

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση : (2007 ΟΜΟΓ., 2007 ΕΣΠ., 2010 ΕΣΠ.,)

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

- **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση : (2004 ΟΜΟΓ., 2010 Β', 2014 ΕΣΠ.)

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Κάποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f .

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1 ;

Απάντηση : (2003 ΟΜΟΓ., 2005 Β', 2012 ΟΜΟΓ., 2015 Β')

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σχόλια :

α) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:

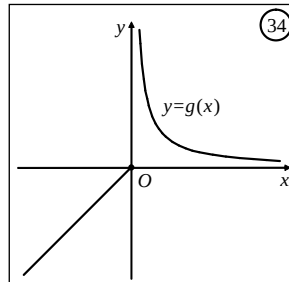
- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1-1". Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα (Πανελλήνιες 2018)

Η συνάρτηση ή συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34). είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



Παρατηρήσεις :

- Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Την ισοδυναμία αυτή τη χρησιμοποιούμε για επίλυση εξισώσεων. Επίσης ισχύει : $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$.
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 αρκεί : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Αν η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τ.ω. $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$.
- $\text{μονοτονία} \Rightarrow 1-1$ όμως $1-1 \nRightarrow \text{μονοτονία}$
- $\text{όχι μονοτονία} \nRightarrow \text{όχι } 1-1$ όμως $\text{όχι } 1-1 \Rightarrow \text{όχι μονοτονία}$

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ; (2019)

Απάντηση :

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι 1-1. Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

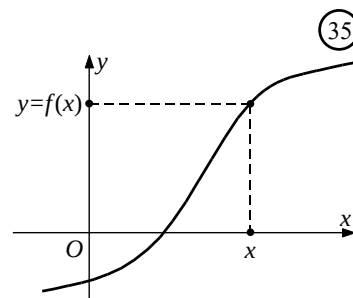
Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

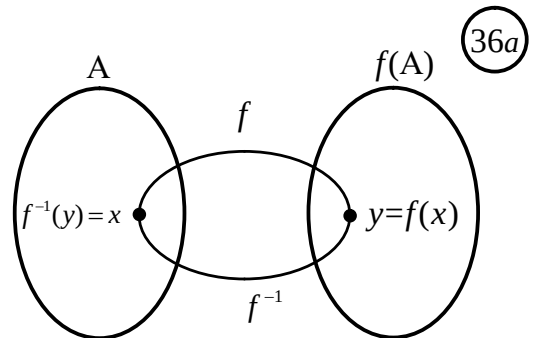
Από τον τρόπο που ορίστηκε η f^{-1} προκύπτει ότι :



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η f^{-1} αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η f^{-1} είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η f^{-1} λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$


Σχόλια :

- α) Ισχύει ότι : $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.
- β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι 1-1 με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

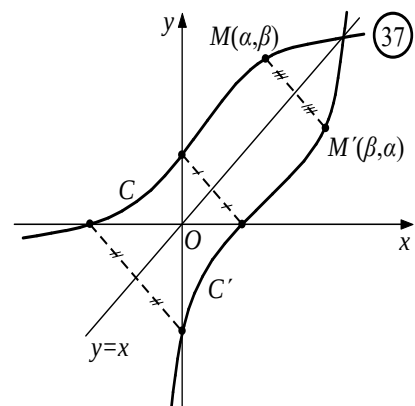
- έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
- έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και
- αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $e^x = y$. Επειδή όμως $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$

θα είναι $f^{-1}(y) = \ln y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $f^{-1}(y) = \ln y$.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απόδειξη :

Ας πάρουμε μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ.37). Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

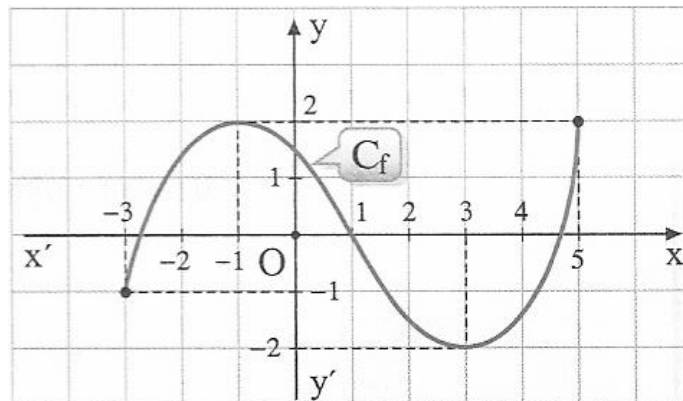
Παρατηρήσεις :

- $f : I \rightarrow J \Leftrightarrow f : J \rightarrow I$ αντιστρέψιμη,
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- Αν f γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας : π.χ. αν $f \uparrow$ στο Δ τότε έστω $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(\Delta)$ με $y_1 < y_2$, τότε :
$$f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \xRightarrow{f \uparrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \text{ άρα } f^{-1} \uparrow \text{ στο } D_{f^{-1}} = f(\Delta)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 1) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λύση :

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3, -1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, 5]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Β : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)
- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n$
(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n < \beta^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \alpha^n > \beta^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$)

- Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}$

- Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2) Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = 4x - 7$
- $f(x) = -4x - 7$

Λύση :

- $f(x) = 4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 7 < 4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

- $f(x) = -4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow -4x_1 - 7 > -4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(Γενικά γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha < 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha = 0$ η $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.)

3) (Άσκηση 1 σελ. 156 σχολικό βιβλίο Α' ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες;

- $f(x) = \sqrt{1-x}$
- $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$
- $f(x) = 3e^{1-x} + 1$
- $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1.$

Λύση :

- i. Πρέπει : $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

- ii. Πρέπει : $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα $D_f = (2, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (2, +\infty)$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow$

$$2\ln(x_1 - 2) < 2\ln(x_2 - 2) \Rightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 < 2\ln(x_2 - 2) - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = (2, +\infty)$.

