

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ****ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**

1) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $: xf'(x) > e^x - f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) > \frac{e^x - 1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να δείξετε ότι $f(0) \geq 1$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (1, e)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο α να είναι παράλληλη στον $x'x$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να δείξετε ότι f είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε την $f'(0)$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

vi. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2 \ln x = \alpha$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.

i. Να βρείτε τα α, β ώστε το $A(1, 3)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Για $\alpha=4$ και $\beta=-1$,

ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

iv. Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 1$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 6) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι :
- Η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2007)
- 7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
 - Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .
 - Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$. (3^ο Πανελλήνιες 2008)
- 8) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1) = 1$ και :
 $xf(x) + x^2 f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$.
- Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex = e^{ax}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e) = e^2$ και :
 $xf'(x) - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$.
- Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2 \ln x$
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x^2}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 10) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(0) = 0$ και :
 $f'(x) - f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = xe^x$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- 11) Για μια πραγματική συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.
- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. (Θέμα 3^ο Πανελλήνιες 2001)
- 12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$
- i. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$
- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
- iii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- iv. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$
 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$ (3^ο Θέμα Πανελλήνιες 2009)
- 13) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση: $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $g(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα Πανελληνίων)
- 14) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x) < -4f(x) + 4f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- ii. Αν η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 15) Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2e^x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $(\varepsilon): y = 2x + 2$.
- iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην ευθεία (ε) και η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου. (Θέμα B study4exams)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

16) Να δείξετε ότι :

- i. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Επιπλέον :

- iii. να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Θέμα Γ study4exams)

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$ ισχύει $e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$, να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Θέμα Γ study4exams)

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \ln x$, $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι $2x \ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

(Θέμα Γ study4exams)

19) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2) - 5}{x-1} = 6$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 5$ και $f'(3) = 6$
- ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$
- iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
- iv. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

20) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(1) = 0$
- $2\sqrt{1-x}f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x \in (0,1)$.
- i. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0,1]$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 f^{-1}(x))$.
- iv. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (0,1)$.
- v. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

21) Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$.

Αν επιπλέον ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

- iii. Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$
- iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- v. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

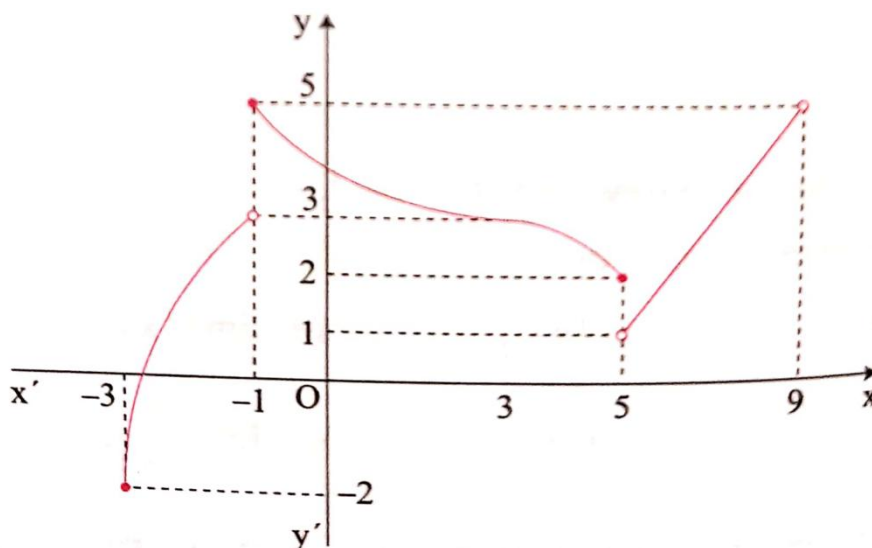
22) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$
- ii. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.
- iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iv. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2014)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

