1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

15 .Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση :

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

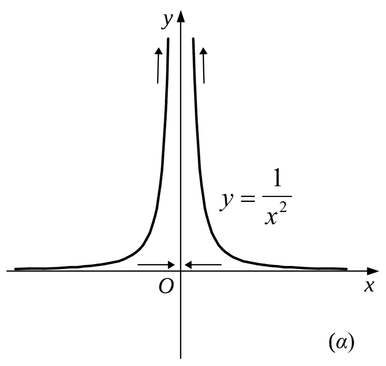
δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

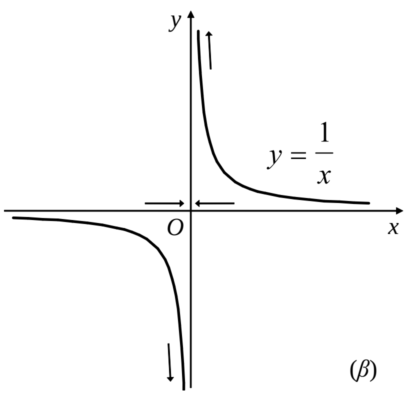
ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ)Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in N^*$ (σχήμα α)





ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in N$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in N$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και γενικά της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$. (σχήμα β)

16 . Να γράψετε τα Θεωρήματα του άπειρου ορίου στο x_o

Απάντηση :

Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in R$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in R$	$\alpha \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in R$,										
το όριο της f είναι:	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Πράξεις στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

(Με βάση τις ιδιότητες των απείρων ορίων, επεκτείνουμε τις πράξεις του $\Re$ *στο σύνολο* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*)*

- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ και $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
- $(+\infty)+\alpha=+\infty$ και $(-\infty)+\alpha=-\infty$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ και $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ και $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$
- $\alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu \ \ \alpha>0\\ -\infty, & \alpha\nu \ \ \alpha<0\end{cases}$ και $\alpha\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & \alpha\nu \ \ \alpha>0\\ +\infty, & \alpha\nu \ \ \alpha<0\end{cases}$
- $\dfrac{\alpha}{\pm\infty}=0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι :
$\mathbf{(+\infty)+(-\infty)}$ και $\mathbf{0\cdot(\pm\infty)}$.

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι : $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Για παράδειγμα :

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$ ***(2018 Β΄)***

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Με το συμβολισμό $\frac{\alpha}{0}$ εννοούμε ότι έχουμε όριο της μορφής $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\Re$. Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο όριο εργαζόμαστε ως εξής :

1) παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\cdot''\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha''\right)$ (1)

2) υπολογίζω το όριο του περισσεύματος

3) υπολογίζω το $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)$

α) αν $(x-x_0)^\nu>0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)=+\infty$

β) αν $(x-x_0)^\nu<0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)=-\infty$

γ) αν $(x-x_0)^\nu$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων και διαπιστώνουμε ότι το $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\right)$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά θα είναι το ένα $+\infty$ και το άλλο $-\infty$.

4) Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ από την (1) εκτελώντας τις πράξεις.

Συμπέρασμα : όριο της μορφής $\frac{\alpha}{0}$ είναι είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν υπάρχει.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 σελ. 180 σχολικό βιβλίο)

Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ ii. $\lim_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}$

Λύση

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)$ έχω :

$\lim_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο $x_0=1$, άρα $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$

$\lim_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$. Άρα $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)=+\infty\cdot 2=+\infty$

ii. $\lim_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}\overset{\frac{-4}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)$ έχω :

$\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο $x_0=2$, άρα $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

$\lim_{x\to 2}(-3x+2)=-4$. Άρα $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)=+\infty(-4)=-\infty$

2) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 σελ. 181 σχολικό βιβλίο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 2}f(x)$.

Λύση : $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)$

$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ αλλά το $x-2$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=2$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ τότε $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ και $\lim_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=+\infty\cdot 3=+\infty$

- Αν $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ τότε $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ και $\lim_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=-\infty\cdot 3=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα αφού $\lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$

  Άρα το $\lim_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει.

3) Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+2}{16-x^2}$

Λύση :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x+2}{16-x^2} \overset{\frac{6}{0}}{=} \lim_{x \to 4} \frac{x+2}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x \to 4}\left(\frac{1}{4-x} \cdot \frac{x+2}{4+x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 4}(4-x)=0$ αλλά το $4-x$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=4$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$ τότε $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{4-x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+2}{4+x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

  άρα $\lim\limits_{x \to 4^-}\left(\dfrac{1}{4-x} \cdot \dfrac{x+2}{4+x}\right)=+\infty \cdot \dfrac{3}{4}=+\infty$

- Αν $4-x<0 \Leftrightarrow x>4$ τότε $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{4-x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{4+x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

  άρα $\lim\limits_{x \to 4^+}\left(\dfrac{1}{4-x} \cdot \dfrac{x+2}{4+x}\right)=-\infty \cdot \dfrac{3}{4}=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα άρα το $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+2}{16-x^2}$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x}{(x-4)^4}$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$ (Απ. $+\infty$)

iii. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2 \cdot (x+3)}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x|-3}{|x-2|}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+4}{x^2+6x+9}$ (Απ. $+\infty$)

vi. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-1}{x^3-2x^2+x}$

vii. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{x\eta\mu x}$

viii. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x+2}{|\eta\mu x|-|x|}$

ix. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x-1}{x-\eta\mu x}$

x. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{x^2-\eta\mu^2 x}$

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (Απ. $+\infty$)

6) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-2x-3}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. (Απ. Δεν υπάρχει)

7) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

i. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$ ii. $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

8) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν :

i. $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$ ii. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii. $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

9) Να βρεθούν αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-3}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{x^2-4}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

v. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{\eta\mu x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+10}{x^2+2x-3}\right)$

10) Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

11) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\dfrac{\pi}{2}$.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Ζητείται πλήρης διερεύνηση για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων. Όπως και στα μη παραμετρικά παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\cdot\text{"}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha\text{"}\right)$ και υπολογίζω το όριο για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$. (Διερεύνηση)

Λύση :

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x(x^2+2x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)$$

Έχω $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x}=\frac{-2-\lambda}{-1}=\lambda+2$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, γι' αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda>-2$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=+\infty$
- Αν $\lambda+2<0\Leftrightarrow\lambda<-2$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=-\infty$
- Αν $\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2$, τότε $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+2}{x^3+2x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{x(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2}{x(x+1)}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$

  $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2}{x}=-2$

  $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$ αλλά το $x+1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=-1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

  - Αν $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=+\infty\cdot(-2)=-\infty$
  - Αν $x+1<0\Leftrightarrow x<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=-\infty\cdot(-2)=+\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

13) (Άσκηση 3 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ Ομάδας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να υπάρχει στο $\Re$ το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Λύση :

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}\right)$$

Έχω $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}=\dfrac{\lambda-2}{2}$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, για αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}>0 \Leftrightarrow \lambda-2>0 \Leftrightarrow \lambda>2$, τότε : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$
  - Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}<0 \Leftrightarrow \lambda-2<0 \Leftrightarrow \lambda<2$, τότε : $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\infty$
  - Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\dfrac{\lambda-2}{2}=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{3}{2}\in\Re$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει στο $\Re$ μόνο αν $\lambda=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

14) Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+\lambda}{|x-2|}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x^2+x-3}{x-1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lambda x^2+\mu x-3}{x-1}$

15) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+\alpha x+1}=+\infty$, να βρεθεί το α .

16) Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x^2+\alpha x-\alpha+3}=-\infty$, να βρεθεί το α .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17) (Άσκηση 4 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$

Λύση :

i. Έστω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$, έχω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)}\Leftrightarrow g(x)f(x)=x-4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-4}{g(x)}$, κοντά στο 1, ($g(x)\neq 0$ κοντά στο $x_0=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{g(x)}=\dfrac{-3}{+\infty}=0$

ii. Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-\infty$, έχω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2}\Leftrightarrow f(x)=h(x)(x+2)$

, κοντά στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[h(x)(x+2)]=-\infty\cdot 3=-\infty$

iii. Έστω $\phi(x)=f(x)(3x^2-2)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\phi(x)=+\infty$

$\phi(x)=f(x)(3x^2-2)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}$, κοντά στο 1, $(3x^2-2\neq 0$ κοντά στο $x_0=1)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Έστω συνάρτηση $f(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot \eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Απ. $-\infty$)

19) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{f(x)}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{f(x)\eta\mu^2 x}$

20) **Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^2-2x+1)f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f^2(x)-3f(x)-5}{f^2(x)+f(x)-4}$ (Απ. 2)

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-2f(x)+3}{f^2(x)-3f(x)-1}$ (Απ. $-\infty$) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+4}{f^3(x)-2f^2(x)+1}$ (Απ. 0)

21) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-6x+9)f(x)\right]=5$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6f^2(x)-7f(x)+8}{3f^2(x)+f(x)-1}$

22) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(x)}{\sqrt{x+4}-2}=-3$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-5f(x)+3}{f^3(x)+2f^2(x)-7}$

23) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{f(x)-2}=+\infty$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)-2\right)}{f^2(x)-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-4}{f^2(x)-4f(x)+4}$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|3-xf(x)|-|2f(x)-3|}$. (**υποδ.** αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0) (Απ. 0)

25) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)+x|-|x-4|}{f^2(x)+3f(x)-5}$. (Απ. 0)

26) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)}{x-3}=+\infty$.Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f^2(x)+3f(x)\right]$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)+5f(x)|+f^2(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+1}$ (Απ. 2) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)}$ (Απ. 0) v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x) \le g(x)$

➢ Αν ισχύει $f(x) \ge g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Αποδ.

