

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

17. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση :

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_v \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

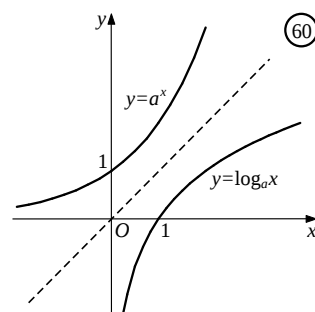
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$$

δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

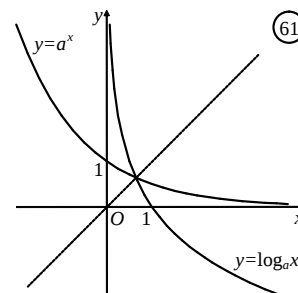
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty \end{array}$$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_{\alpha} x = +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = -\infty \end{array}$$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:
 - οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
 - δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

18. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.**Απάντηση :****Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.**19. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;****Απάντηση :**

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - l| < \varepsilon$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Κρατάμε τους μεγιστοβάθμιους όρους.
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 186 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3 + 2x - 5)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 1)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3 + 8}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^{10} + x + 3}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{5}{x + 2} \right)$

viii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2} \right)$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3 + 2x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3) = -\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3} = 0$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^{10} + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^{10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^9} = 0$

$$\begin{aligned} \text{vii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{5}{x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(x + 2)}{(x^2 + 1)(x + 2)} - \frac{5(x^2 + 1)}{(x + 2)(x^2 + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 5x^2 - 5}{(x^2 + 1)(x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x^2 + 2x - 5}{x^3 + 2x^2 + x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x^2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\begin{aligned} \text{viii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x^2 + 5)(x + 2) - x(x^2 + 3)}{x(x + 2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 10 - x^3 - 3x}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x - 5)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x + 2)$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 5x + 10)$ (Απ. $+\infty$) iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\eta\mu\theta - 2)x^5 + 3x^2 - 2019)$, $\theta \in \mathbb{R}$

3) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 5}$ (Απ. 3)

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + x - 3}{x^6 + x^4 + x^2 + 1}$ (Απ. 0)

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{-2x^3 + x - 1}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + x^5 + 3x + 2}{x^4 - 5x + 6}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x + 1}{x^3 + 1} \right)$ (Απ. 0)

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(|\alpha| - |\eta\mu\alpha|)x^5 + 3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$, $\alpha \neq 0$ (Απ. $+\infty$)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α) Για να υπολογίσουμε όρια που περιέχουν παραστάσεις της μορφής : $\sqrt[n]{f(x)} \pm g(x)$

ή $\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[k]{g(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Σε κάθε υπόριζο βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x

2) Χωρίζουμε τις ρίζες και εμφανίζεται : $\sqrt[n]{x^p} = |x| = \begin{cases} x, & x \rightarrow +\infty \\ -x, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$

3) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x .

(Αν κατά τη διαδικασία εμφανιστεί απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (\pm\infty)$, τότε στο αρχικό όριο πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4) (Ασκήσεις 2,3 σελ. 187 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)

Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 10x + 9}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \right)$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} \stackrel{x>0}{\text{αφά}} \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 10x + 9} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{10}{x} + \frac{9}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{\left(1 + \frac{10}{x} + \frac{9}{x^2} \right)} \stackrel{x<0}{\text{αφά}} \stackrel{x \rightarrow -\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \sqrt{\left(1 + \frac{10}{x} + \frac{9}{x^2} \right)} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} \stackrel{x>0}{\text{αφά}} \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} \stackrel{x<0}{\text{αφά}} \stackrel{x \rightarrow -\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + |x| \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \right) \stackrel{x>0}{\text{αφά}} \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + x \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \right) = +\infty \end{aligned}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- vi. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ \text{αφά} \\ x \rightarrow +\infty \end{matrix}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

- vii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \quad \begin{matrix} x < 0 \\ \text{αφά} \\ x \rightarrow -\infty \end{matrix}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

- viii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}][(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}]}{2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 3}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 1)^2 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}^2}{2x - 1 + \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 3}{2x - 1 + |x| \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ \text{αφά} \\ x \rightarrow +\infty \end{matrix}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2x - 1 + x \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x \left(2 - \frac{1}{x} + \sqrt{4 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

