

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ DE L'HOSPITAL

54. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;
(2010, 2015 Β', 2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ)

Απάντηση :

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

55. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) ; (2007, 2016 Β')

Απάντηση :

Η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

56. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$; (2004 Β', 2005, 2011)

Απάντηση :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

57. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση :

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$, αντιστοίχως : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$.

Χρήσιμα σχόλια :

1. Αποδεικνύεται ότι:

—Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

—Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f **αναζητούμε:**

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Παρατηρήσεις :

- Η C_f μπορεί να έχει (ένα μόνο) κοινό σημείο με μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της.
- Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η (ε) μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.

58. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα του de L'Hospital.

Απάντηση :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλιο :

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.
2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού, αν υπάρχει άκρο ανοιχτού διαστήματος x_0 (εκτός $\pm\infty$), τότε για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο x_0 . Βρίσκω το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, αν κάποιο από αυτά τα όρια είναι $\pm\infty$ τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Άρα για κατακόρυφες ασύμπτωτες ψάχνω στα ανοιχτά άκρα του πεδίου ορισμού της f και στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 1) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-4}$

Λύση :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και είναι συνεχής, άρα για κατακόρυφη

ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_0 = 1$. Έχω : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ii. $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-4}$, $D_f = (2, 4) \cup (4, +\infty)$ και είναι συνεχής, άρα για κατακόρυφη ασύμπτωτη θα ψάξω στο $x_1 = 2$ και στο $x_2 = 4$.

Έχω : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = +\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\ln(x-2)}{x-4} = -\infty$ άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): x = 4$ είναι και αυτή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 2) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

ii. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$

v. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

iii. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

iv. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$

vi. $f(x) = \frac{x-5}{|x-2|}$

$$\begin{array}{lll} \text{vii. } f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{viii. } f(x) = \varepsilon \varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \text{ix. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma \nu x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases} \end{array}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Για να βρούμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της. Για οριζόντια ασύμπτωτη θα ψάξω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Αντίστοιχα αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $(\varepsilon): y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 3) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης : $f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$.

Λύση :

$f(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$, και είναι συνεχής, άρα για οριζόντια ασύμπτωτη ψάχνω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Έχω : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έχω : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$. Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 4) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{3x^2 + 7x + 13}{x^2 + 2}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} - \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

iii. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΛΑΓΙΕΣ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

➤ Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ (όχι } \pm\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} \text{ (όχι } \pm\infty)$$

➤ Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ (όχι } \pm\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R} \text{ (όχι } \pm\infty)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

- Η ασύμπτωτη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda=0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη. Αυτό σημαίνει ότι για πλάγιες – οριζόντιες μπορώ να ψάχνω ταυτόχρονα, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = 0$ οριζόντια, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \neq 0$ πλάγια.
- Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες ψάχνω στο $\pm\infty$, εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε για την C_f δεν αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
- Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η ε μπορεί να την τέμνει σε ένα ή περισσότερα σημεία.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο κατά 2 βαθμούς του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

Λύση :

i. $f(x) = \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}$, $D_f = \mathbb{R} - \{2,3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$. Για πλάγιες –

οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 9x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 - 9x + 1}{x^2 - 5x + 6} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3 - 9x + 1 - 2x(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 5x + 6} \right] =$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 9x + 1 - 2x^3 + 10x^2 - 12x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 21x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2}{x^2} = 10$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η $(\varepsilon): y = 2x + 10$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$, $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξω στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

• Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = 2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

• Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ με :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = -1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \stackrel{x<0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 5}{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1\right)} = -2$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = -x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 1}{2x - 4}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ iii. $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ iv. $f(x) = \frac{\ln(9 - x^2)}{x^2}$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

7) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ii. $f(x) = \frac{6x^3 - 5x^2 + 7}{2x^3 + 11x - 13}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$

iv. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x - 1}$

v. $f(x) = 3x - 5 + \frac{7}{e^x + x^2}$

8) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x + 5}{x - 1}, x < 1 \\ \frac{6x - 5}{2x - 4}, 1 \leq x \neq 2 \end{cases}$.

9) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x + 5}{x - 2}, x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 13}, x \geq 2 \end{cases}$

10) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης : $f(x) = x - |e^x - 1|$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Η ΕΥΘΕΙΑ $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΤΗΣ C_f - ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

1^{ος} τρόπος : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ ή αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

2^{ος} τρόπος : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ ή αντίστοιχα

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}$

όταν $x \rightarrow -\infty$.

Λύση :

1ος τρόπος : Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 4)] = 0$.

Έχω :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 4)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1} - (2x - 4) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - (x - 1)(2x - 4)}{x - 1} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - 2x^2 + 4x + 2x - 4}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{9}{x - 1} \right] = 0.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2ος τρόπος: Η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -4$$

Έχω :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 6x + 13}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Επίσης :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x + 13 - 2x^2 + 2x}{x - 1} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x + 13}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x}{x} \right] = -4.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x - 3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

Λύση: Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x - 3}}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x^2 - 3x} = 3 \quad (1)$$

Αν $\alpha = 0$, τότε $(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x^2 - 3x} = 3 \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta x + 9}{x^2 - 3x} = 3 \Leftrightarrow 0 = 3$, άτοπο

Άρα είναι $\alpha \neq 0$, οπότε έχουμε : $(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x^2 - 3x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3$

Επίσης :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - \beta x + 9}{x - 3} - 3x \right] = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - \beta x + 9 - 3x^2 + 9x}{x - 3} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta x + 9 + 9x}{x - 3} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(9 - \beta)}{x} = -2 \Leftrightarrow 9 - \beta = -2 \Leftrightarrow \beta = 11.$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

13) Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες τις αντίστοιχες ευθείες :

i. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ την $(\varepsilon) : y = x + 2$ όταν $x \rightarrow -\infty$

ii. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 1}$ την $(\varepsilon) : y = 2x - 3$ όταν $x \rightarrow +\infty$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + x + 3$ την $(\varepsilon) : y = 2x + 3$ όταν $x \rightarrow +\infty$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + \beta x + 16} + x$. Να βρείτε :

i. τις τιμές των α, β αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = \alpha x - 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. το πεδίο ορισμού της f

iii. την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + \alpha x$. Να βρείτε :

i. το α αν η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon) : 4x - 2y + 2011 = 0$

ii. τις ασύμπτωτες της C_f .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17) Αν η ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}.$$

Λύση : Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x + 6$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 6.$$

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} \stackrel{x > 0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(f(x) - 3x)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 3x}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

18) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 5x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \lambda x + 4}{\lambda f(x) + 10x - 2} = \frac{1}{4}$.

Λύση: Αφού η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 5x - 2$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = -2.$$

$$\begin{aligned} \text{Έχω: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \lambda x + 4}{\lambda f(x) + 10x - 2} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 5x - \frac{\lambda}{x} + \frac{4}{x}}{\lambda \frac{f(x)}{x} + 10 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-2 - \lambda}{5\lambda + 10} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\lambda + 10 = -8 - 4\lambda \Leftrightarrow 9\lambda = -18 \Leftrightarrow \lambda = -2. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)f(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}.$$

20) Έστω η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
- Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$
(Θέμα Πανελληνίων)

21) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί:

- το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 4x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}$
- ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x^2 + \lambda x + 13}{\lambda f(x) - 4x + 21} = \frac{4}{7}$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)f(x) - 3x^2 + x] = 2011$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

23) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} = -3$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη το $+\infty$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Οι μεθοδολογίες και οι ασκήσεις για τους κανόνες De L'Hospital αναλύθηκαν στις σελίδες: 233 – 237

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

59. Με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία που ακολουθούμε λέγεται μελέτη συνάρτησης. Ποια βήματα περιλαμβάνει ;

Απάντηση :

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f . Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

Σχόλιο :

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι **άρτια**, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι **περιττή**, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

Έχουμε επίσης

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	-	0	+
$f(x)$						
	T.E.					