- iii. $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow 3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2} \Rightarrow$$

$$3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } D_f = \mathbb{R}.$$

- iv. $D_f = (-\infty, 1]$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow[\substack{x_1-1 \leq 0, \& \\ x_2-1 \leq 0}]{\text{Επειδή, } x \leq 1} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \text{(Όταν υψώνω στο τετράγωνο}$$

αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } D_f = (-\infty, 1].$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

- $f(x) = 6 - 2x$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = \sqrt{6-2x} + 3$
- $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- v. $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}$
- vi. $f(x) = e^x + x^3 + 1$
- vii. $f(x) = \frac{2}{x} - \ln(x - 5)$
- viii. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4x^3 + 2016$
- ix. $f(x) = \frac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$
- x. $f(x) = x^3 - \sqrt{2 - x} + 5x$
- xi. $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$
- xii. $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$
- xiii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- xiv. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

5) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$
- ii. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty, 1)$.

6) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x) = (\lambda^2 - 2\lambda - 15)x - 2018$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = (|2\lambda - 1| - |\lambda + 2|)x + 2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση $g-f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

9) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Αν f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Αν f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 11) Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x+3)$.
- 12) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x+3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.
- 13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - \sqrt{x} + \frac{\alpha+6}{x}$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(4, -33)$ να δείξετε ότι $\alpha = -2$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- 14) Δίνεται περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0)$.
- 15) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις :
- $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu \ x \geq 0 \\ x+1, & \alpha\nu \ x < 0 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} e^x - x^2, & \alpha\nu \ x \leq -1 \\ 3 - \ln(x+1), & \alpha\nu \ x > -1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} x+1, & \alpha\nu \ x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$
- βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$
- αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

16) Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x} = 3 + \ln x$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x} - 3 - \ln x = 0$, έστω $f(x) = \sqrt{10-x} - 3 - \ln x$. Πρέπει $\begin{cases} 10-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \leq 10 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 10]$, δηλ. $D_f = (0, 10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση

$\sqrt{10-x} - 3 - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω :

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\sqrt{10-1}-3-\ln 1=0 \Leftrightarrow 3-3=0 \Leftrightarrow f(1)=0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (0,10]$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 10-x_1 > 10-x_2 \Rightarrow \sqrt{10-x_1} > \sqrt{10-x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \Rightarrow -3-\ln x_1 > -3-\ln x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1}-3-\ln x_1 > \sqrt{10-x_2}-3-\ln x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

17) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^3 = 1 - \ln x$ ii. $e^x + x = 1$ iii. $\ln x = \frac{1}{x} - 1$ iv. $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$
v. $x + \ln x = 1$ vi. $x^2 + \ln x - 1 = 0$ vii. $1 - e^x = x + \eta\mu x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(6,1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = -6$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} - 1$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος
- 2) θέτουμε το 1^ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$
- 3) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
- 4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x) = 0$ ή $f(x) = \alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\rho)$
- 5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$ και $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20) Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 + x < 2 - \ln x$.

Λύση : Έχω : $x^3 + x + \ln x - 2 < 0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Έστω $h(x) = x^3 + x + \ln x - 2$, με $A_h = (0, +\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x) < 0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1) = 0$ άρα η $x = 1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x) < h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1, x_2 \in A_h$ με :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \quad (3)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 - 2 < \ln x_2 - 2 \quad (4)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2), (3) και (4) και έχω :

$$x_1^3 + x_1 + \ln x_1 - 2 < x_2^3 + x_2 + \ln x_2 - 2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η $h \uparrow$ για κάθε $x \in A_h = (0, +\infty)$, οπότε $h(x) < h(1) \Leftrightarrow x < 1$ ή $x \in (0, 1)$.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

Λύση : Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$$\text{Επίσης : } x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + 3x_1 < e^{x_2} + 3x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f

είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2) \xrightarrow{f \uparrow} 2x^2 - x + 3 < 3x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

22) Αν η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η ανίσωση :

$$2(x^2 - 3x + 2) > \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right].$$

Λύση :

Πρέπει : $x^4 + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} > 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η δοσμένη ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Έτσι : } 2(x^2 - 3x + 2) > \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 > \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) > 6x - 4 + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) > 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) > f(3x - 2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 > 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

23) Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 6)$ και $B(2, 3)$.

- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3$.

Λύση :

- Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$, άρα ισχύει $f(-1) = 6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $B(2, 3)$, άρα ισχύει $f(2) = 3$. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ τότε $-1 < 2 \Rightarrow x_1 < x_2$. Επίσης $f(-1) = 6 \Leftrightarrow f(x_1) = 6$ και $f(2) = 3 \Leftrightarrow f(x_2) = 3$.

Έχουμε δηλ. $x_1 < x_2$ με $f(x_1) > f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3 \stackrel{f(2)=3}{\Leftrightarrow} f(f(x^2 - 17) - 4) < f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) - 4 > 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x^2 - 17) > 6 \stackrel{f(-1)=6}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 17) > f(-1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 17 < -1 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 4).$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1$

- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x) = \ln f(x)$ και $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- Να δείξετε ότι $xf(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- Να δείξετε ότι : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι : $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$ για κάθε $x > 0$.
- Να δείξετε ότι : $f(x) > f(x^2)$ για κάθε $x > 1$.
- Να δείξετε ότι : $f(x^3) > f(x^2)$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Λύση :

- $A_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (1)

$$\text{Επίσης : } x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f = \mathbb{R}$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ii. Ρίζες : $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης : $f(x) = 0$ και επειδή η $f \downarrow \mathbb{R}$, είναι και μοναδική.

Πρόσημο :

- $x > 0 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- $x < 0 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	+	0	-

- iii. Για τη $g(x) = \ln f(x)$ πρέπει : $x \in A_f = \mathbb{R}$ και $f(x) > 0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x < 0$, άρα $A_g = (-\infty, 0)$.

Για την $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ πρέπει : $x \in A_f = \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x \neq 0$, άρα $A_h = \mathbb{R}^*$.

- iv. Αν $x > 0 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \overset{x > 0}{\Leftrightarrow} xf(x) < 0$

Αν $x < 0 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \overset{x < 0}{\Leftrightarrow} xf(x) < 0$

Άρα σε κάθε περίπτωση : $xf(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.

- v. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

- $x < x+3 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} > f(x+3) \quad (1)$

- $x+5 < x+7 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x+5)} > f(x+7) \quad (1)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$.