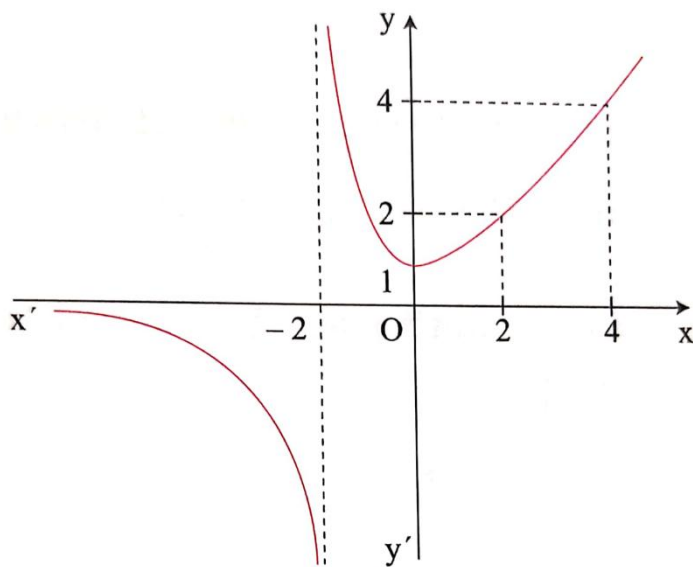
- 23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε την ανισότητα : $(x^2 + 4x + 3)e^x \geq 7x + 3$, για κάθε $x \geq -4 + \sqrt{3}$.
(Θέμα Γ study4exams)
- 24) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ .
- Να δείξετε ότι : $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.
Επιπλέον :
 - Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2 - x^2}{x + 1}$, $x > -1$. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.
 - Αν $\alpha > \frac{1}{e}$, $\beta > \frac{1}{e}$ να δείξετε ότι : $\frac{2 - \ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \frac{2 - \ln^2(\sqrt{\alpha \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{\alpha \cdot \beta}) + 1}$
(Θέμα Γ study4exams)
- 25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|1 - \ln x|}{x}$, με $x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Αν η τετμημένη του σημείου $M(x, f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μ/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου AOB , όπου $A(x, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$.
 - Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $(1, 1)$, τότε να αποδείξετε ότι : $x(t) = t + 1$ και ότι η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e - 1, +\infty)$.
(Θέμα Γ Ε.Μ.Ε. 2012)
- 26) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :
 - α. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ γ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x^2 - 1)$ δ. $\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x))$
- iii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iv. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει : $f'(x_0) = 0$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, θεωρήστε γνωστό ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(3,3)$ διέρχεται από το σημείο $(0,3)$.
- v. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{30} + h) - f(\sqrt{30})}{h}$.

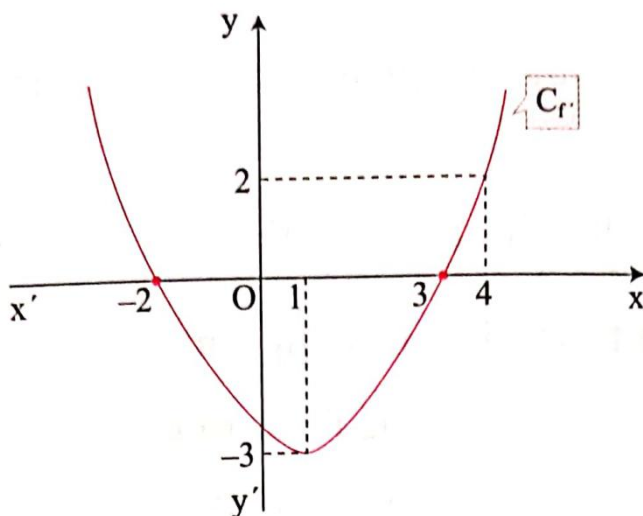
27) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.



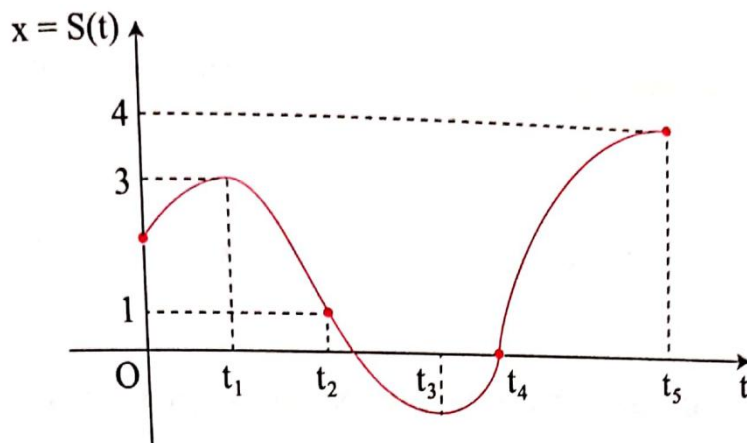
- i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :
 - α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ δ. $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\right)$
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $\frac{1}{f}$.
- iv. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 1$.
- v. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 2$, $x > 0$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 28) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = \frac{5}{3}$.
 - Να λύσετε στο διάστημα $[3, +\infty)$ την εξίσωση: $(f(x) - f(4)) \cdot (f(x) + f(4) - 2f(3)) = 0$.
 - Αν $f(1) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι $f(2) \in (1, 4)$.
- 29) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.