5) Να βρεθούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)$ (Απ. $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$ (Απ. $-\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x + 5)$ (Απ. $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 7)$ (Απ. $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 7} - x + 2)$ (Απ. 3)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 3})$ (Απ. 2)
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x + \alpha)(x + \beta)} - x), \alpha \neq \beta$
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2)$
- ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$
- x. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 5 - x}{x + \sqrt{4 + 3x^2}}$

6) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \text{ (Απ. 2)}$$

7) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1}$, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

8) Να βρεθούν τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + x + 1}{x + 2}$ (Απ. 2)
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 7}}{x + 3}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 4x + 3}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 5x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x}$

2B) ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΡΙΖΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} + \sqrt{4x^2 - 1} - 6x)$

Λύση :

Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι' αυτό χωρίζω κατάλληλα την παράσταση και πολλαπλασιάζω αριθμητές και παρανομαστές με τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} + \sqrt{4x^2 - 1} - 6x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} - 4x + \sqrt{4x^2 - 1} - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} - 4x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{16x^2 + 8x} - 4x)(\sqrt{16x^2 + 8x} + 4x)}{\sqrt{16x^2 + 8x} + 4x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} = \end{aligned}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{|x|\sqrt{16 + \frac{8}{x}} + 4x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|x|\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2x} \stackrel{x>0 \text{ αφά } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x\sqrt{16 + \frac{8}{x}} + 4x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2x} \stackrel{x>0 \text{ αφά } x \rightarrow +\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x\left(\sqrt{16 + \frac{8}{x}} + 4\right)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + 2\right)} = \frac{8}{4+4} + 0 = 1 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

10) Να βρεθούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + \sqrt{9x^2 + 3x + 7} - 5x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 + 1} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} + \sqrt{9x^2 + x + 1} - \sqrt{16x^2 + 1})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 5} + \sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{9x^2 + 1})$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Αν μέσα στο όριο υπάρχει $|g(x)|$ τότε υπολογίζω ξεχωριστά το $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$. Αν

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$ τότε και $g(x) > 0$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$ τότε και $g(x) < 0$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$. Οπότε απαλλάσσομαι από τα απόλυτα και υπολογίζω κανονικά το όριο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) (Άσκηση 4 σελ. 187 σχ. βιβλίο Β' Ομάδας)

Να βρεθούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$

Λύση :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$, άρα $x^2 - 5x > 0$ όταν $x \rightarrow -\infty$ άρα,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$, άρα $x^2 - x > 0$ όταν $x \rightarrow +\infty$ άρα,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

12) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 13| - 7x^2}{|x^3 - 3x^2 + 5| - x^3}$ (Απ. 2) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^4 + 6x^3 - 5x + 6| - x^4}{|4x^3 + 2x^2 - 3x| + x^3}$ (Απ. - 2)
iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$ iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$

13) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{|2x^3 + 3x^2 - 3x + 5| - |x^2 - 7x - 13|}{|x^3 + x - 5| + |7 - x|}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Απ. 2)

14) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{|x - 1| - |x - 2|}{x - 3}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Απ. 0)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\mu - 2)x^5 - 3x + 2)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x)$

Λύση :

i. Έστω $f(x) = (\mu - 2)x^5 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $\mu \neq 2$ είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\mu - 2)x^5 = ((\mu - 2) \cdot (+\infty)) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \mu > 2 \\ -\infty, & \text{αν } \mu < 2 \end{cases}$
- Αν $\mu = 2$ είναι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = -\infty$

Τελικά : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \mu > 2 \\ -\infty, & \text{αν } \mu \leq 2 \end{cases}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ii. Έστω $f(x) = \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$ κοντά στο $+\infty$.

- Αν $\mu \neq 1$ και $\mu \neq 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x}{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x,$$

επειδή : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, θα διακρίνω περιπτώσεις για το $\frac{\mu-1}{\mu}$

- Αν $\frac{\mu-1}{\mu} > 0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1) > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Γιατί : έχω $\mu(\mu-1) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0, \text{ ή }, \mu = 1$

μ	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\mu(\mu-1)$	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $\mu(\mu-1) > 0 \Leftrightarrow \mu \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

- Αν $\frac{\mu-1}{\mu} < 0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1) < 0 \Leftrightarrow \mu \in (0, 1)$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty$
- Αν $\mu = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$
- Αν $\mu = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 2x^2 + 3}{-5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{-5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$

iii. Έστω $f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} + \mu x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + \mu x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \mu x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \mu x\right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \mu x\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \mu x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \mu\right)\right), \text{ επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty,$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \mu\right) = 1 - \mu \quad \text{θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το } 1 - \mu$$