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Οι ρίζες της f'' είναι οι $x=0$, $x=2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

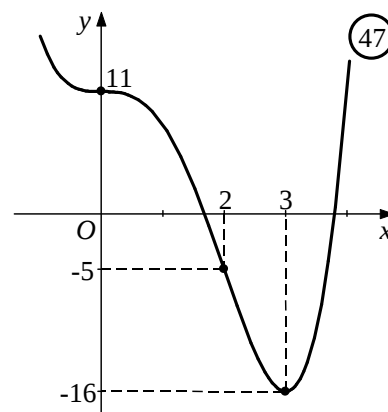
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	 11 Σ.Κ.		 -5 Σ.Κ.			

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f .

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	-	0	+
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		11 Σ.K.	-5 Σ.K.	-16 T.E.	$+\infty$



2. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 1)(x - 1) - x^2 + x - 4}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$

Οι ρίζες της f' είναι $-1, 3$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		-3 T.M.	$\searrow$	5 T.E.	$\nearrow$

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x - 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^4} = \frac{8}{(x - 1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$	↘		↗

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

4) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1, \quad \text{οπότε} \quad \lambda = 1$$

$$\text{Και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0, \quad \text{οπότε} \quad \beta = 0.$$

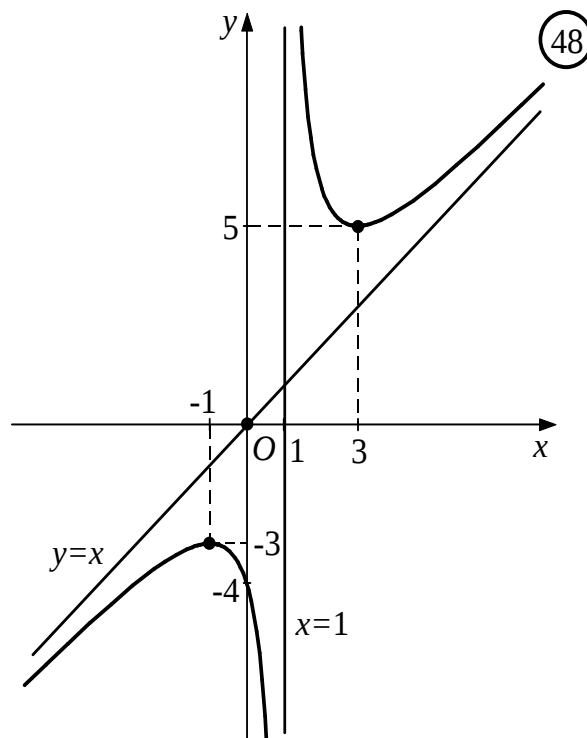
Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

$$\text{Επίσης έχουμε:} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -			- 0 +	
$f''(x)$	-			+	
$f(x)$	$-\infty$ -3 $-\infty$ T.M.			$+\infty$ 5 $+\infty$ T.E.	



2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

ii. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

iii. $f(x) = x^4 - 2x^2$.