- vi. Για κάθε $x > 0$ έχουμε :

$$1 < 3 \Leftrightarrow x < 3x \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x)} > f(3x) \quad (3)$$

$$7 < 10 \Leftrightarrow 7x < 10x \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(7x)} > f(10x) \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε : $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$ για κάθε $x > 0$.

- vii. Για κάθε $x > 1$, έχουμε : $x > 1 \overset{x}{\Leftrightarrow} x^2 > x \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x^2)} < f(x) \Leftrightarrow f(x) > f(x^2)$

- viii. Για κάθε $x \in (0,1)$, έχουμε : $x^2 > x^3 \Leftrightarrow \overset{f \downarrow}{f(x^2)} < f(x^3) \Leftrightarrow f(x^3) > f(x^2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

25) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να δείξετε ότι αν $x > e$, τότε $\ln x - \frac{1}{x} + x > 1 - \frac{1}{e} + e$
- Να δείξετε ότι αν $x > 1$, τότε $x \ln x + x^2 > 1$
- Να δείξετε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \beta - \alpha$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- v. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$, $xe^{\frac{1}{x}} \geq 1$
- vi. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1$
- vii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - x - 6 > \ln \frac{x+7}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+7}$.

26) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln x + e^x - 1$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να δείξετε ότι αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
- iii. Να δείξετε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$
- iv. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$
- v. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$
- vi. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, $f(x) < f(x^2)$

27) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008) < f(2004)$.

- i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x) \leq f(x^2+x)$.

28) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007) < f(2000)$.

- i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2) \geq f(x^2)$.

29) Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i. $9 - x^3 < e^{x-2}$ ii. $e^{x-1} + x < 2$ iii. $1 + \ln x < \frac{1}{x}$

30) Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(-2,7).

- i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .
- ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x|-4)-6)-5 < 0$.

31) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $g(x) = f(2x-5) - f(4-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $g(e^x - 2) > 0$

32) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

33) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(\alpha^2+1) \leq f(2\alpha)$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

34) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x} + x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5} - \sqrt{3|x|+1} < 2|x| - 4$.

35) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

36) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -2x^3 - 3x + 5$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4) < f(3x)$ β) $f(|x|) > 0$ γ) $f(x^2-5) - f(3-2x) > 0$.

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$
- Να λύσετε την ανίσωση : $8(e^{2-x^2} - e^{2-x}) > -2x(1-x)$

38) Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1) < 2$.

- αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

39) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3x^{2019} + 2x^{2017} + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(x)) < 6$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(13) - f(12) < f(14) - f(11)$.

40) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

- $f(x) + f(5x) < f(3x) + f(6x)$, για κάθε $x > 0$.
- $f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^5)$, για κάθε $x \in (0,1)$.

41) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x+1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(-2,5)$ και $N(-4,3)$.

- Να δείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = -1$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta = (-1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι : $f(3) - f(2) < f(4) - f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

- 42) Δίνεται η συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + e^{f(x)} + x - 1 = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση :

1^{ος} τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x) = x^3 + e^x, x \in \mathbb{R}$

άρα η (1) γίνεται : $g(f(x)) = 1 - x \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 1 - x, (2) x \in \mathbb{R}$

Επίσης η $g(x) = x^3 + e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ καθώς :

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω $x_1^3 + e^{x_1} < x_2^3 + e^{x_2} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Άρα τελικά : για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \xRightarrow{(2)} (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \xRightarrow{g:\uparrow} f(x_1) > f(x_2) \\ \text{οπότε η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

2^{ος} τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x) + e^{f(x)} = 1 - x$

Για να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$ τότε :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) \leq f^3(x_2) \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} \leq e^{f(x_2)} \quad (3)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω :

$$f^3(x_1) + e^{f(x_1)} \leq f^3(x_2) + e^{f(x_2)} \xRightarrow{(1)} 1 - x_1 \leq 1 - x_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο καθώς } x_1 < x_2.$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

- 43) Δίνεται η συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - x + 2016 = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 44) Δίνεται η συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^{2017}(x) + 3f(x) - e^{-x} = 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

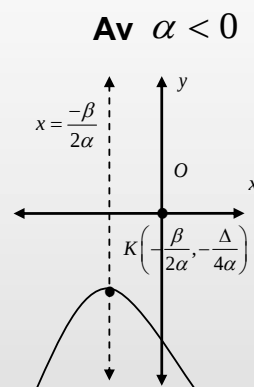
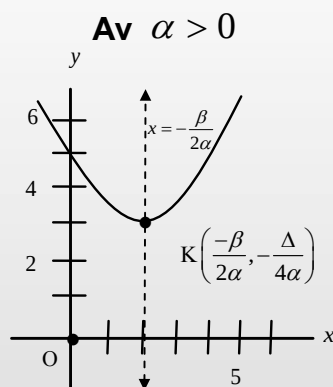
Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$.

Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

➤ Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

- Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$



➤ Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ

- αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
- αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

➤ Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq M$ ή $m \leq f(x) \leq M$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το " $=$ " λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = M$

(Προσοχή : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις

- $x^{2n} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $x = 0$
- $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $x = 0$
- $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $x = 1$
- $x + \frac{1}{x} \leq -2$ για κάθε $x < 0$, με το « $=$ » να ισχύει μόνο για $x = -1$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^2 - 4x + 7$
- ii. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
- iii. $f(x) = 5 - 4|x - 1|$
- iv. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}}$
- v. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$
- vi. $f(x) = 2 \ln x + 3, x \in [1, e]$
- vii. $f(x) = 2 \ln(x - 3) - 5$
- viii. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
- ix. $f(x) = 3 - 5x, x \in [-2, 5]$

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 - 4x + 7$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha = 1 > 0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2} = 2$

το $f(x_0) = f(2) = 3$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

- ii. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha = -1 < 0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$

το $f(x_0) = f(1) = 4$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 4$.

- iii. $f(x) = 5 - 4|x - 1|$, είναι $A_f = \mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
 $|x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow -4|x - 1| \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 4|x - 1| \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$ (1)
 Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 5 \Leftrightarrow 5 - 4|x - 1| = 5 \Leftrightarrow -4|x - 1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλ. $f(1) = 5$ άρα η
 (1) γίνεται $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 5$.

