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \frac{1}{3}$.

89) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq 1$.

Λύση :

Είναι αδύνατον να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$, για αυτό θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $\frac{e^x}{x+1} \geq g(x)$ και μετά να ολοκληρώσουμε. Για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ (άρα και για $x \in [0,1]$) ισχύει : $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x+1} \geq 1$, έτσι έχουμε :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq [x]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx \geq 1.$$

90) Έστω η συνάρτηση $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \leq 1 - \frac{1}{e}$.

Λύση :

- Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (1, e)$ άρα η $f \uparrow [1, e]$, οπότε στο $x_1=1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$, ενώ στο $x_2=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

ii. Για κάθε $x \in [1, e]$, είναι : $\min f \leq f(x) \leq \max f \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$, άρα

$$\int_1^e 0 dx \leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{1}{e} dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \leq \left[\frac{1}{e} x \right]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e 0 dx \leq \int_1^e f(x) dx \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f(x)dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

ii. $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 1$

92) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $f^2(x) - 2f(x)e^x + e^{2x} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

ii. $\int_0^1 e^x f(x)dx \leq \frac{e^2 + 1}{4}$

93) Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{e^x}{x^2 + 1} \geq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ ii. $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (x^2 + 1)dx$

94) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = 2 - e^{-x^2}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f ii. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2})dx \geq 2$

95) Δίνεται η συνάρτηση $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο $[1,2]$

iii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_1^2 \frac{x-1}{x+2} dx \leq \frac{1}{4}$

96) Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \leq \ln 2$

97) Να αποδείξετε ότι $1 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \leq \sqrt{2}$

98) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\operatorname{erf} x > x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

ii. $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{x} dx \leq \frac{1}{2}$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

99) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και

ii. $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x} dx \leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Αν $f(x) \geq 0$ και $\int_a^b f(x) dx = 0$, τότε : $f(x) = 0$

Απόδειξη :

Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) \neq 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $\int_a^b f(x) dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

100) Δίνεται συνεχής συνάρτηση : $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^3 f^2(x) dx = 6 \int_1^3 xf(x) dx - 78. \text{ Να βρείτε :}$$

i. $\int_1^3 9x^2 dx$

ii. τον τύπο της f .

Λύση :

i. $\int_1^3 9x^2 dx = [3x^3]_1^3 = 81 - 3 = 78$

ii. Έχουμε : $\int_1^3 f^2(x) dx = 6 \int_1^3 xf(x) dx - 78 \Leftrightarrow \int_1^3 f^2(x) dx - \int_1^3 6xf(x) dx + \int_1^3 9x^2 dx = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_1^3 (f^2(x) - 6xf(x) + 9x^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 (f(x) - 3x)^2 dx = 0$

Η συνάρτηση : $g(x) = (f(x) - 3x)^2$ είναι συνεχής στο $[1, 3]$, ισχύει : $g(x) \geq 0$ για

κάθε $x \in [1, 3]$ και $\int_1^3 (f(x) - 3x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx = 0$. Άρα για κάθε $x \in [1, 3]$ είναι :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 3x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x, \quad x \in [1, 3].$$

Αυτό ισχύει καθώς έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο, ώστε να είναι $g(x_0) \neq 0$. Τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και για κάθε $x \in [1, 3]$ είναι $g(x) \geq 0$, προκύπτει ότι $\int_a^b g(x) dx > 0$ που είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $x \in [1, 3]$ είναι $g(x) = 0$.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

101) Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx. \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Λύση :

$$\int_0^1 \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \int_0^1 2f(x) \cdot g(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x)) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0, \text{ η συνάρτηση } h(x) = (f(x) - g(x))^2 \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \text{ και}$$

$$\text{ισχύει } h(x) = (f(x) - g(x))^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1] \text{ και } \int_0^1 h(x) dx = 0, \text{ άρα για κάθε } x \in [0,1]$$

$$\text{είναι } h(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

102) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$, $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

i. Να μελετήσετε την f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq e$ (1993)

103) Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγισιμη, με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii. $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$. (1997)

104) Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1,4]$

i. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t \in [1,4]$ και $x > 0$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ (1999)

105) Να δείξετε ότι $\int_e^x \frac{\ln x}{\ln t} dt > x - e \ln x$, για κάθε $x > e$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 3.4-3.5

ΘΕΜΑ 2 #33593

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

β) $\int_3^7 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

γ) $\int_7^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #35245

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha + 1) - f(\alpha) < 1$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #34565

Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο, ώστε $f'(x) > 0$, για κάθε $[a, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \lambda a - f(a)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda a + f(a) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. (Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2 + 1)}{f(x^2 + 1)} dx$$

ισούται με -1 .

(Μονάδες 7)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #36816

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- α) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)
β) Να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 04)
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 09)
δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$$

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #33578

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$. (Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi xf'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$. (Μονάδες 7)
δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x) \cdot x} dx < 1$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #29837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής. (Μονάδες 9)
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$. (Μονάδες 6)
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x) dx$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #33998

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

- α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5} dt$. (Μονάδες 06)
β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου. (Μονάδες 12)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in [0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #32225

Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

- Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$. (Μονάδες 05)
- Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$. (Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$

είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #31551

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

και $\phi(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \phi(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #29549

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0) = f(0) = 0 \text{ και } \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta\mu x dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x) \eta\mu x dx = -\int_0^{\pi} f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 07)

β) $f(\pi) = 0$. (Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

(Μονάδες 10)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #27668

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)
- γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x) dx$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #27322

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \text{ όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

- α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #26184

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

- α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #25766

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$

τότε:

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$. (Μονάδες 7)

- δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #24758

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$. (Μονάδες 6)
- β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$. (Μονάδες 8)
- γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)
- δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

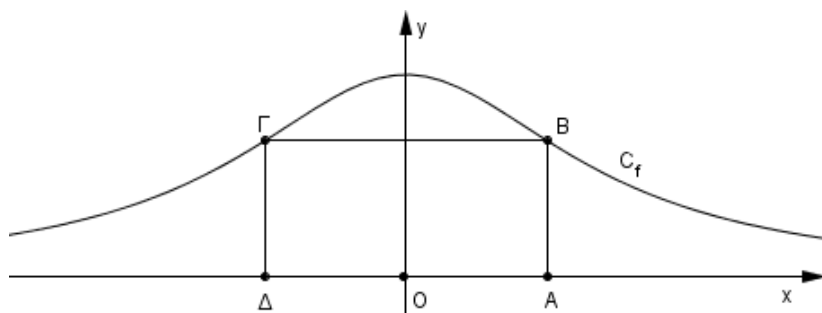
ΘΕΜΑ 4 #24771

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y/y και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B , Γ , Δ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.



- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ δίνεται από τον τύπο (Μονάδες 6)

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

- δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx = \ln \sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #24770

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$. (Μονάδες 4)

- γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

(Μονάδες 8)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #23957

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #23219

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$. (Μονάδες 6)