

Μαθηματικά κατεύθυνσης
Γ' Λυκείου
100+1
Επαναληπτικές ασκήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης Ευάγγελος Τόλης

www.askisopolis.gr

2η έκδοση
Μάρτιος 2016

Εκφωνήσεις

Παράγωγοι

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 5x - 2$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_1 = 3$.

ε) Υλικό σημείο M κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 8cm/sec . Να βρείτε:

i. Την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $K(3,1)$.

ii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο M , τις προβολές του σημείου M στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο A .

2. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f' αντιστρέφεται.

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

δ) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$.

ε) Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

3. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0$ και $f(0) = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3 - e^{-x}$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής $[a,b]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-b}(b-a) \leq e^{-a} - e^{-b} \leq e^{-a}(b-a)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-1} - e^{-x}}{x - 1} = \frac{1}{e}$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $f(f(x_0)) = \frac{3e-1}{e}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 2\eta\mu x + \beta, & x < 0 \\ 1, & x = 0. \\ \alpha\eta\mu x - \beta x + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Έστω $\alpha = \beta = 1$.

β) Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$, όμως υπάρχει σημείο της C_f στο διάστημα αυτό που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

δ) Να βρείτε διάστημα $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 2016$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g

δ) Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C_f, x \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής του y , αν υποτεθεί ότι $x'(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$.

6. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{2x}}{x - 2} = -\frac{5}{2}$ και

$f(x) = f(x + 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_1 = 6$

γ) Να βρείτε τη τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 2x + 2\lambda$.

δ) Δίνεται ορθή γωνία $\angle XOY$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Ox και Oy αντίστοιχα. Ένα δοκάρι είναι τοποθετημένος κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB . Το κάτω μέρος του δοκαριού

ολισθαίνει πάνω στον ημιάξονα Ox με ρυθμό 1m/sec . Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή του δοκαριού απέχει από την αρχή των αξόνων 3m , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής
 i) της οξείας γωνίας θ που σχηματίζει το δοκάρι με τον x' .
 ii) την ταχύτητα που πέφτει το πάνω μέρος του δοκαριού.
 (Δίνεται ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ όπου Γ, Δ τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες)

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι

- $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(A) = \mathbb{R}$
- $g(x) = e^x + x + 1$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g αντιστρέφονται.

β) Να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(0)$

γ) Αν θεωρήσουμε ότι η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το $(g^{-1})'(2)$.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + \beta x^2 - 2$, $x > 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής το $A(1, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = 1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} + (x^2 - 1)^2 = 0$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $2 \ln x + x^2 \geq 2 \frac{1+e^2}{e} x - e^2 + 2$ για κάθε $x \geq 1$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x)(2f'(x) - f(x)) = f(x)(f'(x) - 2f''(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 2f'(0) = 1$
- $f(g(x)) + g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

δ) Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $g \circ g$, να λύσετε την ανίσωση

$$e^{\frac{(g \circ g)(x)}{2}} + (g \circ g)(x) - g(x^2) > 0$$

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$.

στ) Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $3g(x) + 2 - 2x \leq 0$.

10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf'(x) - xf(x) = e^x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x (\ln x + 1)$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x - ke^{-x} + 1 = 0$ για τις διαφορετικές τιμές του πραγματικού αριθμού k .

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

11. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f'(2) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

$$\text{Έστω ότι } f(2) = 5, f(4) = 9$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_3)f'(x_2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$.

ε) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Αν $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x + 1$, $x \in [2, 4]$.

12. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f(1) = 0$,

$$f(2) = \ln 2 \text{ και } f(3) = \ln 3. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $(f'(\xi))^2 + f(\xi)f''(\xi) = \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2}$.

Έστω ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$

γ) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

13. α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x^2 + 1) < x$ για κάθε $x > 0$.

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(x) = 3(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1] - 2x^3 + 3, x \in \mathbb{R}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln(x^2 + 1) = \frac{2x^3 - 3 + \lambda}{3(x^2 + 1)} + 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \leq e^{a+b}$ για κάθε $a, b > 0$.

14. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f'(0) < 0$. Να αποδείξετε ότι:
- υπάρχει $\rho_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.
 - Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.
 - Αν η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
 - Αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = x$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1$.
15. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f(a) < f(b) = 0 < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
 - Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.
 - Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) < 0$.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = a^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b) .
16. Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$.
- Έστω ότι $6xf(x) \neq (3x^2 - 12)f'(x)$, για κάθε $x \in [-2, 2]$. Να αποδείξετε ότι:
 - $f(2)f(-2) \neq 0$.
 - Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 2)$.
 - Έστω ότι $6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και $f(0) = -48$. Να αποδείξετε ότι:
 - $f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48$, $x \in [-2, 2]$.
 - η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 2)$.
17. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1$ και $f(4) = 6$.
- Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2, 4)$.
 - Έστω ότι η f είναι κοίλη,
 - να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2, 4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
 - Αν $f(3) = 10$ και $f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (2, 3)$, να δείξετε ότι $f(x) = 4x - 2$ για κάθε $x \in [2, 3]$.

18. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, $a < \beta$, με $f(a) < 0 < f(\beta)$,

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = \frac{f(a)+f(\beta)}{2} \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

β) Υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$.

γ) Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2}{3}f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2a+\beta}{3}\right)$.

19. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$x(e^{f(x)} + 1)f'(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$.

γ) Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$g(1) = 0 \text{ και } 1 \leq g'(x) \leq 1 + \frac{f(x)}{x^2} \text{ για κάθε } x \geq 1. \text{ Να αποδείξετε ότι η ευθεία}$$

$y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f^{-1}(x) - 1)f(x)].$$

20. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, 10]$.

Αν $f(0) = 1$, $f(10) = 21$ και $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) η ευθεία $x - y + 1 = 0$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f και $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in [0, 10]$.

γ) υπάρχει $\xi \in (0, 10)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > \frac{1}{10}$.

δ) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 2$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(0, 10)$.

21. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x)f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω επιπλέον ότι για τη συνάρτηση f ισχύει ότι

$$f(x)f'(x) - e^x(f(x) + f'(x)) = x - e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(1) = e - 1 \text{ και } f(-1) = \frac{1}{e} + 1.$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x$

δ) Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

ε) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a + e^b}{2}$.

22. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) - f(x) = f(x) \ln x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^x, x > 0$.

β) Αν $f(x) \leq x^{x-1}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln x}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x}$ για κάθε $x \geq 1$

δ) Έστω $g(x) = f(x)f(1-x), x \in (0,1)$.

i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(a) + g(b) \geq 1$ για κάθε $a, b \in (0,1)$.

23. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f(\sqrt[50]{50}) > f(\sqrt[60]{60})$.

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

24. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f'(a) = 3f(a+2)$,

$$f'(a+2) = f(a+2) \text{ και } f(a+3) = 0, a \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Υπάρχει $x_0 \in (a, a+2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η f δεν είναι 1-1.

γ) Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$ και $g(x) = \ln x - x + 1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f, g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $3e^{x-1} + 3x + x^3 = 3x \ln x + 3x^2 + 4$.

26. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x)f'(x) - \ln x = 0 \text{ για κάθε } x \geq 1 \text{ και } f(e) = 1. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $f(x) = \ln x, x \geq 1.$

β) η f αντιστρέφεται και η $y = e^x, x \geq 0$ είναι η αντίστροφή της.

γ) $e^{f(x)+1} \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x)(e^{f(x)} - 1) + e$ για κάθε $x \geq 1.$

δ) Αν $f^{-1}(x) \geq x^a$ για κάθε $x > 1, a > 0$, τότε $a \leq e.$

27. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

- $f'(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

- $f(0) = 0$

α) Να βρείτε το πρόσημο και τις ρίζες της συνάρτησης $g(x) = f(x) - 2x$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f.$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $y = 2x$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο στο (α, β) με $\alpha \cdot \beta < 0.$

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - 2x, x > 0.$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x = \frac{2x-2}{\ln x}.$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $f.$

ε) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln a}{a} + \frac{\ln b}{b} \leq \frac{2}{e}$ για κάθε $a, b > 0.$

στ) Να αποδείξετε ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a > e.$

29. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f^2(x) = x^6.$ Αν $f(1821) = -1821^3$ και

$$f(-1821) = 1821^3 \text{ τότε:}$$

α) να βρείτε τις ρίζες της $f.$

β) να βρείτε τον τύπο της $f.$

γ) Αν $f(x) = -x^3$ να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}.$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ με $D_f = (0, \pi)$ και τα σημεία $A(4\theta, \eta\mu 4\theta),$

$$B(4\theta, -\eta\mu 4\theta) \text{ με } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ορθογώνιο στο O .

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ισόπλευρο.

31. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) + 2f(-h)}{h^2} > 0$,

$f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η $g(x) = |f(x) - x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f''(0) > 0$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια, να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f στην ευθεία $\zeta: x - y - 2016 = 0$, καθώς και την απόστασή του από αυτή.

γ) Να δείξετε ότι $e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x + 1)f(e^{2x})$, για κάθε $x > 0$.

32. α) i. Αν $a \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-a| - |x+a|}{x^3}$.

ii. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2} - a}{|x| - a}$, $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε για τις διάφορες τιμές του a , το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. Αν $|g(x)| \leq 2016$, να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)g(x)] = 0$.

33. Δίνονται οι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[3, 6]$ συναρτήσεις f, g . Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 3,99$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, $f(x) \neq 0$ στο $[3, 6]$, $f(3) + f(6) = f(5)$ και $g(x) = 2f(x) - xf(6)$ στο $[3, 6]$ τότε να δείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [3, 6]$.

β) υπάρχει $\xi_1 \in (3, 6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

γ) υπάρχει $\xi_2 \in (3, 6)$ ώστε $2f'(\xi_2) - f(6) = 0$.

δ) Αν επιπλέον ισχύει $f(3) > \frac{3}{2}f(6)$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (3, 6)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_3) = 0$.

ε) Αν επιπλέον ισχύει f κυρτή, να βρείτε το πρόσημο της g στο $(\xi_3, 6)$.

34. α) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 4 = f(-2)$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 4f(x) - 3$ έχει τουλάχιστον 4 ρίζες.

β) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $(\sqrt[n]{n})^x = x$, $x > 0$ έχει μόνο δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ όπου n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1.

35. α) Δίνεται συνάρτηση f περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$. Αν όλες οι εφαπτόμενες της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να δείξετε ότι $\sin x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και

$$g(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2^v \left[3(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 3a^2 \right] + x^v \left[2(2-x)^2 + 2e^{a^2-1} \right]}{2x^v + 3 \cdot 2^v} \text{ για κάθε } x \neq 2.$$

Να βρείτε τον τύπο της g και τον θετικό πραγματικό αριθμό a .

36. Δίνεται μια μπάλα διαμέτρου d και ένα ελαστικό κυκλικό στεφάνι που μεταβάλλει τη διάμετρό του σύμφωνα με τον τύπο $f(t) = \frac{\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t} + 30 - 2\sqrt{2}$, όπου t σε ώρες και

$f(t)$ σε cm με $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Ρίχνουμε τη μπάλα προσπαθώντας να περάσει μέσα από τη κυκλική στεφάνη.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

β) Τη χρονική στιγμή που μια μπάλα διαμέτρου $d=20\text{cm}$ έχει την μικρότερη πιθανότητα να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

γ) τη μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που μπορεί ανά πάσα στιγμή να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

δ) Βρείτε τη μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που θα είχε πιθανότητα κάποια στιγμή με $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

37. Έστω περιττή συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 1$. Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f \circ f$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f \circ f$ στο $+\infty$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$.

δ) Αν $g(x) = f(x) + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1 - e^{x_0}$.

38. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x^2 \ln \frac{1}{x^2} - x \right) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 5}{x + 1}.$$

β) Να δείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = 2$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες

$x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

ε) Ένα υλικό σημείο M κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,5)$.

Ολοκληρώματα

39. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{f^{-1}(x) + x}$.

στ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε να βρείτε το x_0 .

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = e^{1-x}$.

40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 11) - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-3, 3)$ τέτοιο, ώστε $|f'(x_0)| > \frac{1}{6} \ln \frac{6}{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $2 \leq \frac{1}{6} \int_{-3}^3 e^{f(x)} dx \leq 11$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln(x^2 + x + 4)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 1)$.

41. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = e^{x^2} - x^2, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta), a < \beta$, τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = 2\xi_2 e^{\xi_2^2} - \beta - a$.

στ) Αν $f(1) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

42. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ για την

οποία ισχύει: $f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = \lambda e^\lambda$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

43. Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{(a-2)x^2 + \beta x + 1}{x - \gamma}, a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει

ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = 2$.

α) Να δείξετε ότι $a = \beta = \gamma = 2$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε μια παράγουσα F της f στο διάστημα $(2, +\infty)$.

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(2, +\infty)$ την εξίσωση $(f(x) - 2)^5 = e^{6-2f(x)}$.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα

$x'x$ και τις ευθείες $x = 3$ και $x = \lambda, \lambda > 3$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \neq 2$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

• $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι:

$$\text{ii) } \int_0^1 f^{-1}(x) dx = \frac{3}{8}$$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + f'(\xi) = e^{1-\xi} f'(\xi)$

45. Δίνεται οι παραγωγίσιμες στο $[-2,1]$ συναρτήσεις f, k για τις οποίες ισχύει:

- $e^{f(x)} + f(x) = e^{3x^2-3} + x^3 - 3x + 2, \quad x \in [-2,1] \quad (1)$
- $k(x) = f(x) - 1$
- $f(-2) = f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad x \in [-2,1]$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της k .

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της k .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^x (f(x) - x^3 - 2)$ την ευθεία $x=1$ και τον άξονα $y' y$.

46. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + f(x) = 4x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha \leq \beta$.

ε) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 1821$.

στ) Αφού αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, να δείξετε ότι $2f(x) - 2x \leq 1$ για κάθε $x > 0$.

ζ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f^2(x) dx < \frac{9}{8}$

η) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

θ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ι) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $B(17, 4)$ ανήκουν στη C_f .

47. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$x^2 f''(x) + 3x f'(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 0, \quad f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^\lambda = e^x, \lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \leq e^{\frac{3}{e}}$ για κάθε $a, b, \gamma > 0$.

δ) Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $g^2(x) = 2 \int_1^x f(t) dt, \quad x \geq 1$ και $g(e) = 1$.

ε) Να δείξετε ότι $1 - \frac{a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$ με $1 < a < b$.

48. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)e^x + f'(x)(1 - e^x) - f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f'(0) = 0 \text{ και } f(0) = e.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x+e^{-x}}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$ στο $+\infty$.

γ) Αν $g(x) \geq \lambda x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

δ) Αν $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = a$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

ε) Υλικό σημείο M κινείται επί της C_g έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του να είναι θετικός αριθμός. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι ίσος με το μισό του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

49. Έστω οι συναρτήσεις f, g , παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(e) = 1 = -g(e), f'(x) = e^{g(x)} \text{ και } g'(x) = -e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$.

β) $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x > 0$.

γ) $f(x) = \ln x$.

$$\delta) 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt = +\infty.$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

51. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $2016(e^{x_0} - 1) = 2015(e^{x_0} + 1)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) + 2f'(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I = \int_0^1 f^2(x) dx$ και $J = \int_0^1 x[1 - f^2(x)] dx$.
- ε) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.
- στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.
- ζ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

52. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)(f(x) + x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.
- β) Να δείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.
- γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.
- δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- ε) Να δείξετε ότι $\int_x^{x+1} \sqrt{4t^2 + 4} dt > 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι : $xf'(x) + f^2(x) = 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(e) = 1$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.
- β) Αφού δείξετε ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι $ef(x) + x - 2e \geq 0$ για κάθε $x > 1$.
- γ) Να δείξετε ότι $\int_e^{2e} \frac{1}{\ln x} dx > \frac{e}{2}$
- δ) Να δείξετε ότι $e \ln \frac{a}{\beta} + \ln a \cdot \ln \beta (\beta - a) > 0$ με $e < a < \beta$.
- ε) Έστω ότι η τετμημένη του σημείου $K(k, f(k))$, $k > 1$ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $2k \text{ cm/sec}$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο K με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $k = e$, δίνεται από τη σχέση $\theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0)$.

54. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $xf''(x) + (2-x)f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$, $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $3e^{x-3} - x = 0$.

γ) i) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα

ii) Να δείξετε ότι $e^{x-2} \geq \frac{x^2}{4}, x > 0$

δ) Να βρείτε το $a > 1$ για το οποίο ισχύει ότι: $\int_1^a f(x) dx = e^3 \ln 3 - \int_1^a e^x \ln x dx$

55. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

β) Αν x_0 η θέση ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $x_0 \in (1, 2)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x^2 + 6 \ln x) = 2(6x - 1)$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

56. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα αυτό για την οποία ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) - xf'(x) + x + 1$ για κάθε $x > -1$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$

β) Να δείξετε ότι $\int_1^e (x+1)^e dx > \int_1^e e^{\frac{1}{x+1}} dx$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f (αν υπάρχουν).

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x > -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$. Αφού αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής

στο $x_0 = -1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από η γραφική παράσταση της g και τους άξονες.

57. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)} + e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} + (e^{f(x)} - x)^2 = 6x^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(x-1) = f(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - f(e^{2x}) + f(e^x - 1) + 1 - x = e^x$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx = \int_1^4 \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} dx$

58. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x) - f^2(x) = x + 3f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $-1 - 2x < 2f(x) < 1 + 2x$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = -\pi^2 - 2\pi$.

59. α) Αν f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και υπάρχει

$$x_0 \in [a, b] \text{ ώστε } f(x_0) < g(x_0) \text{ δείξτε ότι } \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2015) < \int_1^{2016} f(x) dx < f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{f(x)} = 2$ δείξε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(16x)}{f(x)} = 2^4$

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2016)}{f(x)}$

60. Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) \neq 0$ με την

f^{-1} παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$\int_1^2 e^{f(x)} (f^{-1})'(f(x)) dx + \ln x + f(x) = -1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f και της f^{-1} .

β) να βρεθεί ο τύπος της f .

γ) Αν για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ορίζεται η $f(g''(x))$ για κάθε x

πραγματικό να λυθεί η εξίσωση $g(x) = g'(0)x + g(0)$.

61. α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο πεδίο ορισμού της δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και γνησίως αύξουσα δείξτε ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

γ) Αν η f είναι 1-1, $f(0) = 0$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, η αντίστροφή της είναι

$$\text{συνεχής και σε κάθε διάστημα } [x_1, x_2] \text{ με } 0 < x_1 < x_2, \text{ ισχύει } \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{dx}{[f^{-1}(x)]^2} > \int_{x_1}^{x_2} \frac{2f(x)}{x^3} dx$$

και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ τότε:

- i) να βρεθεί η μονοτονία της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ στο $(0, +\infty)$.
- ii) να βρεθεί η μονοτονία της f στο $[0, +\infty)$.
- iii) αν η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, να δείξετε ότι: $f(1) > 3 \int_0^1 f(x) dx$
- iv) να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) \geq 3 \int_0^1 f(x) dx$

62. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει ότι } f(x) = \frac{x + \eta \mu(f(x))}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .
- β) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να υπολογίσετε το $f(0)$.
- γ) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.
- δ) Να υπολογίσετε το: $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

63. Έστω συνάρτηση f κυρτή στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο $a > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x)}{x} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x)$, $x \in (a, \beta)$.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $g(x) = xf(x)$, $x \in [a, \beta]$.
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε: $\xi f(\xi) = \int_a^\beta 2f(x) dx$.
- δ) Αν $\xi = \beta - \beta f(\beta) + \int_a^\beta 2f(x) dx$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 1$.

64. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)f'(x)f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν

$$f(1) + f(3) = f(2) + f(4) - f'(x_1)f'(x_2), \text{ τότε:}$$

- α) Να βρείτε την μονοτονία της f .
- β) Να δείξετε ότι κάθε μη κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφικά παράσταση της f σε δυο το πολύ σημεία
- γ) Υπάρχουν $\xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = f'(\xi_3) + f'(\xi_4)$.
- δ) Αν $f(0) = f'(0) = 1$ και ισχύει $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:
 - i) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.
 - ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$ εφάπτεται της συνάρτησης $g(x) = \ln x + 2$.
 - iii) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.
 - iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g της παραπάνω εφαπτομένης της $x = e^{-2}$.

ν) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία $y = x - 2017$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln \left[\left(\frac{|x| - x}{2} \right) (x^2 - 1) \right] + x - x \ln(x^2 - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -e$.

δ) Δείξε ότι $\ln(-x) \leq 2x + e$ για κάθε $x < -1$.

ε) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -2e$ και $x = -e$.

66. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x) + 1$, $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 3) = 0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 3}{g(x) + 1}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο $+\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

67. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 4)$.

δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f^2(x) dx = \int_0^3 xf(x) dx + 24$.

68. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1821$.

α) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)f(x) - 4x + 2}{xf(x) - x^2 - 1820x} = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f' .

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(a+1) - f(a) < \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx - \int_a^{a+1} f(x)dx$.

στ) Αν επιπλέον $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

69. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = f(3-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx = \int_{2-a}^{3-a} f(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 3f''(x)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της C_f με τετμημένες $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (3,4)$ αντίστοιχα, στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

ε) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

70. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$f(x) + x = xf'(x) + 1$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x \ln x - x + 1$

β) $50^{50} > e^{49}$

γ) $\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 e^{x-1} dx$

δ) Υπάρχει μοναδικός $x_2 > 0$ τέτοιος, ώστε $f(x_2) \ln f(x_2) = f(x_2) + 1$.

71. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = \frac{1}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

β) Χωρίς τη χρήση του θεωρήματος Fermat να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$.

Έστω ότι $f''(x)f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

γ) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

δ) $\int_{-a}^a x^{2k} \ln f(x) dx = 0$, $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

ε) $e^{\frac{x_1}{2}} + e^{\frac{x_2}{2}} - 2e^{\frac{x_1+x_2}{4}} \geq 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

72. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

α) Να εξετάσετε την συνέχεια και να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f σε σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.

γ) Να δείξετε ότι η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει την C_f .

ε) Να εξετάσετε αν η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

στ) Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της C_f και της εφαπτομένης ε.

73. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \int_a^1 e^{tx} dt, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} = 2016f(x) + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $2f(x) - x - 2 \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_2^4 \frac{e^x - 1}{x} dx > 5$.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x}f(\sqrt{x}) + 1$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

74. α) Να αποδείξετε ότι $x > \ln x$ για κάθε $x > 0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t - \ln t} \cdot \frac{t-1}{t} dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) - \ln f(x) = e^{2016}$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2f(x) \frac{x-1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

75. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ για κάθε } x > 0, f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

β) Έστω $g(x) = \begin{cases} x^2 f(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε $x > 0$.

δ) Αν υπάρχει $a > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι $x^e \leq a^x$, να αποδείξετε ότι $a \geq e$.

ε) Αν $\lambda f(x) \geq e^x - \frac{e}{x}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 2e$.

76. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

γ) Αν $f(0) = \sqrt{5}$, να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + x$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 [f^2(x) + x^2 f'(x)] dx = \frac{16}{3} + \sqrt{5}$.

77. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f''(x) > e^x + 2$ για κάθε

$x > 0$, $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) $f(x) \geq e^x + x^2 - 1$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

δ) Η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) $\int_0^1 f(x) dx > e - \frac{5}{3}$

στ) $\int_0^1 x f''(x) dx = f'(1) - f(1)$.

78. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την

$$\text{οποία ισχύει } f^3(x) + 2f(x) = 3 \ln x (1)$$

α) Να βρείτε το πρόσημο και τη μονοτονία της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(e^{f(x)})) = 0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f^3(x) + 2f(x) - 3}{x - e}$.

στ) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

ζ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^3(x) + f(x) - 3}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

η) Να βρείτε τον $a > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι: $\int_{\ln a}^{a-1} f^{-1}(x) dx = 0$.

θ) Να αποδείξετε ότι: $\int_{\frac{1}{a}}^1 f^{-1}(ax) dx - \frac{1}{a^2} \int_1^a x f^{-1}(x) dx \geq 0$, $a > 0$.

Αρχική συνάρτηση

79. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$ με $\int_1^3 f(x) dx = 0$, για την οποία υπάρχει $x_0 \in [1,3]$ με $f(x_0) \neq 0$ και F μια παράγουσα της f στο $[1,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1,3)$.

β) Αν $f(1) = f(3) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ τέτοια, ώστε

$$f''(x_1)f''(x_2) < 0.$$

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι

i. $\int_1^2 f(x) dx < 0$

ii. η εξίσωση $x^2 F(x) = (x-5)f(x) + x^2 F(1)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,3)$.

80. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $xf'(x) + f(x) = \sin x + 2x$, $x > 0$ και $f(\pi) = \pi$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2}{x}$, $x > 0$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, όπου F αρχική της f στο $(0, +\infty)$.

81. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f''(x) - f'(x) = e^x (2x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(0) = f'(0) = 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x (x^2 - x + 2) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - x = e^{-x} - 2$.

γ) Αν F αρχική της f , να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

δ) Αν $F(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή και ισχύει ότι $F(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

82. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$ για την οποία ισχύει

ότι $2f'(x)(f(x) - 1) = 3f''(x)$, $f(x) \neq 1$ για κάθε $x > -2$, $f'(0) = \frac{3}{4}$ και

$f(0) = -\frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = x - 1 - 3\ln \frac{x+2}{3}$, $x > 0$ είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$.

γ) $3e^{\frac{x-1}{3}} - x - 2 \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

δ) $(e^x - 1)(ex + 2) \geq (e^x + 2)(ex - 1)$, $x > 0$.

83. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = (2x+1)e^{-f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω F μια παράγουσα της f . Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$ για το οποίο ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + \lambda x - F(0)}{x^3 + \lambda^2 x} = 1.$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\ln 3 < \int_0^2 \ln(x^2 + x + 1) dx - \int_0^1 \ln(x^2 + x + 1) dx < \ln 7$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x)) = +\infty$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Αν F αρχική της f , να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

85. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$

86. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(2) = 0, \quad f(3) = 3, \quad f'(3) = 1 \text{ και } f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [2, 3]. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

γ) $f(x) \geq 3(x-2)$ για κάθε $x \in [2, 3]$.

δ) $\int_2^3 f(x) dx \geq \frac{3}{2}$.

ε) Έστω F μια παράγουσα της f στο $[2,3]$. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_1 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $F(x_1) = (3 - x_1)f(x_1) + F(2)$.

ii) Υπάρχει $x_2 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $F(x_2) + f(x_2) = x_2 + F(2)$.

87. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)(x^2 + 1) - f(x)(x - 1)^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^x - \lambda x^2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω F αρχική της f με $F(0) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $2e^\xi = (\xi^2 + 1) \int_0^2 f(t) dt$.

δ) Να δείξετε ότι $2e^\xi > (\xi^2 + 1) \int_0^1 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt$.

ε) Να δείξετε ότι $(x - 1)F(x - 1) < xF(x)$, $x > 1$.

88. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\ln\left(\int_0^1 f(x) dx\right) = x_0^2$.

γ) η f είναι άρτια και ισχύει: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$, $a > 0$.

δ) $2 < \int_0^2 e^{x^2} dx < 2e^4$.

ε) η f είναι κυρτή και συνέχεια ότι $e^{x^2} + e \geq 2ex$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

89. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) - f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > -1$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < -1$ για κάθε $x < 0$.

β) υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $a < b$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + 1$.

γ) αν $\int_0^3 f(x) dx > 4$, τότε υπάρχει $\rho_1 \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε $(f(\rho_1) - 2)\rho_1 = 12e^{\rho_1 - 3}$.

δ) $F(x) - F(x - 1) < f(x) < F(x + 1) - F(x)$, $x > 1$, όπου F παράγουσα της f .

90. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f'(x)f(-x) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^3}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $F(e^x) - F(ex) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

δ) Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $(b-a)e^{\xi^3} = \int_a^b f(x) dx$.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 f(x)$, την οριζόντια ασύμπτωτη της στο $-\infty$ και τον άξονα $y' y$.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $e^{\xi^3} = 2 \int_0^1 x e^{x^3} dx$.

91. Έστω F αρχική της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ με $F(0) = 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της F για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt < \frac{1}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $F\left(\frac{1}{x}\right) + F(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (F(x+1) - F(x))] = +\infty$.

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_F στο $x_0 = 0$.

στ) Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα $x' x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$, να αποδείξετε ότι $E < 6$.

92. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[a, b]$ με $f(a) = f(b) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(a)f'(b) < 0$

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq f'(x_0)$.

$$\text{Έστω ότι } \int_a^b f(t) \left(\int_a^b f(x) dx \right) dt + \int_a^b f(x) dx - 2 = 0.$$

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x' x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$.

ε) Έστω F αρχική συνάρτηση της f στο $[a, b]$ και $\beta = a + 4$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi) + 1 = 0$.

ii) $2f(x+1) < f(x+2) - f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ με $\beta > a + 2$.

93. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{2x} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$A(0, f(0))$ είναι η ευθεία $\epsilon: y = 3x + 1$.

Έστω ότι η f έχει συνεχή παράγωγο με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx$

Έστω τώρα ότι η f είναι και κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ε) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 2$, να δείξετε ότι $E > 8$.

94. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x$ και η $g(x) = x\ln 2$. Να δείξετε ότι έχουν δύο κοινά σημεία με τετμημένες 2 και $a > 2$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ που να διαιρεί το εμβαδόν μεταξύ των δύο συναρτήσεων σε λόγο $1/2016$.

β) Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε αν η εφαπτόμενη της C_f τέμνει την C_f και σε άλλο σημείο τότε η f'' έχει τουλάχιστον μια ρίζα ενώ αν εφάπτεται της C_f σε δύο σημεία τότε η $f^{(3)}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

95. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) - f(x) = \int_0^1 f(x) dx + 1 - e \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x$.

β) Αν G αρχική της $g(x) = f(x^2)$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^3} = +\infty$.

γ) Αν $\int_0^1 t^2 f(t^2) dt = 1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = f(x^2)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x^2) dx < \int_2^3 f(x^2) dx$.

96. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) > (1-x)f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) - 1 = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-\infty, 0]$.

γ) Αν F αρχική της f , να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + xF'(x)] = +\infty$.

97. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Έστω G

παράγουσα της $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η G είναι κυρτή.

β) $\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(x)}{x} dx < \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{f(x)}{x} dx$ με $0 < a < b$.

γ) Η εξίσωση $e^x f(x) = x$ έχει το πολύ μια θετική ρίζα.

δ) $f(x) \leq f'(1)x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

ε) $(x+1)f(x) < xf(x+1)$.

στ) $\int_1^2 [G(x) + f(x)] dx = 0$ αν γνωρίζετε ότι $G(1) = 2G(2)$.

98. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(3) = f'(3) = 0$ και F μια παράγουσα της. Έστω $h(x) = F(x) - F(6-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η h έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

β) $2 \int_2^4 f(x) dx < \int_3^5 f(x) dx$.

γ) $\int_3^6 f(x) dx > \int_0^3 f(x) dx$

δ) Υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε $\xi F''(\xi) + 3 = 2\xi - F'(\xi)$.

99. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a,b]$ για την οποία ισχύει ότι $f(a) \int_a^b f(x) dx < 0$ και F μια παράγουσα της στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi_1 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 0$.

β) Υπάρχει $\xi_2 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $F(\xi_2) = F(a)$.

γ) Υπάρχει $\xi_3 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_3) > 0$, αν γνωρίζεται ότι $f(a) < 0$.

δ) Υπάρχει $\xi_4 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $(\xi_4 - b)f(\xi_4) = F(a) - F(\xi_4)$.

100. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a,b]$ για την οποία ισχύει ότι $f(a)f(b) > 0$,

$\int_a^b f(x) dx = 0$ και F μια παράγουσα της στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a,b)$ τέτοια, ώστε $F(x_1) > F(a)$ και $F(x_2) < F(b)$.

β) Η συνάρτηση F δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα του διαστήματος $[a,b]$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (a,b) .

δ) Η F έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής, αν γνωρίζετε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$.

101. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ και $\varphi''(x) + \varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

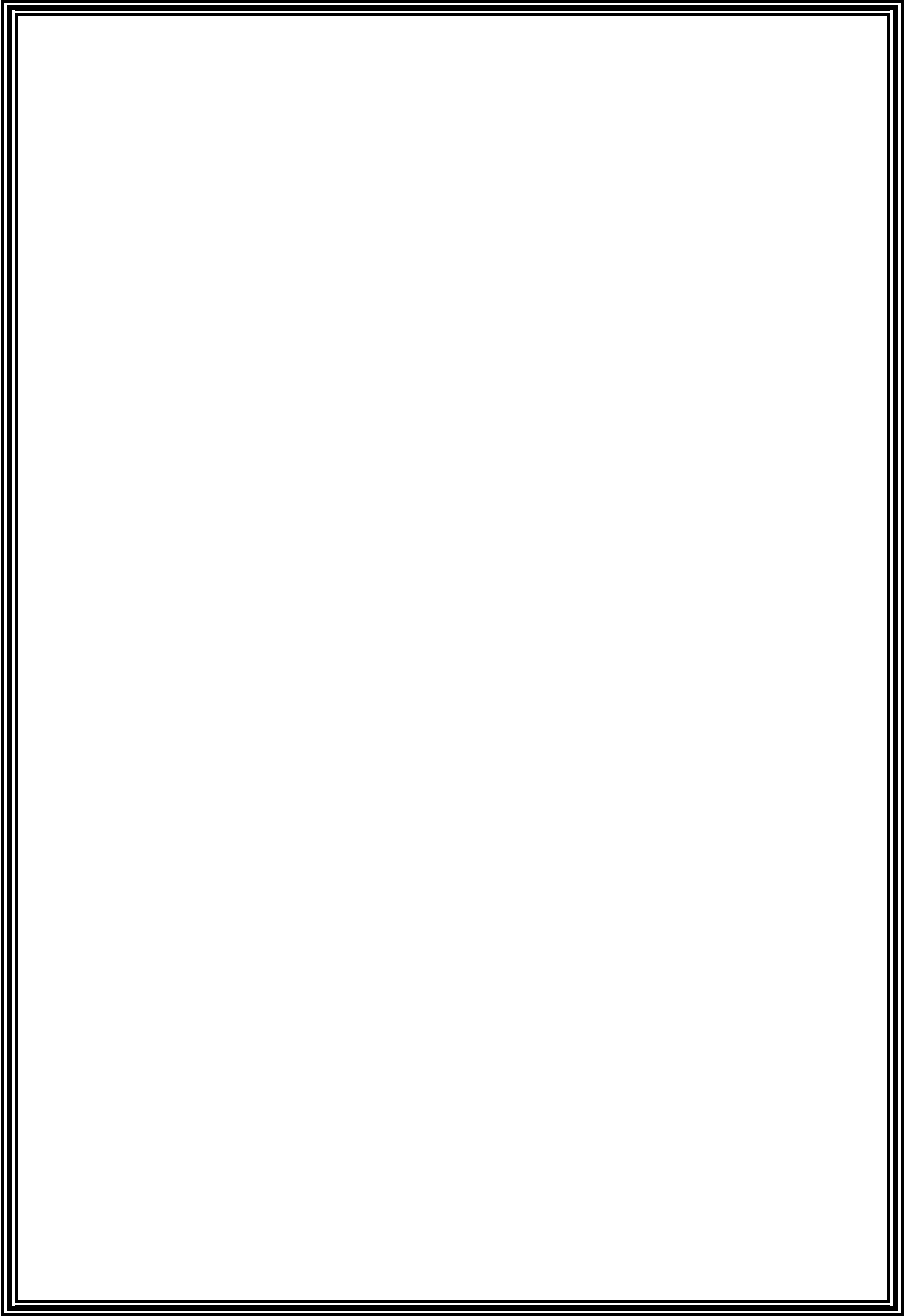
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_1(x) = f(x) - \eta \mu x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του α ερωτήματος και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(\pi, f(\pi))$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

ε) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

στ) Αν G αρχική της g , να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} [G(2x) - G(x)] = 0$.



Παράγωγοι

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 5x - 2$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ είναι

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_1 = 3$.

ε) Υλικό σημείο M κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 8cm/sec. Να βρείτε:

i. Την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $K(3,1)$.

ii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο M , τις προβολές του σημείου M στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο A .

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^7 < x_2^7$ και με πρόσθεση κατά μέλη είναι

$$x_1^7 + x_1 < x_2^7 + x_2 \Leftrightarrow x_1^7 + x_1 + 1 < x_2^7 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

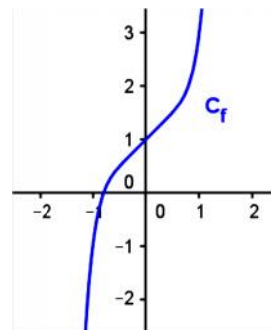
$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικός

$$\rho \in \mathbb{R} \text{ τέτοιος, ώστε } f(\rho) = 0.$$



β) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 5x - 2 \Leftrightarrow x^7 + x + 1 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^7 - 4x + 3 = 0$ να έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x) = x^7 - 4x + 3, x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$,

οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano για τη g στο $[0,1]$ και γι αυτό παραγοντοποιούμε τη g .

