

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

A. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Η συνάρτηση αυτή

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ και γράφεται

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1.$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = x+1$ με εξαίρεση το σημείο $A(1,2)$ (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

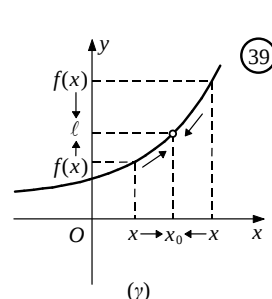
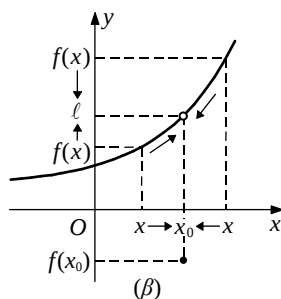
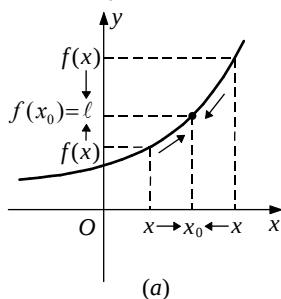
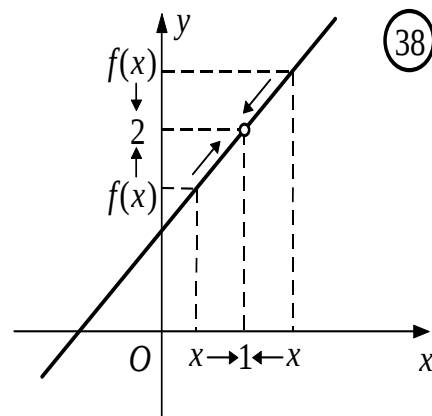
“Καθώς το x , κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον

πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x \neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1”.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ και διαβάζουμε “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2”.

Γενικά : Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ και διαβάζουμε “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ℓ ” ή “το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ ”.



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι :

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής :

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (a, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

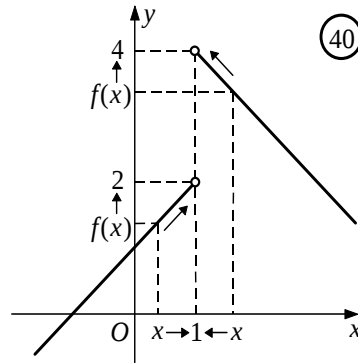
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ’ αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

B. ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ -x+5, & x > 1 \end{cases}$,

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι :

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x < 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x > 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Γενικά :

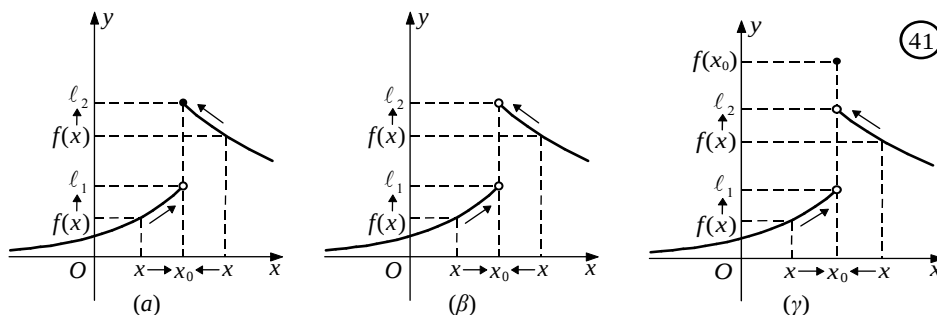
— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε : “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1 ”.

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε :

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$ και διαβάζουμε : “το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2 ”.



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0 , ενώ το ℓ_2 **δεξιά όριο** της f στο x_0 .

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

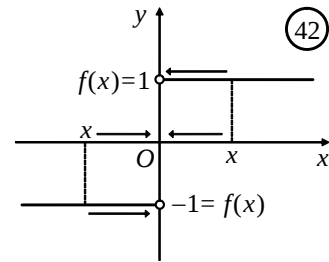
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, και έτσι

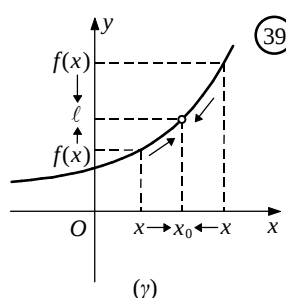
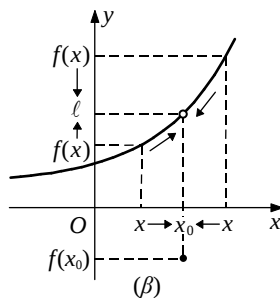
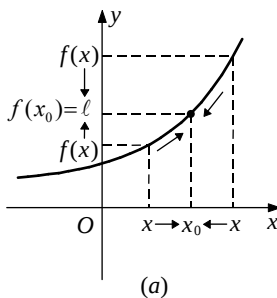
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



12. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_0 και τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ;

Απάντηση :

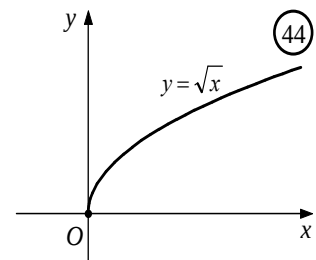
Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$



(39)

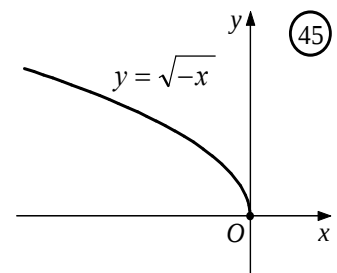
• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) , τότε ορίζουμε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ (Σχ. 44)



• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , τότε ορίζουμε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$ (Σχ. 45)



Παρατηρήσεις :

α) Ισχύει ότι :

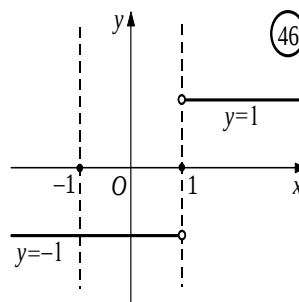
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ h \rightarrow 0}} f(x_0 + h) = \ell$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

β) Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f .

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$. Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.



γ) Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο** x_0 μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

- i) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .
- ii) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .
- iii) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι **θετική κοντά στο** $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και είναι **θετική** σε αυτό.

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

13. Να γράψετε τις ιδιότητες του ορίου στο x_0 .

Απάντηση :

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

β) **Θεώρημα 1ο** (πράξεις συναρτήσεων και όρια)

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ για κάθε σταθερά } k \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Παρατηρήσεις :

- Οι ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Τα αντίστροφα των ιδιοτήτων 1., 2., 3., 4., 5. Δεν ισχύουν πάντα. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ και να μην υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 .

Για παράδειγμα : $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$. Προφανώς τα όρια των f και g στο 0 δεν υπάρχουν, όμως

$$\triangleright (f + g)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} (0 \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

γ) Είναι : $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$ για παράδειγμα $\lim_{x \rightarrow x_0} x^v = x_0^v$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

δ) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

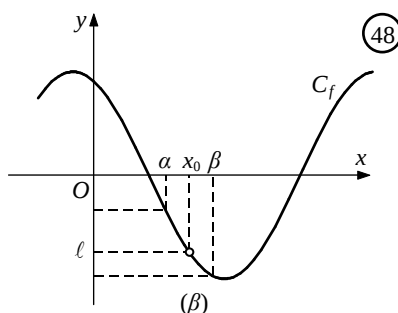
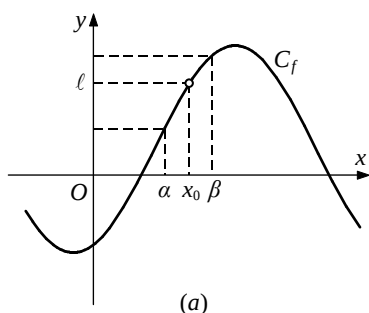
$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

ε) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$

με $Q(x_0) \neq 0$. Θα είναι τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0) \neq 0$

στ) Θεώρημα 2^ο (πρόσημο συναρτήσεων και όρια)

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

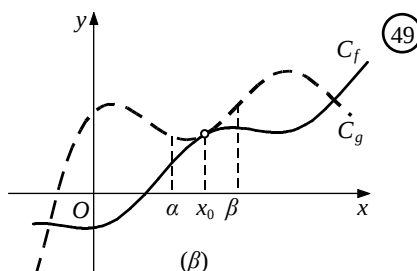
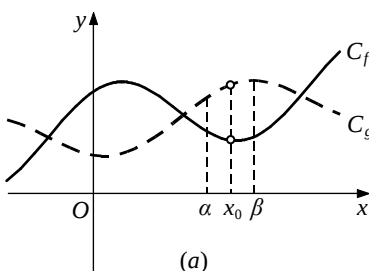


Παρατήρηση :

- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$

ζ) Θεώρημα 3ο (διάταξη και όρια)

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$



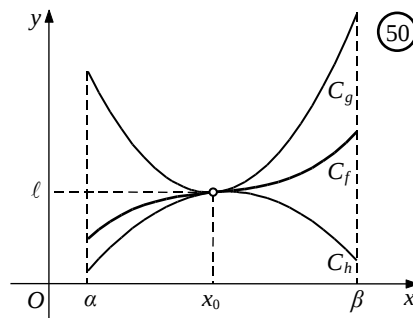
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παρατήρηση : Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

- Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 .

η) Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι “κοντά στο x_0 ” μια συνάρτηση f “εγκλωβίζεται” (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g . Αν, καθώς το x τείνει στο x_0 , οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ . Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



Κριτήριο παρεμβολής (2016 Β', 2021)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$ Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

θ) Ισχύει ότι (τριγωνομετρικά όρια)

- $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

14. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0 .

Απάντηση :

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , δηλαδή το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

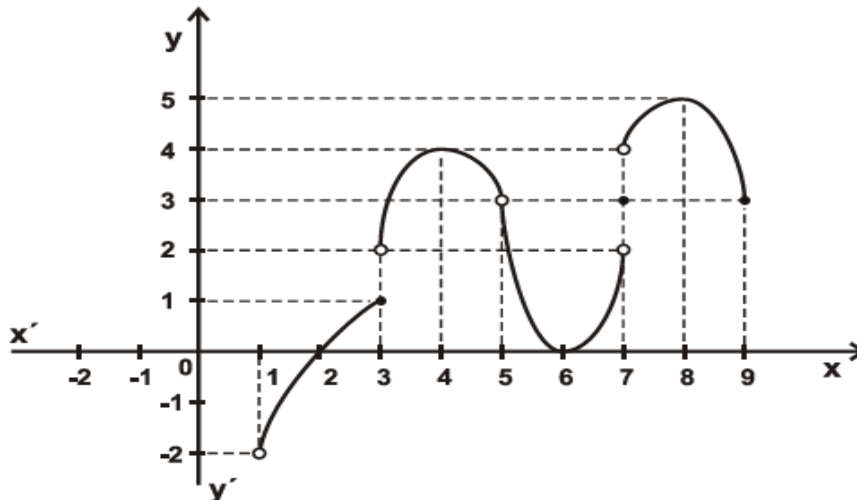
Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Θέμα Β 2016Β)



- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και τις τιμές της f :
 α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $f(3)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$, $f(7)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
 Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση :

- Το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = (1, 5) \cup (5, 9]$, ενώ το σύνολο τιμών της f είναι : $f(A_f) = (-2, 5]$.
- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$.
 β) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ άρα $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ επομένως το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(3) = 1$.
 γ) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$.
 δ) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4$ άρα $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x)$ επομένως το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(7) = 3$.
 ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = 3$

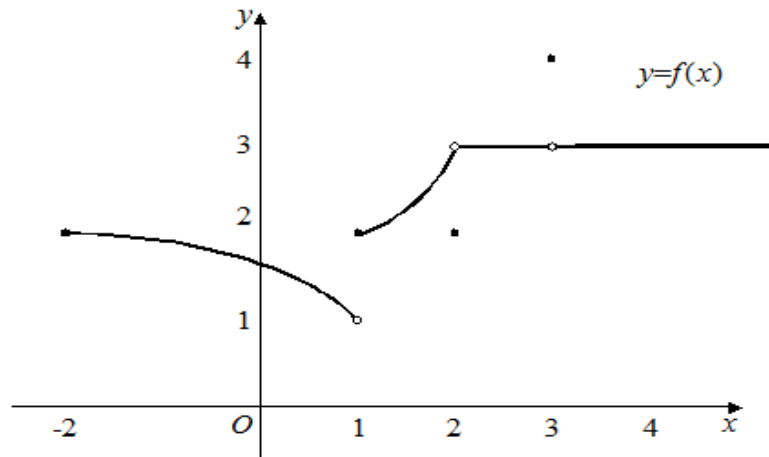
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

- $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x_0 = 2$
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$
- $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$
- $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0 = 0$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια
α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Για να υπολογίσουμε ένα όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, αρχικά θέτω όπου x το x_0

Περίπτωση 1^η Αν το αποτέλεσμα είναι αριθμός $l \in \mathbb{R}$ τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Περίπτωση 2^η Αν μετά την αντικατάσταση προκύψει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, τότε παραγοντοποιώ αριθμητή και παρανομαστή με σκοπό να απλοποιηθεί ο παράγοντας της μορφής $x - x_0$