- iv. $f(x) = -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}}$, πρέπει

- $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$

- $2 + \sqrt{4 - x} \neq 0$, που ισχύει άρα,

είναι $A_f = (-\infty, 4]$. Έχουμε για κάθε $x \in (-\infty, 4]$ έχουμε

$$\sqrt{4 - x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}} \geq -\frac{10}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq -5$$
 (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -5 \Leftrightarrow -\frac{10}{2 + \sqrt{4 - x}} = -5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$, δηλ.

$f(4) = -5$ άρα η (1) γίνεται $f(x) \geq -5 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 4$ το $f(4) = -5$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

v. $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x) = |x|^2 - 2|x| + 1 + 2 \Leftrightarrow f(x) = (|x| - 1)^2 + 2$. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
 $(|x| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, δηλ.

$f(1) = 2$ και $f(-1) = 2$ άρα η (1) γίνεται : $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow (f(x) \geq f(1) \text{ και } f(x) \geq f(-1))$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ το $f(-1) = f(1) = 2$.

vi. $f(x) = 2 \ln x + 3$, είναι $A_f = [1, e]$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \uparrow [1, e]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_1 = 1$ το $f(1) = 2 \ln 1 + 3 = 3$ δηλ. για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$.
- Μέγιστο στο $x_2 = e$ το $f(e) = 2 \ln e + 3 = 5$ δηλ. για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq 5$.

vii. $f(x) = 2 \ln(x - 3) - 5$, είναι $A_f = (3, +\infty)$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \uparrow (3, +\infty)$ άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

viii. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$, είναι $A_f = (-\infty, 2]$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow (-\infty, 2]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = \sqrt{4 - 2 \cdot 2} = 0$ δηλ. για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

ix. $f(x) = 3 - 5x$, είναι $A_f = [-2, 5)$.

Με "χτίσιμο" δείχνω ότι $f \downarrow [-2, 5)$ άρα η f παρουσιάζει :

- Μέγιστο στο $x_0 = -2$ το $f(-2) = 3 - 5 \cdot (-2) = 13$ δηλ. για κάθε $x \in [-2, 5)$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(-2) \Leftrightarrow f(x) \leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

46) Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- $f(x) = x^2 + 2x + 2$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
- $f(x) = (\ln x - 2)^2 - 4$
- $f(x) = 3 + |x - 2|$
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $f(x) = 2e^{1-x} - 3, x \in [0, 1]$
- $f(x) = 1 - 2 \ln(x - 1), x \in [2, 3]$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

47) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

- $f(x) = 3|x-1| - 2$
- $f(x) = 5 - (x+2)^4$
- $f(x) = 2\sqrt{x} - 5$
- $f(x) = 7 - 3\sqrt{x-1}$
- $f(x) = 7 - \frac{4}{|x+3|+2}$
- $f(x) = \sqrt{6-2x} - 3x$
- $f(x) = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}$
- $f(x) = -x^2 + 4|x| - 1$
- $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

48) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 4$ και $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2+4}}$.

- Να βρείτε το ελάχιστο της f .
- Να βρείτε το μέγιστο της g .
- Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $7f(\alpha) - 5g(\beta) \geq 20$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5B : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

➤ Η Εξίσωση : $f(x) = \kappa$

Όταν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο ίσο με κ μόνο στη θέση $x = x_0$, τότε :

$$f(x) = \kappa \Leftrightarrow x = x_0 \text{ και } f(g(x)) = \kappa \Leftrightarrow g(x) = x_0, g(x) \in A.$$

➤ Η Εξίσωση : $f(x) = g(x)$

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x = x_0$ και η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x = x_0$ και ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$ τότε : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_0$.

Απόδειξη :

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x = x_0$, είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, με το « $\geq$ » να ισχύει μόνο για $x = x_0$. Επίσης επειδή η g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x = x_0$, είναι $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in A$, με το « $\leq$ » να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

$$\text{Έτσι : } f(x) = g(x) \stackrel{f(x_0)=g(x_0)}{\Leftrightarrow} f(x) - f(x_0) + g(x_0) - g(x) = 0 \left(\underset{\geq 0}{f(x) - f(x_0)} \right) + \left(\underset{\geq 0}{g(x_0) - g(x)} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0 \\ \text{και} \\ g(x) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(x_0) \Leftrightarrow x = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = x_0$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

49) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x = 0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $f(x) = 3$ β. $f(x^2 - 1) = 3$ γ. $f(3 - f(x - 1)) = 3$.

Λύση :

i. $D_f = \mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι : $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$. Τελικά η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x = 0$ το $f(0) = 3$.

ii. Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x = 0$ το $f(0) = 3$, άρα $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$. Έτσι :

α. $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

β. $f(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

γ. $f(3 - f(x - 1)) = 3 \Leftrightarrow 3 - f(x - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x - 1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

50) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{1}{|x - 1| + 1}$ και $g(x) = \ln((x - 1)^2 + 1) + 1$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα των f, g .

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln((x - 1)^2 + 1) + 1 = \frac{1}{|x - 1| + 1}$

Λύση :

i. $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

- $|x - 1| \geq 0 \Leftrightarrow |x - 1| + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x - 1| + 1} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x = 1$ το $f(1) = 1$.
- $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln((x - 1)^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln((x - 1)^2 + 1) + 1 \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$ άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x = 1$ το $g(1) = 1$.

ii. Η εξίσωση : $\ln((x - 1)^2 + 1) + 1 = \frac{1}{|x - 1| + 1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (1) ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x = 1$ το $f(1) = 1$, άρα $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 1$.

Η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x = 1$ το $g(1) = 1$, άρα $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow g(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 1$.

Έτσι (1) $\Leftrightarrow f(x) - 1 = g(x) - 1 \Leftrightarrow (g(x) - 1) + (1 - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 1 - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

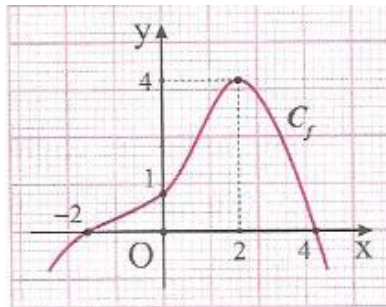
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

51) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 + 3$.

- Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.
- Να λύσετε τις εξισώσεις :
α. $f(x) = 3$ β. $f(2x-1) = 3$ γ. $f(f(x)-2) = 3$

52) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ του παρακάτω σχήματος.



- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε τα ακρότατα.
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.
- Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.
- Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- Να δείξετε ότι : $f(x) \leq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 4$ και την ανίσωση : $f(x) < 4$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $4 + (x-2)^2 = f(x)$
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(\alpha) + f(e^\beta) = 8$.

53) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $x_0 = 0$ και η g μέγιστο μόνο στο $x_0 = 0$.
- Να λύσετε τις εξισώσεις :
α. $f(x^2 - 1) = 1$ β. $g(e^x - 1) = 1$ γ. $f(g(x) - 1) = 1$ δ. $g(2f(x-3) - 2) = 1$
ε. $e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{2}{x^2 + 1}$
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι : $(f(\alpha) - 1)(1 - f(\beta)) < 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5^Γ : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

54) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, καθώς και το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση.

55) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και ένα σημείο $M(x, f(x)) \in C_f$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, να γίνεται ελάχιστη. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της ελάχιστης απόστασης.

56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 6x - 6$, $x \in [1, 3]$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, f(x)) \in C_f$, καθώς και τα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(3, f(3))$.

- Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B , είναι $(\varepsilon): 2x - y - 3 = 0$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του x , η απόσταση του σημείου M , από το ευθύγραμμο τμήμα AB , γίνεται μέγιστη.
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης του σημείου M από το ευθύγραμμο τμήμα AB .

57) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 8x - 6$, $x \in [1, 5]$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, f(x)) \in C_f$, καθώς και τα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(5, f(5))$.

- Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B , είναι $(\varepsilon): 2x - y - 1 = 0$.
- Να βρείτε για ποια τιμή του x , η απόσταση του σημείου M , από το ευθύγραμμο τμήμα AB , γίνεται μέγιστη.
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης του σημείου M από το ευθύγραμμο τμήμα AB .

58) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, καθώς και το σημείο $A(0, 1)$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $M(x, f(x)) \in C_f$.

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d(x)$ του σημείου M από το σημείο A δίνεται από τον τύπο $d(x) = 1 + f(x)$.
- Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» ΟΡΙΣΜΟΣ

- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ και προσπαθούμε να δείξουμε ότι $x_1 = x_2$. (δηλ. αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$)
- Για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1», προσπαθούμε να εντοπίσουμε δυο $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν δίνεται η C_f και παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x' τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο, τότε η f είναι «1-1». Διαφορετικά δεν είναι.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και «1-1». Τονίζουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. (Δηλ. μονοτονία $\Rightarrow$ "1-1")

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

59) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι :

- i. $f(x) = 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x-1}}$
- ii. $f(x) = 2x^2 + 3$
- iii. $f(x) = 1 - 4x - 3e^{2x-1}$

Λύση :

- i. $f(x) = 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x-1}}$, πρέπει : $\begin{cases} \sqrt{1 + e^{x-1}} > 0 \\ 1 + e^{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x_1-1}} = 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x_2-1}} \Rightarrow \ln \sqrt{1 + e^{x_1-1}} = \ln \sqrt{1 + e^{x_2-1}} \Rightarrow \sqrt{1 + e^{x_1-1}} = \sqrt{1 + e^{x_2-1}} \Rightarrow 1 + e^{x_1-1} = 1 + e^{x_2-1} \Rightarrow e^{x_1-1} = e^{x_2-1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η $f(x)$ είναι «1-1».

- ii. $f(x) = 2x^2 + 3$, $D_f = \mathbb{R}$. Η $f(x)$ δεν είναι «1-1» γιατί υπάρχουν :

$$x_1 = -1, x_2 = 1 \in D_f = \mathbb{R} \text{ με } x_1 \neq x_2$$

Όμως $f(x_1) = f(-1) = 2(-1)^2 + 3 = 5$, $f(x_2) = f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5$. Δηλ. $f(x_1) = f(x_2)$.

Άρα εντοπίσαμε δυο $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα η f δεν είναι «1-1».

- iii. $f(x) = 1 - 4x - 3e^{2x-1}$ με τον ορισμό δεν μπορώ να εξετάσω αν η $f(x)$ είναι «1-1». Γι' αυτό θα εξετάσω αν είναι γνησίως μονότονη.

Έχω : $D_f = \mathbb{R}$,

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow 1 - 4x_1 > 1 - 4x_2$ (1). Επίσης :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow e^{2x_1-1} < e^{2x_2-1} \Rightarrow -3e^{2x_1-1} > -3e^{2x_2-1} \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :
 $1 - 4x_1 - 3e^{2x_1-1} > 1 - 4x_2 - 3e^{2x_2-1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα η f είναι και «1-1».

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

60) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 3e^{2-x} - 5$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

Λύση :

1^{ος} τρόπος :

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$ (2)

Επίσης : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2f(x_1) = -2f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1) - 2f(x_1) = f^3(x_2) - 2f(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3e^{2-x_1} - 5 = 3e^{2-x_2} - 5 \Rightarrow 3e^{2-x_1} = 3e^{2-x_2} \Rightarrow e^{2-x_1} = e^{2-x_2} \Rightarrow 2-x_1 = 2-x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow$
 $x_1 = x_2$ άρα η f είναι και «1-1».

2^{ος} τρόπος :

Είναι : $f^3(x) - 2f(x) = 3e^{2-x} - 5$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x) = x^3 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

άρα η (1) γίνεται : $g(f(x)) = 3e^{2-x} - 5 \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = 3e^{2-x} - 5$ (2), $x \in \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3e^{2-x_1} - 5 = 3e^{2-x_2} - 5 \Rightarrow 3e^{2-x_1} = 3e^{2-x_2} \Rightarrow e^{2-x_1} = e^{2-x_2} \Rightarrow 2-x_1 = 2-x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα
η f είναι και «1-1».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

61) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι

- i. $f(x) = 3e^{2x-3} + 2$
- ii. $f(x) = 1 + 3e^{1+\sqrt{1-x}}$
- iii. $f(x) = e^{x-1} + 2x - 5$
- iv. $f(x) = 3\ln(x-2) + 3x + 3$
- v. $f(x) = 3x^2 + 2$
- vi. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- vii. $f(x) = |x-2|$

62) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) = 4x^3 - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι είναι «1-1».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» & ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- Όταν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$
- Αν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε η εξίσωση $f(x) = 0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = \alpha$ με $\alpha \in \mathcal{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση :
 $(f \circ f)(x^2 - 2x) = (f \circ f)(3x - 6)$.