1	0	0	0	0	0	-4	3	$\rho = 1$
	1	1	1	1	1	1	-3	
1	1	1	1	1	1	-3	0	

Με βάση το σχήμα Horner είναι $g(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3)$

Έστω $h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3, x \in [0,1]$.

Είναι $h(0) = -3, h(1) = 3$, δηλαδή $h(0)h(1) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

Είναι $g(x) = (x-1)h(x)$ και $g(x_0) = (x_0-1)h(x_0) = 0$.

γ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1 \Rightarrow$ αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , άρα $A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$.

δ) Έστω ότι $f^{-1}(3) = a$ τότε $f(f^{-1}(3)) = f(a) \Leftrightarrow f(a) = 3 \Leftrightarrow f(a) = f(1) \Leftrightarrow a = 1$, δηλαδή

$f^{-1}(3) = 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow [f^{-1}(x^7 + x + 1)]' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(x^7 + x + 1) \cdot (x^7 + x + 1)' = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^{-1})'(x^7 + x + 1) \cdot (7x^6 + 1) = 1 \text{ και για } x=1 \text{ είναι } (f^{-1})'(3) \cdot 8 = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{8}.$$

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_1 = 3$ έχει εξίσωση:

$$y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{8}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$$

ε) Έστω $M(x(t), y(t))$, τότε $y(t) = \frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}$ με $x'(t) = 8 \text{ cm/sec}$.

i. Είναι $(OM) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + \left(\frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{64}x^2(t) + \frac{10}{64}x(t) + \frac{25}{64}} \Leftrightarrow$

$$d = (OM) = \sqrt{\frac{5}{64}(13x^2(t) + 2x(t) + 5)} = \frac{1}{8}\sqrt{5(13x^2(t) + 2x(t) + 5)}$$

$$\text{Είναι } d(t) = \frac{1}{8}\sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}, t \geq 0.$$

$$d'(t) = \frac{5}{16} \frac{2x(t)x'(t) + 2x'(t)}{\sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}} = \frac{5x'(t)(x(t) + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0) = 3$ και $y(t_0) = 1$, είναι:

$$d'(t_0) = \frac{5x'(t_0)(x(t_0) + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(x^2(t_0) + 2x(t_0) + 5)}} = \frac{5 \cdot 8 \cdot (3 + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(3^2 + 6 + 5)}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ cm/sec}$$

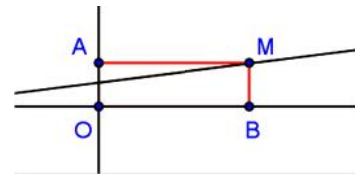
ii. Το ορθογώνιο OAMB έχει εμβαδό

$$E = (OA)(OB) = y(t)x(t) = \left(\frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}\right)x(t) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{8}x^2(t) + \frac{5}{8}x(t)$$

Είναι $E(t) = \frac{1}{8}x^2(t) + \frac{5}{8}x(t)$, $t \geq 0$ με $E'(t) = \frac{1}{4}x(t)x'(t) + \frac{5}{8}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0

$$\text{είναι } E'(t_0) = \frac{1}{4}x(t_0)x'(t_0) + \frac{5}{8}x'(t_0) = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{5}{8} \cdot 8 = 11 \text{ cm}^2/\text{sec}$$



2. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f' αντιστρέφεται.

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

δ) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$.

ε) Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

Λύση

α) Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται, τότε θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $f'(\alpha) = f'(\beta)$. Λόγω του θεωρήματος Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) που είναι άτοπο. Άρα η f' αντιστρέφεται.

β) Επειδή $f(0) = f(1)$ λόγω του θεωρήματος Rolle για την f υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$: $f'(\xi_1) = 0$
Επειδή η f' αντιστρέφεται είναι 1-1, οπότε το ξ_1 είναι μοναδικό.

γ) Αν η f είχε τρεις ρίζες τότε από το Θ.Ρ η f' θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες και η f'' τουλάχιστον μία ρίζα, που είναι άτοπο.

δ) $f'(x) + (2x - 1)f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x) + (2x - 1)e^{x^2-x}f(x) = 0$

Έστω $g(x) = e^{x^2-x}f(x)$, $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$g'(x) = e^{x^2-x}f'(x) + (2x - 1)e^{x^2-x}f(x).$$

Επειδή $g(0) = f(0) = f(1) = g(1)$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi^2-\xi}f'(\xi) + (2\xi - 1)e^{\xi^2-\xi}f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$$

ε) Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα $m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M$, $m \leq f(0,2) \leq M$, $m \leq f\left(\frac{1}{e}\right) \leq M$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$3m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right) \leq 3M \Leftrightarrow m \leq \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3} \leq M.$$

Επειδή ο αριθμός $\frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , υπάρχει

$$x_0 \in [0,1] \text{ τέτοιο, ώστε } f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}.$$

3. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0 \text{ και } f(0) = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3 - e^{-x}$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής $[a, b]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-\beta}(\beta - \alpha) \leq e^{-\alpha} - e^{-\beta} \leq e^{-\alpha}(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-1} - e^{-x}}{x - 1} = \frac{1}{e}$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $f(f(x_0)) = \frac{3e-1}{e}$.

Λύση

$$\alpha) f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) - 2(e^{-x}f(x) - e^{-x}f'(x)) - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x})' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x} = c \Leftrightarrow (f(x) + e^{-x})^2 = c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } (f(0) + 1)^2 = c \Leftrightarrow c = 9 \text{ άρα } (f(x) + e^{-x})^2 = 9 \quad (1)$$

Έστω $g(x) = f(x) + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $g^2(x) = 9 \neq 0$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(0) = 3 > 0$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) + e^{-x} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - e^{-x}$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και 1-1, οπότε δεν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Άρα δεν υπάρχει διάστημα $[a, b]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

γ) Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f'(x) = e^{-x}$, λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{-\xi} = \frac{\beta - e^{-\beta} - \alpha + e^{-\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -\xi > -\beta \Leftrightarrow e^{-\beta} < e^{-\xi} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow e^{-\beta} < \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{\beta - \alpha} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$e^{-\beta}(\beta - \alpha) < e^{-\alpha} - e^{-\beta} < e^{-\alpha}(\beta - \alpha).$$

Όμοια αν $\alpha > \beta$.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{-x} + e^{-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - e^{-x} - (3 - e^{-1})}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\epsilon) f(f(x_0)) = \frac{3e-1}{e} = 3 - e^{-1} \Leftrightarrow f(f(x_0)) = f(1) \Leftrightarrow f(x_0) = 1.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^{-x}) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - e^{-x}) = 3$. Επειδή η f είναι συνεχής και

γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 3)$.

Επειδή $1 \in f(A)$ και $f \nearrow \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - 2\eta\mu x + \beta, & x < 0 \\ 1, & x = 0. \\ \alpha\eta\mu x - \beta x + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

Έστω $\alpha = \beta = 1$.

β) Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$, όμως υπάρχει σημείο της C_f στο διάστημα αυτό που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος αυτού.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

δ) Να βρείτε διάστημα $[a, b] \subseteq (-\pi, \pi)$ στο οποίο να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017$.

Λύση

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα είναι και συνεχής σ' αυτό, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (2\alpha x - 2\eta\mu x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha\eta\mu x - \beta x + 1) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\alpha x - 2\eta\mu x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2\alpha - 2 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2\alpha - 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha\eta\mu x - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = \alpha - 1$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$, πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) Είναι $f(x) = \begin{cases} 2x - 2\eta\mu x + 1, & x < 0 \\ 1, & x = 0. \\ \eta\mu x - x + 1, & x > 0 \end{cases}$

$f(-\pi) = -2\pi - 2\eta\mu(-\pi) + 1 = 1 - 2\pi$, $f(\pi) = \eta\mu\pi - \pi + 1 = 1 - \pi$. Επειδή $f(-\pi) \neq f(\pi)$ δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$. Επειδή $f'(0) = 0$ ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος στο $x_0 = 0$.

γ) Επειδή $f(-\pi)f(0) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

δ) Είναι $f(0)f(\pi) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2] \subseteq (-\pi, \pi)$.

ε) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 2 - 2\sigma\upsilon\nu x = 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$.

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}_-$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$.

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ και η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \eta\mu x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty \text{ γιατί για } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right), \text{ από το}$$

$$\text{κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty \text{ γιατί από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών: } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 1].$$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών: } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 1].$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1].$$

$$\sigma\tau) \eta\mu x_0 = x_0 - 2017 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - x_0 = -2017 \Leftrightarrow \eta\mu x_0 - x_0 + 1 = -2016 \Leftrightarrow f(x_0) = -2016$$

Επειδή $-2016 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 υπάρχει μοναδικός $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0 = x_0 - 2017$.

$$5. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2.$$

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 2016$.
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g .
- δ) Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης C_f , $x \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής του y , αν υποτεθεί ότι $x'(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Λύση

α) Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό

$$\text{είναι } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_0^2} \cdot x + \frac{2}{x_0}.$$

Το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη άρα $-1 = \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -2$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

β) Έστω $\Gamma(x_1, g(x_1))$ το σημείο επαφής, Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = -x + 2016, \text{ έχουμε } \lambda_{\text{εφ}} = -1 \Leftrightarrow g'(x_1) = -1 \Leftrightarrow 2x_1 = -1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - g\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{1}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x - \frac{1}{4}$$

γ) Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη και $\Delta(x_2, f(x_2)), E(x_3, g(x_3))$ τα σημεία επαφής με τις C_f, C_g αντίστοιχα. Τότε η εξίσωση της (ε) για τα σημεία Δ, Ε είναι :

$$y - f(x_3) = f'(x_3)(x - x_3) \Leftrightarrow y - \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{x_3^2}(x - x_3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_3^2} \cdot x + \frac{2}{x_3}$$

$$y - g(x_4) = g'(x_4)(x - x_4) \Leftrightarrow y - x_4^2 = 2x_4(x - x_4) \Leftrightarrow y = 2x_4 \cdot x - x_4^2$$

$$\text{Επομένως } 2x_4 = -\frac{1}{x_3^2} \Leftrightarrow x_4 = -\frac{1}{2x_3^2} \quad (1) \text{ και}$$

$$\frac{2}{x_3} = -x_4^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{2}{x_3} = -\left(-\frac{1}{2x_3^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x_3} = -\frac{1}{4x_3^4} \Leftrightarrow x_3^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

Οπότε η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι η (ε): $y = -4x - 4$

δ) Έστω $M(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του Μ την τυχαία χρονική στιγμή t.

$$y(t) = \frac{1}{2}x^2(t) \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x(t)x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = x(t)x'(t) \quad (1)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής του y.

$$\text{Για } t = t_0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} y'(t_0) = x(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow \cancel{y'(t_0)} = x(t_0) \cdot 2 \cancel{y'(t_0)} \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Είναι } y(t_0) = x^2(t_0) = \frac{1}{4}.$$

Οπότε στο σημείο $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι

διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής του y.

6. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{2x}}{x - 2} = -\frac{5}{2}$ και

$$f(x) = f(x + 4) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_1 = 6$.

γ) Να βρείτε τη τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 2x + 2\lambda$.

δ) Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Ox και Oy αντίστοιχα. Ένα δοκάρι είναι τοποθετημένος κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB . Το κάτω μέρος του δοκαριού ολισθαίνει πάνω στον ημιάξονα Ox με ρυθμό 1m/sec . Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή του δοκαριού απέχει από την αρχή των αξόνων 3m , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

i) της οξείας γωνίας θ που σχηματίζει το δοκάρι με τον x' .

ii) την ταχύτητα που πέφτει το πάνω μέρος του δοκαριού.

(Δίνεται ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ όπου Γ, Δ τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες)

Λύση

α) Θεωρούμε $g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{2x}}{x-2}$, $x \in [0, 2) \cup (2, +\infty]$ οπότε $f(x) = g(x)(x-2) + \sqrt{2x}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x-2) + \sqrt{2x}] \Leftrightarrow f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)(x-2) + \sqrt{2x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[g(x) + \frac{\sqrt{2x} - 2}{x-2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[g(x) + \frac{2x-4}{(x-2) \cdot \sqrt{2x} + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[g(x) + \frac{2(x-2)}{(x-2) \cdot \sqrt{2x} + 2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[g(x) + \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} \right] = -\frac{5}{2} + \frac{2}{4} = -2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2 \text{ με } f'(2) = -2.$$

β) $f(x) = f(x+4)(1)$. Για $x=2$: $(1) \Rightarrow f(6) = f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+4) - f(6)}{x-2} \stackrel{u=x+4}{=} \lim_{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 6} \frac{f(u) - f(6)}{u-6} = f'(6) = -2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο 6 είναι η

$$(\varepsilon): y - f(6) = f'(6)(x-6) \Leftrightarrow y - 2 = -2(x-6) \Leftrightarrow y = -2x + 6$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο 2 είναι η

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 2 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 6$$

Έστω $A(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με τη C_g .

Οπότε $g'(x_0) = f'(2) = -2 \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = -2 \Leftrightarrow 2x_0 = -4 \Leftrightarrow x_0 = -2$ και $g(-2) = 2\lambda$

Το σημείο $A(-2, g(-2))$ ανήκει στην (ε) οπότε $g(-2) = 10 \Leftrightarrow 2\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = 5$

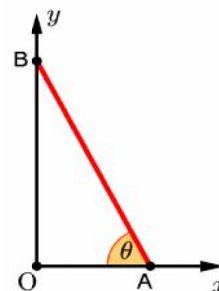
δ) Η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(3,0)$ και $\Delta(0,6)$.

$$(AB) = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = (\Gamma\Delta)$$

Έστω $(0, y(t)), (x(t), 0)$ οι συντεταγμένες του πάνω και κάτω άκρου του πάσσαλου την τυχαία χρονική στιγμή t .

Αν $\theta(t)$ η γωνία θ την τυχαία χρονική στιγμή t τότε

$$\sin\theta(t) = \frac{x(t)}{3\sqrt{5}} \Rightarrow -\eta\mu\theta(t)\theta'(t) = \frac{x'(t)}{3\sqrt{5}} \quad (1)$$



$$\text{Για } t = t_0 : (1) \Rightarrow -\eta\mu\theta(t_0)\theta'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{y(t_0)}{3\sqrt{5}}\theta'(t_0) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$-3\theta'(t_0) = 1 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{3} \text{ rad/sec}$$

$$\beta) \eta\mu\theta(t) = \frac{y(t)}{3\sqrt{5}} \Leftrightarrow y(t) = 3\sqrt{5} \cdot \eta\mu\theta(t) \Rightarrow y'(t) = 3\sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(t) \cdot \theta'(t).$$

$$\text{Για } t = t_0 : y'(t_0) = 3\sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(t_0) \cdot \theta'(t_0) = 3\sqrt{5} \cdot \frac{x(t_0)}{3\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2}}{3} = -2 \text{ m/sec}$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι

- $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(A) = \mathbb{R}$

- $g(x) = e^x + x + 1$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g αντιστρέφονται.

β) Να υπολογίσετε το $(f^{-1})'(0)$.

γ) Αν θεωρήσουμε ότι η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το $(g^{-1})'(2)$.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (1) $\Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$ (2)

$$(1) + (2) \Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Έστω $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ με $x_3 < x_4 \Leftrightarrow e^{x_3} < e^{x_4}$ (3) και $x_3 < x_4 \Leftrightarrow x_3 + 1 < x_4 + 1$ (4)

$$(3) + (4) \Rightarrow e^{x_3} + x_3 + 1 < e^{x_4} + x_4 + 1 \Leftrightarrow g(x_3) < g(x_4).$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

β) $f^3(x) + f(x) = x$ (5)

$$\text{Θέτουμε } f(x) = y \text{ οπότε } (5) \Rightarrow x = y^3 + y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + y.$$

Άρα η αντίστροφη της f έχει τύπο $f^{-1}(x) = x^3 + x$.

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $(f^{-1})'(x) = 3x^2 + 1$. Οπότε $(f^{-1})'(0) = 1$

γ) Γνωρίζουμε ότι $g(g^{-1}(x)) = x$ (6). Με παραγωγή κατά μέλη στην (6) έχουμε:

$$g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \Rightarrow (g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{2}.$$

$$(g(0) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(2) = 0), (g'(x) = e^x + 1 \Rightarrow g'(0) = 2)$$

$$\delta) (5) \xrightarrow{x=0} f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$(5) \Rightarrow f(x)(f^2(x)+1) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{f^2(x)+1} \quad (6) \text{ οπότε } |f(x)| = \left| \frac{x}{f^2(x)+1} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ από κριτήριο παρεμβολής.}$$

$$(6) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{f^2(x)+1} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f^2(x)+1} = 1.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + \beta x^2 - 2$, $x > 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει σημείο καμπής το $A(1, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = 1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} + (x^2 - 1)^2 = 0$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $2 \ln x + x^2 \geq 2 \frac{1+e^2}{e} x - e^2 + 2$ για κάθε $x \geq 1$.

Λύση

α) Επειδή το A είναι σημείο της C_f ισχύει ότι: $f(1) = -1 \Leftrightarrow \beta - 2 = -1 \Leftrightarrow \beta = 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{a}{x} + 2x$ και $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2$.

Επειδή η f έχει σημείο καμπής στο $x = 1$ είναι $f''(1) = 0 \Leftrightarrow -a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Τότε $f(x) = 2 \ln x + x^2 - 2$, $f'(x) = \frac{2}{x} + 2x$ και $f''(x) = -\frac{2}{x^2} + 2$.

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [1, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap (0, 1]$.

Η f όντως έχει σημείο καμπής το A .

β) Πρέπει $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Τότε

$$\ln \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} + (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1)^2 - \ln(4x^2) - x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2 + 1)^2 - x^4 - 2x^2 - 1 = \ln[(2x)^2] + 4x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1)^2 = 2 \ln|2x| + |2x|^2 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1)^2 - 2 = 2 \ln|2x| + |2x|^2 - 2 \Leftrightarrow f(x^2 + 1) = f(2|x|) \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$$

$$(1) \Rightarrow f(x^2 + 1) = f(2|x|) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 2|x| \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln x + x^2 - 2) = -\infty$ και

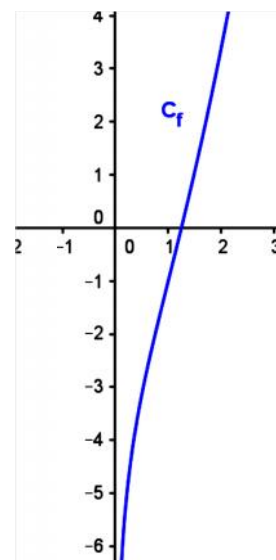
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x + x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(2 \frac{\ln x}{x^2} + 1 - \frac{2}{x^2} \right) \right] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln x}{x^2} + 1 - \frac{2}{x^2} \right) = 1$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το σύνολο

$$\text{τιμών της είναι: } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή $k \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $x_1 \in A_f = (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_1) = k$.



$$\delta) 2 \ln x + x^2 \geq 2 \frac{1+e^2}{e} x - e^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln x + x^2 - 2 \geq \frac{2+2e^2}{e} x - e^2 - 2 \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{2+2e^2}{e} x - e^2$$

Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής. Αρκεί η $y = \frac{2+2e^2}{e} x - e^2$ να είναι εφαπτομένη της C_f . Για το λόγο αυτό

πρέπει να υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = \frac{2+2e^2}{e} = \frac{2}{e} + 2e$. Παρατηρούμε ότι

$f'(e) = \frac{2}{e} + 2e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$ είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - (2 \ln e + e^2 - 2) = \left(\frac{2+2e^2}{e} \right) (x - e) \Leftrightarrow$$

$$y - 2 - e^2 + 2 = \frac{2+2e^2}{e} x - 2 - 2e^2 \Leftrightarrow y = \frac{2+2e^2}{e} x - e^2, \text{ άρα } f(x) \geq \frac{2+2e^2}{e} x - e^2 \text{ για κάθε } x \geq 1.$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x)(2f'(x) - f(x)) = f(x)(f'(x) - 2f''(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 2f'(0) = 1$
- $f(g(x)) + g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

δ) Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $g \circ g$, να λύσετε την ανίσωση

$$e^{\frac{(g \circ g)(x)}{2}} + (g \circ g)(x) - g(x^2) > 0$$

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$.

στ) Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $3g(x) + 2 - 2x \leq 0$

Λύση

$$\alpha) f'(x)(2f'(x) - f(x)) = f(x)(f'(x) - 2f''(x)) \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 - f'(x)f(x) = f(x)f'(x) - 2f(x)f''(x) \Leftrightarrow 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) = 2f'(x)f(x) \Leftrightarrow$$

$$[2f(x)f'(x)]' = [f^2(x)]' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = f^2(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=0, \text{ άρα } 2f(x)f'(x) = f^2(x) \Leftrightarrow (f^2(x))' = f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) = c_1 e^x, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c_1=0, \text{ άρα } f^2(x) = e^x.$$

Επειδή $f^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή

$$f(0)=1>0 \text{ είναι } f(x)>0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}.$$

β) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 : g(x_1) \geq g(x_2)$, τότε

$$\frac{g(x_1)}{2} \geq \frac{g(x_2)}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{g(x_1)}{2}} \geq e^{\frac{g(x_2)}{2}} \Leftrightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)), \text{ οπότε και}$$

$$f(g(x_1)) + g(x_1) \geq f(g(x_2)) + g(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο. Άρα } g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}.$$

γ) $g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται.

Έστω $g(x) = y$, τότε η αρχική σχέση γίνεται: $f(y) + y = x$ δηλαδή $g^{-1}(y) = f(y) + y, y \in \mathbb{R}$ άρα

$$\text{και } g^{-1}(x) = f(x) + x = e^{\frac{x}{2}} + x, x \in \mathbb{R}$$

$$\delta) e^{\frac{(g \circ g)(x)}{2}} + (g \circ g)(x) - g(x^2) > 0 \Leftrightarrow f(g(g(x))) + g(g(x)) > g(x^2) \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(g(x)) + g(x) = x$ (1) όπου x το $g(x)$ προκύπτει:

$$f(g(g(x))) + g(g(x)) = g(x), \text{ οπότε η (1) γίνεται:}$$

$$g(x) > g(x^2) \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} x > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

ε) Αρχικά θα βρούμε τα $g(1)$ και $g'(1)$.

Έστω ότι $g(1) = \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $g^{-1}(\alpha) = 1$. Παρατηρούμε όμως ότι $g^{-1}(0) = 1$, άρα

$$g^{-1}(\alpha) = g^{-1}(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \stackrel{g(x)=y}{=} \lim_{x=g^{-1}(y)} \frac{y}{g^{-1}(y) - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^{\frac{y}{2}} + y - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}} + 1} = \frac{2}{3}, \text{ άρα } g'(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: } y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

$$\sigma\tau) f(g(x)) + g(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{g(x)}{2}} + g(x) = x \quad (3)$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τα δύο μέλη της σχέσης (3) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οπότε:

$$\left(e^{\frac{g(x)}{2}} + g(x) \right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{2} e^{\frac{g(x)}{2}} + g'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) \left(e^{\frac{g(x)}{2}} + 2 \right) = 2 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{2}{e^{\frac{g(x)}{2}} + 2}$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $\frac{2}{\frac{g(x)}{e^{\frac{g(x)}{2}} + 2}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η g' είναι παραγωγίσιμη με:

$$g''(x) = -\frac{2\left(\frac{g(x)}{e^{\frac{g(x)}{2}} + 2}\right)'}{\left(\frac{g(x)}{e^{\frac{g(x)}{2}} + 2}\right)^2} = -\frac{e^{\frac{g(x)}{2}} g'(x)}{\left(\frac{g(x)}{e^{\frac{g(x)}{2}} + 2}\right)^2} < 0 \Rightarrow g \cap \mathbb{R}.$$

Επειδή η g είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) \leq y \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3g(x) - 2x + 2 \leq 0$.

10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf'(x) - xf(x) = e^x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = e.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x (\ln x + 1)$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x - ke^{-x} + 1 = 0$ για τις διαφορετικές τιμές του πραγματικού αριθμού k .

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

Λύση

$$\alpha) xf'(x) - xf(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$(f(x)e^{-x})' = (\ln x)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = e^x (\ln x + c), c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } f(1) = e \Leftrightarrow ce = e \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = e^x (\ln x + 1), x > 0.$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = e^x (\ln x + 1) + e^x \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right). \text{ Έστω } g(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x}, x > 0.$$

$$\text{Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, +\infty)$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι

$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, 1]$. Η g έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $g(1) = \ln 1 + 1 + 1 = 2$, άρα

$g(x) \geq 2$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \nearrow (0, +\infty)$.

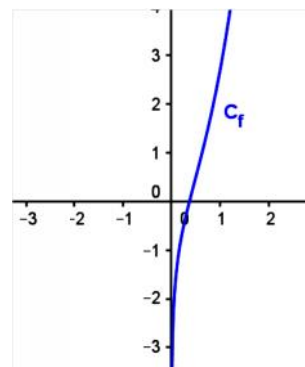
$$\gamma) \ln x - ke^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = ke^{-x} \Leftrightarrow e^x (\ln x + 1) = k \Leftrightarrow f(x) = k$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (\ln x + 1) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x (\ln x + 1) = -\infty, \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής και}$$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε τιμή του $k \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς μία ρίζα.



δ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = e^x \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right) + e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Έστω $h(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - x + 2}{x^3}. \text{ Επειδή το τριώνυμο } x^2 - x + 2 \text{ έχει } \Delta = -7 < 0, \text{ είναι}$$

$$x^2 - x + 2 > 0, \text{ άρα } h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 \ln x + x - 1}{x} + 1 \right) = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x + x - 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της h , υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0. \text{ Για κάθε } x > x_0 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [x_0, +\infty).$$

Για κάθε $0 < x < x_0 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap (0, x_0]$. Η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο x_0 .

11. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f'(2) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

$$\text{Έστω ότι } f(2) = 5, f(4) = 9$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_3)f'(x_2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$.

ε) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Αν $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x + 1$, $x \in [2, 4]$.

Λύση

α) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε $f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) - f(2) \leq 0$.

$$\text{Για κάθε } x \in (2, 4) \text{ είναι } x - 2 > 0, \text{ άρα } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0 \text{ (1).}$$

$$\text{Επειδή η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow f'(2) \leq 0$$

άτοπο. Άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2.

β) Επειδή $f(2) < 7 < f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$, λόγω του

θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x_1]$ και $[x_1, 4]$,
οπότε υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \frac{2}{x_1 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{x_1 - 2}{2} \text{ και}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(4) - f(x_1)}{4 - x_1} = \frac{9 - 7}{4 - x_1} = \frac{2}{4 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{4 - x_1}{2}$$

$$\frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{x_1 - 2}{2} + \frac{4 - x_1}{2} = \frac{\cancel{x_1} - 2 + 4 - \cancel{x_1}}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x_3) + f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)} = 1 \Leftrightarrow f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_2)f'(x_3)$$

δ) $f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = 4x - f(x) + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 4x - 1 = 0$

Έστω $g(x) = xf'(x) - 2x^2 - x$, $x \in [2, 4]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με $g'(x) = xf'(x) + f(x) - 4x - 1$.

Επιπλέον $g(2) = 2f(2) - 8 - 2 = 10 - 10 = 0$, $g(4) = 4f(4) - 32 - 4 = 36 - 36 = 0$, δηλαδή

$g(2) = g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 4x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$.

ε) Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$ και η f' είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο

$[2, 4]$. Για κάθε $2 < x < 4 \Rightarrow f'(2) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [2, 4]$.

Επειδή $f(2) = 5$ και $f(4) = 9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5, 9]$.

στ) Έστω $x \in (2, 4)$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα
διαστήματα $[2, x]$ και $[x, 4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 5}{x - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \frac{9 - f(x)}{4 - x}$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 5}{x - 2} \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2x + 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{9 - f(x)}{4 - x} \leq 2 \Leftrightarrow 9 - f(x) \leq 8 - 2x \Leftrightarrow f(x) \geq 2x + 1 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in (2, 4)$. Επειδή $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ και

$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in [2, 4]$.

12. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f(1) = 0$, $f(2) = \ln 2$ και

$f(3) = \ln 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $(f'(\xi))^2 + f(\xi)f''(\xi) = \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2}$.

Έστω ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

γ) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Λύση

$$\alpha) (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)f'(x) + f(x)(f'(x))' = \frac{(\ln x)' x - \ln x(x)'}{x^2} \quad \text{ή}$$

$$(f(x)f'(x))' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } c=0, \text{ άρα } f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2\ln x(\ln x)' = 0 \text{ ή } (f^2(x) - \ln^2 x)' = 0.$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = f^2(x) - \ln^2 x, \quad x \in [1, 3].$$

Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(1, 2)$ και $(2, 3)$ με $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$.

Είναι $g(1) = f^2(1) - \ln^2 1 = 0$, $g(2) = f^2(2) - \ln^2 2 = 0$ και $g(3) = f^2(3) - \ln^2 3 = 0$, δηλαδή

$g(1) = g(2) = g(3)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $x_1 \in (1, 2)$ και

$x_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = 0$ και $g'(x_2) = 0$.

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο

$$(x_1, x_2) \text{ με } g''(x) = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) - 2\frac{1 - \ln x}{x^2}. \text{ Επειδή } g'(x_1) = g'(x_2) = 0,$$

λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 3)$ τέτοιο, ώστε :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2(f'(\xi))^2 + 2f(\xi)f''(\xi) - 2\frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi))^2 + f(\xi)f''(\xi) = \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2}$$

β) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$.

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [1, +\infty), \text{ Είναι } x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 0, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

γ) Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της

$$\text{είναι το } f'(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), f'(1) \right] = (0, f'(1)], \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \geq 1, \text{ οπότε η } f$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

13. α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x^2 + 1) < x$ για κάθε $x > 0$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1] - 2x^3 + 3, x \in \mathbb{R}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\ln(x^2 + 1) = \frac{2x^3 - 3 + \lambda}{3(x^2 + 1)} + 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \leq e^{a+b}$ για κάθε $a, b > 0$.

Λύση

α) Έστω $g(x) = \ln(x^2 + 1) - x, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$.

Είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 1$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) < x$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 3(0^2 + 1)[\ln(0^2 + 1) - 1] + 3 - 3 + 3 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 6x[\ln(x^2 + 1) - 1] + 3 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - 6x^2 = 6x \ln(x^2 + 1) - 6x + \frac{6x}{x^2 + 1} - 6x^2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 6x(\ln(x^2 + 1) - x)$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $\ln(x^2 + 1) < x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - x < 0$, άρα $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$

και για κάθε $x < 0 \Rightarrow \overset{g \nearrow}{g(x)} > g(0) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - x > 0$, άρα $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\gamma) \ln(x^2 + 1) = \frac{2x^3 - 3 + \lambda}{3(x^2 + 1)} + 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - 1 = \frac{2x^3 - 3 + \lambda}{3(x^2 + 1)} \Leftrightarrow$$

$$3(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1] = 2x^3 - 3 + \lambda \Leftrightarrow 3(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1] - 2x^3 + 3 = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \stackrel{x^2 + 1 = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} u \ln u = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3) = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[3 \frac{(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1]}{x^3} - 2 + \frac{3}{x^3} \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)[\ln(x^2 + 1) - 1]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} \cdot \frac{\ln(x^2 + 1) - 1}{x} = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1) - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

Επειδή $\lambda \in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\delta) (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) \leq e^{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \ln(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) \leq \ln e^{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \ln(\alpha^2 + 1) + \ln(\beta^2 + 1) \leq \alpha + \beta \quad (1)$$

Επειδή $\ln(x^2 + 1) < x$ για κάθε $x > 0$, είναι: $\ln(\alpha^2 + 1) < \alpha$, $\ln(\beta^2 + 1) < \beta$ και με

πρόσθεση κατά μέλη: $\ln(\alpha^2 + 1) + \ln(\beta^2 + 1) < \alpha + \beta$ Αν $\alpha = \beta$ η (1) ισχύει ως ισότητα.

14. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, $f(2) = 2$, $f'(0) < 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\rho_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

β) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.

γ) Αν η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

δ) Αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = x$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1$.

Λύση

$$\alpha) f'(0) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} < 0$ για τιμές του x θετικές και πολύ κοντά στο 0.

Άρα υπάρχει $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $\frac{f(x_1)}{x_1} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < 0$.

Επειδή $f(x_1)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

$$\beta) \text{ Από το Θ.Μ.Τ για την } f \text{ υπάρχει } \xi_1 \in (\rho_1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(\rho_1)}{2 - \rho_1} = \frac{2}{2 - \rho_1} > 0.$$

$$\text{Από το Θ.Μ.Τ για την } f', \text{ υπάρχει } \xi \in (0, \xi_1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{\xi_1} > 0$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f'(0)x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq f'(0)x$.

$$\text{Επειδή } f'(0) < 0 \text{ είναι } f(x) \geq f'(0)x > 0 \text{ για κάθε } x < 0, \text{ άρα } 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f'(0)x}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f'(0)x} = 0, \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και αφού}$$

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x < 0, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\delta) \text{ Επειδή η } C_f \text{ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο } -\infty \text{ την ευθεία } y = x, \text{ ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1.$$

15. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f(a) < f(b) = 0 < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) < 0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = a^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b) .

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

Επειδή $f(a) < f(b) < f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ η f δεν παρουσιάζει μέγιστο σε κανένα από τα $x = a$ και $x = b$, οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ στο οποίο η f θα παρουσιάζει μέγιστο. Τότε από το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_0) = 0$.

β) Έστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Είναι $f(x) < f'(x) \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0$

Έστω $g(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in [a, b]$. Είναι $g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [a, b]$.

Είναι $\frac{a+b}{2} < b \Rightarrow g\left(\frac{a+b}{2}\right) < g(b) \Leftrightarrow e^{-\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right) < e^{-b}f(b) \Leftrightarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ άτοπο.

Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.

γ) Από το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχουν $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} > 0 \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = -\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}} < 0.$$

Από το Θ.Μ.Τ. για την f' , υπάρχει $\rho \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$.

δ) Έστω $g(x) = f(x) + x^3 - a^3$, $x \in [a, b]$.

Είναι $g(a) = f(a) < 0$ και $g(b) = f(b) + b^3 - a^3 > 0$, δηλαδή $g(a)g(b) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x^3 = a^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b) .

16. Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$.

α) Έστω ότι $6xf(x) \neq (3x^2 - 12)f'(x)$, για κάθε $x \in [-2, 2]$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2)f(-2) \neq 0$.

ii. Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 2)$.

β) Έστω ότι $6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και $f(0) = -48$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48$, $x \in [-2, 2]$.

ii. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 2)$.

Λύση

α) i. Για $x = 2$ είναι $12f(2) \neq 0 \Leftrightarrow f(2) \neq 0$ και όμοια για $x = -2$ προκύπτει $f(-2) \neq 0$.

ii. Έστω ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{3x^2 - 12}{f(x)}$, $x \in [-2, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $g'(x) = \frac{6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x)}{f^2(x)}$

Επειδή $g(-2) = g(2) = 0$, από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{6\xi f(\xi) - (3\xi^2 - 12)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi) = (3\xi^2 - 12)f'(\xi) \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 2)$.

β) i. $6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x)}{(3x^2 - 12)^2} = 3x^2 - 7 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{3x^2 - 12} \right)' = (x^3 - 7x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{3x^2 - 12} = x^3 - 7x + c \Leftrightarrow f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

Είναι $f(0) = -12c \Leftrightarrow -12c = 48 \Leftrightarrow c = -4$ και $f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + 4) \Leftrightarrow$

$$f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Άρα $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ και $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ οπότε

$$f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48, \quad x \in [-2, 2].$$

ii. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Άρα $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ και $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

Έστω $h(x) = x^3 - 7x + 4$, $x \in [-2, 2]$. Είναι $h(-2) = -8 + 14 + 4 = 10 > 0$,

$h(2) = 8 - 14 + 4 = -2 < 0$, δηλαδή $h(-2)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$.

Είναι $f(x_1) = (3x_1^2 - 12)(x_1^3 - 7x_1 + 4) = (3x_1^2 - 12)h(x_1) = 0$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 2)$.

17. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1$ και $f(4) = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2, 4)$.

δ) Έστω ότι η f είναι κοίλη,

i. να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2, 4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ii. Αν $f(3) = 10$ και $f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (2, 3)$, να δείξετε ότι $f(x) = 4x - 2$ για κάθε $x \in [2, 3]$.

Λύση

α) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x - 2}$, $x \neq 2$, τότε $f(x) = g(x)(x - 2) + 3x$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 2$, άρα $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x - 2) + 3x] = 6$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 6 - 3x + 6}{x - 2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - \frac{3(x - 2)}{x - 2} \right) = 1 \Leftrightarrow$

$$f'(2) - 3 = 1 \Leftrightarrow f'(2) = 4.$$

Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 2$

γ) Έστω $h(x) = f(x) - x - 3$, $x \in [2, 4]$. Είναι

$h(2) = f(2) - 5 = 1 < 0$, $h(4) = f(4) - 4 - 3 = -1 < 0$, δηλαδή $h(2)h(4) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + 3$$

δ) i. Επειδή $f(2) = f(4)$, από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $2 < x < \xi \Rightarrow f'(2) > f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [2, \xi]$ και

για κάθε $\xi < x < 4 \Rightarrow f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, 4]$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο ξ .

ii. Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi_1 \in (2, x)$, $x \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 6}{x - 2}.$$

Επειδή $f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (2, 3)$ είναι και $f'(\xi_1) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 6}{x - 2} \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 4x - 2$ (1).

Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi_2 \in (x, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \frac{10 - f(x)}{3 - x}$.

Επειδή $f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (2,3)$ είναι και $f'(\xi_2) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(3)-f(x)}{3-x} \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 4x-2$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $f(x) = 4x-2$ για κάθε $x \in (2,3)$. Επειδή $f(2) = 6$ και $f(3) = 10$, είναι $f(x) = 4x-2$ για κάθε $x \in [2,3]$.

18. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, $a < b$, με $f(a) < 0 < f(b)$,

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Να αποδείξετε ότι :

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$.

β) Υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$.

γ) Υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)$.

Λύση

α) Επειδή η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,b]$. Από το Θ.Μ.Τ για την f , υπάρχει $\xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, άρα και $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ και $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, οπότε λόγω του Θεωρήματος

Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}.$$

$$\text{Είναι } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \Leftrightarrow 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f(b) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2).$$

Από το θεώρημα Rolle για την f' , υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$

γ) $\alpha < \frac{a+b}{2} < \beta \xrightarrow{f'} f(a) < f\left(\frac{a+b}{2}\right) < f(b) \Leftrightarrow 2f(a) < 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 2f(b)$ (1) και

$$\alpha < \frac{2a+b}{3} < \beta \xrightarrow{f'} f(a) < f\left(\frac{2a+b}{3}\right) < f(b) \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$3f(\alpha) < 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < 3f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{2}{3}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < f(\beta)$ Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2}{3}f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.

19. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$x(e^{f(x)} + 1)f'(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$.

γ) Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $g(1) = 0$ και

$1 \leq g'(x) \leq 1 + \frac{f(x)}{x^2}$ για κάθε $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f^{-1}(x) - 1)f(x)].$$

Λύση

α) $x(e^{f(x)} + 1)f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c$ και αφού $f(1) = 0$ τότε $c = 0$ άρα $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$ (1).

β) Θεωρούμε την $h(x) = e^x + x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $h'(x) = e^x + 1 > 0$, άρα είναι και 1-1.

$$(1) \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \text{ δηλαδή } h(f(x)) = h(\ln x) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln x.$$

γ) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[1, x]$, $x > 1$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$,

$$\text{άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει } \xi \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } g'(\xi) = \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{g(x)}{x - 1}.$$

Επειδή η g είναι κυρτή, η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } 1 < \xi < x \stackrel{g' \uparrow}{\Leftrightarrow} g'(1) < g'(\xi) < g'(x) \leq 1 + \frac{\ln x}{x^2}.$$

$$\text{Όμως } 1 \leq g'(1) \leq 1 + \frac{\ln 1}{1^2} \Leftrightarrow 1 \leq g'(1) \leq 1 \Leftrightarrow g'(1) = 1, \text{ άρα}$$

$$1 < g'(\xi) < 1 + \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow 1 < \frac{g(x)}{x - 1} < 1 + \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow x - 1 < g(x) < x - 1 + \frac{(x - 1)\ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$0 < g(x) - (x - 1) < \frac{(x - 1)\ln x}{x^2}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)\ln x}{x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \frac{x-1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{2x} + \frac{x-1}{2x^2} \right) = 0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x-1)] = 0$ άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$, άρα $f^{-1}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(f^{-1}(x) - 1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^x - 1)\ln x] \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-xe^x \ln^2 x) = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

20. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, 10]$.

Αν $f(0) = 1$, $f(10) = 21$ και $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

- α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) η ευθεία $x - y + 1 = 0$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f και $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in [0, 10]$.
- γ) υπάρχει $\xi \in (0, 10)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > \frac{1}{10}$.
- δ) η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = -3x + 2$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(0, 10)$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$.

Για κάθε $0 < x < 10 \Rightarrow f'(0) < f'(x) < f'(10)$ άρα $1 < f'(x)$, δηλαδή $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$. Το σύνολο τιμών της f είναι: $f([0, 10]) = [f(0), f(10)] = [1, 21]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[0, 10]$ εκτός του σημείου επαφής, άρα βρίσκεται πάνω και από την ε , δηλαδή $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in [0, 10]$.

γ) Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (0, 10)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{21-1}{10} = 2.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0, \xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \xi_1)$, λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει

$$\xi \in (0, \xi_1) \text{ τέτοιο ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{\xi_1} = \frac{2-1}{\xi_1} = \frac{1}{\xi_1}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi_1 < 10 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_1} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow f''(\xi_1) > \frac{1}{10}.$$

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = -3x + 2 \Leftrightarrow f(x) + 3x - 2 = 0$, να έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 10)$. Έστω $g(x) = f(x) - 3x + 2$, $x \in [0, 10]$.

Είναι $g'(x) = f'(x) + 3 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$.

Είναι $g(0) = f(0) - 2 = -1 < 0$ και $g(10) = f(10) + 30 - 2 = 49 > 0$, δηλαδή $g(0)g(10) < 0$ και

επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, 10]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x - 2$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 10)$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 10]$, η ρίζα της g είναι μοναδική.

21. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω επιπλέον ότι για τη συνάρτηση f ισχύει ότι

$$f(x)f'(x) - e^x(f(x) + f'(x)) = x - e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(1) = e - 1 \text{ και } f(-1) = \frac{1}{e} + 1.$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x$

δ) Να γράψετε την f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

ε) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a + e^b}{2}$.

Λύση

α) Επειδή $f(x)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις f και f' είναι ομόσημες. Άρα $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή $f(x) < 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

β) $g(x) = |f(x)| \Leftrightarrow g^2(x) = f^2(x)$, άρα $(g^2(x))' = (f^2(x))' \Leftrightarrow 2g(x)g'(x) = 2f(x)f'(x)$

Επειδή $g(x) > 0$ και $f(x)f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τη τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) $f(x)f'(x) - e^x(f(x) + f'(x)) = x - e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2(e^x f(x) + e^x f'(x)) = 2x - 2e^{2x} \Leftrightarrow$

$$(f^2(x) - 2e^x f(x))' = (x^2 - e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x) - 2e^x f(x) = x^2 - e^{2x} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x} = x^2 + c, \Leftrightarrow (f(x) - e^x)^2 = x^2 + c.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } (f(1) - e)^2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } (f(x) - e^x)^2 = x^2 \quad (1)$$

Έστω $h(x) = f(x) - e^x$. Επειδή $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ είναι $h(x) \neq 0$, οπότε η h διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επειδή $h(1) = f(1) - e = -1$ είναι $h(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η (1) γίνεται $h(x) = -x \Leftrightarrow f(x) - e^x = -x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, x > 0$.

Επειδή $h(-1) = f(-1) - e^{-1} = 1$ είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ και η (1) γίνεται

$$h(x) = -x \Leftrightarrow f(x) - e^x = -x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, x < 0. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0 \text{ είναι}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ οπότε τελικά } f(x) = e^x - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\delta) f(x) = e^x - x = e^x - \ln e^x.$$

Έστω $\alpha(x) = x - \ln x, x > 0$ και $\beta(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\alpha \circ \beta$ ισχύει:

$$\begin{cases} x \in D_\beta \\ \beta(x) \in D_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 0 \text{ ισχύει} \end{cases}, \text{ άρα } D_{\alpha \circ \beta} = \mathbb{R}. \text{ Είναι } (\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = e^x - \ln e^x = f(x).$$

ε) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και

παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, οπότε λόγω του ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{\alpha+\beta}{2} - e^\alpha + \alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{e^\beta - \beta - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{\alpha+\beta}{2} - e^\alpha + \alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{e^\beta - \beta - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \frac{\alpha+\beta}{2} - e^\alpha + \alpha < e^\beta - \beta - e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < e^\beta + e^\alpha - \beta - \alpha + \cancel{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow$$

$$2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < e^\beta + e^\alpha - \cancel{\beta} - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{e^\alpha + e^\beta}{2}.$$

22. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) - f(x) = f(x) \ln x \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^x, x > 0$.

β) Αν $f(x) \leq x^{x-1}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln x}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x}$ για κάθε $x \geq 1$

δ) Έστω $g(x) = f(x)f(1-x), x \in (0,1)$.

i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(a) + g(b) \geq 1$ για κάθε $a, b \in (0,1)$.

Λύση

$$\alpha) f'(x) - f(x) = f(x) \ln x \Leftrightarrow f'(x) = f(x) + f(x) \ln x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln x + 1)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x' \ln x + x(\ln x)' \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (x \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = x \ln x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=1 \text{ είναι } \ln f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c=0, \text{ άρα}$$

$$\ln f(x) = x \ln x = \ln x^x \Leftrightarrow f(x) = x^x.$$

$$\beta) f(x) \leq x^{x-1} \Leftrightarrow x^x \leq x^{x-1} \Leftrightarrow \ln x^x \leq \ln x^{x-1} \Leftrightarrow x \ln x \leq (x-1) \ln x \Leftrightarrow x \ln x - (x-1) \ln x \leq 0 \quad (2).$$

Έστω $h(x) = x \ln x - (x-1) \ln x, x > 0$. Η (2) γράφεται: $h(x) \leq h(1)$, οπότε η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \ln x + 1 - \ln x$, από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι: $h'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

$$\gamma) \frac{\ln x}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} \Leftrightarrow x \ln x < (x+1) \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln x^x < \ln(x+1)^{x+1} \Leftrightarrow x^x < (x+1)^{x+1} \Leftrightarrow f(x) < f(x+1).$$

Είναι $f(x) = x^x = e^{x \ln x} = e^{x \ln x}$ και $f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) > 0$ για κάθε $x \geq 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Επειδή $1 < x < x+1$ είναι και $f(x) < f(x+1)$.

$$\delta) i. \text{ Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0,1) \text{ με } g'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = x^x (\ln x + 1)(1-x)^{1-x} - x^x (1-x)^{1-x} (\ln(1-x) + 1) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = x^x (1-x)^{1-x} (\ln x + 1 - \ln(1-x) - 1).$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^x (1-x)^{1-x} (\ln x - \ln(1-x)) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - \ln(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x \geq \ln(1-x) \Leftrightarrow x \geq 1-x \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left[\frac{1}{2}, 1\right). \text{ Η } g \text{ έχει ελάχιστο το } g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή η g έχει ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$, ισχύει ότι $g(x) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Άρα $g(\alpha) \geq \frac{1}{2}$, $g(\beta) \geq \frac{1}{2}$ και με πρόσθεση κατά μέλη, είναι $g(\alpha) + g(\beta) \geq 1$.

23. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f(\sqrt[50]{50}) > f(\sqrt[60]{60})$.

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

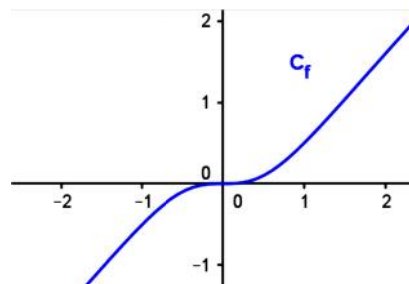
Λύση

α) $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) + f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = 3x^2, \text{ άρα } (f'(x)(x^2+1))' = (x^3)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(x^2+1) = x^3 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 + c}{x^2+1}, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+c}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$



β) Είναι $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} > 0$ για κάθε

$x \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $\sqrt[50]{50} = 50^{\frac{1}{50}}$, $\sqrt[60]{60} = 60^{\frac{1}{60}}$.

Έστω $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{Είναι } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

Για κάθε $x > e$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [e, +\infty)$. Είναι

$$e < 50 < 60 \stackrel{g \searrow [e, +\infty)}{\Rightarrow} g(50) > g(60) \Leftrightarrow 50^{\frac{1}{50}} > 60^{\frac{1}{60}} \Leftrightarrow \sqrt[50]{50} > \sqrt[60]{60} \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(\sqrt[50]{50}) > f(\sqrt[60]{60})$$

γ) Έστω $M(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t με $y(t) = f(x(t))$

$$\text{και } x'(t) > 0. \text{ Είναι } y(t) = \frac{x^3(t)}{x^2(t)+1} \text{ και } y'(t) = (f(x(t)))' = f'(x(t))x'(t).$$

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της

τεταγμένης του, ισχύει ότι: $y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t))x'(t) = x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t)) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2(t)(x^2(t)+3)}{(x^2(t)+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \cancel{x^4(t)} + 3x^2(t) = \cancel{x^4(t)} + 2x^2(t) + 1 \Leftrightarrow x^2(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = \pm 1.$$

Αν $x(t) = 1$ τότε $y(t) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, άρα $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ενώ αν $x(t) = -1$ τότε $y(t) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$,

άρα $M\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

24. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f'(a) = 3f(a+2)$,

$f'(a+2) = f(a+2)$ και $f(a+3) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0 \in (a, a+2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η f δεν είναι 1-1.

γ) Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } a < a+2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(a) < f'(a+2) \Leftrightarrow 3f(a+2) < f(a+2) \Leftrightarrow 2f(a+2) < 0 \Leftrightarrow f(a+2) < 0.$$

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[a, a+2]$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (a, a+2) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(a+2) - f(a)}{a+2 - a} = \frac{f(a+2) - f(a)}{2}.$$

$$\text{Είναι } a < \xi < a+2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(a+2) \Leftrightarrow \frac{f(a+2) - f(a)}{2} < f(a+2) \Leftrightarrow$$

$$f(a+2) - f(a) < 2f(a+2) \Leftrightarrow f(a) > -f(a+2) > 0. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } [a, a+2] \text{ και } f(a)f(a+2) < 0, \text{ από το θεώρημα Bolzano υπάρχει } x_0 \in (a, a+2) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = 0.$$

β) Επειδή $f(a+3) = 0$, $f(a+2) < 0$ και $f(a) > 0$, είναι $f(a+2) < f(a+3) < f(a)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, a+2]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει

$x_1 \in (a, a+2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(a+3)$ (1). Αν η f ήταν 1-1, τότε από την (1) θα προέκυπτε ότι $x_1 = a+3$ που είναι αδύνατο αφού $x_1 \in (a, a+2)$, άρα η f δεν μπορεί να είναι 1-1.

γ) Επειδή $f(a+2) < f(a+3) < f(a)$ η f θα έχει ακρότατο σε σημείο x_2 του διαστήματος

$[a, a+3]$ που θα είναι διαφορετικό από τα άκρα του. Από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι

$f'(x_2) = 0$, δηλαδή η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Επειδή $a < x_2 < a+3$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f'(x_2) < f'(a+3) \Leftrightarrow f'(a+3) > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = a+3$, είναι:

$$y - f(a+3) = f'(a+3)(x - a - 3) \Leftrightarrow y = xf'(a+3) - (a+3)f'(a+3) + f(a+3)$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq xf'(a+3) - (a+3)f'(a+3) + f(a+3)$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha+3)] = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$ και $g(x) = \ln x - x + 1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f, g .

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $3e^{x-1} + 3x + x^3 = 3x \ln x + 3x^2 + 4$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ και $f''(x) = e^{x-1} + 2$.

Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, οπότε για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$, άρα

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.

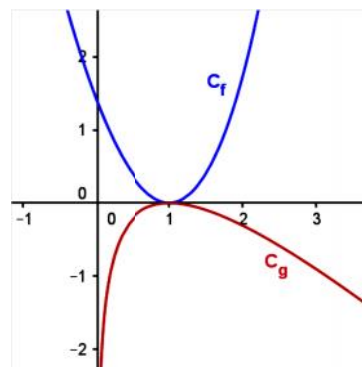
Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

β) $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 - 2x = \ln x \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 - 3x + 1 = \ln x - x + 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Για κάθε $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ και $x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0$, δηλαδή $f(x) > g(x)$.

Για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ και $0 < x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0$, δηλαδή $f(x) > g(x)$. Επειδή $f(1) = g(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

γ) Επειδή $f(1) = g(1) = 0$, οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ το $(1, 0)$. Επειδή $f'(1) = g'(1) = 0$, ο άξονας $x'x$ εφαπτεται στις C_f, C_g στο $(1, 0)$.



δ) Έστω $h(x) = 3e^{x-1} + 3x + x^3 - 3x \ln x - 3x^2 - 4$, $x > 0$. Είναι

$$h'(x) = 3e^{x-1} + 3 + 3x^2 - 3 \ln x - 3 - 6x = 3(e^{x-1} + x^2 - \ln x - 2x) = 3(f(x) - g(x))$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) > g(x)$, άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > g(x)$, άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επειδή $h(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

26. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $xf(x)f'(x) - \ln x = 0$ για κάθε $x \geq 1$ και $f(e) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \ln x, x \geq 1$.

β) η f αντιστρέφεται και η $y = e^x, x \geq 0$ είναι η αντίστροφή της.

γ) $e^{f(x)+1} \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x)(e^{f(x)} - 1) + e$ για κάθε $x \geq 1$.

δ) Αν $f^{-1}(x) \geq x^a$ για κάθε $x > 1, a > 0$, τότε $a \leq e$.

Λύση

α) $xf(x)f'(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x)f'(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$

$$[f^2(x)]' = (\ln^2 x)' \Leftrightarrow f^2(x) = \ln^2 x + c, c \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Από τη σχέση (1) για $x = e$ έχουμε $c = 0$ οπότε $f^2(x) = \ln^2 x \quad (1)$.

Επειδή $\ln^2 x > 0$ για κάθε $x > 1$, είναι $f^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$. Επειδή $f(e) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 1$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = \ln x, x > 1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$, είναι $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, οπότε $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \geq 1$.

β) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε είναι και 1-1, και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$, άρα $f^{-1}(y) = e^y$. Είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow e^y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$, άρα $f^{-1}(x) = e^x, x \geq 0$.

γ) $e^{f(x)+1} \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x)(e^{f(x)} - 1) + e \Leftrightarrow e^{\ln x + 1} \leq e^x \leq e^x(e^{\ln x} - 1) + e \Leftrightarrow$

$$ex \leq e^x \leq e^x(x-1) + e \Leftrightarrow ex - e \leq e^x - e \leq e^x(x-1)$$

Από το Θ.Μ.Τ για την $f^{-1}(t) = e^t$, υπάρχει $\xi \in (1, x)$, $x > 1$ τέτοιο, ώστε

$$(f^{-1})'(\xi) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$\text{Είναι } 1 < \xi < x \Leftrightarrow e < e^\xi < e^x \Leftrightarrow e < \frac{e^x - e}{x - 1} < e^x \Leftrightarrow ex - e < e^x - e < e^x(x - 1).$$

Επειδή για $x = 1$ η σχέση $ex - e \leq e^x - e \leq e^x(x - 1)$ ισχύει ως ισότητα, τελικά η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $x \geq 1$.

δ) $f^{-1}(x) \geq x^a \Leftrightarrow e^x \geq x^a \Leftrightarrow x \geq a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{a}.$

$$\text{Έστω } h(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 1. \text{ Είναι } h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

Για κάθε $x \in (1, e)$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $(1, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Η h έχει μέγιστο το $h(e) = \frac{1}{e}$, άρα $h(x) \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 1$. Αρκεί $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \leq e$.

27. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

- $f'(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$

α) Να βρείτε το πρόσημο και τις ρίζες της συνάρτησης $g(x) = f(x) - 2x$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $y = 2x$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο στο (α, β) με $\alpha \cdot \beta < 0$.

Λύση

α) $g'(x) = f'(x) - 2 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$ και 1-1.

Είναι $g(0) = f(0) = 0$, άρα η $x = 0$ μοναδική ρίζα αφού η g είναι 1-1

Για $x > 0 \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$ και για $x < 0 \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$

β) Είναι $f'(x) > 2 > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

α' τρόπος

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{2x}$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και αφού } f(x) > 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x} < \frac{1}{f(x)} < 0$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και αφού } f(x) < 0 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}.$$

β' τρόπος

Λόγω του ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$, $x > 0$ υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Είναι $f'(\xi_1) > 2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 2 \Leftrightarrow f(x) > 2x$ και το όριο στο $+\infty$ ομοίως.

Λόγω του ΘΜΤ για την f στο $[x, 0]$, $x < 0$ υπάρχει $\xi_2 \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(0) - f(x)}{-x}$.

Είναι $f'(\xi_2) > 2 \Leftrightarrow \frac{-f(x)}{-x} > 2 \Leftrightarrow f(x) < 2x$ και το όριο στο $-\infty$ ομοίως.

γ) Επειδή το 2016 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f , η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Επειδή $\alpha \cdot \beta < 0$ και α, β άκρα διαστήματος $\alpha < 0 < \beta$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων $g(\alpha) < 0$ αφού $\alpha < 0$ και $g(\beta) > 0$ αφού $\beta > 0$. Επομένως $g(\alpha)g(\beta) < 0$. Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Το x_0 μοναδικό αφού η g είναι 1-1. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $y = 2x$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο x_0 στο (α, β) .

28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - 2x$, $x > 0$.

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x = \frac{2x-2}{\ln x}$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ε) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln a}{a} + \frac{\ln b}{b} \leq \frac{2}{e}$ για κάθε $a, b > 0$.

στ) Να αποδείξετε ότι $a^{a+1} > (a+1)^a$ για κάθε $a > e$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 = \frac{2(\ln x - x)}{x}$.

Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1 < x$ για κάθε $x > 0$, άρα $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, +\infty)$

β) Είναι $f''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, e]$.

Για κάθε $x > e$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[e, +\infty)$.

Παρουσιάζει σημείο καμπής το $(e, f(e))$ δηλαδή το $(e, 1 - 2e)$.

γ) Πρέπει $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

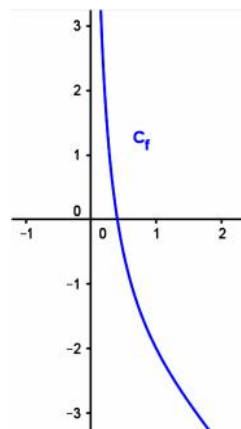
$$\ln x = \frac{2x-2}{\ln x} \Leftrightarrow \ln^2 x = 2x - 2 \Leftrightarrow \ln^2 x - 2x = -2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1 \text{ απορρίπτεται άρα η εξίσωση είναι αδύνατη,}$$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - 2x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = 0$ δηλαδή ο άξονας

$y' y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \right) = -2, \text{ αφού}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - 2x + 2x) = +\infty, \text{ άρα η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \right) \right] = -\infty, \text{ άρα η } C_f \text{ δεν έχει και}$$

οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\epsilon) \frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{2}{e} + 1 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} + 2 \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{4}{e} + 2 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} - 2 + 2 \frac{\ln \beta}{\beta} - 2 \leq \frac{4}{e} - 2 \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha) + f'(\beta) \leq \frac{4}{e} - 2.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, e]$ και κοίλη στο $[e, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e$. Άρα

$$f'(x) \leq f'(e) = \frac{2}{e} - 2 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Οπότε } f'(\alpha) \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} - 2 \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{e} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\beta) \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \beta}{\beta} - 2 \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{1}{e} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) έχουμε ότι $\frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{2}{e}$.

$$\sigma\tau) \alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha+1} > \ln (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1) \ln \alpha > \alpha \ln (\alpha+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln (\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} - 2 > 2 \frac{\ln (\alpha+1)}{\alpha+1} - 2 \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(\alpha+1) \text{ που ισχύει αφού } e < \alpha < \alpha+1 \text{ και}$$

η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$,

29. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f^2(x) = x^6$. Αν $f(1821) = -1821^3$ και

$$f(-1821) = 1821^3 \text{ τότε:}$$

α) να βρείτε τις ρίζες της f .

β) να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Αν $f(x) = -x^3$ να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση

$$\alpha) f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Μοναδική ρίζα της } f \text{ το } x = 0.$$

β) Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$\text{Επειδή } f(-1821) = 1821^3 > 0 \text{ είναι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x < 0 \text{ άρα } f(x) = \sqrt{x^6} = -x^3.$$

$$\text{Επειδή } f(1821) = -1821^3 < 0 \text{ είναι } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ άρα } f(x) = -\sqrt{x^6} = -x^3.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}, \text{ οπότε } f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -3x^2$.

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow -x^3 = y \Leftrightarrow x^3 = -y$$

$$\text{Αν } y \leq 0 \Leftrightarrow -y \geq 0 \text{ τότε } x = \sqrt[3]{-y}, \text{ ενώ αν } y > 0 \Leftrightarrow -y < 0 \text{ τότε } x = -\sqrt[3]{y}. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y \leq 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y > 0 \end{cases}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x \leq 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\delta) \text{ Αν } x \leq 0, \text{ τότε: } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^3 = \sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow -x^9 = -x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \left(x^8 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \right)^{x \leq 0}.$$

$$\text{Αν } x > 0 \text{ τότε } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^3 = -\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ απορρίπτεται ή } x^8 = 1 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Κοινά σημεία των } C_f \text{ και } C_{f^{-1}} \text{ τα } (0,0), (1,-1) \text{ και } (-1,1).$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ με $D_f = (0, \pi)$ και τα σημεία $A(4\theta, \eta\mu 4\theta)$,

$$B(4\theta, -\eta\mu 4\theta) \text{ με } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ορθογώνιο στο O .

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ισόπλευρο.

Λύση

α) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O αν και μόνο αν $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow$

$$(4\theta, \eta\mu 4\theta) \cdot (4\theta, -\eta\mu 4\theta) = 0 \Leftrightarrow 16\theta^2 - \eta\mu^2 4\theta = 0 \Leftrightarrow \overset{4\theta=\omega}{\omega^2 = \eta\mu^2 \omega} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 \omega}{\omega^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$f^2(\omega) = 1 \Leftrightarrow f(\omega) = \pm 1 \quad (1)$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, \pi) \text{ με } f'(x) = \frac{x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}.$$

Έστω $g(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με

$$g'(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - x \eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = -x \eta\mu x.$$

Είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

$$0 < x < \pi \xrightarrow{g'} g(x) < g(0) \Leftrightarrow x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, \pi).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, \pi)$ έχει σύνολο τιμών:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, 1).$$

Επειδή $\pm 1 \notin f(A)$ η (1) είναι αδύνατη, οπότε δεν υπάρχει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ορθογώνιο στο O .

β) Το τρίγωνο OAB είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν $(OA) = (OB) = (AB) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(4\theta)^2 + \eta\mu^2 4\theta} = \sqrt{(4\theta)^2 + \eta\mu^2 4\theta} = \sqrt{(2\eta\mu 4\theta)^2} \Leftrightarrow$$

$$16\theta^2 + \eta\mu^2 4\theta = 4\eta\mu^2 4\theta \Leftrightarrow 16\theta^2 = 3\eta\mu^2 4\theta \stackrel{4\theta=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2 = 3\eta\mu^2 \omega \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 \omega}{\omega^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f^2(\omega) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$f(\omega) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή $\frac{\sqrt{3}}{3} \in f(A)$ υπάρχει γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισόπλευρο.

31. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) + 2f(-h)}{h^2} > 0$,

$f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η $g(x) = |f(x) - x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f''(0) > 0$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια, να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f στην ευθεία $\zeta: x - y - 2016 = 0$, καθώς και την απόστασή του από αυτή.

γ) Να δείξετε ότι $e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x + 1)f(e^{2x})$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) + 2f(-h)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} \frac{2f'(2h) - 2f'(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2h) - f'(0) - f'(-h) + f'(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(2h) - f'(0)}{h} - \frac{f'(-h) - f'(0)}{h} \right) = 2f''(0) + f''(0) = 3f''(0) > 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(0) > 0 \text{ γιατί } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2h) - f'(0)}{h} \stackrel{2h=u \Leftrightarrow h=\frac{u}{2}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u) - f'(0)}{\frac{u}{2}} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u) - f'(0)}{u} = 2f''(0) \text{ και}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-h) - f'(0)}{h} \stackrel{-h=u \Leftrightarrow h=-u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u) - f'(0)}{-u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(u) - f'(0)}{u} = -f''(0)$$

Επειδή η f'' είναι συνεχής και $f''(x) \neq 0$ η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f''(0) > 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x) = |f(x) - x| \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, λόγω

του θεωρήματος Fermat, ισχύει ότι $g'(0) = 0$.

$$\text{Είναι } g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x) - x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x) - x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right|, \text{ οπότε}$$

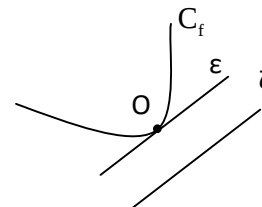
$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$

Επειδή $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta = 1$ είναι $\varepsilon // \zeta$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται

πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα το πλησιέστερο σημείο της C_f στην ευθεία ζ είναι το $O(0,0)$.

$$\text{Είναι } d(O, \zeta) = \frac{|0 - 0 - 2016|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2016}{\sqrt{2}} = \frac{2016\sqrt{2}}{2} = 1008\sqrt{2}.$$



γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[e^x, e^{2x}]$ και $[e^{2x}, e^{3x}]$,

$x > 0$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (e^x, e^{2x})$ και $\xi_2 \in (e^{2x}, e^{3x})$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{3x} - e^{2x}}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} < \frac{f(e^{3x}) - f(e^{2x})}{e^{3x} - e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$e^x [f(e^{2x}) - f(e^x)] < f(e^{3x}) - f(e^{2x}) \Leftrightarrow e^x f(e^{2x}) - e^x f(e^x) < f(e^{3x}) - f(e^{2x}) \Leftrightarrow$$

$$e^x f(e^{2x}) + f(e^{2x}) < f(e^{3x}) + f(e^x) \Leftrightarrow (e^x + 1)f(e^{2x}) < f(e^{3x}) + f(e^x).$$

32. α) i. Αν $a \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - a| - |x + a|}{x^3}$.

ii. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2} - a}{|x| - a}$, $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε για τις διάφορες τιμές του a ,

το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. Αν $|g(x)| \leq 2016$, να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)g(x)] = 0$.

Λύση

α) i. Αν $a = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - a| - |x + a|}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |x|}{x^3} = 0$.

Αν $a > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - a| - |x + a|}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - a - x - a}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x - 2a}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$

$$\text{Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - \alpha| - |x + \alpha|}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \cancel{\alpha} + x + \cancel{\alpha}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = +\infty.$$

$$\text{ii. Αν } \alpha = 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|x|}{|x|} = 1$$

$$\text{Αν } \alpha > 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha}{x - \alpha} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha)(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} + \alpha)}{(x - \alpha)(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2 - \alpha^2}{(x - \alpha)(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} + \alpha)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}{(x - \alpha)(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} + \alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)(x - 2\alpha)}{(x - \alpha)(\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} + \alpha)} = \frac{-\cancel{\alpha}}{2\cancel{\alpha}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2} - \alpha}{-x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{-\alpha - \alpha}{-\alpha - \alpha} = 1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\text{Έστω } B(x) = \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 0, \text{ τότε } f(x) - g(x) = B(x)g(x), \text{ οπότε}$$

$$|f(x) - g(x)| = |B(x)| |g(x)| \leq 2016 |B(x)| \Leftrightarrow -2016 |B(x)| \leq f(x) - g(x) \leq 2016 |B(x)|$$

$$\text{και από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

$$\text{Ακόμη } |h(x)g(x)| = |h(x)| |g(x)| \leq 2016 |h(x)| \Leftrightarrow -2016 |h(x)| \leq h(x)g(x) \leq 2016 |h(x)|$$

$$\text{και από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)g(x)] = 0.$$

33. Δίνονται οι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[3,6]$ συναρτήσεις f, g . Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 3,99$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, $f(x) \neq 0$ στο $[3,6]$, $f(3) + f(6) = f(5)$ και $g(x) = 2f(x) - xf(6)$ στο $[3,6]$ τότε να δείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,6]$.

β) υπάρχει $\xi_1 \in (3,6)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

γ) υπάρχει $\xi_2 \in (3,6)$ ώστε $2f'(\xi_2) - f(6) = 0$.

δ) Αν επιπλέον ισχύει $f(3) > \frac{3}{2}f(6)$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (3,6)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_3) = 0$.

ε) Αν επιπλέον ισχύει f κυρτή, να βρείτε το πρόσημο της g στο $(\xi_3, 6)$.

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 3,99$ σε ένα τουλάχιστον σημείο υπάρχει $x_0 \in [3,6]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3,99$. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [3,6]$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(x_0) > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [3,6]$.

β) Επειδή $f(3) + f(6) = f(5)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [3, 6]$, είναι $f(3) < f(5)$ και $f(6) < f(5)$, οπότε η f δεν παρουσιάζει μέγιστο σε κανένα από τα δύο άκρα του διαστήματος $[3, 6]$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής, θα υπάρχει $\xi \in (3, 6)$ στο οποίο η f θα παρουσιάζει μέγιστο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[3, 6]$, λόγω του θ. Fermat, είναι $f'(\xi) = 0$.

γ) 1ος τρόπος: Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f στο $[3, 5]$ υπάρχει $\xi_2 \in (3, 5) \subseteq (3, 6)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{f(6) + f(3) - f(3)}{2} \Leftrightarrow 2f'(\xi_2) - f(6) = 0$$

2ος τρόπος: Η g είναι συνεχής στο $[3, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(3, 6)$ με

$$g'(x) = 2f'(x) - f(6). \text{ Είναι}$$

$$g(3) = 2f(3) - 3f(6), g(5) = 2f(5) - 5f(6) = 2f(3) + 2f(6) - 5f(6) = 2f(3) - 3f(6) = g(3),$$

οπότε λόγω του Θ. Rolle υπάρχει $\xi_2 \in (3, 5) \subseteq (3, 6)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow 2f'(\xi_2) - f(6) = 0$$

δ) Είναι $g(5) = 2f(3) - 3f(6) = 2\left(f(3) - \frac{3}{2}f(6)\right) > 0$ και

$$g(6) = 2f(6) - 6f(6) = -4f(6) < 0 \quad (f(x) > 0, x \in [3, 6]), \text{ δηλαδή } g(5)g(6) < 0 \text{ και επειδή}$$

η g είναι συνεχής στο $[5, 6]$, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει $\xi_3 \in (5, 6) \subseteq (3, 6)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_3) = 0$.

ε) Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, 6]$. Για κάθε $x > \xi_3 > \xi_2$ είναι

$$f'(x) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f'(x) > \frac{f(6) - f(3)}{3} \Leftrightarrow 2f(x) - f(6) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [\xi_2, 6].$$

Για κάθε $x > \xi_3$ είναι $g(x) > g(\xi_3) = 0$ αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

34. α) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$f(2) = 4 = f(-2)$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 4f(x) - 3$ έχει τουλάχιστον 4 ρίζες.

β) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $(\sqrt[n]{n})^x = x, x > 0$ έχει μόνο δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ όπου n θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1.

Λύση

α) Έστω $h(x) = f^2(x) - 4f(x) + 3 = (f(x) - 1)(f(x) - 3)$

Επειδή $f(-2) = 4$ και $f(0) = 0$, είναι $f(0) < 2 < f(-2)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$, υπάρχει $x_1 \in [-2, 0]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 2$.

Επειδή $f(2) = 4$ και $f(0) = 0$, είναι $f(0) < 2 < f(2)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, υπάρχει $x_2 \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 2$.

$$\text{Είναι } h(-2) = (f(-2) - 1)(f(-2) - 3) = 3 > 0, h(x_1) = (f(x_1) - 1)(f(x_1) - 3) = -1 < 0,$$

δηλαδή $h(x_1)h(-2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[-2, x_1]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho_1 \in (-2, x_1)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_1) = 0$.

Είναι $h(0) = (f(0) - 1)(f(0) - 3) = 3 > 0$, $h(x_1) = -1 < 0$,

δηλαδή $h(x_1)h(0) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho_2 \in (x_1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_2) = 0$.

Είναι $h(0) = 3 > 0$, $h(x_2) = -1 < 0$, δηλαδή $h(x_2)h(0) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, x_2]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho_3 \in (0, x_2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_3) = 0$.

Είναι $h(2) = (f(2) - 1)(f(2) - 3) = 3 > 0$, $h(x_2) = -1 < 0$,

δηλαδή $h(x_2)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_2, 2]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho_4 \in (x_2, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_4) = 0$.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 4f(x) - 3$ έχει τουλάχιστον 4 ρίζες.

$$\beta) (\sqrt[n]{v})^x = x \Leftrightarrow v^x = x^v \Leftrightarrow \ln v^x = \ln x^v \Leftrightarrow x \ln v = v \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln v}{v} \quad (1).$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, e]$ και για κάθε

$x > e$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [e, +\infty)$.

Η (1) γίνεται: $g(x) = g(v)$ (2).

Αν $v = 2$ τότε η (2) έχει προφανή και μοναδική ρίζα στο $(0, e]$ την $x = 2$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ και } g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Στο διάστημα $\Delta = [e, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών το } g(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(e) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right].$$

Θα εξετάσουμε αν $\frac{\ln 2}{2} \in g(\Delta)$: Είναι $2 < e \Leftrightarrow g(2) < g(e) \Rightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$ και επειδή

$$\frac{\ln 2}{2} > 0, \text{ υπάρχει } \rho \in g(\Delta) \text{ τέτοιο, ώστε } g(\rho) = 0 \text{ και επειδή η } g \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}$$

το ρ είναι η μοναδική της ρίζα στο $\Delta = [e, +\infty)$. Άρα τελικά η (1) έχει ακριβώς 2 ρίζες στη περίπτωση αυτή.