Είναι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι $g(x) > 0$. Από τη σχέση $f(x) \ge g(x)$ προκύπτει ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Έτσι κοντά στο x_0 έχουμε : $f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{g(x)}$. Όμως $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα είναι : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty$, διότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} > 0$ κοντά στο x_0.

➢ Αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Αποδ. (Όμοια με παραπάνω)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$. για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Λύση :

Για x κοντά στο 2 έχουμε :

$$(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow f(x) \le \frac{x-5}{(x-2)^2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-5}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\left[(x-5)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right] = -3\cdot(+\infty) = -\infty$$ καθώς :

- $\lim_{x\to 2}(x-5) = -3 < 0$
- $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$ και $(x-2)^2 > 0$ κοντά στο 2,

άρα από (1) προκύπτει ότι : $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \le -\frac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

29) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \ge \frac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

30) Αν $x^2 f(x) + 1 \le 0$, για κάθε $x \ne 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2+6x+9)f(x)\geq x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x)\geq x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-2010)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$ (Απ. 1)

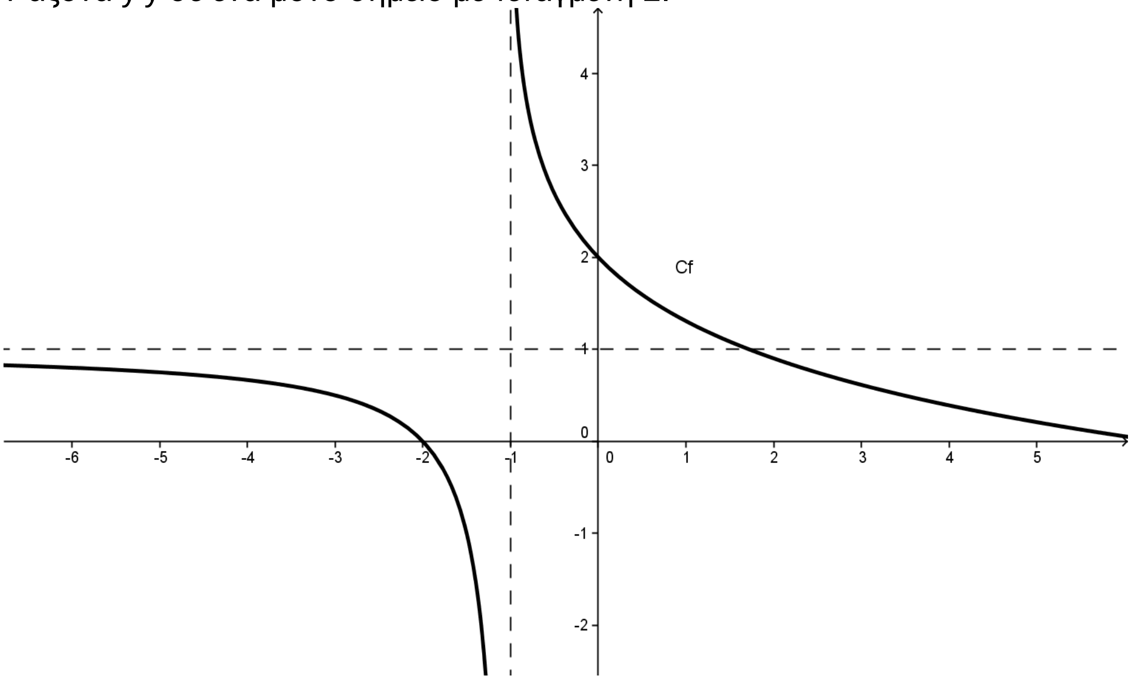
33) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^4 f(x)\leq (x-2)\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

iii. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+7}$ (Απ. 0)

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.6

ΘΕΜΑ 2 #23314

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα y’y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x\to 0} f(x)$

ii) $\lim_{x\to -2^{+}} f(x)$

iii) $\lim_{x\to -2^{-}} f(x)$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x\to -2^{+}} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x\to -2^{-}} ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2 #23217

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x\to 1^{+}} f(x)$ (Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x\to 1} g(x)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ (Μονάδες 4)

ii.το $\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$. (Μονάδες 6)