Λύση :

$$f(f(x^2 - 2x)) = f(f(3x - 6)) \xLeftrightarrow{f \downarrow \Rightarrow f^{-1-1}} f(x^2 - 2x) = f(3x - 6) \xLeftrightarrow{f^{-1-1}} x^2 - 2x = 3x - 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

64) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) + f(4) = 12$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 12$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$.

65) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση :
 $(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4)$.

66) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(f(x)) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
- Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$.

67) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
- Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- Να λυθεί η εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$.

68) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(3 - x) + f(x + 5) = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα .

- Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^2 + 2x - 4) < 0$.
- Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 0$.

69) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^{x-2}$, καθώς και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(g \circ f)(x) = 8 - 3e^{x-2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδειχθεί ότι η g είναι «1-1».
- Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x - 1 + f(|x| - 3)) - f(e^x + 1) = 0$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

70) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = (x-2)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
- Να βρείτε την τιμή $f(3)$
- Να λυθεί η εξίσωση $f(x+1 - f(|x|-1)) - f(x-2) = 0$.

71) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- $e^x = 1 - x^7$
- $\ln(x-1) = 2 - x$

72) Αν η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση :

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]. \quad (\text{Θέμα Γ 2010})$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8^Α : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f^{-1}(x)$

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε την αντίστροφη της f :

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
- Δείχνουμε ότι η f είναι «1-1»
- Θέτουμε $y = f(x)$ (οπότε $f^{-1}(y) = x$) και λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x , βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y .
- Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το σύνολο τιμών της f που είναι το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
- Αν η λύση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x είναι $x = g(y)$, τότε έχουμε $f^{-1}(y) = g(y)$. Θέτουμε όπου y το x και έχουμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

73) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$ είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.
Λύση :

- Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2e^{3x_1-2} + 1 = 2e^{3x_2-2} + 1 \Rightarrow e^{3x_1-2} = e^{3x_2-2} \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x . Έχουμε

$$\text{λοιπόν: } f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{3x-2} + 1 = y \Leftrightarrow 2e^{3x-2} = y - 1 \Leftrightarrow e^{3x-2} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow 3x - 2 = \ln \frac{y-1}{2}, \quad y > 1$$

$$\text{Άρα: } 3x = \ln \frac{y-1}{2} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln \frac{y-1}{2} + \frac{2}{3}, \quad y > 1.$$

$$\text{Συναληθεύοντας έχω: } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln \frac{y-1}{2} + \frac{2}{3} \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } y > 1$$

Επομένως, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \ln \frac{y-1}{2} + \frac{2}{3}$, $y > 1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3}, \quad x > 1.$$

74) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη της συνάρτησης : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(Άσκηση 2vii) σελ. 156 σχολικού βιβλίου Α' Ομάδας)

Λύση :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \text{ πρέπει } e^x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ άρα } D_f = \mathbb{R}.$$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με ότι $x_1 = x_2$

$$\text{Έχω } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} \Rightarrow (e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 1) = (e^{x_1} + 1)(e^{x_2} - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x_1} \cdot e^{x_2} + e^{x_1} - e^{x_2} - 1 = e^{x_1} \cdot e^{x_2} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1 \Rightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η $f(x)$ είναι και «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι και αντιστρέψιμη.

$$\text{Θέτω } y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - ye^x = y + 1 \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y + 1 \xrightarrow[\text{για } y \neq 1]{\text{Για } y \neq 1(1)} e^x = \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow$$

$$(\text{επίσης πρέπει : } \frac{y + 1}{1 - y} > 0 \Leftrightarrow (y + 1)(1 - y) > 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 1) \text{ (2)})$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + 1}{1 - y}, y \in (-1, 1)$$

$$\text{Συναληθεύοντας έχω : } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln \frac{y + 1}{1 - y} \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } y \in (-1, 1).$$

$$\text{Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει } y \in (-1, 1), \text{ άρα } D_{f^{-1}} = (-1, 1) = f(A).$$

$$\text{Άρα : } x = \ln \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \text{ με } D_{f^{-1}} = (-1, 1) = f(A)$$

75) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γνωρίζουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. $f^3(x) + 2f(x) + 2x - 1 = 0$

ii. $(f \circ f)(x) + x = f(x)$ (να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$)

Λύση :

i. $f^3(x) + 2f(x) + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = 1 - 2x \text{ (1)}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \text{ (2)}$

Επίσης : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2) \text{ (3)}$

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \xrightarrow{(1)} \Rightarrow 1 - 2x_1 = 1 - 2x_2 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι «1-1» και άρα f αντ/μη.

1^{ος} Τρόπος Θέτω $y = f(x) \xrightarrow{(1)} y^3 + 2y = 1 - 2x \Leftrightarrow 2x = 1 - y^3 - 2y \Leftrightarrow x = \frac{1 - y^3 - 2y}{2} \Leftrightarrow$

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - y^3 - 2y}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - x^3 - 2x}{2}$$

2^{ος} Τρόπος (Αν γνωρίζουμε από εκφώνηση ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ή δίνει $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ τότε στη δοσμένη σχέση μπορώ να θέσω όπου x το $f^{-1}(x)$)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3 + 2f\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - 2f^{-1}(x) \stackrel{f(f^{-1}(x))=x}{\Leftrightarrow} x^3 + 2x = 1 - 2f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - x^3 - 2x}{2}.$$

ii. $(f \circ f)(x) + x = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = -x$ (1)

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω $f(x_1) = f(x_2)$ άρα θα είναι και $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$ (2)

Επίσης $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :

$$(f \circ f)(x_1) - f(x_1) = (f \circ f)(x_2) - f(x_2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι «1-1» και άρα η } f \text{ είναι και αντιστρέψιμη.}$$

1^{ος} Τρόπος Θέτω $f(x) = y$ αρά $(1) \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = -x \stackrel{f(x)=y}{\Leftrightarrow} f(y) - y = -x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = y - f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y - f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - f(x)$

2^{ος} Τρόπος Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$$f\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right) - f\left(f^{-1}(x)\right) = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) - x = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - f(x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 3$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τις τιμές : $f^{-1}(-2)$ και $(f \circ f^{-1})(5)$.

77) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων

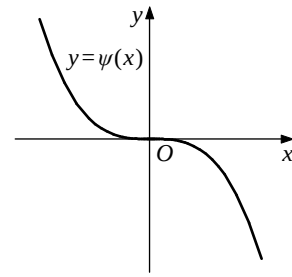
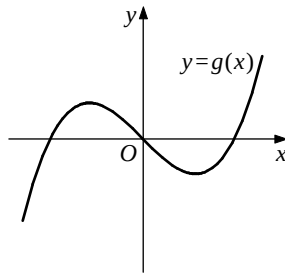
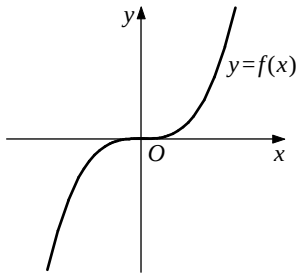
- i. $f(x) = \ln x - 3$
- ii. $f(x) = e^{x-1} - 2$
- iii. $f(x) = \sqrt{x-5} - 2$
- iv. $f(x) = x^3$ (ΘΕΜΑ Γ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)
- v. $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
- vi. $f(x) = \frac{1}{\ln x}, x > 1$
- vii. $f(x) = x^2 + 6x + 7$, αν $x \in [-3, +\infty)$.
- viii. $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$
- ix. $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$

78) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την C_f και $C_{f^{-1}}$.

- i. $f(x) = 2x + 4$
- ii. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$
- iii. $f(x) = e^{x+1} - 2$
- iv. $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

79) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και ψ .



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

80) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8^B : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Αν μια συνάρτηση f δίνεται με πολλαπλό τύπο και στα επιμέρους διαστήματα είναι 1-1, τότε για να είναι 1-1 σε όλο το πεδίο ορισμού της αρκεί τα επί μέρους σύνολα τιμών να είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x . Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης που δίνεται με πολλαπλό τύπο, βρίσκουμε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$ για τον κάθε κλάδο της συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

81) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - 2x, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

82) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & x \in (0,1) \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

83) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in (-2,0] \\ 3x - 7, & x \in (0,3) \end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

84) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 2, & x \geq 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $f^{-1}(x) = x$ και $f^{-1}(x) = f(x)$

- Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

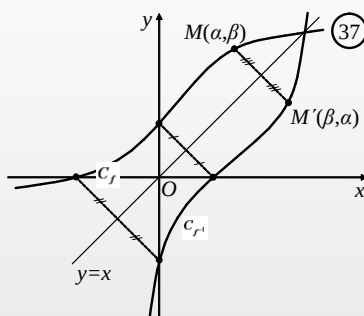
Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων μας επιτρέπει να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$

- Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

1^{ος} Τρόπος : Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες :

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{-1}(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την $y = x$ (***απόδειξη***) (ή της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$)

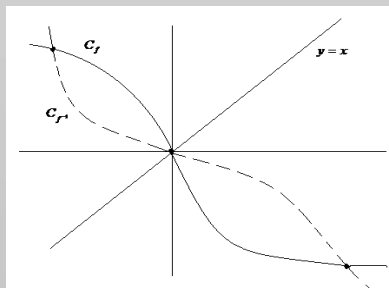


2^{ος} Τρόπος : Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$,

$$\begin{aligned} \text{αρκεί να λύσουμε το σύστημα } \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ f^{-1}(x) = y \end{cases} \\ &\text{Με γνωστή } f \quad \text{Με γνωστή } f^{-1} \end{aligned}$$

(Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ δεν είναι ισοδύναμες. Μπορεί δηλαδή να υπάρχουν σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ που δεν ανήκουν στην ευθεία $y=x$. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

βρίσκονται από τη λύση του συστήματος : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$ 2ος τρόπος)



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(*απόδειξη*)

Έστω ότι υπάρχει ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$ (στο x_0 έχω σημείο τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$) θα δείξω ότι $f(x_0) = x_0$ (δηλ. στο x_0 σημείο τομής της C_f και $y = x$)

Έστω $f(x_0) > x_0 \Leftrightarrow f(f(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow x_0 > f(x_0)$ άτοπο! Ομοίως καταλήγω σε άτοπο αν υποθέσω $f(x_0) < x_0$, άρα τελικά $f(x_0) = x_0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x + 12$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$
- Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}(f(|x| - 1) + 8) < 1$

Λύση :

i. $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3$ (1). Επίσης :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 12 > -x_2 + 12 \quad (2)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $-x_1^3 - x_1 + 12 > -x_2^3 - x_2 + 12 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η f είναι «1-1» και άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \text{ από όπου προκύπτει } f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^3 - x + 12 = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

1	0	2	-12		2
	2	4	12		
1	2	6	0		

$$\text{Άρα } x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{ή } x^2 + 2x + 6 = 0 \text{ Αδύνατη}$$

Άρα αφού $y = x \Leftrightarrow y = 2$. Δηλ. η $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ τέμνονται στο σημείο A(2,2).

$$\begin{aligned} \text{iii. } f^{-1}(f(|x| - 1) + 8) < 1 &\stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(f(|x| - 1) + 8)) > f(1) \Leftrightarrow f(|x| - 1) + 8 > 10 \Leftrightarrow f(|x| - 1) > 2 \Leftrightarrow \\ &\stackrel{f(2)=2}{\Leftrightarrow} f(|x| - 1) > f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} |x| - 1 < 2 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \text{ ή } x \in (-3, 3) \end{aligned}$$

86) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$

Λύση :

i. $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow 3x_1^5 < 3x_2^5$ (1). Επίσης :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \quad (2)$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $3x_1^5 + x_1 + 3 < 3x_2^5 + x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη.

ii. 1^{ος} τρόπος : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \text{ από όπου προκύπτει } f(x) = f^{-1}(x) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow \quad (\text{θέλει απόδειξη})$$

$$\Leftrightarrow 3x^5 + x + 3 = x \Leftrightarrow 3x^5 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

Άρα αφού $y = x \Leftrightarrow y = -1$. Δηλ. η C_f με την $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $A(-1, -1)$.