- Αν $1 - \mu > 0 \Leftrightarrow \mu < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \mu\right)\right) = +\infty$
- Αν $1 - \mu < 0 \Leftrightarrow \mu > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \mu\right)\right) = -\infty$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

• Αν $1 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \stackrel{x < 0 \text{ αφα } x \rightarrow -\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} =$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

16) Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((\alpha - 1)x^3 + x^2 + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((\alpha^2 - 4)x^4 + \beta x^3 + x + 2)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + x - 3}{(\alpha + 2)x^3 + \alpha x^2 + x + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \alpha x - 3)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \alpha x + 2)$

17) Αν $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

18) Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \alpha x + \beta$, να βρεθούν οι α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11$ (απ. $\alpha = -1, \beta = 10$)

19) Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{9x^2 + x} - \alpha x - \beta$, να βρεθούν οι α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{6}$

20) Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$, να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

21) Αν $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \lambda x$, να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

22) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 2}{(\lambda + 5)x + 7}$. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν. Αν σε κάποιο όριο παρουσιάζονται οι όροι $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$, τότε διαιρούμε τους όρους αυτούς με κάποια θετική δύναμη του x , ώστε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής να τους μηδενίσουμε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ ενώ :

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, ομοίως και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ τα οποία αποδεικνύονται με κριτήριο παρεμβολής.

$$\left(\begin{aligned} &\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ &\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \xRightarrow{\text{κρ. παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \end{aligned} \right) \text{ και}$$

$$\left(\begin{aligned} &\left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ &\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \xRightarrow{\text{κρ. παρεμβολής}} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 \end{aligned} \right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Στην ενότητα 1.5 είδαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ (Μηδενική επί

φραγμένη που αποδεικνύεται ως εξής :

$$\text{Έχω } \left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \text{ άρα } \left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xLeftrightarrow{|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a} |x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ άρα από κ.π. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$)

$$\text{➤ Όμως } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1 \text{ γιατί : } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[\substack{\text{Θέτω } u = \frac{1}{x} \\ \text{ότα } \nu \\ x \rightarrow \pm \infty \\ u \rightarrow 0}]{\text{}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 : Αν έχω όριο όπου $x \rightarrow \pm \infty$, που περιέχει $\eta\mu x$ ή $\sigma\upsilon\nu x$, τότε διαιρώ κάθε όρο αριθμητή και παρανομαστή με τη μέγιστοβαθμια δύναμη του x . Αν χρειαστεί κάνω διαχωρισμό του κλάσματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23) Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \eta\mu x}{x + 2} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x + 2}{x^4 + \eta\mu^4 x + x}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Λύση :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \eta\mu x}{x + 2} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \alpha\rho\alpha x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \stackrel{*}{=} \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2,$$

$$* \left(\begin{array}{l} \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \stackrel{\text{κρ. παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \end{array} \right)$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \alpha\rho\alpha x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{\eta\mu^2 x}{x} - 2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}{3 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} \stackrel{*}{=} \frac{6 + 0 - 0}{3 + 0} = 2$$

$$* \left(\begin{array}{l} \left| \frac{\eta\mu^2 x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\eta\mu^2 x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \stackrel{\text{κρ. παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = 0 \end{array} \right) \text{ και}$$

$$\left(\begin{array}{l} \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \stackrel{\text{κρ. παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 \end{array} \right)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x + 2}{x^4 + \eta\mu^4 x + x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \alpha\rho\alpha x \neq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{1 + \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^4 + \frac{1}{x^3}} \stackrel{*}{=} \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

* παραπάνω δείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, ομοίως :

$$\left(\begin{array}{l} \left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{|x|^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{|x|^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|^2} \right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|^2} \right) = 0 \stackrel{\text{κρ. παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0 \end{array} \right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24) Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sigma \nu \nu \frac{1}{x} - x \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \nu \nu x}{x+3}$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta \mu x}{x}$

25) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta \mu x}{x^2 + \sigma \nu \nu x}$ (Απ. 2)

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5\eta \mu x}{2x - 7\sigma \nu \nu x}$ (Απ. 3)