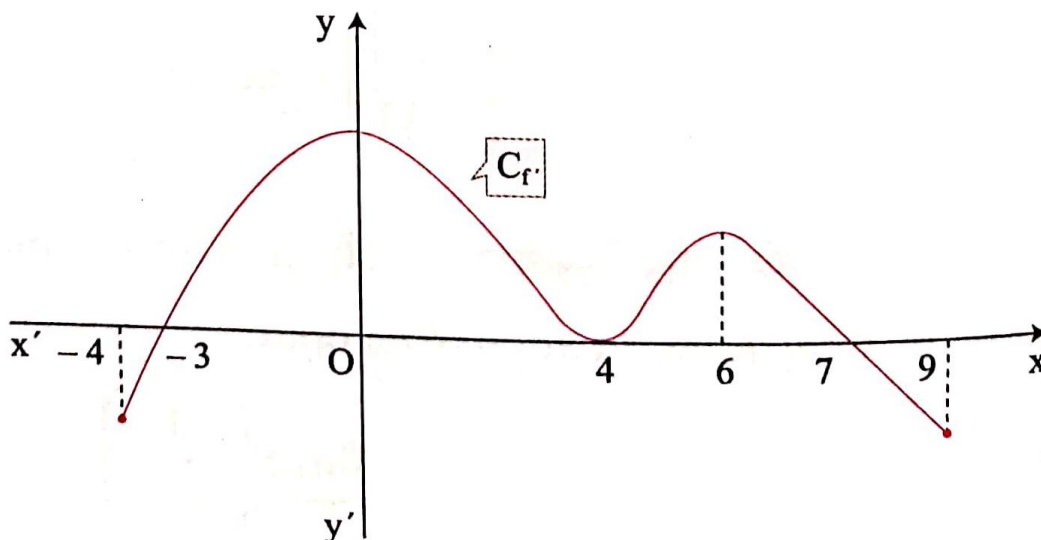
2) Ομοίως τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

3) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

4) Δίνεται μια συνάρτηση $f: [-4, 9] \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και ισχύουν : $2f(9) = 2f(0) = f(-4) = f(4) = 2$, $f(6) = 3$, $f(7) = 5$, $f(-3) = 0$.



- Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ τέσσερις ρίζες.
- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, καθώς και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.
- Με βάση τα δεδομένα και τα συμπεράσματα από το προηγούμενο ερώτημα, να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f .
- Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο καμπής της C_f με οριζόντια εφαπτομένη.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 2.9 – 2.10

ΘΕΜΑ 2 #33995

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 10)
β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)
γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1". (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 #35602

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ με $x \neq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon'): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 7)
γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #27084

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f . (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2 #34439

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α)
i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

Αν $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ τότε:

- β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'. (Μονάδες 7)
γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 #31547

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$. (Μονάδες 10)
β) Να εξετάσετε αν η f είναι
i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)
ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 2 #25748

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$. (Μονάδες 8)

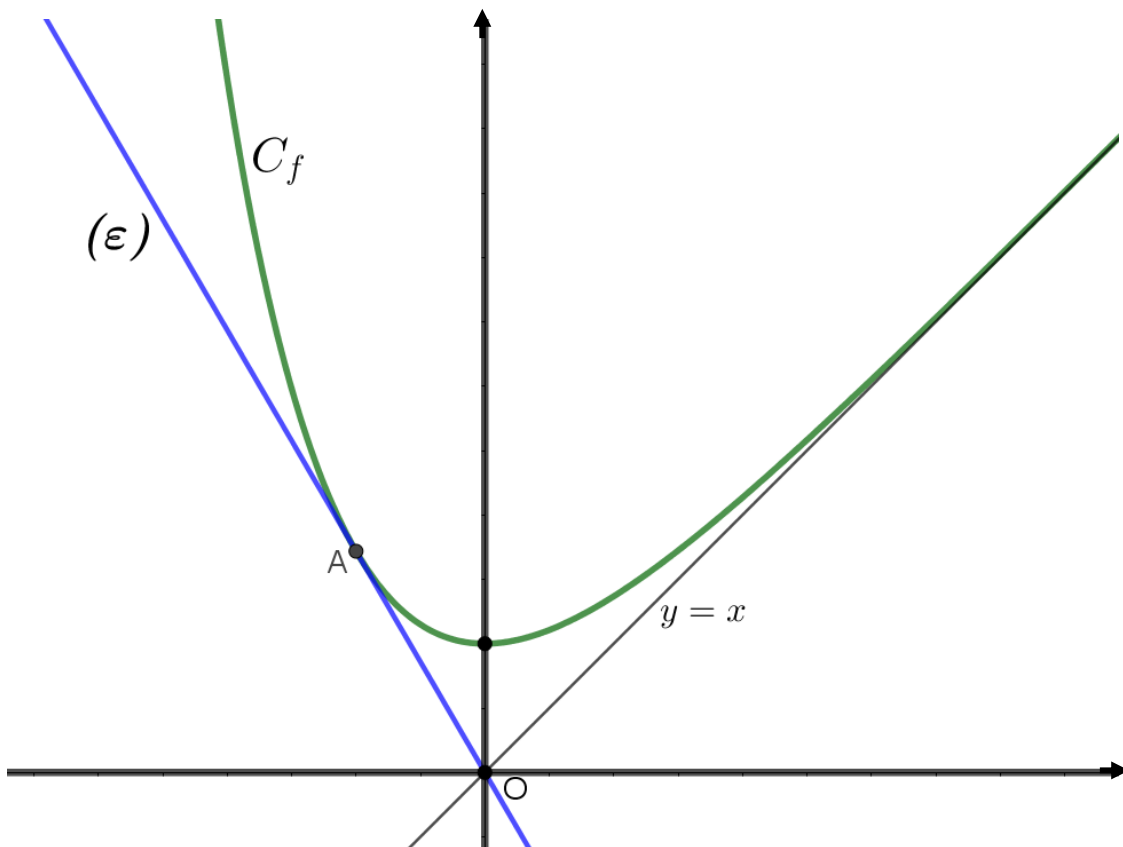
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #23530