Περίπτωση 3^η Αν έχουμε όριο άρρητης συνάρτησης (που περιέχει ρίζες) και προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου ή των όρων που περιέχει ρίζα

Περίπτωση 4^η Αν προκύψει $\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\beta}{\alpha}$ τότε κάνω ομώνυμα τα κλάσματα και προκύπτει όριο της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε και εργαζομαι όπως παραπάνω.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ :

- **Κοινός παράγοντας :** Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες.
- **Ταυτότητες :** Συνήθως χρησιμοποιούμε τις Ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$
- **Τριώνυμο :**

Αν $\Delta > 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$

Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.
- **Σχήμα Horner :** Δόκιμη κάνω πρώτα με το x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 1^η

4) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 6x + 2013)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 7x^2 + 28)$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 6x + 2013) = 1^5 - 6 \cdot 1 + 2013 = 1 - 6 + 2013 = 2008$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{4^2 + 9} = 5$

iii. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 7x^2 + 28) = (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 28 = -8 - 28 + 28 = -8$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 2^η

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)^2 - 4^2}{x^3 - 2^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x^2 + 4)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+1)} = \frac{1}{2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+1)} = \frac{1}{2}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 3^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3-3)[(x+3)^2 + 3(x+3) + 3^2]}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 9)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 9}{1} = 27$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 3^η

6) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

Λύση :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3 + \sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x^2+5-9)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} + 3}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 4^η

7) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

$$\begin{aligned} \text{Λύση : } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} - \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

8) Έστω για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) + |g(x)| + f(x) \cdot g^2(x))$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

9) Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ αν:

i. $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$

ii. $g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1}$

iii. $g(x) = (f(x) + 2)(f(x) - 3)$.

10) Να εξετάσετε αν είναι καλώς ορισμένα τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow -1} (\ln x)$

11) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow e} [\ln(x^2 - ex + 1)]$

iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\varepsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu^2 x)$

12) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 - 9x}$

13) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{2x^2 - x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^2 + x - 6}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$

v. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{(2x - 1)^3 - 1}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

vi. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$

vii. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} \right)$

viii. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

14) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x - 3}$

v. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{1 - \sqrt{x-2}}$

15) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x + \sqrt{x^2 + 8}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x - 3}{6x^2 - x - 1}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2-2x}}{\sqrt{3x+7} - 2\sqrt{x+2}}$

16) Να λυθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{3-x}}{x^3 - 4x}$ υποδ. όταν έχω $\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}$, τότε η συζυγής παράσταση είναι $\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)} \cdot \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g(x)}^2$ δηλ.
 $(\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}) \cdot (\sqrt[3]{f(x)}^2 + \sqrt[3]{f(x)} \cdot \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g(x)}^2) = \sqrt[3]{f(x)}^3 - \sqrt[3]{g(x)}^3 = f(x) - g(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt[3]{x+6} - 2}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt[3]{9-x} - 1}{x^2 - 1}$ υποδ. όταν έχω παράσταση της μορφής $\sqrt[k]{f(x)} \pm \sqrt[l]{g(x)} \pm \lambda$, τότε διασπάμε τον αριθμό λ σε δυο αριθμούς (Οι αριθμοί αυτοί είναι αντίθετοι των τιμών που θα προκύψουν από τις $\sqrt[k]{f(x)}$ και $\sqrt[l]{g(x)}$, αν θέσουμε σ' αυτές όπου x το x_0). Στη συνέχεια χωρίζουμε το κλάσμα σε 2, όπου κάθε κλάσμα περιέχει μια

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ρίζα και ένα αριθμό και τέλος υπολογίζουμε το όριο κάθε κλάσματος πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη συζυγή παράσταση.

iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x} - 5}{x^2 - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} - 5}{x^2 - 25}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - \sqrt{3} - 2}{x - 1}$

vii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ υποδ. όταν έχω στο ίδιο όριο $\sqrt[n]{f(x)}, \sqrt[m]{f(x)}$ (δηλ. ριζικά διαφορετικών

τάξεων με το ίδιο υπορίζο) τότε θέτω $\sqrt[n]{f(x)} = y$ όπου y είναι το Ε.Κ.Π. των n, m .

viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}$

ix. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} + 3\sqrt[3]{x-2} - 4}{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[6]{x-2}}$

x. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt[3]{x^2-x+6}}{x-2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

2Α) Το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι ίσα, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$. Αν τα

πλευρικά όρια μιας συνάρτησης είναι διαφορετικά, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, τότε

λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0 .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)(Άσκηση 5 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρεθεί (αν υπάρχει), το όριο της $f(x)$ στο x_0 αν :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases}$ και $x_0 = 1$ ii. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ x^2 + 1, & x \geq -1 \end{cases}$ και $x_0 = -1$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 5x = 5$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ και άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x) = 2$. Άρα $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$, άρα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

και μάλιστα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda^2 + 8$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 5\lambda + 2$, να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 .

19) Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

20) Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-9}{x-5}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2}, & x > 1 \end{cases}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 9x}, & x > 3 \\ \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 9x}, & 0 < x < 3 \end{cases}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}, & -1 < x < \sqrt{2} \\ x - 1, & \sqrt{2} < x < 2 \end{cases}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x < 2 \\ \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - 1}, & x > 2 \end{cases}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3B) ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21) (Άσκηση 9 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες

ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

Λύση :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 10$$

$$\text{Έχω : } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 10 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} (\alpha x + 3\beta) = 10 \Leftrightarrow 3\alpha + 3\beta = 10 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 10 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} (2\alpha x + \beta) = 10 \Leftrightarrow 6\alpha + \beta = 10 \quad (2)$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τις (1) και (2) $\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 10 \cdot (-2) \\ 6\alpha + \beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\alpha - 6\beta = -20 \\ 6\alpha + \beta = 10 \end{cases}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχω :

$$-5\beta = -10 \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ και αντικαθιστώντας στην } 1^{\eta} \ 3\alpha + 6 = 10 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 - x + a - 1, & x \geq 2 \\ (a+1)x - 1, & x < 2 \end{cases}$ όπου a πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το a ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ 3x + 1, & 1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα a, β ώστε να υπάρχουν συγχρόνως τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΡΦΗ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΟΡΙΟΥ (ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ)

Σε αυτή τη μεθοδολογία βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 2^ο που λέει ότι :

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Έστω ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ οδηγεί σε μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και περιέχει όρους της μορφής $|g(x)|$.

- Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ είναι θετικό ή αρνητικό, τότε θεωρούμε αντίστοιχα $g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$ κοντά στο x_0 και απαλλασσόμαστε από την παρουσία των απολύτων.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, τότε με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο της $g(x)$ και εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

24) Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|} + 1 - 1}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1}$$

Λύση :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} \text{ Έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 2 > 0 \text{ άρα το } x-1 > 0 \text{ όταν το } x \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-5) = -2 < 0 \text{ άρα το } x-5 < 0 \text{ όταν το } x \rightarrow 3$$

$$\text{Άρα : } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-1) + 3(x-5) + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-2+3x-15+2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x-15)(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})}{x-1-5+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(x-3)(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5(\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|} + 1 - 1} \text{ Έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0 \text{ άρα :}$$

x	$-\infty$	4	
x-4	-	0	+

- Αν $x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$ δηλ. όταν $x \rightarrow 4^+$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x-4} + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(\sqrt{x-3} + 1)}{(\sqrt{x-3} - 1)(\sqrt{x-3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(\sqrt{x-3} + 1)}{x-4} = 2$$

- Αν $x-4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$ δηλ. όταν $x \rightarrow 4^-$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x-4)}{\sqrt{-(x-4)} + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{\sqrt{4-x} + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(\sqrt{5-x} + 1)}{(\sqrt{5-x} - 1)(\sqrt{5-x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(\sqrt{5-x} + 1)}{4-x} = 2. \text{ Άρα αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα}$$

$$\text{τότε : } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|} + 1 - 1} = 2$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1} \text{ Έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 0$$

$$\text{Έχω } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ ή } x = 2 \text{ επίσης } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } x = 1$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+		+	0	-	0	+
$x^2 - x$	+	0	-	1	+		+

- Αν $x > 1$ δηλ. όταν $x \rightarrow 1^+$ τότε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3x - 2 + x - 1}{x^2 - x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = 1\end{aligned}$$

- Αν $x < 1$ δηλ. όταν $x \rightarrow 1^-$ τότε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2 + x - 1}{-(x^2 - x) + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x + x - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{-x^2 + 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{-(x-1)^2} = -1\end{aligned}$$

Άρα αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2| + x - 1}{|x^2 - x| + x - 1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

25) Να υπολογιστούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x + 2| + |x + 3| - 8}{|x^2 + x| - x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 3| - |x - 1|}{x^2 - 2x}$