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu x}{x^2 + 1}$ (Απ. 0)

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu x}{x^2 - 3x + 2}$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \eta \mu x}{x + \sigma \nu \nu x}$ (Απ. 3)

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2\eta \mu x}{4x + 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{3 + \eta \mu x + \sigma \nu \nu x}$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 5} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 2014}{x + 1} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{5 + \eta \mu x}$

xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \eta \mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$

xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot \eta \mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Έχω : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$, άρα όταν $x \rightarrow -\infty$ τότε $x^5 + 2x + 1 < 0$ άρα

$$3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5 \Leftrightarrow \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1} \geq f(x) \geq \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1}$$

Έχω : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$ άρα από κ.π.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

ii. Έχω : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$, άρα όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $x^5 + 2x + 1 > 0$ άρα

$$3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5 \Leftrightarrow \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} \Leftrightarrow$$

Έχω : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$ άρα από κ.π.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

iii. Έχω $\frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^5 + 2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^5 - 2x^2}{x^5 + 2x + 1} \xrightarrow[\text{αρά } x > 0]{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x(x^5 + 2x + 1)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{3x^5 - 2x^2}{x(x^5 + 2x + 1)}$
 $\Leftrightarrow \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^6 + 2x^2 + x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{3x^5 - 2x^2}{x^6 + 2x^2 + x}$

Έχω : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - 2x^2}{x^6 + 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^6} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 + 3x^2 + 5}{x^6 + 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^6} = 0$ άρα από
κ.π. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

27) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 5x + 2)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (Απ. 0)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

28) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|(x^3 + 3x - 1)f(x) - 2x^2| \leq x$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \eta\mu x)$ (Απ. 0)

29) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $6x^3 - 5x^2 + 2 \leq f(x) \leq 6x^3 + 2x^2 + 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 5}$ (Απ. $-\infty$)
iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4 - 2x^3 + x}$ (Απ. 0) iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^3 - x + 13}$ (Απ. 3)

30) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\frac{4x^2 + x - 2}{1 - x^2} \leq f^2(x) - 4f(x) \leq \frac{4x^3 + x - 2}{1 - x^3}$ για κάθε $x > 1$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 2)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$. Να

βρείτε τα όρια : i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Θέτω $g(x) = \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5}$, με $x \neq -5$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 7$

$$\text{Έχω : } g(x) = \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} \Leftrightarrow g(x)(x + 5) = xf(x) + 2x - 3 \Leftrightarrow xf(x) = g(x)(x + 5) - 2x + 3 \Leftrightarrow$$

Για $x \neq 0$ $f(x) = \frac{g(x)(x + 5) - 2x + 3}{x}$, κοντά στο $+\infty$, άρα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(x + 5) - 2x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[g(x) \left(1 + \frac{5}{x} \right) - 2 + \frac{3}{x} \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) \left(1 + \frac{5}{x} \right) - 2 + \frac{3}{x} \right] = 7 \cdot 1 - 2 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(x + 5) - 2x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(x + 5) - 2x + 3}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[g(x) \left(1 + \frac{5}{x} \right) - 2 + \frac{3}{x} \right]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) \left(1 + \frac{5}{x} \right) - 2 + \frac{3}{x}}{x} = \left(\frac{5}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

32) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 6x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4} = 4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ (Απ. 10)

33) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 7)

34) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. 3)

35) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^3}{x^3 + x^2 + 1} = 3$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ (Απ. 5)

36) Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$. (Απ. $\lambda = -9$)

37) Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 3$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1$.

38) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, όταν : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x\eta\mu \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 2$.

39) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (Απ. 5)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \alpha x^2 + 3x}{xf(x) - x^2 + 13} = 3$ (Απ. 7)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΟΡΙΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 :** Ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ **Γενικά :**

- Αν $\alpha > 1$ τότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$
- Αν $0 < \alpha < 1$ τότε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$

Συχνά : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ **ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

40) Να βρεθούν τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 2014 - e^x - 5x^2)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^4+5}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$
- v. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-3)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x^2 - 5x + 6))$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$
- viii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - e^{\frac{1}{x}} \right)$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 2019 - e^x + 5x^2) = -\infty$

ii. Θέτουμε $u = x^4 + 5$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^4+5} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$.

iii. Θέτουμε $u = \frac{x-2}{x^3+5}$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$.