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #33999

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+1)$, $x > 0$ είναι σταθερή. (Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x} \leq g(x) \leq \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #33648

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g . (Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x = \alpha$, $1 < \alpha < e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία A, B. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος AB γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #31746

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$. (Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #28314

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\lambda x+1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f . (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #28342

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha < 1$.

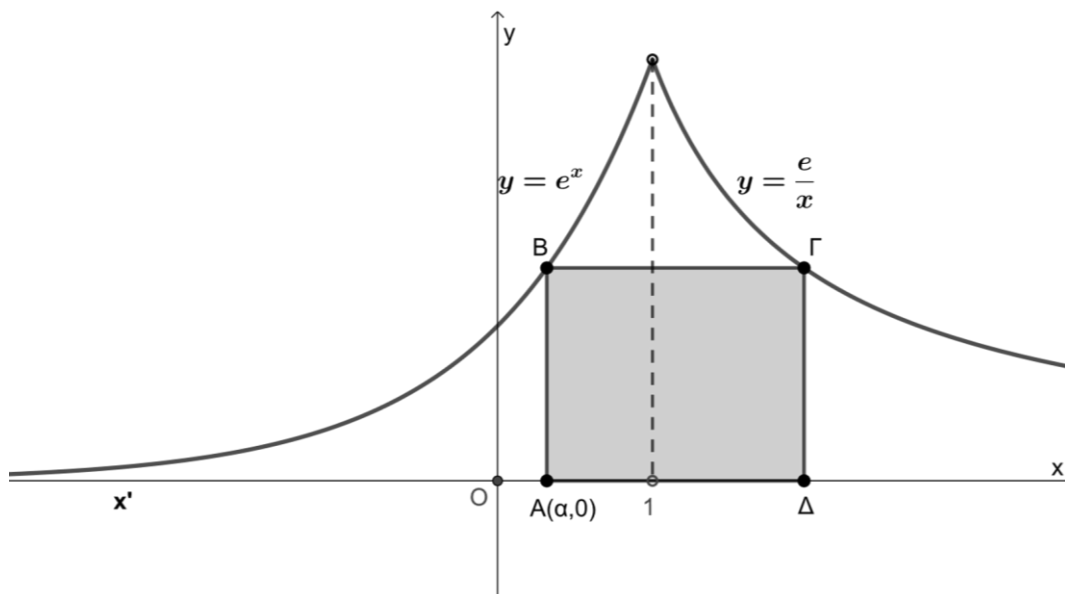
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4 #29130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

iii. Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

iv. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 06)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ 4 #24759

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #24579

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 07)