Αν $v > 2$, τότε η (2) έχει προφανή και μοναδική ρίζα στο $[e, +\infty)$ την $x = v$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty$ και η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο

$$\Delta_1 = (0, e], \text{ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το } g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right].$$

Θα εξετάσουμε αν $\frac{\ln v}{v} \in g(\Delta_1)$: Είναι $v > e \Leftrightarrow g(v) < g(e) \Rightarrow \frac{\ln v}{v} < \frac{1}{e}$, άρα

x	0	e	+∞
g'	+	0	-
g			

$\frac{\ln v}{v} \in g(\Delta_1)$ υπάρχει $\rho_1 \in g(\Delta_1)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως

φθίνουσα το ρ_1 είναι η μοναδική της ρίζα στο $\Delta_1 = (0, e]$. Άρα τελικά η (1) έχει ακριβώς 2 ρίζες και στη περίπτωση αυτή.

35. α) Δίνεται συνάρτηση f περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$. Αν όλες οι εφαπτόμενες της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να δείξετε ότι $\sin x \geq 1 - \frac{2x}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

γ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και

$$g(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2^v \left[3(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 3a^2 \right] + x^v \left[2(2-x)^2 + 2e^{a^2-1} \right]}{2x^v + 3 \cdot 2^v} \text{ για κάθε } x \neq 2.$$

Να βρείτε τον τύπο της g και τον θετικό πραγματικό αριθμό a .

Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Για να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων, πρέπει:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0. \text{ Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για}$$

$$\text{κάθε } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ είναι: } x f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{x} = c_1, & x > 0 \\ \frac{f(x)}{x} = c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1 x, & x > 0 \\ c_2 x, & x < 0 \end{cases}. \text{ Είναι } f(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1.$$

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-1) = -f(1) = -1 \Leftrightarrow -c_2 = -1 \Leftrightarrow c_2 = 1$, άρα $f(x) = x, x \neq 0$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x = 0$ είναι

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0, \text{ οπότε τελικά } f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Έστω $h(x) = \sin x - 1 + \frac{2}{\pi}x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $h'(x) = -\eta \mu x + \frac{2}{\pi}$.

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu x + \frac{2}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = \frac{2}{\pi} \quad (1). \text{ Επειδή } 0 < \frac{2}{\pi} < 1 \text{ υπάρχει } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{τέτοιο, ώστε } \eta \mu x_0 = \frac{2}{\pi}. \text{ Τότε η (1) γίνεται: } \eta \mu x = \eta \mu x_0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta \mu x + \frac{2}{\pi} > 0 \Leftrightarrow \eta \mu x < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \eta \mu x < \eta \mu x_0 \Rightarrow 0 < x < x_0.$$

Για κάθε $x \in (0, x_0)$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, x_0]$ και για κάθε $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \left[x_0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Επειδή η h είναι συνεχής έχει ολικό ελάχιστο το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

Επειδή η h έχει τοπικά ελάχιστα τα $h(0) = 0$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ισχύει ότι

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 + \frac{2}{\pi}x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\gamma) \text{ Για } x > 2 \text{ είναι: } g(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{x^v \left\{ \left(\frac{2}{x}\right)^v \left[3(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 3\alpha^2 \right] + \left[2(2-x)^2 + 2e^{\alpha^2-1} \right] \right\}}{x^v \left(2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^v \right)} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{2(2-x)^2 + 2e^{\alpha^2-1}}{2} = (2-x)^2 + e^{\alpha^2-1}$$

$$\text{Για } 0 < x < 2 \text{ είναι: } g(x) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{2^v \left\{ \left[3(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 3\alpha^2 \right] + \left(\frac{x}{2}\right)^v \left[2(2-x)^2 + 2e^{\alpha^2-1} \right] \right\}}{2^v \left(2\left(\frac{x}{2}\right)^v + 3 \right)} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 3\alpha^2}{3} = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + \alpha^2.$$

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} (2-x)^2 + e^{\alpha^2-1}, & x > 2 \\ g(2), & x = 2 \\ (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + \alpha^2, & 0 < x < 2 \end{cases}.$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και στο 2, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2) \Leftrightarrow e^{\alpha^2-1} = \alpha^2 = g(2) \quad (2).$$

Έστω $A(x) = e^{x-1} - x$, $x > 0$. Είναι $A'(x) = e^{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $A'(x) < 0 \Rightarrow A \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$A'(x) > 0 \Rightarrow A \nearrow [1, +\infty)$. Η A παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, άρα $A(x) \geq A(1) = 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα η (2) γίνεται:

$$e^{\alpha^2-1} = \alpha^2 \Leftrightarrow e^{\alpha^2-1} - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow A(\alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha = 1 \text{ και } g(2) = 1, \text{ οπότε}$$

$$g(x) = \begin{cases} (2-x)^2 + 1, & x > 2 \\ 1, & x = 2 \\ (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} + 1, & 0 < x < 2 \end{cases}.$$

36. Δίνεται μια μπάλα διαμέτρου d και ένα ελαστικό κυκλικό στεφάνι που μεταβάλλει τη διάμετρό του σύμφωνα με τον τύπο $f(t) = \frac{\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t} + 30 - 2\sqrt{2}$, όπου t σε ώρες και $f(t)$ σε cm με $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Ρίχνουμε τη μπάλα προσπαθώντας να περάσει μέσα από τη κυκλική στεφάνη.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

β) Τη χρονική στιγμή που μια μπάλα διαμέτρου $d=20\text{cm}$ έχει την μικρότερη πιθανότητα να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

γ) τη μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που μπορεί ανά πάσα στιγμή να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

δ) Βρείτε τη μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που θα είχε πιθανότητα κάποια στιγμή με $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη.

Λύση

$$\alpha) f(t) = \frac{\eta\mu t}{\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t} + \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t} + 30 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu t} + \frac{1}{\eta\mu t} + 30 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ με } f'(t) = \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t} - \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu^2 t} = \frac{\eta\mu^3 t - \sigma\upsilon\nu^3 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t \cdot \eta\mu^2 t}$$

$$\text{Είναι } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 t - \sigma\upsilon\nu^3 t = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 t = \sigma\upsilon\nu^3 t \Leftrightarrow \eta\mu t = \sigma\upsilon\nu t \Leftrightarrow \epsilon\phi t = 1 \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\phi t = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ αφού η } \epsilon\phi x \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα είναι και } 1-1.$$

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 t - \sigma\upsilon\nu^3 t > 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 t > \sigma\upsilon\nu^3 t \Leftrightarrow \eta\mu t > \sigma\upsilon\nu t \Leftrightarrow \epsilon\phi t > 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi t > \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$t > \frac{\pi}{4} \text{ αφού η } \epsilon\phi x \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ και γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ επομένως η}$$

$$f \text{ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για } x = \frac{\pi}{4} \text{ το}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} + 30 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 30 - 2\sqrt{2} = 30 \text{ cm.}$$

$$\text{Η } f \text{ ως συνεχής στο } \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ παίρνει ελάχιστη τιμή } m \text{ και μέγιστη τιμή } M. \text{ Το ολικό μέγιστο}$$

της f θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα. Άρα

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 32 - 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = f_{\max}$$

β) Η χρονική στιγμή που μια μπάλα σταθερής διαμέτρου $d=20 \text{ cm}$ έχει την μικρότερη πιθανότητα να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη είναι τη στιγμή που η στεφάνη έχει

$$\text{ελάχιστη διάμετρο δηλαδή για } t = \frac{\pi}{4}.$$

γ) Η μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που μπορεί ανά πάσα στιγμή να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη είναι ίση με την ελάχιστη τιμή της διαμέτρου της κυκλικής στεφάνης δηλαδή $d = 30\text{cm}$.

δ) Η μέγιστη τιμή της διαμέτρου μιας μπάλας που θα είχε πιθανότητα κάποια στιγμή με

$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ να περάσει μέσα από την κυκλική στεφάνη είναι όταν η διάμετρος της

στεφάνης γίνεται $\max$ δηλαδή $d = 32 - 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

37. Έστω περιττή συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + 1$. Αν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f \circ f$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f \circ f$ στο $+\infty$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

δ) Αν $g(x) = f(x) + x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1 - e^{x_0}$.

Λύση

α) Επειδή η $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = 0.$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot x = +\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 1 + 2x + 1) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right] = 2 \cdot 2 = 4, \text{ γιατί αν θέσουμε } f(x) = u, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 2.$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 2f(x) + 2f(x) - 4x] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(f(x)) - 2f(x)) + 2(f(x) - 2x)] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 4x] = 1 + 2 = 3, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 2f(x)] \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (f(u) - 2u) = 1.$$

Οπότε η ευθεία $y = 4x + 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f \circ f$ στο $+\infty$.

γ) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-f(-x)}{x} \stackrel{-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-f(u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(-x) - 2x) \stackrel{-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (-f(u) + 2u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} [-(f(u) - 2u)] = -1.$$

Άρα η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} + 1 + \frac{3}{x} \right] = 2 + 1 = 3 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x + 3 - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 3) = 1 + 3 = 4$ Άρα η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ε) Έστω $h(x) = f(x) + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-f(-x)] \stackrel{-x=u}{=} - \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty, \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + e^x - 1] = -\infty. \text{ Άρα υπάρχει } \alpha < 0 \text{ τέτοιο, ώστε } h(\alpha) < 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + e^x - 1] = +\infty \text{ άρα υπάρχει } \beta > 0 \text{ τέτοιο, ώστε } h(\beta) > 0.$$

Είναι $h(\alpha)h(\beta) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + e^{x_0} - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1 - e^{x_0}.$$

38. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} - x \right) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x + 1}.$$

β) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες

x' , y' και την ευθεία $x = 1$.

ε) Ένα υλικό σημείο M κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,5)$.

Λύση

α) Έστω $f(x) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} - x = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} + x$, $x > 0$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Για να είναι η ευθεία $y = x + 1$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) + x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} + x - x - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - 1 + x^2 \eta \mu \frac{1}{x^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - 1 + \frac{\eta \mu \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right] = 0 \Leftrightarrow 0 - 1 + 1 = 0 \text{ ισχύει}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\substack{\frac{1}{x}=u \\ u \rightarrow 0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x+1} - x - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5 - x^2 - 2x - 1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2 + (\beta-2)x + 4}{x+1} = 0.$$

$$\text{Αν } \alpha \neq 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2 + (\beta-2)x + 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha-1)x = \pm\infty, \text{ άρα για}$$

$$\text{να είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2 + (\beta-2)x + 4}{x+1} = 0 \text{ πρέπει } \alpha = 1. \text{ Τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-1)x^2 + (\beta-2)x + 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta-2)x + 4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[(\beta-2) + \frac{4}{x} \right]}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \beta - 2, \text{ άρα } \beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1} \text{ και } f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -3]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-3, -1]$ και $(-1, 1]$.

Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-3) = -4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 4$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
x^2+2x-3	+	○	-	-	○	+	
$(x+1)^2$	+		+	+		+	
f'	+		-	-		+	
f			○			○	

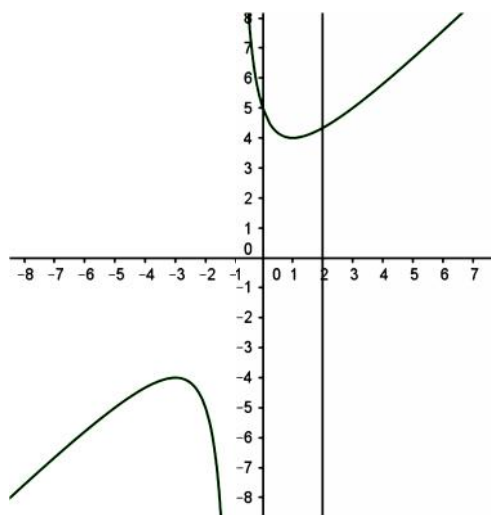
δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^2 \frac{x^2 + 2x + 1 + 4}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{(x+1)^2 + 4}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^2 \left(x+1 + \frac{4}{x+1} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[\frac{x^2}{2} + x + 4 \ln(x+1) \right]_0^2 = 4 + 4 \ln 3$$



ε) Έστω $M(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, το σημείο,

με $x'(t) = 3 \text{ cm/sec}$.

$$\text{Είναι } y(t) = \frac{x^2(t) + 2x(t) + 5}{x(t)+1} \text{ και } y'(t) = \frac{x^2(t) + 2x(t) - 3}{(x(t)+1)^2} x'(t)$$

Έστω ότι το M διέρχεται από το A τη χρονική στιγμή $t = t_0$, τότε $x(t_0) = 0$ και

$$y'(t_0) = \frac{x^2(t_0) + 2x(t_0) - 3}{x(t_0)+1} x'(t_0) = \frac{-3}{1} \cdot 3 = -9 \text{ cm/sec}.$$

Ολοκληρώματα

39. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 2f(x) = x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{f^{-1}(x) + x}$.

στ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε να βρείτε το x_0 .

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = e^{1-x}$.

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία να ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$

τότε $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ και $2f(x_1) \geq 2f(x_2)$ οπότε

$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 3 \geq x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο, άρα για κάθε $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται και αν $f(x) = y$ τότε $x = f^{-1}(y)$ και από τη σχέση $f^3(x) + 2f(x) = x + 3$ (1) προκύπτει $f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3$, $y \in \mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$.

γ) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = x \Leftrightarrow x^3 + x - 3 = 0.$$

Έστω $g(x) = x^3 + x - 3$ είναι $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ οπότε $g \nearrow$ και

$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα άρα και η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$. Έστω $f(x) = u$ οπότε $x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow x = u^3 + 2u - 3$ και $dx = (3u^2 + 2)du$.

Για $x = -3$ είναι $f^{-1}(u) = -3 = f^{-1}(0)$ άρα $u = 0$ ενώ για $x = 0$ είναι $f^{-1}(u) = 0 = f^{-1}(1)$ άρα $u = 1$

$$\text{οπότε } I = \int_0^1 u(3u^2 + 2)du = \left[\frac{3u^4}{4} + u^2 \right]_0^1 = \frac{7}{4}.$$

ε) Έχουμε $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{f^{-1}(x) + x}$. Είναι $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$ και $f^{-1}(x) = f^{-1}(f^{-1}(u)) = f^{-1}(u^3 + 2u - 3)$. Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $f^{-1}(u) \rightarrow +\infty$ άρα $u \rightarrow +\infty$ και

$$L = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{(u^3 + 2u - 3)^3 + 2(u^3 + 2u - 3) - 3 + (u^3 + 2u - 3)} = 0.$$

στ) Παραγωγίζουμε στην (1) και έχουμε: $3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 1$ (2) και

$$6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) + 2f''(x) = 0$$

Για $x = x_0$ έχουμε $6f(x_0)f'(x_0) = 0$, αφού $f''(x_0) = 0$, οπότε $f(x_0) = 0$ ή $f'(x_0) = 0$,

(άτοπο από (2)). Οπότε στην (1) για $x = x_0$ έχουμε $0 = x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -3$.

ζ) Η εξίσωση είναι $x^3 + 2x - 3 = e^{1-x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 - e^{1-x} = 0$.

Έστω $h(x) = x^3 + 2x - 3 - e^{1-x}$, $x \in [1, 2]$.

Είναι $h(1) = -1 < 0$, $h(2) = 9 - \frac{1}{e} > 0$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, η

εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Είναι $h'(x) = 3x^2 + 2 + e^{1-x} > 0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

40. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 11) - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-3, 3)$ τέτοιο, ώστε $|f'(x_0)| > \frac{1}{6} \ln \frac{6}{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $2 \leq \frac{1}{6} \int_{-3}^3 e^{f(x)} dx \leq 11$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln(x^2 + x + 4)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 1)$.

Λύση

$$\alpha) f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 11} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{-20x}{(x^2 + 11)(x^2 + 1)}.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = \ln 11$

β) Επειδή $\ln 6, \ln 5 \in (\ln 2, \ln 11)$ τότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-3, 3)$ τέτοια

ώστε $f(x_1) = \ln 5$, $f(x_2) = \ln 6$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ υπάρχει

$$x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (-3, 3) \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Είναι $|f'(x_0)| = \frac{\ln 6 - \ln 5}{|x_2 - x_1|}$ και $|x_2 - x_1| \leq |x_2| + |x_1| < 3 + 3 = 6$ άρα

$$|f'(x_0)| > \frac{\ln 6 - \ln 5}{6} \Leftrightarrow f'(x_0) > \frac{1}{6} \ln \frac{6}{5}.$$

γ) Είναι $-3 \leq x \leq 0 \Rightarrow f(-3) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \ln 2 \leq f(x) \leq \ln 11$ και

$$0 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow \ln 2 \leq f(x) \leq \ln 11, \text{ άρα}$$

για κάθε $x \in [-3, 3]$ είναι $\ln 2 \leq f(x) \leq \ln 11 \Leftrightarrow e^{\ln 2} \leq e^{f(x)} \leq e^{\ln 11} \Leftrightarrow 2 \leq e^{f(x)} \leq 11$ οπότε

$$\int_{-3}^3 2dx \leq \int_{-3}^3 e^{f(x)} dx \leq \int_{-3}^3 11dx \Leftrightarrow 12 \leq \int_{-3}^3 e^{f(x)} dx \leq 66 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{6} \int_{-3}^3 e^{f(x)} dx \leq 11.$$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 11) - \ln(x^2 + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2 + 11}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{x^2+11}{x^2+1}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0,$

άρα ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

$$\epsilon) f(x) = \ln(x^2 + x + 4) \Leftrightarrow \ln \frac{x^2 + 11}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + x + 4) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 11}{x^2 + 1} = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 11 = x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 + 6x + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x^3 + 2x^2 + 6x + 7 = 0$$

Αρκεί η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 6x + 7 = 0$ να

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 1)$.

Έστω $g(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 7, x \in [-2, 1]$. Είναι $g(-2) = -5, g(1) = 16$ δηλαδή

$g(-2)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η

εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 6x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 1)$.

1	1	4	1	-7	1
	1	2	6	-7	
1	2	6	7	0	

41. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = e^{x^2} - x^2, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b), a < b$, τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = 2\xi_2 e^{\xi_2^2} - b - a$.

στ) Αν $f(1) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Λύση

α) Έστω $g(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε

$x > 0$ είναι $g'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το

$$g(0) = 0 \text{ άρα } g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \quad (1)$$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$, άρα $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 > 0$, άρα $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

γ) Είναι $f'(0) = e^0 - 0^2 = 1$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x + f(0).$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια του σημείου επαφής, δηλαδή είναι $f(x) \leq x + f(0)$ για κάθε $x \leq 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$ είναι $x + f(0) < 0$ κοντά στο $-\infty$, άρα $\frac{1}{x + f(0)} \leq \frac{1}{f(x)} < 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και επειδή

$$f(x) \leq x + f(0) < 0, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια του σημείου επαφής, δηλαδή είναι $f(x) \geq x + f(0)$ για κάθε $x \geq 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$ άρα $x + f(0) > 0$ κοντά στο $+\infty$, οπότε $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x + f(0)}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και επειδή

$$f(x) \geq x + f(0) > 0, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) όπου x το x^2 , προκύπτει:

$$e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 1 > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \text{ και}$$

επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^{x^2}}{x^2} - 1 \right) \right] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = +\infty, \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x^2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^{x^2}}{x^2} - 1 \right) \right] = +\infty \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει}$$

πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

ε) Από το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta^2} - \beta^2 - e^{\alpha^2} + \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta^2} - e^{\alpha^2}}{\beta - \alpha} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{e^{\beta^2} - e^{\alpha^2}}{\beta - \alpha} - \beta - \alpha \quad (1).$$

Έστω $h(x) = e^{x^2}$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$h'(x) = 2xe^{x^2}. \text{ Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει } \xi_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$h'(\xi_2) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 2\xi_2 e^{\xi_2^2} = \frac{e^{\beta^2} - e^{\alpha^2}}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) είναι $f'(\xi_1) = 2\xi_2 e^{\xi_2^2} - \beta - \alpha$.

$$\sigma\tau) \quad E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f'(x) dx = \left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = f(1) - \int_0^1 x (e^{x^2} - x^2) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 1 - \int_0^1 (x e^{x^2} - x^3) dx = 1 - \left[\frac{e^{x^2}}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7-2e}{4}.$$

42. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ για

την οποία ισχύει: $f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x e^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = \lambda e^\lambda$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Λύση

α) Είναι $e^{-f(x)} > 0$, οπότε για κάθε $x \geq 0$ είναι $f'(x)(f(x)+1) > 0$, άρα οι αριθμοί $f'(x)$ και $f(x)+1$ είναι ομόσημοι. Αν $f'(x) < 0$ και $f(x)+1 < 0$, τότε $f(x) < -1$ για κάθε $x \geq 0$ που είναι άτοπο αφού $f(0) = 0$, άρα $f(x)+1 > 0$ και $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) + f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$$f(x)f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x)(e^{f(x)})' + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^{f(x)})' = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{f(x)} = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0)e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 0, \text{ οπότε } f(x)e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = x e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = y e^y, \quad y \geq 0, \text{ άρα } f^{-1}(x) = x e^x, \quad x \geq 0$$

δ) Για $x = 0$ είναι $f'(0) = \frac{1}{e^{f(0)} + 0} = 1$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο

$$x_0 = 0 \text{ είναι η ευθεία } \varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Είναι $f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1} \right)' = -\frac{e^{-f(x)}f'(x)(f(x)+2)}{(f(x)+1)^2} < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια του σημείου επαφής, άρα βρίσκεται κάτω και από την ε , οπότε ισχύει: $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

$$\text{Είναι } E(\lambda) = \int_0^{\lambda e^\lambda} (x - f(x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\lambda e^\lambda} - \int_0^{\lambda e^\lambda} f(x) dx.$$

Επειδή $x = f^{-1}(y)$ και $f(x)e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \geq 0$ έχουμε: $ye^y = f^{-1}(y)$. Θέτουμε $x = f^{-1}(y) = ye^y$, τότε $dx = (e^y + ye^y)dy$.

Για $x = 0$ είναι $y = 0$ και για $x = \lambda e^\lambda$ είναι $y = \lambda$. Τότε

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda y(e^y + ye^y) dy = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda e^y (y + y^2) dy \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \int_0^\lambda (y + y^2)(e^y)' dy \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - \left[(y + y^2)e^y \right]_0^\lambda + \int_0^\lambda (1 + 2y)e^y dy \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + \int_0^\lambda (1 + 2y)(e^y)' dy \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + \left[(1 + 2y)e^y \right]_0^\lambda - \int_0^\lambda 2e^y dy \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + (1 + 2\lambda)e^\lambda - 1 - 2[e^y]_0^\lambda \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda + \lambda^2)e^\lambda + (1 + 2\lambda)e^\lambda - 1 - 2e^\lambda + 2 \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda^2 - \lambda + 1)e^\lambda + 1.$$

$$\epsilon) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\frac{\lambda^2 e^{2\lambda}}{2} - (\lambda^2 - \lambda + 1)e^\lambda + 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\lambda^2 e^{2\lambda} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\lambda} + \frac{1}{\lambda e^\lambda} - \frac{1}{\lambda^2 e^\lambda} + \frac{1}{\lambda^2 e^{2\lambda}} \right) \right] = +\infty.$$

43. Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{(a-2)x^2 + \beta x + 1}{x - \gamma}$,

$a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = 2$.

α) Να δείξετε ότι $a = \beta = \gamma = 2$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε μια παράγουσα F της f στο διάστημα $(2, +\infty)$.

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(2, +\infty)$ την εξίσωση $(f(x) - 2)^5 = e^{6-2f(x)}$.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 3$ και $x = \lambda$, $\lambda > 3$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \neq 2$.

Λύση

α) Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{\gamma\}$, η ευθεία $x = \gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Άρα $\gamma = 2$. Τότε $f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^2 + \beta x + 1}{x - 2}$.

Για να είναι η ευθεία $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Αν $\alpha \neq 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2}{x} = \pm\infty$

Αν $\alpha = 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\beta x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\beta + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \beta$ άρα $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Τότε

Για $\alpha = \beta = \gamma = 2$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[(2x + 1) \frac{1}{x - 2} \right] = -\infty$, δηλαδή η $x = 2$ είναι

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 2$ με $f'(x) = \frac{2(x - 2) - (2x + 1)}{(x - 2)^2} = -\frac{5}{(x - 2)^2} < 0$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[(2x + 1) \frac{1}{x - 2} \right] = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε το αντίστοιχο

σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 2)$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (2, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε το αντίστοιχο

σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right) = (2, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \mathbb{R} - \{2\}$.

γ) Είναι $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{2x - 4 + 5}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 5}{x - 2} = 2 + \frac{5}{x - 2} \Leftrightarrow$

$F'(x) = (2x + 5 \ln(x - 2))' \Leftrightarrow F(x) = 2x + 5 \ln(x - 2) + c, c \in \mathbb{R}$

Για $c = 0$ η συνάρτηση $F(x) = 2x + 5 \ln(x - 2)$ είναι μια παράγουσα της f .

δ) Επειδή για $x > 2$ είναι $f(x) > 2$, έχουμε:

$(f(x) - 2)^5 = e^{6 - 2f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x) - 2)^5 = \ln e^{6 - 2f(x)} \Leftrightarrow 5 \ln(f(x) - 2) = 6 - 2f(x) \Leftrightarrow$

$2f(x) + 5 \ln(f(x) - 2) = 6 \Leftrightarrow F(f(x)) = F(3) \quad (1)$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ οπότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό. Η (1) γίνεται:

$F(f(x)) = F(3) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x - 2} = 3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3x - 6 \Leftrightarrow x = 7$

ε) $E(\lambda) = \int_3^\lambda |f(x)| dx = \int_3^\lambda f(x) dx = [F(x)]_3^\lambda = F(\lambda) - F(3) = 2\lambda + 5 \ln(\lambda - 2) - 6$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\lambda + 5\ln(\lambda - 2) - 6) = +\infty$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ και $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \emptyset$, η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = xy-2y \Leftrightarrow 2y+1 = xy-2x \Leftrightarrow x(y-2) = 2y+1 \stackrel{y \neq 2}{\Leftrightarrow} x = \frac{2y+1}{y-2}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-2}, y \neq 2, \text{ οπότε και } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2, \text{ άρα } f(x) = f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \neq 2.$$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι:

$$\text{i)} \int_0^1 f(x) dx < 1 \quad \text{ii)} \int_0^1 f^{-1}(x) dx = \frac{3}{8}$$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + f'(\xi) = e^{1-\xi} f'(\xi)$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Από την (1) για $x = x_0$ έχουμε $f^3(x_0) + f(x_0) = 2x_0$ (2).

$$(1) - (2) \Rightarrow f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1) = x - x_0 \quad (3) \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 \neq 0 \text{ αφού έχει } \Delta = f^2(x_0) - 4f^2(x_0) - 4 = -3f^2(x_0) - 4 < 0.$$

$$\text{Οπότε } |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} \right| \Leftrightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1|} \leq |x - x_0| \Leftrightarrow$$

$$-|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq |x - x_0| \Leftrightarrow f(x_0) - |x - x_0| \leq f(x) \leq |x - x_0| + f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) - |x - x_0|) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + |x - x_0|) \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ από κριτήριο}$$

παρεμβολής. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Από τη σχέση (3) έχουμε για } x \neq x_0 \text{ ότι: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} = \frac{1}{3f^2(x_0) + 1} \in \mathbb{R} \text{ άρα}$$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) Η σχέση (1) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Την παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε: $3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{3f^2(x) + 1} > 0$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) i) Από τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$ (1) έχουμε για $x=0$:

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Επίσης από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x)(f^2(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{f^2(x) + 1} \leq 2x \Leftrightarrow f(x) - 2x \leq 0 \text{ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο}$$

$$\text{για } x=0 \text{ έχουμε: } \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 2xdx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1.$$

ii) Η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Από τη σχέση (1) για } f(x) = y \text{ έχουμε } y^3 + y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^3 + y}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^3 + y}{2} \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}, x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x}{2}dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\epsilon) f(x) + f'(x) = e^{1-x}f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{1-x}} + \frac{f'(x)}{e^{1-x}} = f'(x) \Leftrightarrow e^{x-1}f(x) + e^{x-1}f'(x) - f'(x) = 0$$

$$\text{Θεωρούμε συνάρτηση } h(x) = e^{x-1}f(x) - f(x), x \in [0,1].$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$$h'(x) = e^{x-1}f(x) + e^{x-1}f'(x) - f'(x).$$

$$\text{Είναι } h(0) = e^{-1}f(0) - f(0) = 0 \text{ και } h(1) = f(1) - f(1) = 0 \text{ δηλαδή } h(0) = h(1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\xi-1}f(\xi) + e^{\xi-1}f'(\xi) - f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = e^{1-\xi}f'(\xi).$$

45. Δίνεται οι παραγωγίσιμες στο $[-2,1]$ συναρτήσεις f, k για τις οποίες ισχύει:

$$\bullet e^{f(x)} + f(x) = e^{3x^2-3} + x^3 - 3x + 2, x \in [-2,1] \quad (1)$$

$$\bullet k(x) = f(x) - 1$$

$$\bullet f(-2) = f(1) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in [-2,1]$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της k .

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της k .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^x(f(x) - x^3 - 2)$ την ευθεία $x=1$ και τον άξονα $y'y$.

Λύση

α) Θεωρούμε $g(x) = f(x) - x^3 + 3x - 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + x^3 - 3x + 2$ (2)

οπότε $f'(x) = g'(x) + 3x^2 - 3$ (3).

(1) $\Rightarrow e^{g'(x)+3x^2-3} + g(x) \cancel{+x^3-3x+2} = e^{3x^2-3} \cancel{+x^3-3x+2} \Leftrightarrow$

$e^{g'(x)} \cdot e^{3x^2-3} - e^{3x^2-3} + g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x^2-3} (e^{g'(x)} - 1) + g(x) = 0$ (4).

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,1]$ είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό, άρα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

- Έστω ότι η g παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα 1 και -2.

Είναι $g(-2) = f(-2) - (-2)^3 + 3(-2) - 2 = 0$ και $g(1) = f(1) - 1 + 3 - 2 = 0$ δηλαδή το ελάχιστο και το μέγιστο της g συμπίπτουν, άρα η g είναι η μηδενική συνάρτηση.

- Έστω ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1 και μέγιστο στο x_2 που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[-2,1]$, τότε επειδή η g είναι αναγνώρισιμη, από το

θεώρημα Fermat ισχύει ότι $g'(x_1) = 0$ και $g'(x_2) = 0$. Από την (4) για $x = x_1$

έχουμε $e^{3x_1^2-3} (e^{g'(x_1)} - 1) + g(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{3x_1^2-3} (e^0 - 1) + g(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = 0$ και όμοια

για $x = x_2$ είναι $g(x_2) = 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση τα ακρότατα της g είναι ίσα με μηδέν οπότε η g είναι η μηδενική συνάρτηση. Δηλαδή για κάθε $x \in [-2,1]$ είναι

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x^3 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$

β) $k(x) = f(x) - 1 = x^3 - 3x + 2 - 1 \Leftrightarrow k(x) = x^3 - 3x + 1$. Είναι $k'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ και

$k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \stackrel{x \in [-2,1]}{\Leftrightarrow} x \leq -1$.

Για κάθε $x \in (-2, -1)$ είναι $k'(x) > 0$ και επειδή η k είναι συνεχής, είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[-2, -1]$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $k'(x) < 0$ και επειδή η k είναι συνεχής

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Η k παρουσιάζει μέγιστο στο -1 το $k(-1) = 3$ και ελάχιστο στα -2, 1 το $k(-2) = k(1) = -1$.

γ) Στο διάστημα $A_1 = [-2, -1]$ αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το

$f(A_1) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(-2), f(-1)] = [-1, 3]$ και στο διάστημα $A_2 = (-1, 1]$ αντίστοιχο σύνολο τιμών

είναι το $f(A_2) \stackrel{f \downarrow}{=} (f(1), f(-1)] = (-1, 1]$.

Το $0 \in f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.

Τα x_1, x_2 είναι μοναδικά αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα αντίστοιχα διαστήματα άρα και 1-1.

δ) $h(x) = e^x (f(x) - x^3 - 2) = e^x (\cancel{x^3} - 3x \cancel{+2} - \cancel{x^3} - 2) = -3xe^x$.

Για $x \geq 0$ είναι $-3x \leq 0 \Leftrightarrow -3xe^x \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$E = \int_0^1 (-h(x)) dx = \int_0^1 (3xe^x) dx = \int_0^1 (3x(e^x)') dx =$

$$\left[3xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 (3e^x) dx = 3e - \left[3e^x \right]_0^1 = 3e - 3e + 3 = 3$$

46. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + f(x) = 4x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha)$ για κάθε $\alpha \leq \beta$.

ε) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία

$$\varepsilon: y = x + 1821.$$

στ) Αφού αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, να δείξετε ότι $2f(x) - 2x \leq 1$ για κάθε $x > 0$.

ζ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f^2(x) dx < \frac{9}{8}$

η) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

θ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ι) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και $B(17, 4)$ ανήκουν στη C_f .

Λύση

α) Για $x = 0$ είναι: $f^3(0) + f(0) = 4 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$f(0) = 0$ ή $f^2(0) = -1$ που είναι αδύνατο.

β) $f^3(x) + f(x) = 4x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = 4x \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x}{f^2(x) + 1} \quad (2)$. Είναι

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και } f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x) + 1} < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$(f^3(x) + f(x))' = (4x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 4 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 4 \quad (3).$$

Επειδή $3f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) - f(\alpha) \leq 4(\alpha - \alpha)$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , λόγω

$$\text{του Θ.Μ.Τ υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Όμως από τη σχέση (3) είναι $f'(x) = \frac{4}{3f^2(x) + 1} \leq 4$, αφού $3f^2(x) + 1 \geq 1$, άρα και

$$f'(\xi) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 4 \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) \leq 4(\beta - \alpha).$$

ε) Πρέπει $f'(x) = 1$, τότε $(3) \Rightarrow 3f^2(x) + 1 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \pm 1$

Αν $f(x) = 1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $1^3 + 1 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και η εφαπτομένη

$$\text{είναι η } \varepsilon_1: y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$$

Αν $f(x) = -1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $(-1)^3 - 1 = 4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και η

$$\text{εφαπτομένη είναι η } \varepsilon_2: y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + 1 = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}.$$

στ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \left(\frac{4}{3f^2(x) + 1} \right)' = -\frac{4(3f^2(x) + 1)'}{(3f^2(x) + 1)^2} = -\frac{12f(x)f'(x)}{(3f^2(x) + 1)^2}$$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής, οπότε βρίσκεται κάτω και από την ε_1 , άρα

$$f(x) \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) - x \leq 1$$

ζ) Είναι $0 \leq f(x) \leq x + \frac{1}{2}$ για κάθε $x \geq 0$, άρα $f^2(x) \leq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ και επειδή η ισότητα

$$\text{ισχύει μόνο για } x = 0, \text{ είναι: } \int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{8}.$$

η) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Rightarrow y^3 + y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y^3 + y), \text{ άρα } f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(y^3 + y)$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{\substack{f(x)=y \\ x=f^{-1}(y)}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y = +\infty \text{ και όμοια } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ άρα } f(A) = \mathbb{R}.$$

$$\iota) f^{-1}(1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ και } f^{-1}(4) = \frac{1}{4}(64+4) = \frac{68}{4} = 17 \Leftrightarrow f(17) = 4.$$

47. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$x^2 f''(x) + 3x f'(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 0, f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^\lambda = e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $a^{\frac{1}{a}} \cdot b^{\frac{1}{b}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \leq e^{\frac{3}{e}}$ για κάθε $a, b, \gamma > 0$.

δ) Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $g^2(x) = 2 \int_1^x f(t) dt$, $x \geq 1$ και $g(e) = 1$.

ε) Να δείξετε ότι $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$ με $1 < \alpha < \beta$.

Λύση

$$\alpha) x^2 f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f''(x) + 2xf'(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 f'(x) + xf(x))' = 0 \Leftrightarrow x^2 f'(x) + xf(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f'(1) + f(1) = c \Leftrightarrow c=1, \text{ άρα}$$

$$x^2 f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα } xf(x) = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\beta) x^\lambda = e^x \Leftrightarrow \ln x^\lambda = x \Leftrightarrow \lambda \ln x = x \quad (1)$$

Αν $\lambda = 0$, τότε η (1) γίνεται $x = 0$ που είναι αδύνατο, οπότε για $\lambda \neq 0$ είναι

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει μέγιστο το } f(e) = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$ και στο διάστημα $\Delta_2 = (e, +\infty)$, το αντίστοιχο σύνολο

τιμών είναι το $f(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{e} \right]$.

- Αν $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow 0 < \lambda < e$, τότε $\frac{1}{\lambda} \notin f(\Delta)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\lambda}$ είναι αδύνατη.

- Αν $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \lambda = e$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\lambda}$ έχει μοναδική ρίζα το $x = e$.

