

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

60. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σχόλια :

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

61. Θεώρημα (2001 Β', 2003, 2015 Β')

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη :

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού
 $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε η f έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ , αλλά έχουν παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής, αλλά

έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$ την $F(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Αν μια συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

62. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων.

Απάντηση :

Συνάρτηση	Παράγουσα
$f(x) = 0$	$F(x) = c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$F(x) = \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \eta\mu x$	$F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x) = \varepsilon\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x) = -\sigma\phi x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha^x$	$F(x) = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c, c \in \mathbb{R}$

Σχόλια :

- Οι τύποι αυτού του πίνακα ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε :
 - Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$
 - Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**ΟΡΙΣΜΟΣ :**

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $0 = (c)'$
- $c = (cx)'$
- $x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)', \alpha \neq -1$
- $\frac{1}{x} = (\ln|x|)', x \neq 0$
- $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)', x \neq 0$
- $\frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'$
- $\eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x = (\eta\mu x)'$
- $e^x = (e^x)'$
- $a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)'$
- $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = (\varepsilon\phi x)'$
- $\frac{1}{\eta\mu^2 x} = (-\sigma\phi x)'$

- $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))'$
- $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$
- $f(x) + x \cdot f'(x) = (x \cdot f(x))'$
- $\frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x} \right)'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln|f(x)|)'$
- $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)} \right)'$
- $e^{f(x)} \cdot f'(x) = (e^{f(x)})'$
- $f^v(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^{v+1}(x)}{v+1} \right)'$ π.χ. $f(x) \cdot f'(x) = \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)'$
- $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = (\sqrt{f(x)})'$
- $\sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x) = (\eta\mu f(x))'$
- $\eta\mu f(x) \cdot f'(x) = (-\sigma\upsilon\nu f(x))'$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,2).

Λύση :

Είναι : $F(x) = 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 3 \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Η C_F διέρχεται από το A(1,2) άρα : $F(1) = 2 \Leftrightarrow 1^3 + c = 2 \Leftrightarrow c = 1.$

Άρα : $F(x) = x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

(Παράγουσες Βασικών Συναρτήσεων)

- i. $f(x) = x^3 + 12x^2 - 6x - 5$
- ii. $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} + 2e^x, x > 0$
- iii. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

iv. $f(x) = \frac{2x^3 + x - 1}{x^2}, x > 0$

Λύση :

i. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 12\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} - 5x + c \Leftrightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + 4x^3 - 3x^2 - 5x + c, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

ii. $F(x) = 3\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2e^x + c \Leftrightarrow F(x) = 3\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2e^x + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x) = 3\ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2e^x + c, x > 0, c \in \mathbb{R} \quad \left(\text{προσοχή: } \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \right)$

iii. $F(x) = 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 5\sigma\phi x - \varepsilon\phi x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x) = 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5\sigma\phi x - \varepsilon\phi x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x) = 6\sqrt{x} - 5\sigma\phi x - \varepsilon\phi x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x + c \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), c \in \mathbb{R}$

$\left(\text{προσοχή: } \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{-\frac{1}{2}} \right)$

iv. Είναι : $f(x) = \frac{2x^3 + x - 1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, άρα :

$F(x) = x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + c \Leftrightarrow F(x) = x^2 + \ln x + \frac{1}{x} + c \quad x > 0, c \in \mathbb{R}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

(Παράγουσες Συναρτήσεων με εφαρμογή κανόνων παραγωγίσιμης)

i. $f(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x) = \frac{2e^x - xe^x}{x^3}, x > 0$

iii. $f(x) = \frac{e^x(1+x\ln x)}{x}, x > 0$

Λύση :

i. $f(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x = (x^2)'\eta\mu x + x^2(\eta\mu x)' = (x^2 \cdot \eta\mu x)'$