26) Να υπολογιστούν τα όρια :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + x^2 - 4}{|x - 5| - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9| + |x - 3|}{|x + 2| - 5}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| + x^2 - x}{|x^2 + 2x - 3| - x + 1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5Α) Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) (Άσκηση 4 σελ. 176 σχολικό βιβλίο Β' ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν :

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$

Λύση :

i. Έστω $4f(x) + 2 - 4x = g(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -10$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $4f(x) + 2 - 4x = g(x) \Leftrightarrow 4f(x) = g(x) + 4x - 2 \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{g(x) + 4x - 2}{4}$, κοντά στο 1, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4x - 2}{4} = \frac{-10 + 4 - 2}{4} = -2$

ii. Έστω $\frac{f(x)}{x-1} = h(x)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $\frac{f(x)}{x-1} = h(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)h(x)$, κοντά στο 1,

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)h(x)) = (1-1) \cdot 1 = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

28) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - x^2 + x - 5) = 7$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

29) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)f(x) - x^2 + 1}{1 - \sqrt{x}} = 10$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

30) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2}$.

31) Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + x^2 - x + 2) = 3$, να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{f^2(x) - 1} = 2.$$

32) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 3x + 2} = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x))$.

33) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf^2(x) - 2x + 2}{x^2 - 1} = -1$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

34) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 2} [xf(x) + x^2 - 8] = 6$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5f(x)}{\sqrt{f(x)} - 1 - 2}$

35) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 5}{x^2 - 4} = 2$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - 3}{x^2 - 6x + 8}$

36) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 4$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - xf(x) + 2x}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} - 2)}$

5B) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

37) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x - 1} = 4$

38) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 2x} = 3$

39) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} = 2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, ΤΟΤΕ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Σε περιπτώσεις που η εύρεση του $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν ανάγεται σε καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις (π.χ, δεν γνωρίζουμε τον τύπο της ή έχουμε ανισωτικές σχέσεις) τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Ιδιαίτερα η ύπαρξη διπλής ανισότητας της μορφής $A(x) \leq B(x) \leq \Gamma(x)$ είναι χαρακτηριστική για εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής. Επίσης η ανισότητα της μορφής : $|A(x)| \leq B(x)$ γράφεται : $-B(x) \leq A(x) \leq B(x)$ οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κριτήριο παρεμβολής

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

- $4x^2 + 6x - 2 \leq f(x) - 3 \leq 5x^2 + 2x + 2$, $x_0 = 2$
- $2x^3 - 8x \leq (x - 2)f(x) \leq 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$

Λύση :

- $4x^2 + 6x - 2 \leq f(x) - 3 \leq 5x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 1 \leq f(x) \leq 5x^2 + 2x + 5$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 6x + 1) = 29$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 2x + 5) = 29$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής (κ.π.) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 29$

- $2x^3 - 8x \leq (x - 2)f(x) \leq 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

Για να απομονώσω στη μέση την $f(x)$ και να εφαρμόσω κ.π., πρέπει να διαιρέσω κάθε μέλος με το $x - 2$. Διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ δηλ. όταν $x \rightarrow 2^+$ τότε :

$$2x^3 - 8x \leq (x - 2)f(x) \leq 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 8x}{x - 2} \leq f(x) \leq \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3 - 8x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(3x^2 + 4)}{x - 2} = 16 \quad \text{Άρα από κ.π.} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 16 \quad (1)$$

- Αν $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ δηλ. όταν $x \rightarrow 2^-$ τότε :

$$2x^3 - 8x \leq (x - 2)f(x) \leq 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 8x}{x - 2} \geq f(x) \geq \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x - 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x - 2} \leq f(x) \leq \frac{2x^3 - 8x}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(3x^2 + 4)}{x - 2} = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - 8x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 16$$

Άρα από κ.π. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 16$ (2). Από (1) και (2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

41) Αν $|f(x) - 3x + 5| \leq x^2$ για κάθε $x \neq 0$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

42) Αν $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

43) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x - x^2 \leq f(x) \leq x$. Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $4x^2 - 13 \leq (x - 2)f(x) + 3 \leq x^4 - 4x^2 + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

45) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αν: $2x^2 + 7x + 2 \leq \frac{f(x) - 8}{f(x) + 2} \leq 3x^2 + 5x + 3$, $x_0 = 1$

46) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι: $4\sqrt{x} \leq f(x) \leq x + 4$ να βρεθούν:

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$	ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x - 4}$	iii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{\sqrt{x + 5} - 3}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 64}{x - 4}$	v. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - 3}{x - 4}$	vi. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ f(x) - 5 - 3}{x^2 - 5x + 4}$

47) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

48) Δίνονται 2 συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) + g^2(x)] = 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

49) Δίνονται 2 συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow x_0} [5f(x) + 2g(x)] = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΑΝΙΣΟΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

1^η Περίπτωση :

Σε αυτήν την κατηγορία ασκήσεων, βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 3^ο που λέει ότι :

- Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(Σχόλιο : το παραπάνω Θεώρημα ισχύει και όταν $f(x) < g(x)$)

2^η Περίπτωση :

Σε αυτή την περίπτωση ασκήσεων συναντάμε ανισοτικές σχέσεις με $f^2(x)$ και $f(x)$, όπου εργαζόμαστε με συμπλήρωση τετραγώνου και στη συνέχεια με κριτήριο παρεμβολής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1^η Περίπτωση

50) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει : $xf(x) + 3f(x) \leq x^2 + x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Λύση :

Το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός άρα :

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $xf(x) + 3f(x) \leq x^2 + x - 6 \Leftrightarrow f(x)(x+3) \leq x^2 + x - 6$

- Αν $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ τότε $f(x)(x+3) \leq x^2 + x - 6 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x^2 + x - 6}{x+3}$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + x - 6}{x+3} \Leftrightarrow l \leq \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l \leq -5 \quad (1)$$

- Αν $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ τότε $f(x)(x+3) \leq x^2 + x - 6 \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{x^2 + x - 6}{x+3}$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + x - 6}{x+3} \Leftrightarrow l \geq \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l \geq -5 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $l = -5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -5$.

2^η Περίπτωση

51) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει : $f^2(x) - 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f^2(x) - 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 4f(x) + 4 \leq 4 - 4\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 \leq 4\eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x) - 2| \leq 2|\eta\mu x| \Leftrightarrow -2|\eta\mu x| \leq f(x) - 2 \leq 2|\eta\mu x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2|\eta\mu x| \leq f(x) \leq 2|\eta\mu x| + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2|\eta\mu x|) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} (2|\eta\mu x| + 2) = 2, \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

- 52) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $xf(x) - 2f(x) \leq x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- 53) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $xf(x) - f(x) \leq x^2 + 2x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 54) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- 55) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) \leq 6xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ – ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8Α (ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ)

Για την εύρεση τριγωνομετρικών ορίων χρησιμοποιούμε τα εξής βασικά όρια :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\alpha x} = 1 (\alpha \neq 0)$ ή ακόμα $\lim_{\phi(x) \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \phi(x)}{\phi(x)} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha x - 1}{\alpha x} = 0 (\alpha \neq 0)$ ή ακόμα $\lim_{\phi(x) \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu \phi(x) - 1}{\phi(x)} = 0$

Η τεχνική εύρεσης είναι ίδια με αυτή που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

56) (Άσκηση 6 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right)$ v. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x^3 + x} \right)$
- vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4} - 2}$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x}$ θέτω $u = 3x$, όταν $x \rightarrow 0$ τότε $u \rightarrow 0$ άρα

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \stackrel{u=3x}{=} 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\begin{aligned}\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0} \quad \frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu 4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \frac{\eta\mu 4x}{4x}}{2x \frac{\eta\mu 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x} = \\&= \frac{4x}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x} = 2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 2\end{aligned}$$

* Θέτω $u = 4x$, όταν $x \rightarrow 0$ τότε $u \rightarrow 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{4x} \stackrel{u=4x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

Θέτω $v = 2x$, όταν $x \rightarrow 0$ τότε $v \rightarrow 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{v=2x}{=} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\eta\mu v}{v} = 1$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \eta\mu x}{x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x^3 + x} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x(x^2 + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4} = \\&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \cdot (\sqrt{5x+4}+2) \stackrel{*}{=} 1 \cdot \sqrt{4} + 2 = 4\end{aligned}$$

* Θέτω $u = 5x$, όταν $x \rightarrow 0$ τότε $u \rightarrow 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{5x} \stackrel{u=5x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

57) Να υπολογιστούν τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x}{x^2 + x}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - x}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\phi x}{x}$
- v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + x}$
- vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{x+1}-1}$
- vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

58) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ για κάθε $x \in A$. Να

υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) - f(-x)\eta\mu 2x}{3x^2 - \eta\mu^2 x}$

59) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + x\eta\mu 2x}{x^2 + \eta\mu^2 x + xf(-x)}$.

60) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - \eta\mu x}{6x - \eta\mu 3x}$

61) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + \sqrt{x+1} - 1}{\eta\mu 5x}$.

62) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+4) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3} = 5$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{\sqrt{x+5} - 2}$.

63) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 5x}{x^2 + 2x} = 4$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu 3x + x - x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

64) Δίνεται άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια :

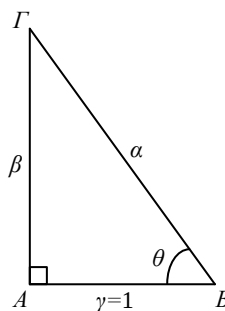
i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + \eta\mu f(x)}{x}$

65) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x + \eta\mu x} = 3$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu 3x}{x^2 - \eta\mu x}$

66) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$ ii. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$ iii. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8B (ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΕΠΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$

Η απόδειξη προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής. Πράγματι, είναι :

– $M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$ Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο.

Συμπέρασμα : (μηδενική συνάρτηση)·(φραγμένη συνάρτηση) = μηδενική συνάρτηση

Χαρακτηριστικό της περίπτωσης «μηδενική επί φραγμένη» είναι η ύπαρξη στο όριο :

$\eta\mu\frac{1}{x}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και γενικά $\eta\mu\frac{1}{g(x)}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{g(x)}$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

67) Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right)$

Λύση :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

Έχω $\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, άρα $\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xleftrightarrow{|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a} |x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ άρα από κ.π. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right)$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x) = 0$ (μηδενική) και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \leq 1$ (φραγμένη)

Άρα έχω όριο της μορφής «μηδενική επί φραγμένη»

$\left| (x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right| = |x^3 + 2x| \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right| \leq |x^3 + 2x|$, άρα

$\left| (x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right| \leq |x^3 + 2x| \Leftrightarrow -|x^3 + 2x| \leq (x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \leq |x^3 + 2x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^3 + 2x|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x^3 + 2x| = 0$

άρα από κ.π. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

68) Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^5 \eta\mu \frac{2}{x} \right) = 0$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^4 \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right) = 0$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = 0$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + 1 + x^3 \eta\mu \frac{3}{x} \right) = 1$ v. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^2 + x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

69) Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} \right)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x - x}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \right)$

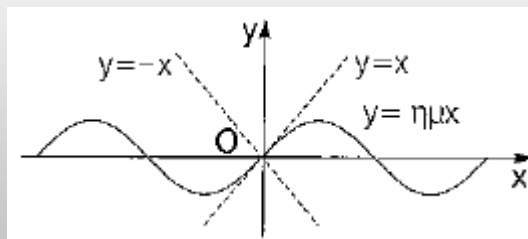
vi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $|\eta\mu x| \leq |x|$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι :

- $|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$
- $\eta\mu x < x \Leftrightarrow x > 0$
- $\eta\mu x > x \Leftrightarrow x < 0$
- $\eta\mu x < -x \Leftrightarrow x < 0$
- $\eta\mu x > -x \Leftrightarrow x > 0$



Για $x \neq 0$ (1) $\Rightarrow \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| < 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

70) Να βρείτε τα πεδία ορισμού : i. $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x - x}$ ii. $f(x) = \ln(x - \eta\mu x)$ iii. $f(x) = \sqrt{\eta\mu x + x}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

71) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 5x}{x} = 7$. Να βρείτε τα

όρια : i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)\eta\mu x + \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{xf(x) + \eta\mu^2 2x}$

72) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x}$

73) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\eta\mu x \cdot f(x) \leq 2x + \eta\mu 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

74) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x^3 \cdot f(x) \leq \eta\mu^2 3x \cdot \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) + \eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 5x}{x^2 + \eta\mu^2 3x}$

75) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x) - 1)}{f^2(x) - 1}$

76) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και

$f^3(x) - x\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x = 4f^2(x) \cdot \eta\mu x - xf(x) \cdot \eta\mu 7x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + xf(x)}{x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x+1} \cdot \eta\mu x - \eta\mu x}$

77) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $x^2 f^2(x) - 2xf(x) \cdot \eta\mu x \leq x^4 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu x + \varepsilon\phi x}{x^2 + 3x - \eta\mu 5x}$

78) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\eta\mu 2x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - \eta\mu 5x}{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}$

**ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ
1.4-1.5**

ΘΕΜΑ 2 #28477

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - 4\mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #24768

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}.$$

(Μονάδες 10)