- Αν $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \lambda > e$, τότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\lambda}$ έχει 2 ρίζες, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(0, e)$ και $(e, +\infty)$

- Τέλος αν $\frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$, τότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{1}{\lambda}$ και επειδή η f είναι

γνησίως αύξουσα στο Δ_1 , η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Επειδή $\frac{1}{\lambda} \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \text{ δεν έχει άλλη ρίζα.}$$

γ) Επειδή η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$, ισχύει ότι $f(x) \leq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$. Είναι

$$f(x) \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ln x \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{e}, \text{ άρα και}$$

$$\ln \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{e}, \ln \beta^{\frac{1}{\beta}} \leq \frac{1}{e}, \ln \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{1}{e} \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη είναι:}$$

$$\ln \alpha^{\frac{1}{\alpha}} + \ln \beta^{\frac{1}{\beta}} + \ln \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{3}{e} \Leftrightarrow \ln \left(\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \beta^{\frac{1}{\beta}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \right) \leq \frac{3}{e} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \beta^{\frac{1}{\beta}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \leq e^{\frac{3}{e}}.$$

$$\delta) g^2(x) = 2 \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 2 \frac{\ln t}{t} dt = \int_1^x (\ln^2 t)' dt = [\ln^2 t]_1^x = \ln^2 x.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $\ln x > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1, +\infty)$ και επειδή $g(e) = 1$ είναι $g(x) > 0$, άρα $g(x) = \ln x$, $x \in (1, +\infty)$.

ε) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \frac{1}{x}$, λόγω του Θ.Μ.Τ

$$\text{υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1.$$

48. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)e^x + f'(x)(1 - e^x) - f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f'(0) = 0 \text{ και } f(0) = e.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x+e^{-x}}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln f(x)$ στο $+\infty$.

γ) Αν $g(x) \geq \lambda x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

δ) Αν $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = a$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

ε) Υλικό σημείο M κινείται επί της C_g έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του να είναι θετικός αριθμός. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι ίσος με το μισό του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

Λύση

$$\alpha) f''(x)e^x + f'(x)(1 - e^x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x)e^x + f'(x) - f'(x)e^x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (e^x f'(x) - f(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) - f'(x) + f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (f'(x) - f(x) + f(x)e^{-x})' = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - f(x) + f(x)e^{-x} = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=0, \text{ άρα } f'(x) - f(x) + f(x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (1 - e^{-x})f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-(x+e^{-x})}f'(x) - (1 - e^{-x})e^{-(x+e^{-x})}f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-(x+e^{-x})}f(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow e^{-(x+e^{-x})}f(x) = c_1 \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^{x+e^{-x}}.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c_1=1, \text{ άρα } f(x) = e^{x+e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $g(x) = \ln f(x) = \ln e^{x+e^{-x}} = x + e^{-x}.$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

γ) $g(x) \geq \lambda x + 1 \Leftrightarrow x + e^{-x} - \lambda x - 1 \geq 0 \quad (2)$

Έστω $h(x) = x + e^{-x} - \lambda x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$ και η (2) γίνεται

$$h(x) \geq h(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή η } h \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο } x_0 = 0 \text{ που}$$

βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 1 - e^{-x} - \lambda$, από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$h'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

δ) Είναι $E(\alpha) = \int_0^\alpha |g(x)| dx$. Επειδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, είναι:

$$E(\alpha) = \int_0^\alpha (x + e^{-x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^{-x} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^2}{2} - e^{-\alpha} + 1$$

$$\text{Είναι } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha^2}{2} - e^{-\alpha} + 1 \right) = +\infty$$

ε) Έστω $(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του M , τότε $y(t) = x(t) + e^{-x(t)}$. Είναι

$$y'(t) = x'(t) - e^{-x(t)} x'(t) = x'(t) (1 - e^{-x(t)}) \quad (3), \text{ όμως } y'(t) = x'(t) > 0, \text{ οπότε η (3) γίνεται:}$$

$$\frac{1}{2} x'(t) = x'(t) (1 - e^{-x(t)}) \Leftrightarrow 1 = 2 - 2e^{-x(t)} \Leftrightarrow 2e^{-x(t)} = 1 \Leftrightarrow e^{-x(t)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-x(t) = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(t) = \ln 2. \text{ Τότε } y(t) = \ln 2 + e^{-\ln 2} = \ln 2 + \frac{1}{2}, \text{ άρα } M \left(\ln 2, \ln 2 + \frac{1}{2} \right).$$

49. Έστω οι συναρτήσεις f, g , παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(e) = 1 = -g(e), \quad f'(x) = e^{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = -e^{-f(x)} \quad \text{για κάθε } x > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$.

β) $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x > 0$.

γ) $f(x) = \ln x$.

$$\delta) 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt = +\infty.$$

Λύση

α) Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και η $e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε και η f' θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

με $f''(x) = (e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$. Όμοια και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g''(x) = (-e^{-f(x)})' = e^{-f(x)} f'(x).$$

β) Είναι $f''(x) = e^{g(x)} g'(x)$ και $g'(x) = -e^{-f(x)}$, άρα $f''(x) = e^{g(x)} (-e^{-f(x)}) = -e^{g(x)-f(x)}$ (1).

Είναι $g''(x) = e^{-f(x)} f'(x)$ και $f'(x) = e^{g(x)}$, άρα $g''(x) = e^{-f(x)} e^{g(x)} = e^{-f(x)+g(x)}$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f''(x) = -g''(x)$, οπότε υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$f'(x) = -g'(x) + c_1$. Είναι $f'(e) = e^{g(e)} = e^{-1}$ και $g'(e) = -e^{-f(e)} = -e^{-1}$, οπότε η σχέση (3) για $x = e$ γίνεται: $f'(e) = -g'(e) + c_1 \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$, άρα $f'(x) = -g'(x)$.

Είναι: $f'(x) = -g'(x) \Leftrightarrow f(x) = -g(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Για $x = e$ είναι

$$f(e) = -g(e) + c_2 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0, \text{ άρα } f(x) = -g(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

γ) Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και $f(x) = -g(x)$ είναι:

$$f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = e$ είναι: $e^{f(e)} = e + c \Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα $e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = \ln x, \quad x > 0$.

δ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[e, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο (e, π) με $f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε λόγω του

$$\text{θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει } \xi \in (e, \pi) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}.$$

$$\text{Είναι } e < \xi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow (\pi - e) \frac{1}{\pi} < \ln \pi - 1 < (\pi - e) \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi - 1 < \frac{\pi}{e} - 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

ε) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$1 < x \leq t \leq 2x \Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(2x)} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t \in [x, 2x]$, έχουμε:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{f(2x)} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{f(x)} dt \Leftrightarrow \frac{1}{f(2x)} [t]_x^{2x} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{1}{f(x)} [t]_x^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\ln 2x} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{\ln x}$$

$$\text{Για κάθε } x > 1 \text{ είναι } \frac{x}{\ln 2x} > 0, \text{ άρα } 0 < \frac{x}{\ln 2x} < \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt} < \frac{\ln 2x}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt} = 0.$$

$$\text{Επειδή } \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt > \frac{x}{\ln 2x} > 0, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt = +\infty.$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Λύση

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο 0.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \text{ και } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.$$

$$\text{Για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ είναι } f'(x) < 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

$$\text{Οπότε } f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right).$$

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

$$\text{Οπότε } f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι: } f(A) = f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

$$\gamma) x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha \quad (1).$$

• Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$ και η (1) είναι αδύνατη.

• Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε επειδή $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ και

$f(x) > -\frac{1}{e}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, η (1) έχει μοναδική ρίζα την $x = \frac{1}{e}$.

• Αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ τότε:

– Υπάρχει $x_1 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

– Υπάρχει $x_2 \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_2 είναι μοναδικό. Άρα η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.

• Αν $\alpha \in (0, +\infty)$, τότε υπάρχει $x_1 \in (1, +\infty)$ ($f(1) = 0$) τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \alpha$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_1 είναι μοναδικό.

Άρα η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στη περίπτωση αυτή.

δ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $x < \xi < x+1$, οπότε $f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ε) Έστω ευθεία $x = \lambda$, $\lambda \in (0, 1)$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την

C_f , τον $x'x$, την $x = \lambda$ και την $x = 1$ είναι:

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^1 |f(x)| dx = -\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x dx = -\int_{\lambda}^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = -\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\lambda}^1 + \int_{\lambda}^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda + \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\lambda}^1 = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda + \frac{1-\lambda^3}{9} = \frac{3\lambda^3 \ln \lambda + 1-\lambda^3}{9} = \frac{1}{9} \lambda^3 (\ln \lambda - 1) + \frac{1}{9}.$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{9} \lambda^3 (\ln \lambda - 1) + \frac{1}{9} \right].$

Επειδή $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^3 (\ln \lambda - 1) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda - 1}{\frac{1}{\lambda^3}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{3}{\lambda^4}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\lambda^3}{3} \right) = 0$, είναι $E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \frac{1}{9}.$

51. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $2016(e^{x_0} - 1) = 2015(e^{x_0} + 1).$

γ) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) + 2f'(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I = \int_0^1 f^2(x) dx$ και $J = \int_0^1 x[1 - f^2(x)] dx.$

ε) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

ζ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

Λύση

α) $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}.$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει αντίστοιχο σύνολο

τιμών $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, 1)$

β) Επειδή $\frac{2015}{2016} \in (-1, 1)$ υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = \frac{2015}{2016} \Leftrightarrow \frac{e^{x_0} - 1}{e^{x_0} + 1} = \frac{2015}{2016} \Leftrightarrow 2016(e^{x_0} - 1) = 2015(e^{x_0} + 1).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

γ) $1 - f^2(x) = 1 - \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = 2f'(x) \Leftrightarrow f^2(x) + 2f'(x) - 1 = 0$

δ) Επειδή $f^2(x) = 1 - 2f'(x)$ τότε

$$I = \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 [1 - 2f'(x)] dx = 1 - 2[f(1) - f(0)] = 1 - 2 \frac{e-1}{e+1} = \frac{3-e}{e+1}$$

Επίσης $1 - f^2(x) = 2f'(x)$ οπότε

$$J = \int_0^1 x [1 - f^2(x)] dx = \int_0^1 x 2f'(x) dx = [2xf(x)]_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ομως } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \\ &= \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \stackrel{u=e^x \Rightarrow du=e^x dx}{=} \ln(e+1) - \ln 2 - \int_1^e \frac{du}{u(u+1)} du = \\ &= \ln(e+1) - \ln 2 - \int_1^e \frac{1}{u} du + \int_1^e \frac{1}{u+1} du = \\ &= \ln(e+1) - \ln 2 - [\ln|u|]_1^e + [\ln|u+1|]_1^e = \ln \frac{(e+1)^2}{e} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } J = 2 \frac{e-1}{e+1} - \ln \frac{(e+1)^2}{e}.$$

ε) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x y + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y}, y \in (-1, 1) \text{ και } f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \\ x &\in (-1, 1) \end{aligned}$$

στ) Είναι $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned} \zeta) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x)' \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \left[x \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{1-x^2} dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \right) + \left[\ln|x^2 - 1| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

52. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)(f(x) + x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

β) Να δείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ε) Να δείξετε ότι $\int_x^{x+1} \sqrt{4t^2 + 4} dt > 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\alpha) f'(x)(f(x) + x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)f(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f^2(x)}{2} + xf(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) = 2c, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) = 2c \Leftrightarrow 2c=1$, άρα

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1$$

Επειδή $x^2 + 1 > 0$ είναι $(f(x) + x)^2 > 0$, άρα $f(x) + x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η συνάρτηση $f(x) + x$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(0) + 0 = 1 > 0$ άρα $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ άρα}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = -\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -[\ln|f(x)|]_0^1 = -\ln f(1) + \ln f(0) = -\ln(\sqrt{2} - 1)$$

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0 \text{ άρα η } y=0 \text{ δηλαδή ο άξονας } x'x \text{ είναι οριζόντια}$$

$$\int_x^{x+1} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} (\sqrt{t^2 + 1} - t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} \sqrt{t^2 + 1} dt - \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^{x+1} > 0 \Leftrightarrow$$

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{x} = -2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = -2x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f$$

στο $-\infty$.

$$\epsilon) \text{ Είναι } x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \Leftrightarrow$$

$-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και

$$\int_x^{x+1} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} \sqrt{t^2+1} dt - \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^{x+1} > 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} \sqrt{t^2+1} dt - \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_x^{x+1} \sqrt{t^2+1} dt - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} 2\sqrt{t^2+1} dt > 2x + 1 \Leftrightarrow \int_x^{x+1} \sqrt{4t^2+4} dt > 2x + 1.$$

53. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι :

$$xf'(x) + f^2(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } f(e) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

β) Αφού δείξετε ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι $ef(x) + x - 2e \geq 0$ για κάθε $x > 1$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_e^{2e} \frac{1}{\ln x} dx > \frac{e}{2}$

δ) Να δείξετε ότι $e \ln \frac{\alpha}{\beta} + \ln \alpha \cdot \ln \beta (\beta - \alpha) > 0$ με $e < \alpha < \beta$.

ε) Έστω ότι η τετμημένη του σημείου $K(k, f(k))$, $k > 1$ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $2k \text{ cm/sec}$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο K με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $k = e$, δίνεται από τη σχέση $\theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0)$.

Λύση

$$\alpha) xf'(x) + f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{f^2(x)}{x} \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln x + c}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = e \text{ είναι: } f(e) = \frac{1}{1+c} = 1 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = \frac{1}{\ln x}, x > 1.$$

$$\beta) f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} \text{ και } f''(x) = \frac{(x \ln^2 x)'}{(x \ln^2 x)^2} = \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{(x \ln^2 x)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή στο } (1, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι $f'(e) = -\frac{1}{e}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = e$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{e}x + 2$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $(1, +\infty)$ εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq -\frac{1}{e}x + 2 \Leftrightarrow ef(x) \geq -x + 2e \Leftrightarrow ef(x) + x - 2e \geq 0$.

γ) Είναι $f(x) \geq -\frac{1}{e}x + 2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για

$$x = e, \text{ έχουμε: } \int_e^{2e} f(x) dx > \int_e^{2e} \left(-\frac{1}{e}x + 2 \right) dx = \left[-\frac{1}{e} \frac{x^2}{2} + 2x \right]_e^{2e} \Leftrightarrow$$

$$\int_e^{2e} f(x) dx > -\frac{1}{e} \frac{4e^2}{2} + 2 \cdot 2e + \frac{1}{e} \frac{e^2}{2} - 2e = \frac{e}{2}$$

δ) Από το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{\ln \beta} - \frac{1}{\ln \alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \alpha - \ln \beta}{\ln \alpha \cdot \ln \beta (\beta - \alpha)}$$

$$\text{Είναι } e < \alpha < \xi < \beta \Rightarrow f'(e) < f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Rightarrow \frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\ln \alpha \cdot \ln \beta (\beta - \alpha)} > -\frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$e \ln \frac{\alpha}{\beta} > -\ln \alpha \cdot \ln \beta (\beta - \alpha) \Leftrightarrow e \ln \frac{\alpha}{\beta} + \ln \alpha \cdot \ln \beta (\beta - \alpha) > 0$$

ε) Η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση:

$$y - f(k) = f'(k)(x - k) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\ln k} = -\frac{1}{k \ln^2 k} (x - k) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{k \ln^2 k} x + \frac{1}{\ln^2 k} + \frac{1}{\ln k} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{k \ln^2 k} x + \frac{\ln k + 1}{\ln^2 k}.$$

Για τη γωνία θ που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$ ισχύει ότι: $\varepsilon\theta = \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{k \ln^2 k}$

και επειδή τα μεγέθη μεταβάλλονται με τη πάροδο του χρόνου, είναι:

$$\varepsilon\theta(t) = -\frac{1}{k(t) \ln^2 k(t)}.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας αποτελούνται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις όταν $k(t) > 1$, έχουμε:

$$(\varepsilon\theta(t))' = \left(-\frac{1}{k(t) \ln^2 k(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{(k(t) \ln^2 k(t))'}{(k(t) \ln^2 k(t))^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \theta'(t) = \frac{k'(t) \ln^2 k(t) + \cancel{k(t)} \frac{2 \ln k(t)}{\cancel{k(t)}} k'(t)}{(k(t) \ln^2 k(t))^2}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $k(t_0) = e$, $k'(t_0) = 2k(t_0) = 2e$ και

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{k'(t_0) \ln^2 k(t_0) + 2 \ln k(t_0) k'(t_0)}{(k(t_0) \ln^2 k(t_0))^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{2e \ln^2 e + 2 \cdot 2e \ln e}{(e \ln^2 e)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{6e}{e^2} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{6}{e} \sin^2 \theta(t_0).$$

54. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $xf''(x) + (2-x)f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$, $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $3e^{x-3} - x = 0$.

γ) i) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα

ii) Να δείξετε ότι $e^{x-2} \geq \frac{x^2}{4}, x > 0$

δ) Να βρείτε το $a > 1$ για το οποίο ισχύει ότι: $\int_1^a f(x) dx = e^3 \ln 3 - \int_1^a e^x \ln x dx$.

Λύση

α) $xf''(x) + (2-x)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) - f'(x) + (2-x)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$xf''(x) + f'(x) = f'(x) + (x-2)f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$

$(xf'(x))' = f'(x)(1+x-2) + f(x) \Leftrightarrow (xf'(x))' = f'(x)(x-1) + f(x) \Leftrightarrow$

$(xf'(x))' = ((x-1)f(x))' \Leftrightarrow xf'(x) = (x-1)f(x) + c, c \in \mathbb{R}$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$xf'(x) = xf(x) - f(x) \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = xf(x) \Leftrightarrow (xf(x))' = xf(x) \Leftrightarrow$

$xf(x) = c_1 e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{c_1 e^x}{x}, c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι $f(1) = c_1 e \Leftrightarrow c_1 = 1$, άρα $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

β) $e^{x-3} - x = 0 \Leftrightarrow e^{x-3} = x \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^3} = x \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = e^3 \Leftrightarrow f(x) = e^3 \quad (1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 1]$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$, οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών για το διάστημα A_1 , είναι το

$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [e, +\infty)$.

Επειδή $e^3 \in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = e^3$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$, οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών για το διάστημα

$A_2 = [1, +\infty)$ είναι το $f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [e, +\infty)$.

Επειδή $e^3 \in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 , υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = e^3$. Τελικά η (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) i) $f''(x) = \frac{x^3 \cdot e^x - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{x^3 \cdot e^x - 2x^2e^x + 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x(x^2 - 2x + 2)}{x^4}$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \quad (x^2 - 2x + 2 > 0 \text{ αφού } \Delta = -4 < 0)$$

Άρα $f''(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$.

$$\text{ii) } e^{x-2} \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{e^2}{4} x \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^2}{4} x. \text{ Η εφαπτομένη της } f \text{ στο } x = 2 \text{ έχει εξίσωση :}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{e^2}{4}x$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της

με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq \frac{e^2}{4}x$ για κάθε $x > 0$.

$$\delta) \int_1^{\alpha} f(x) dx = e^3 \ln 3 - \int_1^{\alpha} e^x \ln x dx \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} \frac{e^x}{x} dx + \int_1^{\alpha} e^x \ln x dx = e^3 \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{\alpha} \left(e^x \frac{1}{x} + e^x \ln x \right) dx = e^3 \ln 3 \Leftrightarrow \int_1^{\alpha} (e^x \ln x)' dx = e^3 \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$[e^x \ln x]_1^{\alpha} = e^3 \ln 3 \Leftrightarrow e^{\alpha} \ln \alpha - e^1 \ln 1 = e^3 \ln 3 \Leftrightarrow e^{\alpha} \ln \alpha = e^3 \ln 3 \quad (2)$$

Έστω $g(x) = e^x \ln x, x > 1$.

Είναι $g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε είναι και 1-1.

Η (2) γίνεται: $g(\alpha) = g(3) \Leftrightarrow \alpha = 3$.

55. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

β) Αν x_0 η θέση ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $x_0 \in (1, 2)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x^2 + 6 \ln x) = 2(6x - 1)$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 3x^2 + 6(\ln x - 2) + 6 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 + 6 \ln x - 6$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 6x + \frac{6}{x} > 0 \Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 6 \ln x - 6) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 6 \ln x - 6) = +\infty$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, το σύνολο

τιμών της είναι $f'(\Delta) = \mathbb{R}$.

Επειδή $0 \in f'(\Delta)$, υπάρχει $x_0 \in \Delta = (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

Για κάθε $0 < x < x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και

για κάθε $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

β) Είναι $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \ln 1 - 6 = -3 < 0$ και $f'(2) = 12 + 6 \ln 2 - 6 = 6 + 6 \ln 2 > 0$, και επειδή η f' είναι συνεχής, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f' , άρα $x_0 \in (1, 2)$.

$$\gamma) x(x^2 + 6 \ln x) = 2(6x - 1) \Leftrightarrow x^3 + 6x \ln x - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Είναι } 1 < x_0 \Rightarrow f(x_0) < f(1) = -9 < 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] = 2, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] = +\infty$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, x_0]$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών της είναι το $f(\Delta_1) = [f(x_0), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [f(x_0), 2)$

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta_2) = [f(x_0), +\infty)$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Είναι $x_0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(2) = 12 \ln 2 - 14$ Επειδή

Όμως $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e = 1 \Leftrightarrow 12 \ln 2 < 12 < 14 \Leftrightarrow 12 \ln 2 - 14 < 0 \Leftrightarrow f(2) < 0$, άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, 2]$.

Επειδή $1 \leq x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(1) = -9 < 0$, είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = -\int_1^2 f(x) dx = -\int_1^2 [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 6x \ln x dx + \int_1^2 12x dx - \int_1^2 2 dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \int_1^2 (3x^2)' \ln x dx + [6x^2]_1^2 - 2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{15}{4} - [3x^2 \ln x]_1^2 + \int_1^2 3x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + 18 - 2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{15}{4} + 16 - 12 \ln 2 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{49}{4} - 12 \ln 2 + \left(6 - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{49}{4} - 12 \ln 2 + \frac{9}{2} = \frac{67}{4} - 12 \ln 2.$$

56. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα αυτό για την οποία ισχύει ότι: $f'(x) = f(x) - xf'(x) + x + 1$ για κάθε $x > -1$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$

β) Να δείξετε ότι $\int_1^e (x+1)^e dx > \int_1^e e^{\frac{1}{x+1}} dx$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f (αν υπάρχουν).

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & x > -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$. Αφού αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής

στο $x_0 = -1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από η γραφική παράσταση της g και τους άξονες.

Λύση

α) $f'(x) = f(x) - xf'(x) + x + 1 \Leftrightarrow f'(x)(x+1) - f(x) = x + 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)(x+1) - f(x)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1} \right)' = \left(\ln(x+1) \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) + c \quad (2).$$

Για $x = 0$ η (1) γίνεται: $f(0) = \int_0^0 f(t) dt - \int_0^0 tf'(t) dt = 0$ και από τη (2) είναι:

$$\frac{f(0)}{1} = c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = (x+1)\ln(x+1)$$

β) Είναι $f'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}}$ και $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq -1 \Leftrightarrow x+1 \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq e^{-1} - 1$

Για κάθε $x > e^{-1} - 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1} - 1, +\infty)$ και για κάθε

$x \in (-1, e^{-1} - 1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(-1, e^{-1} - 1]$. Η f έχει ελάχιστο το

$$f(e^{-1} - 1) = e^{-1} \ln e^{-1} = -\frac{1}{e}, \text{ άρα } f(x) \geq -\frac{1}{e} \text{ για κάθε } x > -1.$$

$$\text{Είναι } f(x) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln(x+1) \geq -\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x+1)^e \geq -\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^e \geq e^{-\frac{1}{x+1}} \text{ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε } x > -1, \text{ έχουμε:}$$

$$\int_1^e (x+1)^e dx > \int_1^e e^{-\frac{1}{x+1}} dx$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [(x+1)\ln(x+1)] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x+1}}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0. \text{ Επομένως η } C_f \text{ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)\ln(x+1)] = +\infty \text{ η } C_f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)+1}{1} = +\infty, \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.}$$

δ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = g(0)$ η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^0 g(x) dx &= \int_{\lambda}^0 (x+1) \ln(x+1) dx = \int_{\lambda}^0 \left(\frac{(x+1)^2}{2} \right)' \ln(x+1) dx = \\ &= \left[\frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) \right]_{\lambda}^0 - \int_{\lambda}^0 \frac{(x+1)^2}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)} dx = \\ &= -\frac{(\lambda+1)^2 \ln(\lambda+1)}{2} - \left[\frac{(x+1)^2}{4} \right]_{\lambda}^0 = \frac{(\lambda+1)^2 (1 - 2 \ln(\lambda+1)) - 1}{4}, \lambda \in (-1, 0) \end{aligned}$$

Επειδή $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (-1, 0]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \lim_{\lambda \rightarrow -1^+} \left(-\int_{\lambda}^0 g(x) dx \right) = \lim_{\lambda \rightarrow -1^+} \frac{-(\lambda+1)^2 (1 - 2 \ln(\lambda+1)) + 1}{4} = \frac{1}{4} \text{ γιατί} \\ \lim_{\lambda \rightarrow -1^+} (\lambda+1)^2 (1 - 2 \ln(\lambda+1)) &= \lim_{\lambda \rightarrow -1^+} \frac{1 - 2 \ln(\lambda+1)}{\frac{1}{(\lambda+1)^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ \lambda \rightarrow -1^+} \frac{-\frac{2}{\lambda+1}}{-\frac{2}{(\lambda+1)^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow -1^+} (-(\lambda+1)^2) = 0 \end{aligned}$$

57. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)} + e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} + (e^{f(x)} - x)^2 = 6x^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(x-1) = f(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) - f(e^{2x}) + f(e^x - 1) + 1 - x = e^x$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx = \int_1^4 \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} dx$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) f'(x) &= 2xe^{-f(x)} + e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2x + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + x + c \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ln(x^2 + x + c), c \in \mathbb{R}. f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = \ln(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\beta) f(x) = \ln(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + x + 1$$

$$e^{f(x)} + (e^{f(x)} - x)^2 = 6x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 + (x^2 + \cancel{x} + 1 - \cancel{x})^2 = 6x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x + 1 + x^4 + 2x^2 + 1 = 6x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Έστω } h(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1, x \in [1, 2].$$

Είναι $h(1) = -1, h(2) = 7$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma) f(x) + f(x-1) &= \ln(x^2 + x + 1) + \ln[(x-1)^2 + x - 1 + 1] = \ln[(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)] \Leftrightarrow \\ f(x) + f(x-1) &= \ln(x^4 - x^2 + x^2 + x^2 - x^2 + x - x + 1) \Leftrightarrow \\ f(x) + f(x-1) &= \ln(x^4 + x^2 + 1) = f(x^2) \quad (1) \end{aligned}$$

δ) Επειδή η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αντικαθιστώντας όπου x το e^x έχουμε:

$$f(e^x) + f(e^x - 1) = f(e^{2x}) \quad (2)$$

$$f(e^x) - f(e^{2x}) + f(e^x - 1) + 1 - x = e^x \Leftrightarrow 1 - x = e^x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \quad (3)$$

Έστω $g(x) = e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1 - 1$.

$$(3) \Rightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$$

$$\epsilon) \text{ Από τη σχέση (1) έχουμε: } \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 f(x-1) dx = \int_1^2 f(x^2) dx \quad (4)$$

Θέτουμε $x-1 = u \Rightarrow dx = du$, οπότε: $\int_1^2 f(x-1) dx = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx$ και θέτοντας

$$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt, \text{ έχουμε: } \int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^4 f(t) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$(4) \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_1^4 \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_1^4 \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} dx$$

58. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\eta\mu f(x) - f^2(x) = x + 3f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $-1 - 2x < 2f(x) < 1 + 2x$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = -\pi^2 - 2\pi$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } [\eta\mu f(x) - f^2(x)]' = [x + 3f(x)]' \Leftrightarrow f'(x) \sin f(x) - 2f(x)f'(x) = 1 + 3f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)[\sin f(x) - 2f(x) - 3] = 1 \quad (1)$$

$$\text{Έστω } h(x) = \sin x - 2x - 3, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $h'(x) = -\eta\mu x - 2 < 0$ ($-1 \leq \eta\mu x \leq 1$) άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $h(x) \leq h(0) = -2 < 0$, άρα και $h(f(x)) < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3 < 0, x \in \mathbb{R}$,
οπότε λόγω της (1) είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

β) Αν $x_1 = x_2$ τότε ισχύει η ισότητα.

Αν $x_1 < x_2$, τότε από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Είναι $h(f(x)) \leq -2 \Rightarrow |h(f(x))| \geq 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3| \leq 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{|\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ οπότε και

$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$

Όμοια αν $x_1 > x_2$.

γ) $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2f'(x) \leq 1$

Έστω $g(x) = 2f(x) - 2x - 1, x \geq 0$. Είναι $g'(x) = 2f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow g \searrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) = -1 < 0 \Leftrightarrow 2f(x) - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2f(x) < 2x + 1$

Έστω $t(x) = 2f(x) + 2x + 1, x \geq 0$. Είναι $t'(x) = 2f'(x) + 2 > 0 \Rightarrow t \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $t(x) \geq t(0) = 1 > 0 \Leftrightarrow 2f(x) + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) \geq -2x - 1$

δ) Είναι $f'(x)[\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3] = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3}$

Επειδή η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = -\frac{f'(x)\eta\mu f(x) - 2f'(x)}{(\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3)^2} = \frac{f'(x)(\eta\mu f(x) + 2)}{(\sigma\upsilon\nu f(x) - 2f(x) - 3)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0)[\sigma\upsilon\nu f(0) - 2f(0) - 3] = 1 \Leftrightarrow -2f'(0) = 1 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι: $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$.

Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός βέβαια του σημείου επαφής, άρα $f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{2}x \leq 0$.

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδό είναι: } E(\Omega) = \int_{-\pi^2-2\pi}^0 \left(-f(x) - \frac{x}{2} \right) dx = -\int_{-\pi^2-2\pi}^0 f(x) dx - \left[\frac{x^2}{4} \right]_{-\pi^2-2\pi}^0 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\int_{-\pi^2-2\pi}^0 f(x) dx + \frac{(\pi^2 + 2\pi)}{4}.$$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, οπότε η αρχική σχέση γίνεται:

$$\eta\mu y - y^2 = x + 3y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \eta\mu y - y^2 - 3y, y \geq 0$$

Για $x=0$ είναι $f^{-1}(y)=0=f^{-1}(0) \Leftrightarrow y=0$ και για $x=-\pi^2-2\pi$ είναι

$f^{-1}(y)=-\pi^2-2\pi=f^{-1}(\pi) \Leftrightarrow y=\pi$. Επίσης $dx=(f^{-1}(y))' dy=(\sin y-2y-3)dy$. Τότε:

$$E(\Omega)=-\int_{\pi}^0 y(\sin y-2y-3)dy+\frac{(\pi^2+2\pi)}{4} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\int_{\pi}^0 y \sin y dx + \int_{\pi}^0 (2y^2+3y)dy + \frac{(\pi^2+2\pi)}{4} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-[y \sin y]_{\pi}^0 + \int_{\pi}^0 y \sin y dx + \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right]_{\pi}^0 + \frac{(\pi^2+2\pi)}{4} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-[\sin y]_{\pi}^0 + \frac{2\pi^3}{3} + \frac{3\pi^2}{2} + \frac{(\pi^2+2\pi)}{4} = -2 + \frac{\pi(8\pi^2-21\pi-6)}{12}$$

59. α) Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και υπάρχει

$$x_0 \in [a, \beta] \text{ ώστε } f(x_0) < g(x_0) \text{ δείξτε ότι } \int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2015) < \int_1^{2016} f(x) dx < f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{f(x)} = 2$ δείξε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(16x)}{f(x)} = 2^4$

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2016)}{f(x)}$

Λύση

α) Έστω $h(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [a, \beta]$. Είναι $h(x) \geq 0$ και $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) > 0$ και

$$\text{επειδή η } h \text{ είναι συνεχής στο } [a, \beta], \text{ ισχύει ότι } \int_a^b h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx > \int_a^b f(x) dx$$

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$, οπότε για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι

$$f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow \int_1^2 f(1) dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 f(2) dx \Leftrightarrow$$

$$f(1)(2-1) < \int_1^2 f(x) dx < f(2)(2-1) \Leftrightarrow f(1) < \int_1^2 f(x) dx < f(2) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$, για κάθε $2 \leq x \leq 3$ ισχύει ότι

$$f(2) \leq f(x) \leq f(3) \Rightarrow \int_2^3 f(2) dx < \int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 f(3) dx \Leftrightarrow$$

$$f(2)(3-2) < \int_2^3 f(x) dx < f(3)(3-2) \Leftrightarrow f(2) < \int_2^3 f(x) dx < f(3) \quad (2)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι:

$$f(3) < \int_3^4 f(x) dx < f(4) \quad (3) \dots f(2015) < \int_{2015}^{2016} f(x) dx < f(2016) \quad (2015)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της (1), (2), ..., (2015) έχουμε:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2015) < \int_1^{2016} f(x) dx < f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$$

$$\text{γ)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(16x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(16x)}{f(8x)} \cdot \frac{f(8x)}{f(4x)} \cdot \frac{f(4x)}{f(2x)} \cdot \frac{f(2x)}{f(x)} \right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(16x)}{f(8x)} \stackrel{8x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2u)}{f(u)} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(8x)}{f(4x)} \stackrel{4x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2u)}{f(u)} = 2 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)}{f(2x)} \stackrel{2x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2u)}{f(u)} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)}{f(x+1)} &\stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u+1)}{f(u)} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+3)}{f(x+2)} &\stackrel{x+2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u+1)}{f(u)} = 2 \\ &\dots\dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2016)}{f(x+2015)} &\stackrel{x+2015=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u+1)}{f(u)} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\cancel{f(x+1)}}{\cancel{f(x)}} \cdot \frac{\cancel{f(x+2)}}{\cancel{f(x+1)}} \cdot \frac{\cancel{f(x+3)}}{\cancel{f(x+2)}} \dots \frac{f(x+2016)}{\cancel{f(x+2015)}} \right] = 2^{2016} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2016)}{f(x)} = 2^{2016}$$

60. Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) \neq 0$ με την f^{-1} παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$\int_1^2 e^{f(x)} (f^{-1})'(f(x)) dx + \ln x + f(x) = -1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f και της f^{-1} .

β) να βρεθεί ο τύπος της f .

γ) Αν για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ορίζεται η $f(g''(x))$ για κάθε x πραγματικό να λυθεί η εξίσωση $g(x) = g'(0)x + g(0)$.

Λύση

α) Έστω $\int_1^2 e^{f(x)} (f^{-1})'(f(x)) dx = c \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\int_1^2 e^{f(x)} (f^{-1})'(f(x)) dx + \ln x + f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) = -\ln x - c - 1.$$

Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f \searrow (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_{f^{-1}}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xrightarrow{f \searrow} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2) \Rightarrow f^{-1} \searrow D_{f^{-1}}.$$

β) Είναι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x > 0$ και η $f^{-1} \circ f$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, οπότε: $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x))\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = -x$ (1)

$$c = \int_1^2 e^{f(x)} (f^{-1})'(f(x)) dx \stackrel{(1)}{=} \int_1^2 e^{-\ln x - c - 1} (-x) dx \Leftrightarrow c = -\int_1^2 \frac{x}{e^{\ln x}} e^{-c-1} dx \Leftrightarrow$$

$$c = -\int_1^2 \frac{x}{x} e^{-c-1} dx \Leftrightarrow c = -e^{-c-1} (2-1) \Leftrightarrow c = -e^{-c-1} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{e^{c+1}} \Leftrightarrow ce^{c+1} + 1 = 0 \quad (2)$$

Λόγω της σχέσης (2) ο c είναι λύση της εξίσωσης $xe^{x+1} + 1 = 0$

Έστω $g(x) = xe^{x+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (x+1)e^{x+1}$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)e^{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Για κάθε $x < -1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, -1]$ και για κάθε $x > -1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [-1, +\infty)$.

Για κάθε $x < -1 \xrightarrow{g \searrow} g(x) > g(-1) = 0$ και για κάθε $x > -1 \xrightarrow{g \nearrow} g(x) > g(-1) = 0$.

Επειδή $g(-1) = 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq -1$ η $x = -1$ είναι η μοναδική ρίζα της

$g(x) = 0$, άρα $c = -1$, οπότε $f(x) = -\ln x + 1 - 1 = -\ln x$.

γ) Για την $f \circ g''$ ισχύει: $\begin{cases} x \in D_{g'} \\ g''(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g''(x) > 0 \end{cases}$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $h(x) = g(x) - g'(0)x - g(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) - g'(0)$.

Για κάθε $x > 0 \xrightarrow{g' \nearrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) - g'(0) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \xrightarrow{h \nearrow} h(x) > h(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0 \xrightarrow{g' \nearrow} g'(x) < g'(0) \Leftrightarrow g'(x) - g'(0) < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 0]$.

Για κάθε $x < 0 \xrightarrow{h \searrow} h(x) > h(0) = 0$.

Επειδή $h(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και $h(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g'(0)x + g(0)$.

