



ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΥΛΗ : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1 – 1.3)

3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΙΘΑΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ & Δ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι "1-1".

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι "1-1".

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση : $g(f(x) + \ln x - 1) = g(f(x) - x)$

Γ3. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει : $f(e^{x-2}) = \frac{1}{e^{x-2}} - x + 2$, να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, με $x > 0$.

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{1}{x^2 + 5} - \frac{1}{2x^2 + 1} < \ln \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» .

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f(g(x) - x) - f(\ln x - 1) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αφού δείξετε ότι $g(x) = \ln x + x - 1$, να
 βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)$.

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση : $g^{-1}(2g(|x| + 1) - 2e) = 1$

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 4 < \ln \frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $f(x - y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Δ3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 - 2x) + f(x + 2) = f(4x - 4)$

Δ5. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ : ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