Άρα : $F(x) = x^2 \cdot \eta\mu x + c, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

ii. $f(x) = \frac{2e^x - xe^x}{x^3} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{x^4} = -\frac{x^2e^x - 2xe^x}{x^4} = \left(-\frac{e^x}{x^2}\right)'$

Άρα : $F(x) = -\frac{e^x}{x^2} + c \quad x > 0, c \in \mathbb{R}$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\text{iii. } f(x) = \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} = \frac{e^x + e^x x \ln x}{x} = \frac{e^x}{x} + e^x \ln x = e^x \frac{1}{x} + e^x \ln x = (e^x \ln x)'$$

$$\text{Άρα : } F(x) = e^x \ln x + c \quad x > 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

(Παράγουσες Σύνθετων Συναρτήσεων)

$$\text{i. } f(x) = \eta \mu x \cdot e^{\sigma \nu x}$$

$$\text{ii. } f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x + 3)$$

$$\text{iii. } f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2017}$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{\eta \mu 2x}{\sqrt{1+\eta \mu^2 x}}$$

Λύση :

$$\text{i. } f(x) = \eta \mu x \cdot e^{\sigma \nu x} = (-\sigma \nu x)' \cdot e^{\sigma \nu x} = (-e^{\sigma \nu x})', \quad \text{άρα : } F(x) = -e^{\sigma \nu x} + c \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii. } f(x) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (2x + 3) = (x^2 + 3x + 5)^6 \cdot (x^2 + 3x + 5)' = \left(\frac{(x^2 + 3x + 5)^7}{7} \right)'$$

$$\text{Άρα : } F(x) = \frac{(x^2 + 3x + 5)^7}{7} + c \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{iii. } f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2017} = \frac{(x^2-x+2017)'}{x^2-x+2017} = (\ln|x^2-x+2017|)'$$

$$\text{Άρα : } F(x) = \ln|x^2-x+2017| + c \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{\eta \mu 2x}{\sqrt{1+\eta \mu^2 x}} = \frac{2\eta \mu x \sigma \nu x}{\sqrt{1+\eta \mu^2 x}} = \frac{2\eta \mu x \cdot (\eta \mu x)'}{\sqrt{1+\eta \mu^2 x}} = \frac{(1+\eta \mu^2 x)'}{\sqrt{1+\eta \mu^2 x}} = 2 \frac{(1+\eta \mu^2 x)'}{2\sqrt{1+\eta \mu^2 x}} = (2\sqrt{1+\eta \mu^2 x})'$$

$$\text{Άρα : } F(x) = 2\sqrt{1+\eta \mu^2 x} + c \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x) = x^2$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(0,1).

6. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x) = x$ και μετά, να βρείτε εκείνη από τις παράγουσες που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,3).

7. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

$$\text{v. } f(x) = x$$

$$\text{vi. } f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x > 0$$

$$\text{vii. } f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

$$\text{viii. } f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x > 0$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

8. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^3$
- ii. $f(x) = \frac{1}{x^4}, x > 0$
- iii. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- iv. $f(x) = x\sqrt{x}$

9. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{1}{x} + \sigma\upsilon\nu x, x > 0$
- ii. $f(x) = 2e^x - \frac{3}{\eta\mu^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- iii. $f(x) = 3^{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2, x > 0$

10. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \eta\mu x - \frac{1}{x^2} + e^{-x}, x > 0$
- ii. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{3}{\sqrt{x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- iii. $f(x) = 2^x - \frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

11. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2}, x > 0$
- ii. $f(x) = \frac{(3x - 2)^2}{x^2}, x < 0$
- iii. $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}, x \in (0, \pi)$

12. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$
- ii. $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$
- iii. $f(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}, x > 0$
- iv. $f(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$
- v. $f(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$
- vi. $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

13. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^2$

ii. $f(x) = (3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^2$

iii. $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}$

iv. $f(x) = \frac{3x}{(x^2 + 3)^2}$

v. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

vi. $f(x) = x\sqrt{3x^2 + 2}$

vii. $f(x) = \sin x \cdot e^{\eta \mu x}$

viii. $f(x) = \eta \mu x \cdot e^{\sigma \upsilon \nu x}$

ix. $f(x) = \sigma \upsilon \nu 3x - 5e^{2x}$

x. $f(x) = 2\eta \mu 3x - 5 \cdot 2^x$

xi. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^x}}$

xii. $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$

xiii. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

xiv. $f(x) = \frac{1}{x - 1}, x > 1$

xv. $f(x) = \frac{1}{x + 3}, x > -3$

xvi. $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

xvii. $f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

2Α. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 7$ και F μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει : $F(x) = xf(x) - 2x^3$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

15. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $F(0) = 0$ όπου F μια αρχική της f , για την οποία ισχύει : $2xF(x) + x^2 f(x) = 4x^3 - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f .

ii. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

2B. ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ – ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΞΗΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}(x-1)$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 0$.
- Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(F'(x) - 2015) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
 - Να δείξετε ότι η F είναι κυρτή.
 - Να δείξετε ότι : $F(x-1) + F(x+1) > 2F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f , για την οποία ισχύει : $F(1-2x) + F(x^2+2) = x^4 + 5x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(3)$.
 - Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (1,3)$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$, με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε : $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 2$.
18. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $[0,1]$ με $F(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2F(x^2-x) = -x(2x-1)f(x^2-x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
19. Έστω $f: (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ με $F(0) = 0$. Αν ισχύει $F(x) \leq e^x \ln(x+1)$, για κάθε $x > -1$, να δείξετε ότι C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

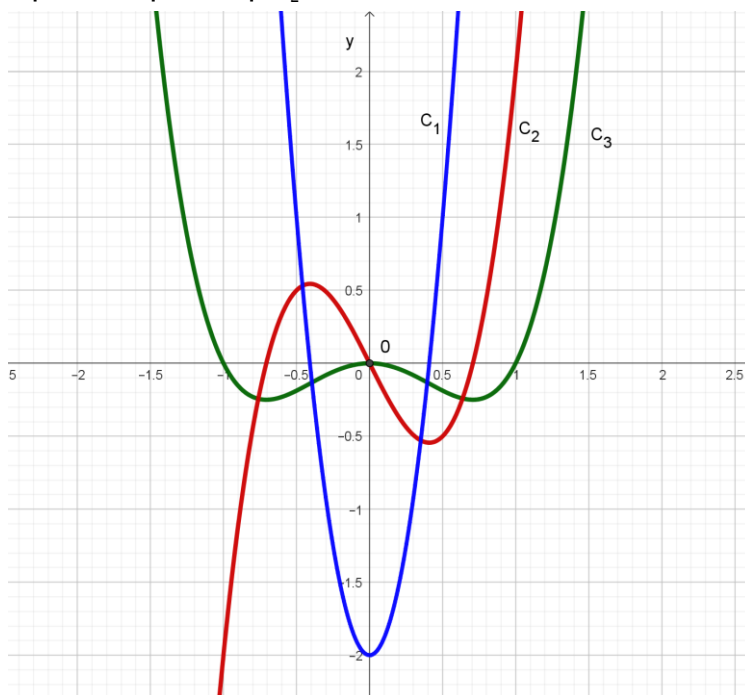
2Γ. ΟΡΙΑ

20. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Αν F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$, να βρείτε τα όρια :
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{(e^x - 1) \eta \mu x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{e^x - x - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(e^{F^2(x)} - 1) \ln |f(x)| \right]$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1

ΘΕΜΑ 3 #32693

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,



- α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)
- β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F . (Μονάδες 6)
- γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 #28338

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f' τέμνονται στο σημείο $A(-2, 0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

- i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)
- ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού και η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $B(0, -12)$. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)
- ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)
- iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 6)

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #24769

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f

ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$.

(Μονάδες 5)