- 61. α)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο πεδίο ορισμού της δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και γνησίως αύξουσα δείξτε ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.
- γ)** Αν η f είναι 1-1, $f(0) = 0$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, η αντίστροφή της είναι συνεχής και σε κάθε διάστημα $[x_1, x_2]$ με $0 < x_1 < x_2$, ισχύει $\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{dx}{[f^{-1}(x)]^2} > \int_{x_1}^{x_2} \frac{2f(x)}{x^3} dx$ και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ τότε:
- i) να βρεθεί η μονοτονία της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ στο $(0, +\infty)$.
- ii) να βρεθεί η μονοτονία της f στο $[0, +\infty)$.
- iii) αν η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, να δείξετε ότι: $f(1) > 3 \int_0^1 f(x) dx$
- iv) να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) \geq 3 \int_0^1 f(x) dx$

Λύση

α) Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ ή $f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma)$. Έστω ότι δεν ισχύει ο προηγούμενος ισχυρισμός και έστω ότι $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, τότε επειδή $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(\gamma)$. Επειδή όμως η f είναι 1-1 ισχύει ότι $\xi = \gamma$ που είναι άτοπο αφού $\gamma \notin (\alpha, \beta)$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Έστω $x, x_0 \in D_f$. Αν $x < x_0$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι

$$f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

Αν $x > x_0$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι

$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

γ) i) Η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται στο $[0, +\infty)$.

$$\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{dx}{[f^{-1}(x)]^2} > \int_{x_1}^{x_2} \frac{2f(x)}{x^3} dx \quad (1)$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ και $dx = f'(y)dy$. Για $x = f(x_1)$ είναι

$$f(x_1) = f(y) \Leftrightarrow x_1 = y \text{ και για } x = f(x_2) \text{ είναι } f(x_2) = f(y) \Leftrightarrow x_2 = y.$$

$$(1) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(y)}{y^2} dy > \int_{x_1}^{x_2} \frac{2f(x)}{x^3} dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{x^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{2f(x)}{x^3} dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{f'(x)}{x^2} - \frac{2f(x)}{x^3} \right] dx > 0 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} dx > 0 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' dx > 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x^2} \right]_{x_1}^{x_2} > 0 \Leftrightarrow [g(x)]_{x_1}^{x_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x_2) - g(x_1) > 0 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty).$$

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{2f(x)}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα}$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

iii) Είναι $x^2 f'(x) - 2xf(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 f'(x) \geq 2xf(x) \Leftrightarrow xf'(x) \geq 2f(x)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$. Επειδή οι συναρτήσεις f και f' είναι συνεχείς στο $[0, +\infty)$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 xf'(x) dx > \int_0^1 2f(x) dx \Leftrightarrow [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx > 2 \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx < f(1) \quad (3)$$

iv) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f στο $[0, 1]$, υπάρχει $\xi \in (0, 1) : f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = f(1)$.

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $f'(\xi) > 3 \int_0^1 f(x) dx$.

62. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την

$$\text{οποία ισχύει ότι } f(x) = \frac{x + \eta \mu(f(x))}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

β) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να υπολογίσετε το $f(0)$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

δ) Να υπολογίσετε το: $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι: $\eta \mu f(x_1) = \eta \mu f(x_2)$ (1) και

$$\frac{x_1 + \eta \mu f(x_1)}{2} = \frac{x_2 + \eta \mu f(x_2)}{2} \Leftrightarrow x_1 + \cancel{\eta \mu f(x_1)} = x_2 + \cancel{\eta \mu f(x_2)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ 1-1,}$$

οπότε η f αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R} \text{ και θέτοντας } f(x) = y \text{ προκύπτει: } y = \frac{x + \eta \mu y}{2} \Leftrightarrow 2y - \eta \mu y = x$$

$$\text{άρα } f^{-1}(y) = 2y - \eta \mu y, \quad y \in \mathbb{R} \text{ οπότε και } f^{-1}(x) = 2x - \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(f^{-1})'(x) = 2 - \sigma \nu x$.

$$\text{Επειδή } -1 \leq \sigma \nu x \leq 1 \text{ είναι } (f^{-1})'(x) > 0 \Rightarrow f^{-1} \nearrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \text{ είναι } f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \stackrel{f^{-1} \nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f^{-1}(0) = 2 \cdot 0 - \eta\mu 0 = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(0)) = f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0).$$

$$\text{2ος τρόπος: } f(0) = \frac{\eta\mu(f(0))}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(f(0)) = 2f(0) \quad (2)$$

$$|\eta\mu f(0)| \leq |f(0)| \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2|f(0)| \leq |f(0)| \Leftrightarrow |f(0)| \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{f^{-1}(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2y - \eta\mu y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \frac{\eta\mu y}{y}} = 1, \text{ άρα}$$

$$f'(0) = 1.$$

$$\delta) \text{ Θέτουμε } f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow dx = (f^{-1})'(y) dy = (2 - \sigma\upsilon\nu y) dy$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } y=0 \text{ και για } x=2\pi \text{ είναι } f^{-1}(y) = 2\pi \Leftrightarrow f^{-1}(y) = f(\pi) \Leftrightarrow y = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} y (f^{-1})'(y) dy = \int_0^{\pi} y (2 - \sigma\upsilon\nu y) dy = \int_0^{\pi} 2y dy - \int_0^{\pi} y \sigma\upsilon\nu y dy =$$

$$\left[y^2 \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} y (\eta\mu y)' dy = \pi^2 - [y \eta\mu y]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \eta\mu y dy = \pi^2 - [\sigma\upsilon\nu y]_0^{\pi} = \pi^2 + 1 + 1 = \pi^2 + 2$$

63. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο $\alpha > 0$.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι: } \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

$$\beta) \text{ Να βρείτε το σύνολο τιμών της } g(x) = xf(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

$$\gamma) \text{ Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε: } \xi f(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} 2f(x) dx.$$

$$\delta) \text{ Αν } \xi = \beta - \beta f(\beta) + \int_{\alpha}^{\beta} 2f(x) dx, \text{ να δείξετε ότι υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 1.$$

Λύση

α) Επειδή η C_f εφάπτεται του $x'x$ στο α , ισχύει ότι $f(\alpha) = 0$ και $f'(\alpha) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

$$\text{Επειδή } \alpha > 0 \text{ είναι } \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - 0}{x} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x} < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad (1).$$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha, x]$, $x > \alpha$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(x).$$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(x) = f(x) + xf'(x)$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x > \alpha$ είναι $f'(x) > f'(\alpha) = 0$ και επειδή $f(x) > 0$, είναι $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή επιπλέον η g

είναι συνεχής, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g([a, b]) = [g(a), g(b)] = [0, \beta f(\beta)]$.

γ) Είναι $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) < xf'(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx < \int_a^b xf'(x) dx \Leftrightarrow$
 $\int_a^b f(x) dx < [xf(x)]_a^b - \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_a^b f(x) dx < \beta f(\beta)$, άρα ο αριθμός $2 \int_a^b f(x) dx$
 $\left(f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0 \right)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g και είναι διαφορετικός
 από τα $g(a)$ και $g(b)$. Επειδή επιπλέον η g είναι συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$
 τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 2 \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \xi f(\xi) = 2 \int_a^b f(x) dx$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα
 στο $[a, b]$, το ξ είναι μοναδικό.

δ) Είναι $f(x) + xf'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (xf(x) - x)' = 0$

Έστω $h(x) = xf(x) - x$, $x \in [\xi, \beta]$.

Είναι $h(\xi) = \xi f(\xi) - \xi = 2 \int_a^b f(x) dx - \xi$, $h(\beta) = \beta f(\beta) - \beta$ και λόγω της υπόθεσης είναι

$h(\xi) = h(\beta)$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[\xi, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, β) με

$h'(x) = f(x) + xf'(x) - 1$, λόγω του Θ. Rolle, υπάρχει $x_0 \in (\xi, \beta) \subseteq (a, b)$ τέτοιο, ώστε

$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 1$.

64. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)f'(x)f''(x) \neq 0$ για
 κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν
 $f(1) + f(3) = f(2) + f(4) - f'(x_1)f'(x_2)$, τότε:

α) Να βρείτε την μονοτονία της f .

β) Να δείξετε ότι κάθε μη κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη γραφικά παράσταση της f
 σε δυο το πολύ σημεία

γ) Υπάρχουν $\xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = f'(\xi_3) + f'(\xi_4)$.

δ) Αν $f(0) = f'(0) = 1$ και ισχύει $f(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$
 εφάπτεται της συνάρτησης $g(x) = \ln x + 2$.

iii) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
 g της παραπάνω εφαπτομένης και της $x = e^{-2}$.

v) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει την ευθεία $y = x - 2017$.

Λύση

α) Επειδή η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε η
 f είναι γνησίως μονότονη.

Επειδή οι αριθμοί $f'(x_1), f'(x_2)$ είναι ομόσημοι, ισχύει ότι: $f'(x_1)f'(x_2) > 0$. Τότε:

$f(1) + f(3) = f(2) + f(4) - f'(x_1)f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1)f'(x_2) = f(2) + f(4) - f(1) - f(3) \Leftrightarrow$

$$f(2) + f(4) - f(1) - f(3) > 0.$$

Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε: $1 < 2 \Leftrightarrow f(1) > f(2) \Leftrightarrow f(2) - f(1) < 0$,

$$3 < 4 \Leftrightarrow f(3) > f(4) \Leftrightarrow f(4) - f(3) < 0 \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη είναι:}$$

$$f(2) + f(4) - f(1) - f(3) < 0 \text{ που είναι άτοπο, άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

β) Έστω ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τέμνει τη C_f σε 3 σημεία. Τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda x + \beta$ θα έχει τουλάχιστον 3 ρίζες x_3, x_4, x_5 με $x_3 < x_4 < x_5$. Έστω $h(x) = f(x) - \lambda x - \beta$. Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_3, x_4], [x_4, x_5]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_3, x_4), (x_4, x_5)$ με $h'(x) = f'(x) - \lambda$. Επειδή $h(x_3) = h(x_4) = h(x_5) = 0$, λόγω του Θ. Rolle, υπάρχουν $\xi_1 \in (x_3, x_4)$ και $\xi_2 \in (x_4, x_5)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \lambda$ και $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \lambda$. Επειδή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \lambda$, λόγω του Θ. Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) που είναι άτοπο.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$ και $[3, 4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_3 \in (1, 2)$ και $\xi_4 \in (3, 4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_3) = f(2) - f(1)$ και $f'(\xi_4) = f(4) - f(3)$. Με πρόσθεση κατά μέλη στις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει: $f'(\xi_3) + f'(\xi_4) = f(2) - f(1) + f(4) - f(3)$. Όμως $f'(x_1)f'(x_2) = f(2) + f(4) - f(1) - f(3)$, άρα $f'(x_1)f'(x_2) = f'(\xi_3) + f'(\xi_4)$.

δ) i. Επειδή $f''(x) \neq 0$ και η f'' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα

$f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$ ή $f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1$.

Αν η f ήταν κοίλη τότε θα βρίσκονταν κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα θα ήταν $f(x) \leq x + 1$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Η $y = x + 1$ εφάπτεται στη C_g αν υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Η εφαπτομένη της } C_g \text{ στο } x_0 = 1 \text{ έχει εξίσωση:}$$

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1, \text{ δηλαδή είναι η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x = 0.$$

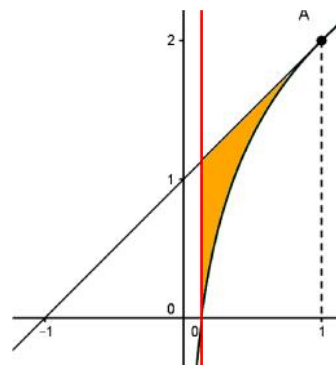
iii. Είναι $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow g \cap (0, +\infty)$, οπότε η C_g βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής. Δηλαδή $g(x) \leq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Επειδή $f(x) \geq x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, είναι $f(x) > x + 1 > g(x)$.

$$\text{iv. } E = \int_{e^{-2}}^1 (x + 1 - g(x)) dx = \int_{e^{-2}}^1 (x + 1 - \ln x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_{e^{-2}}^1 (x - 1) dx - \int_{e^{-2}}^1 (x)' \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{e^{-2}}^1 - [x \ln x]_{e^{-2}}^1 + \int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} - 1 - \frac{e^{-4}}{2} + e^{-2} - 2e^{-2} + 1 - e^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-4}}{2} - 2e^{-2}$$



ν. Επειδή η ευθεία $y = x - 2017$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x + 1$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την $y = x + 1$ εκτός του σημείου $(0,1)$ η C_f δεν τέμνει την ευθεία $y = x - 2017$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln \left[\left(\frac{|x| - x}{2} \right) (x^2 - 1) \right] + x - x \ln(x^2 - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -e$.

δ) Δείξε ότι $\ln(-x) \leq 2x + e$ για κάθε $x < -1$.

ε) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2e$ και $x = -e$.

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\left(\frac{|x| - x}{2} \right) (x^2 - 1) > 0$ και $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Αν $x \geq 0$ τότε $\left(\frac{|x| - x}{2} \right) (x^2 - 1) = \frac{x - x}{2} (x^2 - 1) = 0$ οπότε απορρίπτεται.

Αν $x < 0$ τότε $\left(\frac{|x| - x}{2} \right) (x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x - x}{2} (x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 1) > 0 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x < -1$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A = (-\infty, -1)$ και τότε

$$f(x) = x \ln[-x(x^2 - 1)] - x \ln(x^2 - 1) + x = x \ln \frac{-x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + x = x \ln(-x) + x$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1)$ με $f'(x) = \ln(-x) + x \frac{-1}{-x} + 1 = \ln(-x) + 2$.

Επειδή $x < -1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ακόμη είναι $f''(x) = \frac{1}{x} < 0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω.

γ) Είναι $f(-e) = f(x) = -e \ln e - e = -2e$ και $f'(-e) = \ln e + 2 = 3$ άρα η εφαπτομένη της C_f είναι η $\varepsilon: y + 2e = 3(x + e) \Leftrightarrow y = 3x + e$

δ) Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα: $f(x) \leq 3x + e \Leftrightarrow x \ln(-x) + x \leq 3x + e \Leftrightarrow x \ln(-x) \leq 2x + e$.

ε) Για $x < -1$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right) = (-\infty, -1) \text{ άρα } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x < -1.$$

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: } E = - \int_{-2e}^{-e} f(x) dx = \int_{-2e}^{-e} [-x \ln(-x) - x] dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\int_{-2e}^{-e} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(-x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-2e}^{-e} = - \left[\frac{x^2}{2} \ln(-x) \right]_{-2e}^{-e} + \int_{-2e}^{-e} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-1}{-x} dx - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{4e^2}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$E = -\frac{e^2}{2} + 2e^2 \ln(2e) + \int_{-2e}^{-e} \frac{x}{2} dx + \frac{3e^2}{2} = \left[\frac{x^2}{4} \right]_{-2e}^{-e} + e^2 + 2e^2 \ln(2e) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{e^2}{4} - \frac{4e^2}{4} + e^2 + 2e^2 \ln(2e) = \frac{e^2}{4} + 2e^2 \ln(2e) \text{ τ.μ.}$$

66. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x) + 1$, $f'(x) \neq 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 3) = 0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 3}{g(x) + 1}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο $+\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

Λύση

α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 3) = 0$ και οι συναρτήσεις $g(x) + 2$,

$$f(x) - x + 3 \text{ είναι παραγωγίσιμες, έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 3}{g(x) + 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) - 1}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{g'(x)} = 1$$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$ άρα η $y = -2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 3) = 0$ η ευθεία $y = x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ) Έστω ότι η $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Τότε όμως $f'(\xi) = g'(\xi) + 1 = 1$ άτοπο, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) $f'(x) = g'(x) + 1 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x)' \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x + c \Leftrightarrow f(x) - x = g(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 3) = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -3$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + c) \Leftrightarrow -3 = -2 + c \Leftrightarrow c = -1, \text{ οπότε } f(x) - g(x) = x - 1.$$

ε) Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega) = \int_2^4 |f(x) - g(x)| dx$. Είναι

$$E(\Omega) = \int_2^4 |f(x) - g(x)| dx = \int_2^4 |x - 1| dx \stackrel{2 \leq x \leq 4}{=} \int_2^4 (x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_2^4 = 8 - 4 - (2 - 2) = 4$$

67. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:
 $f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 4)$.

δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f^2(x) dx = \int_0^3 xf(x) dx + 24$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τα κρίσιμα σημεία της είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$. Έστω ότι $f'(x_0) = 0$. Τότε:

$$[f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8]' = 0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) + 2x - 2 = 0 \text{ και για}$$

$$x = x_0 : 2f(x_0) \cancel{f'(x_0)}^0 - f(x_0) - x_0 \cancel{f'(x_0)}^0 + 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0 - 2.$$

Η αρχική σχέση για $x = x_0$ γίνεται: $f^2(x_0) - x_0 f(x_0) + x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$(2x_0 - 2)^2 - x_0(2x_0 - 2) + x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x_0^2 - 8x_0 + 4 - 2x_0^2 + 2x_0 + x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 5x_0^2 - 8x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -\frac{2}{5}.$$

β) Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο $(x_1, f(x_1))$, τότε $f''(x_1) = 0$. Είναι

$$[2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) + 2x - 2]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x) - f'(x) - f'(x) - xf''(x) + 2 = 0 \text{ και για } x = x_1:$$

$$2[f'(x_1)]^2 + 2f(x_1) \cancel{f''(x_1)}^0 - f'(x_1) - f'(x_1) - x_1 \cancel{f''(x_1)}^0 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2[f'(x_1)]^2 - 2f'(x_1) + 2 = 0 \Leftrightarrow [f'(x_1)]^2 - f'(x_1) + 1 = 0 \text{ που είναι αδύνατη αφού έχει}$$

$\Delta < 0$. Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο. Τότε θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in (-2, 4)$ με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε

$f(\alpha)f(\beta) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, λόγω του θ. Bolzano, υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$. Τότε όμως η αρχική σχέση για $x = \rho$ γίνεται:

$$\cancel{f^2(\rho)}^0 - \rho \cancel{f(\rho)}^0 + \rho^2 - 2\rho - 8 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho - 8 = 0 \Leftrightarrow \rho = -2 \text{ ή } \rho = 4 \text{ που απορρίπτονται}$$

αφού $\rho \in (\alpha, \beta) \subseteq (-2, 4)$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 4)$.

δ) Έστω ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \lambda x + \beta$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

$$\text{Για } x > 0 \text{ έχουμε: } \frac{f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \text{ που είναι αδύνατη αφού έχει}$$

$\Delta < 0$. Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Όμοια στο $-\infty$.

$$\epsilon) f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \int_0^3 [f^2(x) - xf(x) + x^2 - 2x - 8] dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^3 f^2(x) dx - \int_0^3 xf(x) dx + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \right]_0^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^3 f^2(x) dx - \int_0^3 xf(x) dx + 9 - 9 - 24 = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 f^2(x) dx = \int_0^3 xf(x) dx + 24$$

68. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1821$.

α) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)f(x) - 4x + 2}{xf(x) - x^2 - 1820x} = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f' .

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(a+1) - f(a) < \int_{a+1}^{a+2} f(x) dx - \int_a^{a+1} f(x) dx$.

στ) Αν επιπλέον $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία $y = x + 1821$ είναι ασύμπτωτη της C_f ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1821 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x - 1821) = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda + 1)f(x) - 4x + 2}{xf(x) - x^2 - 1820x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[(\lambda + 1) \frac{f(x)}{x} - 4 + \frac{2}{x} \right]}{\cancel{x} (f(x) - x - 1820)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda + 1 - 4}{1821 - 1820} = 1 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

β) Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xg(x)$, $x \neq 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xg(x)] = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xg(x)] = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές, άρα $f(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, άρα η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f' στο $+\infty$. Όμοια στο $-\infty$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 1$.

ε) Είναι $f'(x) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) - f'(x) > 0 \Rightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} (f(x+1) - f(x) - f'(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x+1) dx - \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x) dx > 0 \quad (1)$$

Είναι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x+1) dx = \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(u) du$ και $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x) dx = [f(x)]_{\alpha}^{\alpha+1} = f(\alpha+1) - f(\alpha)$,

οπότε η (1) γίνεται: $\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx - f(\alpha+1) + f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx > f(\alpha+1) - f(\alpha)$$

στ) Επειδή $f(0) = f(1)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$,

σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $0 < x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow [0, \xi]$. Για κάθε $0 < x \leq \xi \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$.

Για κάθε $\xi < x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [\xi, 1]$. Για κάθε $\xi < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 0$.

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

69. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = f(3-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx = \int_{2-\alpha}^{3-\alpha} f(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 3f''(x)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της C_f με τετμημένες $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (3,4)$ αντίστοιχα, στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες.

ε) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση

α) Είναι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x+1) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(3-x) dx$.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $x+1 = u$ τότε $dx = du$. Για $x = \alpha$ είναι $u = \alpha+1$ και για $x = \alpha+1$ είναι $u = \alpha+2$. Τότε $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x+1) dx = \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(u) du = \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx$ (1).

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θέτουμε $3-x = t$ τότε $dx = -dt$. Για $x = \alpha$ είναι $t = 3-\alpha$ και για $x = \alpha+1$ είναι $t = 2-\alpha$. Τότε $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(3-x) dx = -\int_{3-\alpha}^{2-\alpha} f(t) dt = \int_{2-\alpha}^{3-\alpha} f(x) dx$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx = \int_{2-\alpha}^{3-\alpha} f(x) dx$.

β) $f \cup \mathbb{R} \Rightarrow f' \not\cup \mathbb{R}$. Είναι $[f(x+1)]' = [f(3-x)]' \Rightarrow f'(x+1) = -f'(3-x)$ και για $x=1$ είναι $f'(2) = -f'(2) \Leftrightarrow 2f'(2) = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 0$.

Για κάθε $x < 2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 2]$ και για κάθε

$x > 2 \Rightarrow f'(x) > f'(2) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [2, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x+3h) - 3f(x+2h) + f(x)}{h^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} \frac{6f'(x+3h) - 6f'(x+2h)}{2h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6[f'(x+3h) - f'(x) - f'(x+2h) + f'(x)]}{2h} &= \\ 3 \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} \right] &= 3(3f''(x) - 2f''(x)) = 3f''(x) \text{ γιατί} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+kh) - f'(x)}{h} &\stackrel{kh=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{\frac{u}{k}} = k \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} = kf''(x) \end{aligned}$$

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1]$ και $[3,4]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (3,4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f(1) - f(0)$ και $f'(x_2) = f(4) - f(3)$.

Αν στη σχέση $f(x+1) = f(3-x)$ αντικαταστήσουμε $x=0$ προκύπτει $f(1) = f(3)$ και για $x=-1$ $f(0) = f(4)$, οπότε και $f(1) - f(0) = f(4) - f(3) \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$, οπότε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία με τετμημένες $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (3,4)$ είναι παράλληλες.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=3$ έχει εξίσωση $y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y = f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq f'(3)x - 3f'(3) + f(3)$. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(3)x - 3f'(3) + f(3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(3)x = +\infty \quad (f'(3) > f'(2) = 0), \text{ άρα}$$

$$f(x) \geq f'(3)x - 3f'(3) + f(3) > 0 \text{ κοντά στο } +\infty, \text{ οπότε } 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{f'(3)x - 3f'(3) + f(3)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f'(3)x - 3f'(3) + f(3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f'(3)x} = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0. \text{ Επειδή } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } +\infty \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

70. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) + x = xf'(x) + 1 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $f(x) = x \ln x - x + 1$

β) $50^{50} > e^{49}$

γ) $\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 e^{x-1} dx$

δ) Υπάρχει μοναδικός $x_2 > 0$ τέτοιος, ώστε $f(x_2) \ln f(x_2) = f(x_2) + 1$.

Λύση

$$\alpha) f(x) + x = xf'(x) + 1 \quad (1) \Leftrightarrow x - 1 = xf'(x) - f(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x - \frac{1}{x} + c \Leftrightarrow f(x) = x \ln x - 1 + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{άρα } f(x) = x \ln x - x + 1.$$

$$\beta) 50^{50} > e^{49} \Leftrightarrow \ln 50^{50} > \ln e^{49} \Leftrightarrow 50 \ln 50 > 49 \Leftrightarrow 50 \ln 50 - 49 > 0 \Leftrightarrow f(50) > 0$$

$$\text{Είναι } f'(x) = (x \ln x - x + 1)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και

για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } 50 > 1 \Leftrightarrow f(50) > f(1) = 0.$$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

γ) Για κάθε $x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x^x \geq x - 1 \Leftrightarrow x^x \geq e^{x-1}$ και επειδή υπάρχουν τιμές του $x \in [1, 2]$ για τις οποίες δεν ισχύει η ισότητα στη τελευταία σχέση, είναι: $\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 e^{x-1} dx$.

$$\delta) f(x) \ln f(x) = f(x) + 1 \Leftrightarrow f(x) \ln f(x) - f(x) + 1 = 2 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2 \quad (2)$$

Αρχικά θα ορίσουμε τη συνάρτηση $f \circ f$. Πρέπει: $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ και επειδή για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > 0$, η $f \circ f$ ορίζεται όταν $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x + 1) = 1 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει

$$\text{αντίστοιχο σύνολο τιμών: } f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, 1)$$

Επειδή $2 \notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση (2) είναι αδύνατη στο Δ_1 .

Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

$$\text{αντίστοιχο σύνολο τιμών: } f(\Delta_2) = \left(f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Επειδή $2 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει $x_3 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 2$. Τότε η (2) γίνεται:

$$f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x_3) \Leftrightarrow f(x) = x_3 \quad (3)$$

Επειδή $x_3 \in \Delta_2$ είναι $x_3 > 1$, οπότε $x_3 \notin f(\Delta_1)$ και $x_3 \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικός

$$x_2 \in \Delta_2 \text{ τέτοιος, ώστε } f(x_2) = x_3.$$

71. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = \frac{1}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

β) Χωρίς τη χρήση του θεωρήματος Fermat να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$.

Έστω ότι $f''(x)f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

γ) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.

δ) $\int_{-a}^a x^{2k} \ln f(x) dx = 0$, $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

ε) $e^{\frac{x_1}{2}} + e^{\frac{x_2}{2}} - 2e^{\frac{x_1+x_2}{4}} \geq 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) $f \cup \mathbb{R} \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 1 \Rightarrow f(x) > 0$.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, τότε $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \geq 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x < 0$ είναι $\frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \Rightarrow$

$f'(0) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 0$ άτοπο. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, τότε

$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x > 0$ είναι

$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \Rightarrow f'(0) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 0$ άτοπο. Άρα η f δεν έχει

ακρότατο στο $x_0 = 0$.

γ) $f''(x)f(x) + [f'(x)]^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow [f(x)f'(x)]' = f(x)f'(x) \Leftrightarrow f(x)f'(x) = ce^x$ (1)

Για $x = 0$ η (1) γίνεται $f(0)f'(0) = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, οπότε $2f(x)f'(x) = e^x \Leftrightarrow$

$(f^2(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^x + c_1$. Για $x = 0$ είναι $f^2(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$,

οπότε $f^2(x) = e^x > 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε: $f^2(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$.

δ) $\int_{-a}^a x^{2k} \ln f(x) dx = \int_{-a}^a x^{2k} \ln e^{\frac{x}{2}} dx = \int_{-a}^a x^{2k} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^{2k+1} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2} \right]_{-a}^a =$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^{2k+2}}{2k+2} - \frac{a^{2k+2}}{2k+2} \right) = 0$$

ε) $e^{\frac{x_1}{2}} + e^{\frac{x_2}{2}} - 2e^{\frac{x_1+x_2}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{x_1+x_2}{4}} \leq e^{\frac{x_1}{2}} + e^{\frac{x_2}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2}{4}} - e^{\frac{x_1}{2}} \leq e^{\frac{x_2}{2}} - e^{\frac{x_1+x_2}{4}}$

Έστω $x_1 < x_2$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right] \text{ και } \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 \right], \text{ οπότε υπάρχει } \xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \text{ και } \xi_2 \in \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 \right)$$

$$\text{τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1)}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{\frac{\xi_1}{2}} = \frac{e^{\frac{x_1 + x_2}{4}} - e^{\frac{x_1}{2}}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{\frac{\xi_2}{2}} = \frac{e^{\frac{x_2}{2}} - e^{\frac{x_1 + x_2}{4}}}{\frac{x_2 - x_1}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \frac{\xi_1}{2} < \frac{\xi_2}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{\xi_1}{2}} < e^{\frac{\xi_2}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{\frac{\xi_1}{2}} < \frac{1}{2} e^{\frac{\xi_2}{2}} \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{x_1 + x_2}{4}} - e^{\frac{x_1}{2}}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} < \frac{e^{\frac{x_2}{2}} - e^{\frac{x_1 + x_2}{4}}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{x_1 + x_2}{4}} - e^{\frac{x_1}{2}} < e^{\frac{x_2}{2}} - e^{\frac{x_1 + x_2}{4}}.$$

$$\text{Αν } x_1 = x_2 \text{ τότε } e^{\frac{x_1 + x_1}{4}} - e^{\frac{x_1}{2}} \leq e^{\frac{x_1}{2}} - e^{\frac{x_1 + x_1}{4}} \Leftrightarrow 0 \leq 0 \text{ και ισχύει η ισότητα.}$$

Όμοια αποδεικνύεται και για $x_1 > x_2$.

72. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

- α) Να εξετάσετε την συνέχεια και να βρείτε την μονοτονία της f .
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f σε σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.
- γ) Να δείξετε ότι η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$.
- δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει την C_f .
- ε) Να εξετάσετε αν η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
- στ) Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της C_f και της εφαπτομένης ε .

Λύση

α) Πρέπει $x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\sqrt[3]{x}$ και x^2 . Είναι

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^2} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \end{cases}.$$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως

αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για $x < 0$ είναι $f'(x) = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}} < 0$ και επειδή η f

είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = -1$ είναι $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$ ή $y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 1) \Leftrightarrow$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

γ) Για $x > 0$ είναι

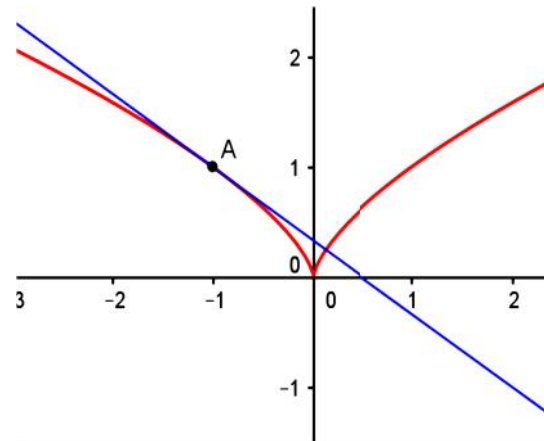
$$f''(x) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right)' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0 \text{ και}$$

επειδή η f είναι συνεχής στο 0 , είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Για $x < 0$ είναι

$$f''(x) = \left[-\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} \right]' = -\frac{2}{9}(-x)^{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(-x)^4}} < 0 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο 0 , είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$.



δ) Η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ οπότε η ε και η C_f έχουν μοναδικό κοινό σημείο

$$\text{για } x = -1 \text{ και ισχύει } f(x) \leq -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = -2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$27x^2 = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 8x^3 + 15x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow 8(x+1)^2(x - \frac{1}{8}) = 0 \text{ Συνεπώς η}$$

εφαπτομένη τέμνει την C_f και σε σημείο με τετμημένη 1.

$$\text{Ακόμη για } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8(x+1)^2\left(x - \frac{1}{8}\right) \leq 0 \text{ ισχύει στο διάστημα } \left[0, \frac{1}{8}\right]$$

ε) Αν η C_f ήταν κοίλη στο $\mathbb{R}$ τότε η εφαπτομένη ε και η C_f θα είχαν μοναδικό κοινό σημείο άπο αρα η C_f δεν είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sigma\tau) E &= \int_{-1}^{1/8} \left| f(x) + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right| dx = \int_{-1}^{1/8} \left(-f(x) - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx = \int_{-1}^{1/8} \left(-\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{1/8} -\sqrt[3]{x^2} dx - \frac{2}{3} \int_{-1}^{1/8} x dx + \int_{-1}^{1/8} \frac{1}{3} dx = -\int_{-1}^0 (-x)^{\frac{2}{3}} dx - \int_0^{1/8} x^{\frac{2}{3}} dx - \frac{2}{3} \int_{-1}^{1/8} x dx + \int_{-1}^{1/8} \frac{1}{3} dx = \\ &= \left[\frac{3}{5}(-x)^{\frac{5}{3}} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \right]_0^{1/8} - \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1/8} + \frac{1}{3} [x]_{-1}^{1/8} = \frac{27}{2400} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

73. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \int_a^1 e^{tx} dt, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} = 2016f(x) + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε

ότι $2f(x) - x - 2 \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_2^4 \frac{e^x - 1}{x} dx > 5$.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{x}f(\sqrt{x}) + 1$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

Λύση

α) Για $x \neq 0$ είναι $\int_{\alpha}^1 e^{tx} dt = \left[\frac{e^{tx}}{x} \right]_{\alpha}^1 = \frac{e^x}{x} - \frac{e^{\alpha x}}{x} = \frac{e^x - e^{\alpha x}}{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\alpha x}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha e^{\alpha x}}{1} = 1 - \alpha$. Άρα $1 - \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

β) $e^{f(x)} = 2016f(x) + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 1 = 2016f(x) \quad (1)$

Αν $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ απορρίπτεται.

Αν $f(x) \neq 0$ η (1) γίνεται: $\frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 2016 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2016 \quad (2)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$.

Για να βρούμε το πρόσημο της f' χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = (x-1)e^x + 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$ και για κάθε $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0$, δηλαδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(e^x - 1) \cdot \frac{1}{x} \right] = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Επειδή $2016 \in f(A)$ υπάρχει $x_1 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 2016$.

Επειδή $f(x_1) = 2016 > f(0) = 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι $x_1 > 0$. Τότε η (2)

γίνεται: $f(f(x)) = 2016 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x_1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} f(x) = x_1 \quad (3)$

Επειδή $x_1 \in f(A)$ υπάρχει $x_2 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = x_1$ και η (3) γίνεται:

$$f(x) = f(x_2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = x_2.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ άρα}$$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$.

Για κάθε $x \neq 0$ η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{[e^x + (x-1)e^x]x^2 - [(x-1)e^x + 1]2x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2}{x^3}.$$

Έστω $\varphi(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2, x \geq 0$. Είναι

$$\varphi'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x > 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα } \varphi \nearrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο

διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής, άρα $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 2f(x) - x - 2 \geq 0$.

δ) Επειδή υπάρχουν τιμές του $x \in [0, +\infty)$ για τις οποίες δεν ισχύει η ισότητα στη σχέση

$$2f(x) - x - 2 \geq 0, \text{ έχουμε: } \int_2^4 [2f(x) - x - 2] > 0 \Leftrightarrow 2 \int_2^4 f(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 - [2x]_2^4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_2^3 f(x) dx - (8 - 2) - 8 + 4 > 0 \Leftrightarrow 2 \int_2^4 f(x) dx > 10 \Leftrightarrow \int_2^4 f(x) dx > 5$$

ε) $g(x) = \sqrt{x} f(\sqrt{x}) + 1 = \sqrt{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} + 1 = e^{\sqrt{x}}$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \Rightarrow x = u^2$ και $dx = 2u du$. Για $x = 1$ είναι $u = 1$ και για $x = 4$ είναι $u = 2$.

$$\text{Είναι } E = \int_1^2 e^u 2u du = \int_1^2 2u(e^u)' du = [2ue^u]_1^2 - \int_1^2 2e^u du \Leftrightarrow$$

$$E = 4e^2 - 2e - 2[e^u]_1^2 = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - e) = 2e^2.$$

74. α) Να αποδείξετε ότι $x > \ln x$ για κάθε $x > 0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t - \ln t} \cdot \frac{t-1}{t} dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) - \ln f(x) = e^{2016}$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2f(x) \frac{x-1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Λύση

α) Έστω $g(x) = x - \ln x$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0,1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(1) = 1$ άρα

$$g(x) \geq g(1) = 1 > 0 \Leftrightarrow x - \ln x > 0 \Leftrightarrow x > \ln x.$$

β) i. Η συνάρτηση $\frac{1}{t - \ln t} \cdot \frac{t-1}{t}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $1 \in (0, +\infty)$, άρα πρέπει και $x \in (0, +\infty)$, Οπότε $A_f = (0, +\infty)$.

$$\text{ii. } f(x) = \int_1^x \frac{1}{t - \ln t} \cdot \frac{t-1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t - \ln t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^x \frac{1}{t - \ln t} (t - \ln t)' dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) = [\ln(t - \ln t)]_1^x = \ln(x - \ln x).$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{1}{x - \ln x} \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - \ln x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{0} \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0,1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$ άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

$$\text{iii. } f(x) - \ln f(x) = e^{2016} \Leftrightarrow \ln(f(x) - \ln f(x)) = 2016 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2016 \quad (1)$$

Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει $x \in A_f \Leftrightarrow x > 0$ και $f(x) \in A_f \Leftrightarrow f(x) > 0$ (2). Επειδή

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, η (2) ισχύει για

$x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, άρα $A_{f \circ f} = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \ln x) \stackrel{x - \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \right] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x - \ln x) \stackrel{x - \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

Στο διάστημα $A_1 = (0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών $f(A_1) = [0, +\infty)$.

Στο διάστημα $A_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών $f(A_2) = (0, +\infty)$.

Επειδή $2016 \in f(A_1)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1 : f(x_1) = 2016$.