iv. Θέτουμε $u = \frac{\ln x}{x}$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{-\infty}{0}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

v. Θέτουμε $u = x - 3$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow 3^+} u = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$

vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x + 1) - \ln(x^2 - 5x + 6)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

Θέτουμε $u = \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6}$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$

vii. Θέτουμε $u = \sqrt{x^2 + 1} + x$, έτσι :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} \stackrel{x < 0}{\text{αφ'ότ}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$

viii. Θέτουμε $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$, έτσι : $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{u} - e^u \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln 1 - \ln u - e^u) = -\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

41) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + e^x + x^2)$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x - 2011) + x^5 + \sqrt{x - 2} + e^x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + e^x)$ (Απ. $-\infty$)

iv. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x^{2013} + 2013)$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e^x - x^2) + x^5 + \sqrt{x + 4})$ (Απ. 2)

vi. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(x - 2) + x^3 + \sqrt{x - 2})$ (Απ. $-\infty$)

vii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + 2x^2 - \ln(1 - x))$ (Απ. $+\infty$)

viii. $\lim_{x \rightarrow 5^-} (e^{x-4} + 2x^2 + 2 \ln(5 - x))$ (Απ. $-\infty$)

ix. ****** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 - 2x) - 2 \ln(x + 1))$

x. ****** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x + 3) - \ln(x^2 + 3x))$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

- Αν έχω μια εκθετική π.χ. μόνο e^x , τότε τη βγάζω κοινό παράγοντα.
- Αν έχω 2 ή περισσότερες εκθετικές, τότε βγάζω κοινό παράγοντα αυτή με τη μεγαλύτερη βάση αν $x \rightarrow +\infty$. Αν $x \rightarrow -\infty$ κοινό παράγοντα βγάζω την εκθετική με τη μικρότερη βάση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

42) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 1}{e^x + 2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 3^x}{e^{x+2} + 3^{x+1}}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 3^x}{e^{x+2} + 3^{x+1}} =$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 1}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot e + 1}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(e + \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = \frac{e + 0}{1 + 0} = e$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + 3^x}{e^{x+2} + 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot e + 3^x}{e^x \cdot e^2 + 3^x \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(\frac{e^x}{3^x} e + 1 \right)}{3^x \left(\frac{e^x}{3^x} e^2 + 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(\frac{e^x}{3^x} e + 1 \right)}{3^x \left(\frac{e^x}{3^x} e^2 + 3 \right)} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e}{3} \right)^x \cdot e + 1}{\left(\frac{e}{3} \right)^x \cdot e^2 + 3}, \text{ επειδή } 0 < \frac{e}{3} < 1, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{3} \right)^x = 0, \text{ άρα θα είναι :}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{e}{3} \right)^x \cdot e + 1}{\left(\frac{e}{3} \right)^x \cdot e^2 + 3} = \frac{0 \cdot e + 1}{0 \cdot e^2 + 3} = \frac{1}{3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 3^x}{e^{x+2} + 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot e + 3^x}{e^x \cdot e^2 + 3^x \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \left(e + \frac{3^x}{e^x} \right)}{e^x \left(e^2 + \frac{3^x}{e^x} \cdot 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e + \left(\frac{3}{e} \right)^x}{e^2 + 3 \left(\frac{3}{e} \right)^x}$

επειδή $\frac{3}{e} > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{e} \right)^x = 0$, άρα θα είναι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e + \left(\frac{3}{e} \right)^x}{e^2 + 3 \left(\frac{3}{e} \right)^x} = \frac{e + 0}{e^2 + 3 \cdot 0} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

43) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x + 5}{3^x + 2^{x+1} + 2}$ (Απ. 1)

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} + e^x - 2}{e^x + e^{x+1} + 1}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 3^x}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x}$
- v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 3^x + 1}{8^x + 5^x + 1}$
- vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 2}$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}$ (Απ. -4)
- viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - \alpha^x}{2^x + 3\alpha^x}, \alpha > 0.$
- ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3\lambda^{x+1}}{2^x + \lambda^x}, \lambda > 0.$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{\frac{1}{x}}$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)}$

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - \eta \mu x)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- ii. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)}$$

46) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ όταν :

- i. $f(x) \geq x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) > \eta \mu x + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

47) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ όταν :

- i. $(1 + x^2) f(x) \leq x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(x) + x^2 - e^x < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.7

ΘΕΜΑ 2 #23641

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

(Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)