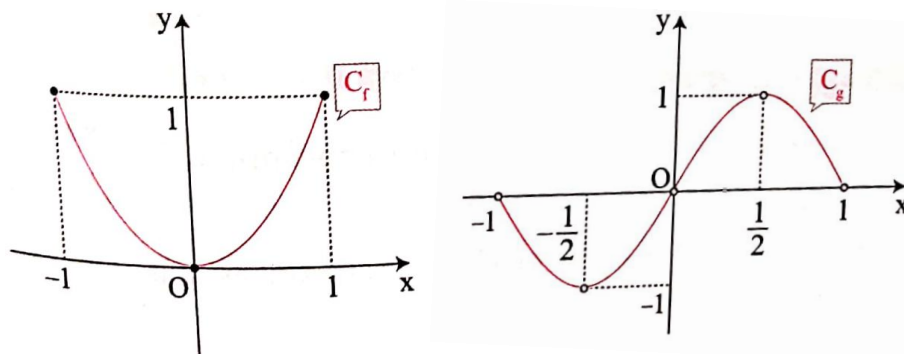


Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_2 και t_4 , τότε να βρείτε :

- Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
- Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.
- Τη μέση ταχύτητα του κινητού κατά το χρονικό διάστημα από $t_1 = 2$ έως $t_5 = 12$ και να αποδείξετε ότι κάποια χρονική στιγμή η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε κατά το χρονικό διάστημα από t_1 έως t_5 .

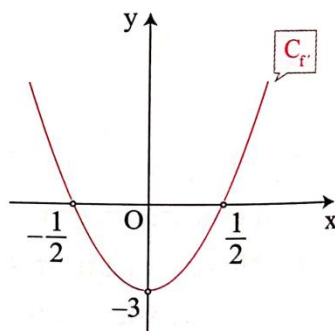
2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 30) Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g:(-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h:(-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(g(x))$.

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της h .
 - Να κατασκευάσετε τον πίνακα προσήμου της h' και να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h\left(\frac{x^2}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\right)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)}$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 2$.
- 31) Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι : $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 4$ και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο σχήμα.



- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.
- Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^2 x) - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x}$.
- Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 1$.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(2x) + 3x > f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
- 2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 3) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- 4) Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- 5) Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- 6) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 7) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
- 8) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- 9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 10) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- 11) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- 12) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- 13) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- 14) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- 15) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- 16) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.
- 17) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
- 18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

19) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

20) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

21) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

22) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

23) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ , της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f , παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

24) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \cos x$.

25) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

26) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

27) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

28) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

29) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

30) Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ και ισχύει: $f'(x) = -\frac{2}{\sin^3 x}$

31) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

33) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

34) Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

35) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

36) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

37) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

38) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

39) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

40) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε $f'(x) = -\sigma\upsilon\eta x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

41) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

42) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει: $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

43) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

44) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

45) Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

46) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

47) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(-1,0)$.

48) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

49) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

50) Ισχύει: $(\sigma\upsilon\eta x)' = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

51) Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = \alpha^x \alpha^{x-1}$.

52) Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c , ισχύει ότι: $(cf(x))' = f'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

53) Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$, τότε: $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

54) Έστω $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

55) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/\sin x = 0\}$ ισχύει: $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

56) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

57) Ισχύει: $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x \neq 0\}$

58) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

59) Αν δύο συναρτήσεις f , g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει πάντα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x_0 \in \Delta$

60) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

61) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

62) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

63) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

64) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

65) Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

66) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

67) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

68) Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

69) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

70) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 71) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.
- 72) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.
- 73) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 74) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.
- 75) Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.
- 76) Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- 77) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 78) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 79) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.
- 80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
- 81) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
- 82) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
- 83) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- 1)Λ 2)Λ 3)Σ 4)Σ 5)Λ 6)Σ 7)Λ 8)Σ 9)Λ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Λ 14)Λ 15)Λ
16)Σ 17)Λ 18)Λ 19)Λ 20)Λ 21)Σ 22)Λ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Λ 27)Σ 28)Λ 29)Σ
30)Σ 31)Λ 32)Λ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Λ 38)Λ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Λ
43)Λ 44)Σ 45)Σ 46)Λ 47)Σ 48)Λ 49)Σ 50)Λ 51)Λ 52)Λ 53)Σ 54)Λ 55)Λ
56)Λ 57)Λ 58)Σ 59)Λ 60)Σ 61)Σ 62)Λ 63)Σ 64)Λ 65)Σ 66)Λ 67)Σ 68)Σ 69)Λ
70)Λ 71)Λ 72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Λ 76)Λ 77)Λ 78)Λ 79)Σ 80)Σ 81)Σ 82)Σ 83)Σ

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : (2017)

«Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

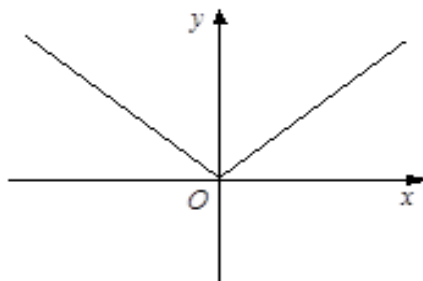
α. Ψ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \text{ ενώ,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(2019)

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ με:

- συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει όταν η f είναι ορισμένη σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(2020 Ν.Σ.)

«Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

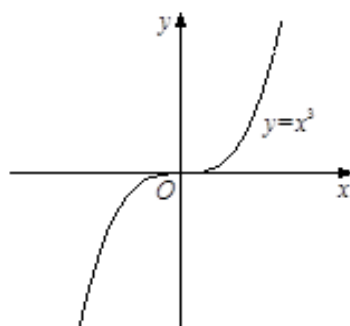
(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

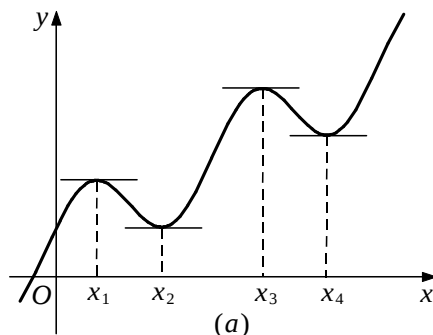
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το τοπικό μέγιστο στη θέση x_1 είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο στη θέση x_4 .



5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το μέγιστο αυτής».

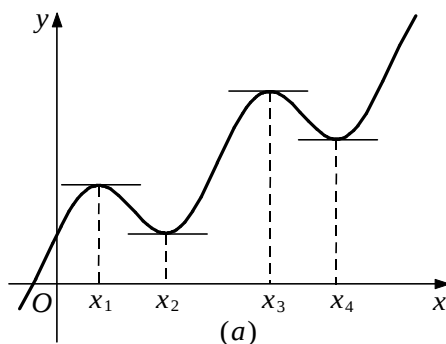
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Αυτό επιβεβαιώνεται στο παρακάτω σχήμα από το οποίο παρατηρούμε ότι στη θέση x_3 , αν και έχουμε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, δεν είναι το μέγιστο της συνάρτησης αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακρότατου της f ».

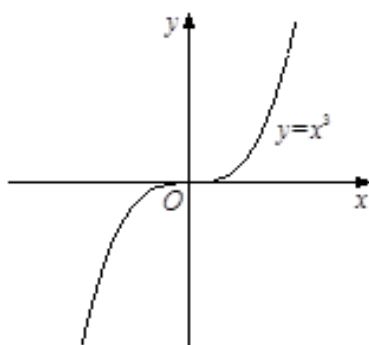
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$. Η ρίζα της παραγώγου είναι το 0, δηλαδή $f'(0) = 0$. Εντούτοις, όπως φαίνεται στο σχήμα το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου της f .



7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ.)

«Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Για κάθε συνάρτηση f κυρτή στο Δ ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ».

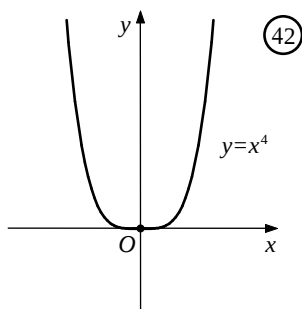
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της f ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Ισχύει $f''(x) = 12x^2$ δηλ. $f''(0) = 0$. Όμως η f δεν έχει σημείο καμπής στο 0.