Επειδή $2016 \in f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2 : f(x_2) = 2016$.

$$\text{Τότε η (1) γίνεται } f(f(x)) = f(x_1) \Leftrightarrow f(x) = x_1 \quad (3) \text{ και } f(f(x)) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x) = x_2 \quad (4)$$

Επειδή $x_1 \in A_1 \subseteq f(A_2) \subseteq f(A_1)$ η (3) έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_1 και η (3) έχει

ακριβώς μια ρίζα και στο A_2 .

Επειδή $x_2 \in A_2 \subseteq f(A_2) \subseteq f(A_1)$ η (4) έχει ακριβώς μια ρίζα στο A_1 και επειδή $x_2 \in A_2$ η (4) έχει ακριβώς μια ρίζα και στο A_2 . Άρα η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς τέσσερις ρίζες.

iv. Είναι $g(x) = 2f(x) \frac{x-1}{x} = 2 \ln(x - \ln x) \left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Επειδή $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, το

ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e 2 \ln(x - \ln x) \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^e 2 \ln(x - \ln x) (x - \ln x)' dx = \left[\ln^2(x - \ln x) \right]_1^e = \ln^2(e - 1)$$

75. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ για κάθε } x > 0, f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

β) Έστω $g(x) = \begin{cases} x^2 f(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε $x > 0$.

δ) Αν υπάρχει $a > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι $x^e \leq a^x$, να αποδείξετε ότι $a \geq e$.

ε) Αν $\lambda f(x) \geq e^x - \frac{e}{x}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 2e$.

Λύση

$$\alpha) xf''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) + f'(x) + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[xf'(x) + f(x) - \frac{1}{x} \right]' = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - \frac{1}{x} = c, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) + f(1) - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε

$$xf'(x) + f(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow [xf(x) - \ln x]' = 0 \Leftrightarrow xf(x) - \ln x = c_1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln x + c_1}{x}, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1 \text{ είναι } f(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα } f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$\beta) \text{ i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ η g είναι συνεχής στο $x = 0$ και επειδή είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$\text{ii. Έστω } \alpha \in (0, 1). \text{ Είναι } \int_{\alpha}^1 g(x) dx = \int_{\alpha}^1 x \ln x dx = \int_{\alpha}^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx =$$

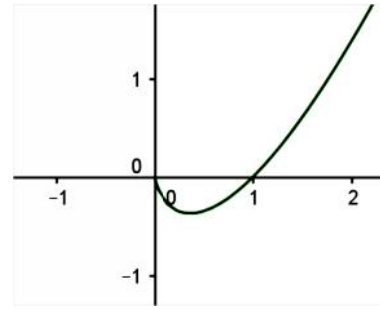
$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\alpha}^1 = \frac{-2\alpha^2 \ln \alpha - 1 + \alpha^2}{4}.$$

$$x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 1 = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \ln x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 |g(x)| dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{-2\alpha^2 \ln \alpha - 1 + \alpha^2}{4} \right) = \frac{1}{4} \text{ γιατί}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \cdot \alpha \ln \alpha = 0$$



γ) Είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 = \ln e \Leftrightarrow x \leq e, \text{ οπότε } f \nearrow \text{ στο } (-\infty, e] \text{ αφού η } f$$

$$\text{είναι συνεχής. } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 = \ln e \Leftrightarrow x \geq e \text{ οπότε } f \searrow \text{ στο } [e, +\infty)$$

αφού η f είναι συνεχής. Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο στο e το $f(e) = \frac{1}{e}$ οπότε για κάθε $x > 0$

$$\text{είναι } f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$$

δ) $x^e \leq \alpha^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln \alpha^x \Leftrightarrow e \ln x \leq x \ln \alpha \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln \alpha}{e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln \alpha}{e}$.

$$\text{Είναι } f(x) \leq \frac{1}{e}, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα πρέπει } \frac{1}{e} \leq \frac{\ln \alpha}{e} \Leftrightarrow \ln \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq e.$$

ε) $\lambda f(x) \geq e^x - \frac{e}{x} \Leftrightarrow \lambda \frac{\ln x}{x} \geq e^x - \frac{e}{x} \Leftrightarrow \lambda \ln x - x e^x + e \geq 0$.

Έστω $h(x) = \lambda \ln x - x e^x + e, x > 0$. Είναι $h(x) \geq h(1)$, οπότε η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \lambda \frac{1}{x} - e^x - x e^x$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow \lambda - e - e = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2e.$$

76. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

γ) Αν $f(0) = \sqrt{5}$, να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + x$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 [f^2(x) + x^2 f'(x)] dx = \frac{16}{3} + \sqrt{5}$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τα κρίσιμα σημεία της είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$f'(x) = 0$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Είναι

$$[f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5]' = 0 \Rightarrow 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) - 2x + 2 = 0$$

$$\text{Για } x = x_0: 2f(x_0)f'(x_0) - 2f(x_0) - 2x_0f'(x_0) - 2x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 1 - x_0.$$

Η αρχική σχέση για $x = x_0$ γίνεται: $f^2(x_0) - 2x_0f(x_0) - x_0^2 + 2x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$(1 - x_0)^2 - 2x_0(1 - x_0) - x_0^2 + 2x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x_0 + \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0} + 2x_0^2 - \cancel{x_0^2} + \cancel{2x_0} - 5 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ ή } x_0 = 2.$$

β) Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 4)$. Τότε θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in (-2, 4)$ με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του θ. Bolzano, υπάρχει $\xi \in (-2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$. Η αρχική σχέση για $x = \xi$ γίνεται:

$$\cancel{f^2(\xi)} - 2\xi\cancel{f(\xi)} - \xi^2 + 2\xi - 5 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 - 2\xi + 5 = 0 \text{ αδύνατη γιατί έχει } \Delta = -16 < 0. \text{ Άρα η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο.}$$

$$\gamma) f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 2x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 = 2x^2 - 2x + 5 \quad (1).$$

Επειδή το τριώνυμο $2x^2 - 2x + 5$ έχει $\Delta < 0$ είναι $2x^2 - 2x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και $g(x) = f(x) - x \neq 0$. Επειδή επιπλέον η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0) = f(0) = \sqrt{5}$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$f(x) - x = \sqrt{2x^2 - 2x + 5} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + x.$$

$$\delta) \int_0^1 [f^2(x) + x^2 f'(x)] dx = \frac{16}{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{16}{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx + [x^2 f(x)]_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx = \frac{16}{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2xf(x) dx + f(1) = \frac{16}{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2xf(x) dx + \sqrt{5} + 1 = \frac{16}{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2xf(x) dx = \frac{13}{3}.$$

Είναι $f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5 = 0$, οπότε και

$$\int_0^1 [f^2(x) - 2xf(x) - x^2 + 2x - 5] dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2xf(x) dx + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x \right]_0^1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2xf(x) dx = \frac{13}{3}$$

77. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f''(x) > e^x + 2$ για κάθε $x > 0$, $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) $f(x) \geq e^x + x^2 - 1$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

δ) Η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) $\int_0^1 f(x) dx > e - \frac{5}{3}$

στ) $\int_0^1 x f''(x) dx = f'(1) - f(1)$.

Λύση

α) $f''(x) > e^x + 2 \Leftrightarrow f''(x) - e^x - 2 > 0 \Rightarrow (f'(x) - e^x - 2x)' > 0 \Rightarrow (f(x) - e^x - x^2 + 1)'' > 0$.

Έστω $g(x) = f(x) - e^x - x^2 + 1$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = f'(x) - e^x - 2x$ και

$g''(x) = f''(x) - e^x - 2 > 0 \Rightarrow g' \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow$

$f'(x) - e^x - 2x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > e^x + 2x > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

β) $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq e^x + x^2 - 1$.

γ) Για κάθε $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, οπότε $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{e^x + x^2 - 1}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + x^2 - 1} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $f(x) > 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^x}{x} + x - \frac{1}{x} = h(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{f(x)} < \frac{1}{h(x)}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(x)} = 0$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$ και επειδή

$\frac{f(x)}{x} > 0$ στο $(0, +\infty)$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Επειδή η ισότητα στη σχέση $f(x) \geq e^x + x^2 - 1$ ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε:

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (e^x + x^2 - 1) dx = \left[e^x + \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = e + \frac{1}{3} - 1 - 1 = e - \frac{5}{3}$$

στ) $\int_0^1 x f''(x) dx = \int_0^1 x [f'(x)]' dx = [x f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = f'(1) - [f(x)]_0^1 = f'(1) - f(1)$

78. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 3 \ln x$ (1)

α) Να βρείτε το πρόσημο και τη μονοτονία της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f\left(e^{f(x)}\right)\right)=0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f^3(x) + 2f(x) - 3}{x - e}$.

στ) Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

ζ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^3(x) + f(x) - 3}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

η) Να βρείτε τον $a > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι: $\int_{\ln a}^{a-1} f^{-1}(x) dx = 0$.

θ) Να αποδείξετε ότι: $\int_{\frac{1}{a}}^1 f^{-1}(ax) dx - \frac{1}{a^2} \int_1^a x f^{-1}(x) dx \geq 0$, $a > 0$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow 3 \ln x_1 < 3 \ln x_2 \Rightarrow$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) < f^3(x_2) + 2f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) + 2f(x_1) - f^3(x_2) - 2f(x_2) < 0 \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) - f^3(x_2) - 2f(x_2) < 0 \Rightarrow f^3(x_1) - f^3(x_2) + 2f(x_1) - 2f(x_2) < 0 \Rightarrow$$

$$[f(x_1) - f(x_2)][f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 2] < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ αφού } f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 2 > 0 \text{ (Διακρίνουσα αρνητική)}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f^3(1) + 2f(1) = 3 \ln 1 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + 2) = 0 \stackrel{f^2(1)+2>0}{\Leftrightarrow} f(1) = 0.$$

$$\text{Για κάθε } x > 1 \stackrel{f, \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) = 0 \text{ και για κάθε } 0 < x < 1 \stackrel{f, \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 0$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου x το $f^{-1}(x)$ που προφανώς ανήκει στο πεδίο ορισμού της

$$f \text{ προκύπτει: } x^3 + 2x = 3 \ln f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x}{3} = \ln f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^{\frac{x^3 + 2x}{3}}.$$

γ) Για κάθε $x, x_0 \in (0, +\infty)$ με $x \neq x_0$ είναι $f^3(x) + 2f(x) = 2 \ln x$, $f^3(x_0) + 2f(x_0) = 2 \ln x_0$

$$\text{και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: } 3 \ln x - 3 \ln x_0 = f^3(x) + 2f(x) - f^3(x_0) - 2f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$3 \ln x - 3 \ln x_0 = f^3(x) - f^3(x_0) + 2f(x) - 2f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$3 \ln x - 3 \ln x_0 = [f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2].$$

Επειδή $f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2 > 1$ (Διακρίνουσα αρνητική για το

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1), \text{ είναι:}$$

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3 \ln x - 3 \ln x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \right| \leq |3 \ln x - 3 \ln x_0| \Leftrightarrow$$

$$-|3 \ln x - 3 \ln x_0| \leq f(x) - f(x_0) = |3 \ln x - 3 \ln x_0|.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} |3 \ln x - 3 \ln x_0| = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

δ) Στην (1) για $x = e$: $f^3(e) + 2f(e) = 3 \Leftrightarrow (f(e) - 1)(f^2(e) + f(e) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(e) = 1$

$$\text{Είναι } f\left(f\left(e^{f(x)}\right)\right) = f(1) \Leftrightarrow f\left(e^{f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(e^{f(x)}\right) = f(e) \Leftrightarrow e^{f(x)} = e \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(e) \Leftrightarrow x = e$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow e} \frac{f^3(x) + 2f(x) - 3}{x - e} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{3 \ln x - 3}{x - e} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow e} \frac{3}{x} = \frac{3}{e}$$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της είναι $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$
 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 0$ δηλαδή ο άξονας $y'y$,
 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\zeta) \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^3(x) + f(x) - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^3(x) \left(1 + \frac{1}{f^2(x)} - \frac{3}{f^3(x)} \right) \frac{1}{x} \right] = -\infty.$$

Θέτουμε $\omega = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(\omega)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $\omega \rightarrow +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{f^{-1}(\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{e^{\frac{\omega^3+2\omega}{3}}} \stackrel{\text{DL}}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{\frac{\omega^3+2\omega}{3}} (3\omega^2 + 2)} = 0.$$

η) Είναι $\ln \alpha \leq \alpha - 1$ για κάθε $\alpha > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = 1$ και $f^{-1}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ είναι $\int_{\ln \alpha}^{\alpha-1} f^{-1}(x) dx > 0$ που είναι άτοπο, οπότε $\alpha = 1$ αφού τότε $\int_0^0 f^{-1}(x) dx = 0$.

$$\theta) \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 f^{-1}(\alpha x) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} x f^{-1}(x) dx \geq 0.$$

Θέτουμε $\alpha x = \omega \Leftrightarrow x = \frac{\omega}{\alpha}$. Τότε $dx = \frac{1}{\alpha} d\omega$.

Για $x = \frac{1}{\alpha}$ είναι $\omega = 1$ και για $x = 1$ είναι $\omega = \alpha$, άρα

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 f^{-1}(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} f^{-1}(\omega) d\omega = \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} f^{-1}(x) dx, \text{ οπότε}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 f^{-1}(\alpha x) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} x f^{-1}(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} f^{-1}(x) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} x f^{-1}(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\int_1^{\alpha} \alpha f^{-1}(x) dx - \int_1^{\alpha} x f^{-1}(x) dx \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) f^{-1}(x) dx \geq 0.$$

Αν $\alpha > 1$ τότε $1 \leq x \leq \alpha$ και $(\alpha - x) f^{-1}(x) \geq 0$, οπότε $\frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) f^{-1}(x) dx \geq 0$.

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\alpha \leq x \leq 1$ και $(\alpha - x) f^{-1}(x) \leq 0$ οπότε $\frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) f^{-1}(x) dx \geq 0$

Τέλος αν $\alpha = 1$ τότε $\frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) f^{-1}(x) dx = 0$.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) f^{-1}(x) dx \geq 0$.

Αρχική συνάρτηση

79. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$ με $\int_1^3 f(x)dx = 0$, για την οποία υπάρχει

$x_0 \in [1,3]$ με $f(x_0) \neq 0$ και F μια παράγουσα της f στο $[1,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1,3)$.

β) Αν $f(1) = f(3) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ τέτοια, ώστε

$$f''(x_1)f''(x_2) < 0.$$

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι

i. $\int_1^2 f(x)dx < 0$

ii. η εξίσωση $x^2F(x) = (x-5)f(x) + x^2F(1)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,3)$.

Λύση

α) Έστω ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$

• Αν ήταν $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx > 0$ (άτοπο)

• Αν ήταν $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx < 0$ (άτοπο)

Οπότε η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$, δηλαδή υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [1,3]$ με $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής, από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq [1,3]$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

β) Έστω ότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1,3]$, τότε η f' θα ήταν γνησίως

μονότονη, οπότε και 1-1.

Επειδή $f(1) = f(3) = f(\rho) = 0$ τότε από Θ. Rolle υπάρχουν $\theta_1 \in (1, \rho)$ και $\theta_2 \in (\rho, 3)$ τέτοια, ώστε

$f'(\theta_1) = 0$ και $f'(\theta_2) = 0$, οπότε $f'(\theta_1) = f'(\theta_2) = 0 \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \theta_1 = \theta_2$ που είναι άτοπο. Συνεπώς η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο $(1,3)$ άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ με $f''(x_1) \cdot f''(x_2) < 0$.

γ) Επειδή η F είναι παράγουσα της f , ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [1,3]$ και

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \alpha, \beta \in [1,3].$$

$$\text{Είναι } \int_1^3 f(x)dx = 0 \Leftrightarrow F(3) - F(1) = 0 \Leftrightarrow F(3) = F(1)$$

Λόγω του Θ.Μ.Τ για την F , υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \int_1^2 f(t)dt \text{ και}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} \stackrel{F(3)=F(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi_2) = F(1) - F(2) = -\int_1^2 f(t)dt$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt < -\int_1^2 f(t)dt \Leftrightarrow 2\int_1^2 f(t)dt < 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt < 0$$

δ) Έστω $h(x) = x^2F(x) - x^2F(1) - (x-5)f(x)$, $x \in [1,3]$.

$$\text{Είναι } h(1) = 4f(1) \text{ και } h(3) = 9F(3) - 9F(1) - (3-5)f(3) = 2f(3)$$

Είναι $1 < \rho < 3 \Rightarrow f(1) < f(\rho) < f(3) \Leftrightarrow f(1) < 0 < f(3)$, άρα $h(1) < 0$, $h(3) > 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 F(x) = (x-5)f(x) + x^2 F(1)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

80. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $xf'(x) + f(x) = \text{συν}x + 2x$, $x > 0$ και $f(\pi) = \pi$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2}{x}$, $x > 0$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, όπου F αρχική της f στο $(0, +\infty)$.

Λύση

$$\alpha) xf'(x) + f(x) = \text{συν}x + 2x \Leftrightarrow (xf(x))' = (\eta\mu x + x^2)' \Leftrightarrow xf(x) = \eta\mu x + x^2 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2 + c}{x}, x > 0.$$

$$f(\pi) = \pi \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\pi + \pi^2 + c}{\pi} = \pi \Leftrightarrow \pi^2 + c = \pi^2 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2}{x}, x > 0.$$

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x^2} + 1 \right).$$

$$\text{Για κάθε } x > 0, \text{ είναι: } \left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x + x^2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + x^2 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{Για κάθε } x > 0, \text{ είναι: } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0, \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0, \text{ οπότε η ευθεία}$$

$$y = 1x + 0 \Leftrightarrow y = x, \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x \right) = 1, \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής στο } (0, +\infty), \text{ άρα η } C_f \text{ δεν έχει}$$

κατακόρυφες ασύμπτωτες.

γ) Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\pi, x]$, $x > \pi$, άρα υπάρχει

$$\xi \in (\pi, x): F'(\xi) = \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} \Leftrightarrow f(\xi)(x - \pi) = F(x).$$

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{\eta\mu x + x^2}{x}, f'(x) = \frac{\text{συν}x - \eta\mu x + x^2}{x^2}.$$

Έστω $\varphi(x) = \sin x - \eta \mu x + x^2$, $x \geq \pi$. Είναι

$$\varphi'(x) = -\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x + 2x, \varphi''(x) = -\sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x + 2 = (1 - \sigma \upsilon \nu x) + 1 + \eta \mu x > 0 \Rightarrow$$

φ' γνησίως αύξουσα στο $[\pi, +\infty)$.

Για κάθε $x > \pi \Rightarrow \varphi'(x) > \varphi'(\pi) = 2\pi + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\pi, +\infty)$.

Για κάθε $x > \pi \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(\pi) = \pi^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[\pi, +\infty)$.

Είναι $\pi < \xi < x \Leftrightarrow f(\pi) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow \pi < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow$

$$\pi(x - \pi) < f(\xi)(x - \pi) < f(x)(x - \pi) \Leftrightarrow \pi x - \pi^2 < F(x) < f(x)(x - \pi).$$

Για κάθε $x > \pi$ είναι: $0 < \pi x - \pi^2 < F(x) < f(x)(x - \pi) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi x - \pi^2} > \frac{1}{F(x)} > \frac{1}{f(x)(x - \pi)}$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi x - \pi^2} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)(x - \pi)} = 0$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(x)} = 0$ και αφού $F(x) > 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

81. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f''(x) - f'(x) = e^x(2x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = f'(0) = 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 - x + 2) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - x = e^{-x} - 2$.

γ) Αν F αρχική της f , να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

δ) Αν $F(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή και ισχύει ότι $F(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\alpha) f''(x) - f'(x) = e^x(2x + 1) \Leftrightarrow e^{-x}f''(x) - e^{-x}f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}f'(x) = x^2 + x + c \Leftrightarrow f'(x) = e^x(x^2 + x + c), c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = c \Leftrightarrow c = 1$ άρα $f'(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, οπότε και $f'(t) = e^t(t^2 + t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x e^t(t^2 + t + 1) dt \Leftrightarrow f(x) - f(0) = \int_0^x (e^t)'(t^2 + t + 1) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 1 = \left[e^t(t^2 + t + 1) \right]_0^x - \int_0^x e^t(2t + 1) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 1 = e^x(x^2 + x + 1) - 1 - \int_0^x (e^t)'(2t + 1) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^x(x^2 + x + 1) - \left[e^t(2t + 1) \right]_0^x + \int_0^x e^t \cdot 2 dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^x(x^2 + x + 1) - e^x(2x + 1) + 1 + \left[2e^t \right]_0^x = e^x(x^2 + x + 1 - 2x - 1) + 1 + 2e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^x(x^2 - x + 2) - 1.$$

$$\beta) x^2 - x = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = e^{-x} \Leftrightarrow e^x(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow e^x(x^2 - x + 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = e^x(x^2 - x + 2) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 - x + 2 + 2x - 1) = e^x(x^2 + x + 1).$$

Επειδή $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x (x^2 - x + 2) - 1) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x^2 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{-e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x (x^2 - x + 2) - 1) = -1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty).$$

Επειδή $0 \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, $x > 0$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow 1 < \frac{F(x) - F(0)}{x} < f(x) \Leftrightarrow$$

$$x + F(0) < F(x) < xf(x) + F(0).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + F(0)) = +\infty$, άρα $x + F(0) > 0$ σε μια περιοχή του $+\infty$, οπότε:

$$0 < x + F(0) < F(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{F(x)} < \frac{1}{x + F(0)}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + F(0)} = 0$, από Κ.Π είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(x)} = 0$. Επειδή $F(x) > 0$ σε μια

περιοχή του $+\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

δ) Είναι $F''(x) = f'(x) > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$.

Είναι $F'(0) = f(0) = 1$ και $F(0) = 1$, οπότε η εφαπτομένη της C_F στο $x_0 = 0$ είναι:

$$y - F(0) = F'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Επειδή η F είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής, άρα $F(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

82. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\text{ότι } 2f'(x)(f(x) - 1) = 3f''(x), f(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x > -2, f'(0) = \frac{3}{4} \text{ και}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

$$\alpha) f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = x - 1 - 3 \ln \frac{x+2}{3}$, $x > 0$ είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$.

$$\gamma) 3e^{\frac{x-1}{x+2}} - x - 2 \geq 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\delta) (e^x - 1)(ex + 2) \geq (e^x + 2)(ex - 1), \quad x > 0.$$

Λύση

$$\alpha) 2f'(x)(f(x) - 1) = 3f''(x) \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) - 2f'(x) = 3f''(x) \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) - 2f(x))' = (3f'(x))' \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) = 3f'(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1).$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (1) γίνεται: } f^2(0) - 2f(0) = 3f'(0) + c \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Η (1) γίνεται: } f^2(x) - 2f(x) = 3f'(x) - 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 3f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 1)^2 = 3f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{f'(x)}{(f(x) - 1)^2} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x) - 1} \right)' = \left(\frac{x}{3} \right)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x) - 1} = \frac{x}{3} + c_1 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{f(x) - 1} = \frac{x + 3c_1}{3} \Leftrightarrow f(x) - 1 = -\frac{3}{x + 3c_1} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{x + 3c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ η (2) γίνεται: } f(0) = 1 - \frac{1}{c_1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{c_1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Η (2) γίνεται: } f(x) = 1 - \frac{3}{x + \frac{2}{3}} = \frac{x + 2 - 3}{x + 2} = \frac{x - 1}{x + 2}.$$

$$\beta) \text{ Αρκεί } F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{Είναι } F'(x) = \left(x - 1 - 3 \ln \frac{x+2}{3} \right)' = 1 - 3 \frac{1}{\frac{x+2}{3}} \left(\frac{x+2}{3} \right)' = 1 - \frac{3^3}{x+2} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \frac{x + 2 - 3}{x + 2} = \frac{x - 1}{x + 2} = f(x)$$

$$\gamma) 3e^{\frac{x-1}{3}} - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3e^{\frac{x-1}{3}} \geq x + 2 \Leftrightarrow e^{\frac{x-1}{3}} \geq \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} \geq \ln \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow$$

$$x - 1 \geq 3 \ln \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow x - 1 - 3 \ln \frac{x+2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq 0$$

$$\text{Είναι } F'(x) = f(x) = \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $F'(x) > 0 \Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, 1)$

είναι $F'(x) < 0 \Rightarrow F$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Η F έχει ελάχιστο το $F(1) = 0$, άρα

$$F(x) \geq F(1) = 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\delta) (e^x - 1)(ex + 2) \geq (e^x + 2)(ex - 1) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \geq \frac{ex - 1}{ex + 2} \Leftrightarrow f(e^x) \geq f(ex) \quad (3)$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{x + 2 - x + 1}{(x + 2)^2} = \frac{3}{(x + 2)^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$$

$$\text{Η σχέση (3) γίνεται: } f(e^x) \geq f(ex) \xrightarrow{f \nearrow (0, +\infty)} e^x \geq ex \Leftrightarrow e^x - ex \geq 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = e^x - ex, \quad x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = e^x - e \text{ κα } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Η g έχει ελάχιστο το $g(1) = 0$, άρα $g(x) \geq g(1) = 0 \Leftrightarrow e^x - e \geq 0$.

83. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = (2x+1)e^{-f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω F μια παράγουσα της f . Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$ για το οποίο ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + \lambda x - F(0)}{x^3 + \lambda^2 x} = 1.$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\ln 3 < \int_0^2 \ln(x^2 + x + 1) dx - \int_0^1 \ln(x^2 + x + 1) dx < \ln 7$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x)) = +\infty$.

Λύση

$$\alpha) f'(x) = (2x+1)e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2x+1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2 + x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = x^2 + x + c. \text{ Είναι } f(0) = \int_0^0 (2t+1)e^{-f(t)} dt = 0 \Leftrightarrow 1 = c, \text{ άρα}$$

$$e^{f(x)} = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Επειδή η F είναι παράγουσα της f , η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + \lambda x - F(0)}{x^3 + \lambda^2 x} = \lim_{DLH} \frac{\frac{0}{0}}{x^3 + \lambda^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \lambda}{3x^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\gamma) \ln 3 < \int_0^2 \ln(x^2 + x + 1) dx - \int_0^1 \ln(x^2 + x + 1) dx < \ln 7 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 < F(2) - F(0) - F(1) + F(0) < \ln 7 \Leftrightarrow \ln 3 < F(2) - F(1) < \ln 7$$

Από το Θ.Μ.Τ για την F , υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = F(2) - F(1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2], \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [1, 2].$$

$$1 < \xi < 2 \Leftrightarrow f(1) < f(\xi) < f(2) \Leftrightarrow \ln 3 < F(2) - F(1) < \ln 7.$$

δ) Από το ΘΜΤ για την F , υπάρχει $\xi_1 \in (x, 2x)$, $x > 0$:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \Leftrightarrow xf(\xi_1) = F(2x) - F(x)$$

$$x < \xi_1 < 2x \Leftrightarrow f(x) < f(\xi_1) < f(2x) \Leftrightarrow x \ln(x^2 + x + 1) < xf(\xi_1) < x \ln(4x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$x \ln(x^2 + x + 1) < F(2x) - F(x) < x \ln(4x^2 + 2x + 1).$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x^2 + x + 1)] = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(2x) - F(x)) = +\infty$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Αν F αρχική της f , να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

Λύση

$$\alpha) f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} \cdot \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \cdot \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} > 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, είναι $f(A) = (-\infty, 0)$

γ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την F , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = F(x+1) - F(x). \text{ Είναι } x < \xi < x+1 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(\xi) < f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) < F(x+1) - F(x) < f(x+1)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0, \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 0.$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = e^y \Leftrightarrow e^x - 1 = e^x e^y + e^y \Leftrightarrow$$

$$e^x - e^x e^y = e^y + 1 \Leftrightarrow e^x (1 - e^y) = e^y + 1 \quad (1)$$

Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$, είναι $y < 0$, οπότε η (1) γίνεται:

$$e^x = \frac{e^y + 1}{1 - e^y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{e^y + 1}{1 - e^y}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \ln \frac{e^y + 1}{1 - e^y}, y < 0, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x + 1}{1 - e^x}, x < 0.$$

ε) Επειδή η ευθεία $y = x$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των f

και f^{-1} , για να βρίσκεται η C_f κάτω από την ευθεία $y = x$, πρέπει η $C_{f^{-1}}$ να βρίσκεται πάνω από την $y = x$, άρα αρκεί $f^{-1}(x) > f(x)$.

$$\text{Είναι } f^{-1}(x) > f(x) \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{1 - e^x} > \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{1 - e^x} > \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + 2e^x + 1 > -e^{2x} + 2e^x - 1 \Leftrightarrow 2e^{2x} > -2 \text{ ισχύει.}$$

85. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$

Λύση

α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ (1)

$$\text{έχουμε: } f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (2).$$

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με } f''(x) = -\frac{(1 + e^{-f(x)})'}{(1 + e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ αφού η } f'(x) > 0, \text{ οπότε η } f$$

κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}. \text{ Είναι } 0 < \xi < x \text{ οπότε}$$

$$f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \quad (3)$$

$$\text{Επίσης } f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} < 1 \text{ οπότε για } x > 0 \text{ θα είναι } xf'(x) < x \quad (4).$$

Άρα από (3) και (4) έχουμε $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$.

γ) Αφού $\frac{x}{2} < f(x) < x$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f(x)}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0. \text{ Από τη σχέση (1) έχουμε:}$$

$$f(x) - (x - 1) = e^{-f(x)} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0 \text{ άρα η } y = x - 1 \text{ είναι}$$

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Έστω g αρχική της $\frac{f(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$.

Από το θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 3)$ και $\xi_2 \in (3, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$g'(\xi_1) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt \text{ και } g'(\xi_2) = \frac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\text{Είναι } g'(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ και } g''(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow g' \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{g' \nearrow} g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$$

86. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(2) = 0$, $f(3) = 3$, $f'(3) = 1$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$. Να

αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

γ) $f(x) \geq 3(x-2)$ για κάθε $x \in [2,3]$.

δ) $\int_2^3 f(x) dx \geq \frac{3}{2}$.

ε) Έστω F μια παράγουσα της f στο $[2,3]$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_1 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $F(x_1) = (3-x_1)f(x_1) + F(2)$.

ii) υπάρχει $x_2 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $F(x_2) + f(x_2) = x_2 + F(2)$.

Λύση

α) Είναι $f''(x) < 0$ και αφού f' συνεχής θα είναι $f' \searrow$ στο $[2,3]$ άρα για $x \leq 3$ έχουμε

$f'(x) \geq f'(3) = 1 > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $[2,3]$ με σύνολο τιμών

$f(A) = [f(2), f(3)] = [0, 3]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $(3, f(3))$ είναι $y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 3 = 1(x - 3) \Leftrightarrow y = x$

γ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, x]$, υπάρχει $\xi_1 \in (2, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, 3]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$

Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και $f' \searrow [2,3]$ οπότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} \Leftrightarrow$

$3f(x) - xf(x) > 3x - 6 - xf(x) + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) > 3(x - 2)$.

Επιπλέον για $x = 2$ και $x = 3$ είναι $f(x) = 3(x - 2)$, οπότε για κάθε $x \in [2,3]$

είναι $f(x) \geq 3(x - 2)$.

δ) Είναι $f(x) - 3(x - 2) \geq 0$ και η $f(x) - 3(x - 2)$ συνεχής στο $[2,3]$ οπότε

$$\int_2^3 [f(x) - 3(x - 2)] dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) dx \geq \int_2^3 3(x - 2) dx = \frac{3}{2}.$$

ε) i) $F(x) = (3 - x)f(x) + F(2) \Leftrightarrow F(x) + (x - 3)f'(x) - F(2)x = 0$ ή

$((x - 3)f(x) - F(2)x)' = 0$. Έστω $g(x) = (x - 3)f(x) - F(2)x$, $x \in [2,3]$. Είναι

$g(2) = (2 - 3)f(2) - 2F(2) = -3F(2)$, $g(3) = (3 - 3)f(3) - 3F(2) = -3F(2)$, δηλαδή $g(2) = g(3)$.

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[2,3]$, άρα η g είναι συνεχής στο

$[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με

$g'(x) = F(x) + (x - 3)f'(x) - F(2)x$, άρα από το θ. Rolle υπάρχει $x_1 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow F(x_1) = (3 - x_1)f(x_1) + F(2)$

ii) Έστω $h(x) = F(x) + f(x) - x - F(2)$, $x \in [2, 3]$.

Είναι $h(2) = F(2) + f(2) - 2 - F(2) = -2 < 0$, $h(3) = F(3) + f(3) - 3 - F(2) = F(3) - F(2)$

Είναι $\int_2^3 f(x) dx \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow F(3) - F(2) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow h(3) \geq \frac{3}{2} > 0$ δηλαδή $h(2)h(3) < 0$ και επειδή η

h είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θ. Bolzano,

υπάρχει $x_2 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2) = 0 \Leftrightarrow F(x_2) + f(x_2) = x_2 + F(2)$.

87. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)(x^2 + 1) - f(x)(x - 1)^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^x - \lambda x^2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω F αρχική της f με $F(0) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $2e^\xi = (\xi^2 + 1) \int_0^2 f(t) dt$.

δ) Να δείξετε ότι $2e^\xi > (\xi^2 + 1) \int_0^1 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt$.

ε) Να δείξετε ότι $(x - 1)F(x - 1) < xF(x)$, $x > 1$.

Λύση

$$\alpha) f'(x)(x^2 + 1) - f(x)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x)(x^2 + 1) = f(x)(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow [\ln(f(x))] = (x - \ln(x^2 + 1))' \Leftrightarrow$$

$$\ln(f(x)) = x - \ln(x^2 + 1) + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } \ln(f(0)) = c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα}$$

$$\ln(f(x)) = x - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) = e^{x - \ln(x^2 + 1)} = \frac{e^x}{e^{\ln(x^2 + 1)}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$\beta) e^x - \lambda x^2 = \lambda \Leftrightarrow e^x = \lambda x^2 + \lambda = \lambda(x^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και η f είναι συνεχής στο 1, είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty, \text{ άρα } f(A) = (0, +\infty)$$

Αν $\lambda > 0$ τότε η $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Αν $\lambda \leq 0$ ή εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

γ) Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(2) - F(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt \Leftrightarrow \frac{e^\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt \Leftrightarrow 2e^\xi = (\xi^2 + 1) \int_0^2 f(t) dt$$

$$\delta) 2e^\xi > (\xi^2 + 1) \int_0^1 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \Leftrightarrow \frac{e^\xi}{\xi^2 + 1} > \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt > \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \Leftrightarrow F(2) - F(0) > F(1) - F(0) \Leftrightarrow F(2) > F(1)$$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $2 > 1$ είναι και $F(2) > F(1)$.

ε) Έστω $g(x) = xF(x)$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = F(x) + xF'(x)$.

Για κάθε $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) = 0$ και επειδή $xF'(x) > 0$, είναι $g'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $0 < x-1 < x \Rightarrow g(x-1) < g(x) \Leftrightarrow (x-1)f(x-1) < xf(x)$.

88. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\ln\left(\int_0^1 f(x) dx\right) = x_0^2$.

γ) η f είναι άρτια και ισχύει: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$, $a > 0$.

δ) $2 < \int_0^2 e^{x^2} dx < 2e^4$.

ε) η f είναι κυρτή και συνέχεια ότι $e^{x^2} + e \geq 2ex$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) Είναι $f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} f'(x) - 2xe^{-x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-x^2} f(x))' = 0$ άρα $e^{-x^2} f(x) = c$ και για $x=1$: $e^{-1} f(1) = c \Leftrightarrow c=1$ άρα $e^{-x^2} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2}$.

β) Έστω F αρχική της f τότε από Θ.Μ.Τ. στο $[0, 1]$ υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f(x_0) = F(1) - F(0).$$

$$\text{Επίσης } \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) \text{ άρα } \int_0^1 f(x) dx = f(x_0) = e^{x_0^2},$$

$$\text{άρα } \ln\left(\int_0^1 f(x) dx\right) = \ln e^{x_0^2} = x_0^2.$$

γ) $D_f = \mathbb{R}$ και $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$ οπότε η f είναι άρτια και

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{x=-u}{=} \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(u) du.$$

δ) Είναι $f'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ όταν $x \in (0, 2)$ οπότε $f \nearrow [0, 2]$ και $f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e^4$ και επειδή οι ισότητες δεν ισχύουν για κάθε $x \in [0, 2]$, είναι:
 $\int_0^2 1 dx < \int_0^2 e^{x^2} dx < \int_0^2 e^4 dx \Leftrightarrow 2 < \int_0^2 e^{x^2} dx < 2e^4$.

ε) Είναι $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(1) = 2e$ και $f(1) = e$.
 Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2ex - e$.
 Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, άρα
 $f(x) \geq 2ex - e \Leftrightarrow e^{x^2} + e \geq 2ex$.

89. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι $f'(x) - f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > -1$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < -1$ για κάθε $x < 0$.

β) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\alpha < \beta$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + 1$.

γ) αν $\int_0^3 f(x) dx > 4$, τότε υπάρχει $\rho_1 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $(f(\rho_1) - 2)\rho_1 = 12e^{\rho_1 - 3}$.

δ) $F(x) - F(x-1) < f(x) < F(x+1) - F(x)$, $x > 1$, όπου F παράγουσα της f .

Λύση

α) $f'(x) - f(x) > 1 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - e^{-x} > 0$

Έστω $h(x) = e^{-x}f(x) + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - e^{-x} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) + e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > -e^{-x} \Leftrightarrow f(x) > -1$
 και για κάθε $x < 0$ είναι $h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) < -1$.

β) $f'(x) - f(x) > 1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f'(x) - f(x)] dx > \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \beta - \alpha \Leftrightarrow$

$$f(\beta) - f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \beta - \alpha \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha} > 1 \quad (1)$$

Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$,

$$\text{οπότε η (1) γίνεται: } f'(\xi) - \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha} > 1 \Leftrightarrow f'(\xi) > \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + 1$$

γ) Έστω $g(x) = (f(x) - 2)x - 12e^{x-3}$, $x \in [0, 3]$.

Είναι $g(0) = -12e^{-3} < 0$, $g(3) = 3(f(3) - 2) - 12$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) $\alpha = 0$ και $\beta = 3$, έχουμε:

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} - \frac{\int_0^3 f(x) dx}{3 - 0} > 1 \Leftrightarrow f(3) + 1 > \int_0^3 f(x) dx + 3 > 4 + 3 = 7 \Leftrightarrow f(3) > 6 \Leftrightarrow$$

$$f(3) - 2 > 4 \Leftrightarrow 3(f(3) - 2) > 12 \Leftrightarrow 3(f(3) - 2) - 12 > 0 \Leftrightarrow g(3) > 0.$$

Επειδή $g(0)g(3) < 0$ και η g είναι συνεχής στο $[0, 3]$, λόγω του Θ. Bolzano, υπάρχει $\rho_1 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow (f(\rho_1) - 2)\rho_1 = 12e^{\rho_1 - 3}$.

δ) Από το Θ.Μ.Τ. για την F , υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοια, ώστε:

$$F'(\xi_1) = F(x) - F(x-1) \text{ και } F'(\xi_2) = F(x+1) - F(x).$$

Είναι $f'(x) - f(x) > 1 \Leftrightarrow f'(x) > 1 + f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα

$F''(x) = (F'(x))' = (f(x))' = f'(x) > 0$, άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Είναι

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \stackrel{F'}{\Leftrightarrow} F'(x-1) < F'(\xi_1) < F'(x) < F'(\xi_2) < F'(x+1) \Rightarrow$$

$$F(x) - F(x-1) < f(x) < F(x+1) - F(x)$$

90. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f'(x)f(-x) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και F μια παράγουσα της.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^3}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $F(e^x) - F(ex) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

δ) Αν $a < b$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε

$$(b-a)e^{\xi^3} = \int_a^b f(x) dx.$$

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 f(x)$, την οριζόντια ασύμπτωτη της στο $-\infty$ και τον άξονα $y'y$.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $e^{\xi^3} = 2 \int_0^1 x e^{x^3} dx$.

Λύση

α) Αν στη σχέση $f'(x)f(-x) = 3x^2$ (1), αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει:

$$f'(-x)f(x) = 3x^2 \quad (2) \text{ και με αφαίρεση κατά μέλη των (1),(2), έχουμε:}$$

$$f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x)f(-x)]' = 0 \Leftrightarrow f(x)f(-x) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0$$

είναι $c = f^2(0) = 1$, άρα $f(x)f(-x) = 1 \neq 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, οπότε η (1)

γίνεται:

$$f'(x) \frac{1}{f(x)} = 3x^2 \Leftrightarrow (\ln(f(x)))' = (x^3)' \Leftrightarrow \ln(f(x)) = x^3 + c_1 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^3 + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Επειδή $f(0) = 1$ είναι $c_1 = 0$, άρα $f(x) = e^{x^3}$.

β) Είναι $F'(x) = f(x) = e^{x^3} > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(e^x) - F(ex) = 0 \Leftrightarrow F(e^x) = F(ex) \stackrel{F \uparrow}{\Leftrightarrow} e^x = ex \Leftrightarrow e^x - ex = 0$$

Έστω $g(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα $g(x) > g(1) = 0$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, άρα $g(x) > g(1) = 0$.

Επειδή $g(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

γ) Είναι $F''(x) = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3} > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η F' είναι συνεχής, η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_F στο $x = 0$ έχει εξίσωση $y - F(0) = F'(0)x \Leftrightarrow y = x + F(0)$ γιατί $F'(0) = f(0) = 1$.

Επειδή η F είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, δηλαδή $F(x) \geq x + F(0)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + F(0)] = +\infty$, είναι $x + F(0) > 0$ κοντά στο $+\infty$, άρα

$$F(x) \geq x + F(0) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{F(x)} \leq \frac{1}{x + F(0)}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + F(0)} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(x)} = 0$. Όμως

$$F(x) > 0 \text{ κοντά στο } +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

δ) Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (\beta - \alpha)f(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \Leftrightarrow (\beta - \alpha)e^{\xi^3} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

ε) Είναι $g(x) = x^2 e^{x^3}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{x^3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x^3}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-3x^2 e^{-x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-3xe^{-x^3}} = 0,$$

άρα ο άξονας $x'x$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Έστω ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < 0$.

$$\text{Είναι } E(\lambda) = \int_{\lambda}^0 g(x)dx = \int_{\lambda}^0 x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_{\lambda}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{\lambda^3}.$$

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδό είναι: } E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{\lambda^3} \right) = \frac{1}{3}$$

στ) Για κάθε $0 \leq x \leq 1$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, άρα και $xf(0) \leq xf(x) \leq xf(1)$

Επειδή όμως η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^1 xf(0)dx < \int_0^1 xe^{x^3} dx < \int_0^1 xf(1)dx \Leftrightarrow f(0) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 < \int_0^1 xe^{x^3} dx < f(1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} f(0) < \int_0^1 xe^{x^3} dx < \frac{1}{2} f(1) \Leftrightarrow f(0) < 2 \int_0^1 xe^{x^3} dx < f(1), \text{ οπότε λόγω του θεωρήματος}$$

ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 2 \int_0^1 xe^{x^3} dx \Leftrightarrow e^{\xi^3} = 2 \int_0^1 xe^{x^3} dx$.

91. Έστω F αρχική της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ με $F(0) = 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της F για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt < \frac{1}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $F\left(\frac{1}{x}\right) + F(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (F(x+1) - F(x))] = +\infty$.

ε) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_F στο $x_0 = 0$.

στ) Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$, να αποδείξετε ότι $E < 6$.

Λύση

α) $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow F$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$, $x > 0$ τέτοιο ώστε $F'(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow xF'(\xi_1) = F(x)$

Επειδή $F'(\xi_1) > 0$, υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $F'(\xi_1) > \alpha \Leftrightarrow xF'(\xi_1) > \alpha x \Leftrightarrow F(x) > \alpha x$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x) = +\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ και επειδή $F(0) = 0$, είναι $F([0, +\infty)) = [0, +\infty)$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την F υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε: $F'(x) = F(2) - F(1) = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt$.

Είναι $F''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0 \Rightarrow F'$ γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε η F είναι κοίλη στο

$[0, +\infty)$. Είναι $1 < \xi_2 < 2 \Leftrightarrow F'(1) > F'(\xi_2) > F'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt < \frac{1}{2}$

γ) Έστω $h(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) + F(x)$, $x \neq 0$.

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) + F'(x) = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c$$

δ) Από το Θ.Μ.Τ για την F , υπάρχει $\xi_3 \in (x, x+1)$: $F'(x) = F(x+1) - F(x)$

Είναι $x < \xi_3 < x+1 \Leftrightarrow F'(x) > F'(\xi_3) > F'(x+1) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1+x^2} > F(x+1) - F(x) > \frac{1}{1+(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+x^2} > e^x (F(x+1) - F(x)) > \frac{e^x}{1+(x+1)^2}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (F(x+1) - F(x))] = +\infty$.

ε) Η εφαπτομένη είναι η ευθεία $\varepsilon: y - F(0) = F'(0)x \Leftrightarrow y = f(0)x \Leftrightarrow y = x$.

στ) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $F(x) \geq F(0) = 0$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_2^4 F(x) dx$.

Επειδή η F είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, βρίσκεται κάτω από την ε στο διάστημα αυτό εκτός σημείου επαφής, άρα $F(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, είναι: $\int_2^4 F(x) dx < \int_2^4 x dx \Leftrightarrow E < \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 = 8 - 2 = 6$

92. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[a, \beta]$ με $f(a) = f(\beta) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(a)f'(\beta) < 0$

β) Να βρείτε το πρόσημο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq f'(x_0)$.

Έστω ότι $\int_a^\beta f(t) \left(\int_a^\beta f(x) dx \right) dt + \int_a^\beta f(x) dx - 2 = 0$.

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$.

ε) Έστω F αρχική συνάρτηση της f στο $[a, \beta]$ και $\beta = a + 4$.

ι) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi) + 1 = 0$.

ii) $2f(x+1) < f(x+2) - f(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ με $\beta > a + 2$.

Λύση

α) Επειδή $f(a) = f(\beta) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) , λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $a < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(a) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(a) < 0 < f'(\beta)$, άρα $f'(a)f'(\beta) < 0$.

β) Για κάθε $a < x < \xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$f'(a) < f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(a) < f'(x) < 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [a, \xi].$$

Για κάθε $a < x \leq \xi$, είναι $f(a) > f(x) \geq f(\xi)$, δηλαδή $f(x) < f(a) = 0$.

Για κάθε $\xi < x < \beta$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$f'(\xi) < f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow 0 < f'(x) < f'(\beta), \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [\xi, \beta].$$

Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $f(\xi) < f(x) < f(\beta) = 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

γ) Έστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Τότε $f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0$,

$$\text{άρα } [e^{-x}f(x)]' > 0. \text{ Έστω } g(x) = e^{-x}f(x), x \in [a, \beta]. \text{ Είναι } g'(x) = [e^{-x}f(x)]' > 0,$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$. Επειδή $a < \beta$, είναι $g(a) < g(\beta) \Leftrightarrow$

$$e^{-a}f(a) < e^{-\beta}f(\beta) \Leftrightarrow 0 < 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \geq f'(x_0)$.

δ) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \lambda dt + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \lambda + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 1.$$

Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$, άρα $\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -2$. Το

ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 2$.

ε) i. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi) + 1 = 0.$$

ii. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(x+1) - f(x) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2-x-1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = f(x+2) - f(x+1)$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$2f(x+1) < f(x+2) - f(x)$$

93. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{2x} = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$.

Έστω ότι η f έχει συνεχή παράγωγο με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx$

Έστω τώρα ότι η f είναι και κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ε) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 2$, να δείξετε ότι $E > 8$.

Λύση

α) Έστω $\frac{f(x) - e^x}{2x} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x \cdot g(x) + e^x$. Επειδή η f είναι συνεχής στο

$x = 0$, ισχύει ότι: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2xg(x) + e^x) = 1$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{2x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{2x} \right) = 1$$

$$\text{Έστω } h(x) = \frac{f(x) - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{2x} \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x} = 2h(x) + \frac{e^x - 1}{x}, x \neq 0$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2h(x) + \frac{e^x - 1}{x} \right) = 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow f'(0) = 3$$

$$\text{Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A \text{ είναι η } \varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 3x + 1$$

β) Επειδή η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έστω F αρχική της f . Από το Θ.Μ.Τ για την F , υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = \int_0^1 f(t) dt \text{ και } \xi_2 \in (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} = \int_1^2 f(t) dt$$

$$\text{Είναι } F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x) > 0 \Rightarrow F' \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{F'}{\Rightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx.$$

δ) Αν η f είναι κυρτή, τότε η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του

$$\text{σημείου επαφής, άρα } f(x) \geq 3x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα } 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{3x + 1}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x + 1} = 0, \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και αφού } f(x) > 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

ε) Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$, άρα $E = \int_0^2 f(x) dx$.

Επειδή στη σχέση $f(x) \geq 3x + 1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, είναι

$$\int_0^2 f(x) dx > \int_0^2 (3x + 1) dx \Leftrightarrow E > \left[3 \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = 8.$$

94. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x$ και η $g(x) = x \ln 2$. Να δείξετε ότι έχουν δύο κοινά σημεία με τετμημένες 2 και $a > 2$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ που να διαιρεί το εμβαδόν μεταξύ των δύο συναρτήσεων σε λόγο 1/2016.

β) Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε αν η εφαπτομένη της C_f τέμνει την C_f και σε άλλο σημείο τότε η f'' έχει τουλάχιστον μια ρίζα ενώ αν εφάπτεται της C_f σε δυο σημεία τότε η f''' έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Λύση

$$\alpha) f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2 \ln x = x \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Έστω } h(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ με } D_h = (0, +\infty) \text{ και } h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \text{ Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \text{ και } h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e.$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

$$\text{Από την (1)} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow h(x) = h(2) \Leftrightarrow x = 2 \text{ αφού η } h \text{ είναι 1-1 στο } (0, e).$$

Η h είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ άρα το $h([e, +\infty))$ είναι το

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(e) \right], \text{ όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{dl}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ άρα } h([e, +\infty)) = (0, h(e)].$$

Όμως $2 < e \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(2) < h(e)$ και $h(2) > 0$, συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση της (1) στο $[e, +\infty)$ αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα η (1) έχει ακριβώς δυο λύσεις μια το 2 και μία $\alpha \in [e, +\infty)$.

$$\text{Στο } [2, e] \text{ η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα } h(x) \geq \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow f(x) \geq g(x).$$

$$\text{Στο } [e, \alpha] \text{ η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα } h(x) \geq \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow f(x) \geq g(x).$$

Άρα στο $[2, \alpha]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$.

$$\text{Πρέπει να υπάρχει } x_0 \in (2, \alpha): \frac{\int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx}{\int_{x_0}^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx} = \frac{1}{2016} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx}{\int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x_0}^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx} = \frac{1}{2016+1} \Leftrightarrow \frac{\int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx}{\int_2^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx} = \frac{1}{2017} \Leftrightarrow$$

$$2017 \int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx = \int_2^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$2017 \int_2^{x_0} (f(x) - g(x)) dx - \int_2^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx = 0 \quad (2).$$

Έστω F, G αρχικές συναρτήσεις των f, g αντίστοιχα. Τότε η (2) γίνεται:

$$2017[F(x_0) - G(x_0) - F(2) + G(2)] - [F(\alpha) - G(\alpha) - F(2) + G(2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$2017[F(x_0) - G(x_0)] - 2017F(2) + 2017G(2) - F(\alpha) + G(\alpha) + F(2) - G(2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2017[F(x_0) - G(x_0)] - 2016F(2) + 2016G(2) - F(\alpha) + G(\alpha) = 0$$

$$\text{Έστω } b(x) = 2017[F(x) - G(x)] - 2016F(2) + 2016G(2) - F(\alpha) + G(\alpha)$$

Η b συνεχής στο $[2, \alpha]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$b(2) = 2017[F(2) - G(2)] - 2016F(2) + 2016G(2) - F(\alpha) + G(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$b(2) = F(2) - G(2) - F(\alpha) + G(\alpha) = - \int_2^{\alpha} (f(x) - g(x)) dx < 0$$

αφού $f(x) \geq g(x)$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [2, \alpha]$.

$$b(\alpha) = 2017[F(\alpha) - G(\alpha)] - 2016F(2) + 2016G(2) - F(\alpha) + G(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$b(\alpha) = 2016[F(\alpha) - G(\alpha) - F(2) + G(2)] = \int_2^\alpha (f(x) - g(x))dx > 0.$$

Άρα $b(2)b(\alpha) < 0$, οπότε από το Θ.Bolzano η εξίσωση $b(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, e)$.

β) Έστω ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$

τέμνει την C_f στο $B(\beta, f(\beta))$ τότε ο

συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ο

συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ άρα $f'(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Τώρα η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

παραγωγίσιμη στο (α, β) ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ άρα $f'(\alpha) = f'(\xi)$. Τώρα η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \xi]$,

παραγωγίσιμη στο (α, ξ) και $f'(\alpha) = f'(\xi)$ οπότε από θεώρημα Rolle η f'' έχει

τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha, \xi) \subseteq \mathbb{R}$.

Έστω ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$

εφάπτεται της C_f και στο $B(\beta, f(\beta))$ τότε ο

συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ο

συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της

εφαπτομένης της C_f στο $B(\beta, f(\beta))$ άρα

$f'(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\beta)$. Τώρα η f είναι συνεχής

στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε από ΘΜΤ

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

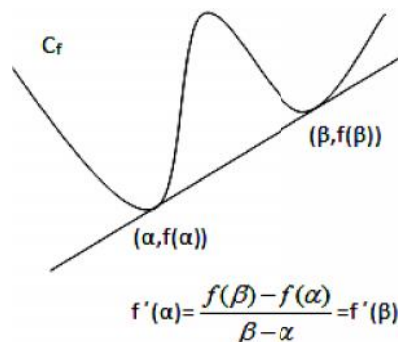
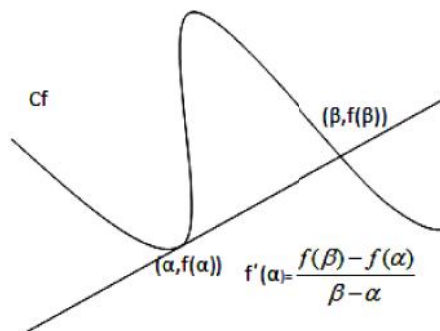
$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ άρα $f'(\alpha) = f'(\xi) = f'(\beta)$. Τώρα η f' είναι συνεχής στα $[\alpha, \xi]$, $[\xi, \beta]$

παραγωγίσιμη στα (α, ξ) , (ξ, β) και $f'(\alpha) = f'(\xi) = f'(\beta)$ οπότε από θεώρημα Rolle η f''

έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_1 στο (α, ξ) και μία x_2 στο (ξ, β) . Τώρα η f'' είναι συνεχής

στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f''(x_1) = f''(x_2)$ οπότε από θεώρημα Rolle η

$f^{(3)}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$.



95. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) - f(x) = \int_0^1 f(x)dx + 1 - e \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x$.

β) Αν G αρχική της $g(x) = f(x^2)$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^3} = +\infty$.

γ) Αν $\int_0^1 t^2 f(t^2) dt = 1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = f(x^2)$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x^2) dx < \int_2^3 f(x^2) dx$.

Λύση

α) Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (1), τότε:

$$f'(x) - f(x) = \int_0^1 f(x) dx + 1 - e \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \lambda + 1 - e \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = (\lambda + 1 - e) e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = [-(\lambda + 1 - e) e^{-x}]' \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} f(x) = -(\lambda + 1 - e) e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = -\frac{(\lambda + 1 - e) e^{-x}}{e^{-x}} + \frac{c}{e^{-x}} = -\lambda - 1 + e + c e^x, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow -\lambda - 1 + e + c = 1 \Leftrightarrow c = \lambda + 2 - e, \text{ άρα } f(x) = -\lambda - 1 + e + (\lambda + 2 - e) e^x.$$

$$\text{Η (1) γίνεται: } \int_0^1 (-\lambda - 1 + e + (\lambda + 2 - e) e^x) dx = \lambda \Leftrightarrow$$

$$(-\lambda - 1 + e) [x]_0^1 + (\lambda + 2 - e) [e^x]_0^1 = \lambda \Leftrightarrow -\lambda - 1 + e + (\lambda + 2 - e)(e - 1) = \lambda \Leftrightarrow$$

$$-\lambda - 1 + e + \lambda e - \lambda + 2e - 2 - e^2 + e - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda e - 3\lambda = e^2 - 4e + 3 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(e - 3) = (e - 3)(e - 1) \Leftrightarrow \lambda = e - 1. \text{ Άρα } f(x) = -e + 1 - 1 + e + (e - 1 + 2 - e) e^x = e^x.$$

β) Έστω G η αρχική της $g(x) = f(x^2)$ δηλαδή $G'(x) = g(x) = e^{x^2}$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{3x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{x^2} \frac{1}{3x^2} \right) = +\infty$$

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} (x)' dx = \left[x e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^{x^2} \cdot x dx = e - 2 \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = e - 2.$$

δ) Είναι $g'(x) = (e^{x^2})' = 2xe^{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(2) \Leftrightarrow e \leq f(x^2) \leq e^2$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει

για κάθε $x \in [1, 2]$, έχουμε: $\int_1^2 e dx < \int_1^2 f(x^2) dx < \int_1^2 e^2 dx \Leftrightarrow e < \int_1^2 f(x^2) dx < e^2$ (2).

Για κάθε $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow g(2) \leq g(x) \leq g(3) \Leftrightarrow e^2 \leq f(x^2) \leq e^3$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει

για κάθε $x \in [2, 3]$, έχουμε: $\int_2^3 e^2 dx < \int_2^3 f(x^2) dx < \int_2^3 e^3 dx \Leftrightarrow e^2 < \int_2^3 f(x^2) dx < e^3$ (3).

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι

$$\int_1^2 f(x^2) dx < e^2 < \int_2^3 f(x^2) dx \Rightarrow \int_1^2 f(x^2) dx < \int_2^3 f(x^2) dx$$

96. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > (1-x)f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$.

α) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) - 1 = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-\infty, 0]$.

γ) Αν F αρχική της f , να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) Να αποδείξετε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + xF'(x)] = +\infty$

Λύση

α) $f'(x) > (1-x)f''(x) \Leftrightarrow f'(x) - (1-x)f''(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x) + (x-1)f''(x) > 0 \Rightarrow [(x-1)f'(x)]' > 0$$

Έστω $g(x) = (x-1)f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = [(x-1)f'(x)]' > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) > 0 \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $g(x) < g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) < 0 \stackrel{x<1}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αρχικά παρατηρούμε ότι για $x = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Οπότε για $x < 0$ είναι

$$xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

Έστω $h(x) = f(x) - \frac{1}{x}$, $x < 0$. Είναι $h'(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow h \nearrow (-\infty, 0)$, οπότε η

εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

γ) Η F είναι συνεχής στο $[2, x]$, $x > 2$ και παραγωγίσιμη στο $(2, x)$ γιατί είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (2, x)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(2)}{x - 2}.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το ίδιο ισχύει και για την F' , οπότε

$$\xi > 2 \Rightarrow F'(\xi) > F'(2) \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} > f(2) \Leftrightarrow F(x) > xf(2) - 2f(2) + F(2).$$

Είναι $2 > 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) > f(1) = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf(2) - 2f(2) + F(2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(2) = +\infty$ είναι

$$F(x) > xf(2) - 2f(2) + F(2) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{F(x)} < \frac{1}{xf(2) - 2f(2) + F(2)} \text{ και από το κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(x)} = 0$. Όμως $F(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$,

οπότε ότι η γραφική παράσταση της F δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xF(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{F(x) + xF'(x)}{1}$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + xF'(x)] = +\infty$.

97. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Έστω G

παράγουσα της $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η G είναι κυρτή.

β) $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{f(x)}{x} dx < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx$ με $0 < \alpha < \beta$.

γ) Η εξίσωση $e^x f(x) = x$ έχει το πολύ μια θετική ρίζα.

δ) $f(x) \leq f'(1)x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

ε) $(x+1)f(x) < xf(x+1)$.

στ) $\int_1^2 [G(x) + f(x)] dx = 0$ αν γνωρίζετε ότι $G(1) = 2G(2)$.

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο

$[0, +\infty)$, οπότε: $0 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$

β) $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{f(x)}{x} dx < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha) < G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα

$\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, με $G'(x) = g(x) = \frac{f(x)}{x}$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.

υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$G'(\xi_1) = \frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \text{ και}$$

$$G'(\xi_2) = \frac{G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{G' \nearrow}{\Leftrightarrow} G'(\xi_1) < G'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} < \frac{G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha) < G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\gamma) e^x f(x) = x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow g(x) - e^{-x} = 0.$$

Έστω $h(x) = g(x) - e^{-x}$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = g'(x) + e^{-x} > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty)$, Οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - e^{-x} = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty)$.

$$\delta) \text{ Έστω } \varphi(x) = f(x) - f'(1)x, x \in [0, 1]. \text{ Είναι } \varphi'(x) = f'(x) - f'(1).$$

$$\text{Για κάθε } 0 < x < 1 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) - f'(1) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \searrow [0, 1].$$

$$\text{Για κάθε } 0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{\varphi \searrow} \varphi(x) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow f(x) - f'(1)x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f'(1)x.$$

$$\epsilon) \text{ Για κάθε } 0 < x < x+1 \xRightarrow{g \nearrow} g(x) < g(x+1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)f(x) < xf(x+1).$$

$$\sigma\tau) \int_1^2 [G(x) + f(x)] dx = \int_1^2 G(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x)' G(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \\ [xG(x)]_1^2 - \int_1^2 xG'(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 2G(2) - G(1) - \int_1^2 \cancel{x} \frac{f(x)}{\cancel{x}} dx + \int_1^2 f(x) dx = 0$$

98. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(3) = f'(3) = 0$ και F μια παράγουσα της. Έστω $h(x) = F(x) - F(6-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η h έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

$$\beta) 2 \int_2^4 f(x) dx < \int_3^5 f(x) dx.$$

$$\gamma) \int_3^6 f(x) dx > \int_0^3 f(x) dx$$

$$\delta) \text{ Υπάρχει } \xi \in (0, 3) \text{ τέτοιο, ώστε } \xi F''(\xi) + 3 = 2\xi - F'(\xi).$$

Λύση

α) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = F'(x) - F'(6-x)(6-x)' = f(x) + f(6-x)$ και

$$h''(x) = f'(x) + f'(6-x)(6-x)' = f'(x) - f'(6-x).$$

Παρατηρούμε ότι $h''(3) = f'(3) - f'(3) = 0$ και $h''(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x) - f'(6-x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(6-x) \xRightarrow{f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow} x > 6-x \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

Για κάθε $x < 3$ είναι $h''(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 3]$ και για κάθε $x > 3$ είναι

$$h''(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [3, +\infty). \text{ Η } h \text{ έχει σημείο καμπής το } (3, h(3)).$$

β) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την h στα διαστήματα $[3, 4], [4, 5]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (3, 4)$

$$\text{και } \xi_2 \in (4, 5) \text{ τέτοια ώστε: } h'(\xi_1) = h(4) - h(3) \stackrel{0}{=} F(4) - F(2) = \int_2^4 f(x) dx \text{ και}$$

$$h'(\xi_2) = h(5) - h(4) = F(5) - F(1) - (F(4) - F(2)) = \int_1^5 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx.$$

Επειδή η h είναι κυρτή στο $[3, +\infty)$ και $\xi_2 > \xi_1 > 3$ τότε η h' θα είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{οπότε } h'(\xi_2) > h'(\xi_1) \Leftrightarrow \int_1^5 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx > \int_2^4 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^5 f(x) dx > 2 \int_2^4 f(x) dx.$$

γ) Για κάθε $x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(3) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 3]$, οπότε για κάθε

$$x < 3 \Rightarrow f(x) > f(3) = 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow (-\infty, 3]$$

Για κάθε $x > 3 \Rightarrow f'(x) > f'(3) = 0 \Rightarrow f \nearrow [3, +\infty)$, οπότε για κάθε

$$x > 3 \Rightarrow f(x) > f(3) = 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow [3, +\infty).$$

Επειδή η F είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$3 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow F(3) \leq F(x) \leq F(6) \text{ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε } x \in [3, 6], \text{ είναι}$$

$$\int_3^6 F(3) dx < \int_3^6 F(x) dx < \int_3^6 F(6) dx \Leftrightarrow F(3)(6-3) < \int_3^6 F(x) dx < F(6)(6-3) \Leftrightarrow$$

$$3F(3) < \int_3^6 F(x) dx < 3F(6) \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow F(0) \leq F(x) \leq F(3) \text{ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε } x \in [0, 3], \text{ είναι}$$

$$\int_0^3 F(3) dx < \int_0^3 F(x) dx < \int_0^3 F(0) dx \Leftrightarrow F(0)(3-0) < \int_0^3 F(x) dx < F(3)(3-0) \Leftrightarrow$$

$$3F(0) < \int_0^3 F(x) dx < 3F(3) \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2) προκύπτει ότι } \int_3^6 f(x) dx > \int_0^3 f(x) dx.$$

$$\delta) xF''(x) + 3 = 2x - F'(x) \Leftrightarrow xF''(x) + F'(x) + 3 - 2x = 0 \Rightarrow (xF'(x) + 3x - x^2)' = 0$$

$$\text{Έστω } g(x) = xF'(x) + 3x - x^2 = xf(x) + 3x - x^2, x \in [0, 3].$$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με $g'(x) = f(x) + xf'(x) + 3 - 2x$

$$g(0) = 0 \text{ και } g(3) = 3f(3) + 9 - 9 = 0, \text{ δηλαδή } g(0) = g(3), \text{ άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle,}$$

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0, 3) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi F''(\xi) + 3 = 2\xi - F'(\xi)$$

99. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $f(a) \int_a^\beta f(x) dx < 0$ και F μια παράγουσα της στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 0$.

β) Υπάρχει $\xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(\xi_2) = F(a)$.

γ) Υπάρχει $\xi_3 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_3) > 0$, αν γνωρίζεται ότι $f(a) < 0$.

δ) Υπάρχει $\xi_4 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $(\xi_4 - \beta)f(\xi_4) = F(a) - F(\xi_4)$.

Λύση

α) Επειδή $f(a) \int_a^\beta f(x) dx < 0$, οι αριθμοί $f(a)$ και $\int_a^\beta f(x) dx$ είναι ετερόσημοι.

Έστω $f(a) > 0$ και $\int_a^\beta f(x) dx < 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) < 0$ γιατί αν

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ άτοπο.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, x_0]$ και $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει

$$\xi_1 \in (a, x_0) \subseteq (a, \beta) : f(\xi_1) = 0.$$

Όμοια αν $f(a) < 0$ άρα $\int_a^\beta f(x) dx > 0$.

β) Έστω και πάλι ότι $f(\alpha) > 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = F(x) - F(\alpha)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = f(x)$ και $h'(\alpha) = f(\alpha) > 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x)}{x - \alpha} > 0. \text{ Άρα υπάρχει } x_1 \text{ κοντά στο } \alpha \text{ ώστε } \frac{h(x_1)}{x_1 - \alpha} > 0$$

δηλαδή $h(x_1) > 0$. Ακόμη είναι $h(\beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$.

Αφού η h είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $[x_1, \beta]$ με $h(x_1) \cdot h(\beta) < 0$,

σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, \beta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow F(\xi_2) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F(\xi_2) = F(\alpha).$$

Όμοια αν $f(\alpha) < 0$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

γ) Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_3) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi_3) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Επειδή $f(\alpha) < 0$ είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, άρα $f(\xi_3) > 0$.

δ) $(x - \beta)f(x) + F(x) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x - \beta)F'(x) + F(x) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$[(x - \beta)F(x) - F(\alpha)x]' = 0$$

Έστω $g(x) = (x - \beta)F(x) - F(\alpha)x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Είναι $g(\alpha) = (\alpha - \beta)F(\alpha) - \alpha F(\alpha) = (\alpha - \beta - \alpha)F(\alpha) = -\beta F(\alpha)$ και

$$g(\beta) = (\beta - \beta)F(\beta) - \beta F(\alpha) = -\beta F(\alpha), \text{ δηλαδή } g(\alpha) = g(\beta).$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$g'(x) = (x - \beta)F'(x) + F(x) - F(\alpha) = (x - \beta)f(x) + F(x) - F(\alpha), \text{ λόγω του Θ. Rolle,}$$

υπάρχει $\xi_4 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_4) = 0 \Leftrightarrow (\xi_4 - \beta)f(\xi_4) + F(\xi_4) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\xi_4 - \beta)f(\xi_4) = F(\alpha) - F(\xi_4).$$

100. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει ότι $f(a)f(b) > 0$,

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ και } F \text{ μια παράγουσα της στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι:}$$

α) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ τέτοια, ώστε $F(x_1) > F(a)$ και $F(x_2) < F(b)$.

β) Η συνάρτηση F δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (a, b) .

δ) Η F έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής, αν γνωρίζετε ότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Λύση

α) Επειδή η F είναι παράγουσα της f , ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Είναι $f(\alpha)f(\beta) > 0 \Leftrightarrow F'(\alpha)F'(\beta) > 0$, άρα οι αριθμοί $F'(\alpha)$ και $F'(\beta)$ είναι ομόσημοι.

Έστω ότι $F'(\alpha), F'(\beta) > 0$, τότε:

$F'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} > 0$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$, το οποίο είναι πολύ κοντά

στο α , τέτοιο, ώστε $\frac{F(x_1) - F(\alpha)}{x_1 - \alpha} > 0 \Leftrightarrow F(x_1) - F(\alpha) > 0 \Leftrightarrow F(x_1) > F(\alpha)$.

$F'(\beta) > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{F(x) - F(\beta)}{x - \beta} > 0$, οπότε υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$, το οποίο είναι πολύ κοντά

στο β , τέτοιο, ώστε $\frac{F(x_2) - F(\beta)}{x_2 - \beta} > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - F(\beta) < 0 \Leftrightarrow F(x_2) < F(\beta)$.

β) Είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) = F(\alpha)$.

Επειδή υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_1) > F(\alpha) = F(\beta)$, η F δεν έχει μέγιστο στα α και β . Επειδή υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F(x_2) < F(\beta) = F(\alpha)$, η F δεν έχει ελάχιστο στα α και β , οπότε η F δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

γ) 1ος τρόπος: Επειδή η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό (ΘΜΕΤ). Επειδή όμως δεν έχει ακρότατα στα άκρα α, β του διαστήματος, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $F(x_1) = F_{\min}$ και $F(x_2) = F_{\max}$. Τότε όμως σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $F'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0$ και $F'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = 0$. Άρα η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες τις x_1, x_2 .

2ος τρόπος: Έστω ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ που είναι άτοπο, ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε και

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ που είναι επίσης άτοπο. Άρα αν $f(\alpha), f(\beta) > 0$ υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) < 0$, ενώ αν $f(\alpha), f(\beta) < 0$ υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) > 0$. Λόγω του Θ. Bolzano, υπάρχει $\rho_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $\rho_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια, ώστε $f(\rho_1) = 0$ και $f(\rho_2) = 0$

δ) Είναι $F'(\rho_1) = f(\rho_1) = 0$ και $F'(\rho_2) = f(\rho_2) = 0$, δηλαδή $F'(\rho_1) = F'(\rho_2)$.

Επειδή η F' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , λόγω του Θ. Rolle, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $F''(\xi) = 0$, άρα η F έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

101. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ και $\varphi''(x) + \varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_1(x) = f(x) - \eta \mu x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του α

ερωτήματος και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(\pi, f(\pi))$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

ε) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

στ) Αν G αρχική της g , να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} [G(2x) - G(x)] = 0$.

Λύση

α) Η συνάρτηση ψ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\psi'(x) = 2\varphi'(x)\varphi''(x) + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 2\varphi'(x)[\varphi''(x) + \varphi(x)] = 2\varphi'(x) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\psi(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } \psi(0) = [\varphi'(0)]^2 + [\varphi(0)]^2 = 0 \text{ άρα } c = 0 \text{ και } \psi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Τότε}$$

$$[\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) = 0 \text{ και } \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $\varphi_1(0) = f(0) - \eta\mu 0 = 0$, $\varphi_1'(x) = f'(x) - \sigma\upsilon\nu x$, $\varphi_1''(x) = f''(x) + \eta\mu x$

$$\varphi_1''(x) + \varphi_1(x) = f(x) - \eta\mu x + f''(x) + \eta\mu x = f(x) + f''(x) = 0 \text{ και}$$

$$\varphi_1'(0) = f'(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - 1 = 0 \text{ άρα η } \varphi_1 \text{ ικανοποιεί τις υποθέσεις του α ερωτήματος, οπότε}$$

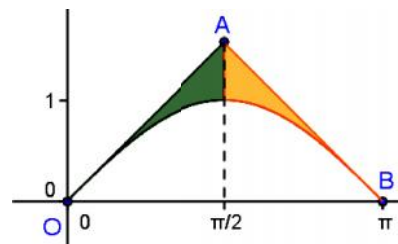
$$\varphi_1(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f'(0) = 1$, $f'(\pi) = -1$. Η ε_1 έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$ και η $\varepsilon_2: y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y = -x + \pi$

δ) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\text{προκύπτει } x = \frac{\pi}{2} \text{ και } y = \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε οι } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ τέμνονται στο}$$

σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:



$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \eta\mu x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi - \eta\mu x) dx = \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \sigma\upsilon\nu x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{\pi^2}{8} - 1 + \left(-1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right) - \left(-\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

ε) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $g'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x < 0 \Rightarrow h \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow h(0) > h(x) > h\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 < h(x) < 0$ άρα

$g'(x) < 0 \Rightarrow g$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

στ) Για τη G εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, 2x]$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, 2x)$ τέτοιο, ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x} \Leftrightarrow xg(\xi) = G(2x) - G(x)$$

Είναι $x < \xi < 2x \xrightarrow{g \searrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)} g(x) > g(\xi) > g(2x) \xrightarrow{x > 0} xg(x) > xg(\xi) > xg(2x) \Leftrightarrow$
 $xg(2x) < G(2x) - G(x) < xg(x).$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xg(2x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xg(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής

θα είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} g(t) dt = 0$.