2^{ος} τρόπος : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^5 + x + 3 \\ 3y^5 + y + 3 = x \end{cases}. \text{ Το σύστημα που προκύπτει είναι φανερό ότι}$$

είναι πολύ δύσκολο να λυθεί. Έτσι στο σύστημα : $\begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases}$ προσθέτουμε κατά μέλη και

έχουμε : $y + f(y) = f(x) + x$ (3). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$, έτσι η (3)

γίνεται : $g(x) = g(y)$ (4). Για κάθε $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$

$$x_1 < x_2 \quad +$$

$$f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Οπότε η $g \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow g$ "1-1", έτσι έχουμε : (4) $\Leftrightarrow g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^5 + x + 3 = x \Leftrightarrow x = -1. \text{ Άρα και } y = -1. \text{ Δηλ. η } C_f \text{ και } C_{f^{-1}} \text{ τέμνονται στο } A(-1, -1).$$

$$\text{iii. } f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4)) > f(0) \Leftrightarrow f(x^2 - 3) - 4 > 3 \Leftrightarrow f(x^2 - 3) > 7 \Leftrightarrow$$
$$\stackrel{f(1)=7}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 3) > f(1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0, \text{ έχω } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$		0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω : $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

87) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \quad (1) \\ x = -y^3 \quad (2) \end{cases}. \text{ Η (2) λόγω της (1) γίνεται : } x = -(-x^3)^3 \Leftrightarrow x = x^9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \& (1) \Leftrightarrow y = 0 \text{ άρα } A(0,0) \\ x = 1 & \& (1) \Leftrightarrow y = -1 \text{ άρα } B(1,-1) \\ x = -1 & \& (1) \Leftrightarrow y = 1 \text{ άρα } \Gamma(-1,1) \end{cases}$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

88) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$

89) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-3) + x - 1$ με σύνολο τιμών το με $\mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

90) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

91) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}(x^2 - 13) < 2$

92) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^9 + 4x + 4$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$

93) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$2f^3(x) + f(x) = x + 16 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
- Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

- 94) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου για την f ισχύει $(f \circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 - Να βρείτε το $f(0)$
 - Αν ισχύει $f(g(e^x) - 2x + 3) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση g .
- 95) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = 2x^5 + e^{f(x)} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1 - x^3)$
- 96) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
- $f(1) = 1$
 - Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι συνάρτηση 1-1.
- 97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x$.
- Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
 - Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1} .
 - Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$
 - Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$
- 98) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι :
- η f είναι «1-1»
 - $f^{-1} = -f$
 - η f δεν είναι γνησίως μονότονη
 - η f είναι περιττή
 - $f(0) = 0$
- 99) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(f \circ f)(x) - f(x) = -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη
 - Να βρείτε την τιμή $f(2)$
 - Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(4 - f(|x| - 1)) = 2$.
- 100) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και για την οποία ισχύει :
- $$f^2(x) + 1 = 2f(x) + e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$
 - Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
 - Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 101) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f^5(x) + 2f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f^{-1}(x) = 0$
iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
- 102) Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $(f \circ g)(x) = x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
i. να δείξετε ότι η g είναι «1-1»
ii. να λύσετε την εξίσωση $g(x+1) = g(x^2+1)$.
- 103) Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η $(f \circ g)(x)$ να είναι «1-1».
i. Να δείξετε ότι και η g είναι «1-1»
ii. να λύσετε την εξίσωση $g(2x^2+1) = g(x^2+3x-1)$
- 104) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$
iii. Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρεθεί το είδος μονοτονίας της.
iv. Να λυθεί η ανίσωση : $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2-x)$
- 105) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$. (2^ο 2006)
- 106) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + 2$
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2 - e^{x-1}) = 3$
iv. Να λύσετε την ανίσωση : $f(3 - e^{x-1}) < e + 2$
- 107) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-2,3) και B(2005,5)
i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(2007 + f^{-1}(x^2 - 1)) = 5$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}(x - 3) > 2005$
- 108) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία A(3,4) και B(6,-2).
i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) = 4$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) < 3$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 109) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού του $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e^x + 2) + f(x + 3) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(6 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$.
- 110) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(f \circ f)(x) = 3x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
 - Να βρείτε την τιμή $f(1)$
 - Να εκφράσετε την f^{-1} με τη βοήθεια της f
 - Να αποδείξετε ότι $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$
- 111) Δίνεται η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει : $(f \circ f)(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(2010)$
 - Να αποδείξετε ότι $f(\ln x) = \ln(f(x))$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$.
 - Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = e^{f(x)}$
- 112) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) + x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- Η f είναι περιττή
 - Η f αντιστρέφεται
 - Η f^{-1} είναι περιττή
 - $f^{-1} = -f$
- 113) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει : $(f \circ f)(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- Η f είναι 1-1, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και αντιστρέφεται.
 - $f^{-1}(x) = 1 + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της γωνίας xOy .
 - Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η C_f είναι κάτω από την ευθεία $y=x$.
- 114) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=0$, τότε να αποδείξετε ότι :
 - Η f είναι αντιστρέψιμη
 - Ισχύει $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- 115) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση : $f(f(x)) = 2g(x) - x$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 - Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης : $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(f(x+x_0-2))+x+x_0=2f(x+x_0-2)+2$
- v. Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(\ln x+x_0+1))+\ln x+1 < x_0$ (study4exams)
- 116) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.
- i. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- iii. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$. (study4exams)
- 117) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $(f \circ f)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $f(2)=5$
- i. Να βρείτε το $f(5)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2$ (study4exams)
- 118) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.
- iv. Να λυθεί η εξίσωση : $f(2e^{x-1})-f(3-x)=0$. (study4exams)
- 119) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$.
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- iii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$
- iv. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(2016x) < f(2015x)+f(2017x)$ για κάθε $x > 0$.
- v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^8)$, $x > 0$.
- 120) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $e^x=1-x$.
- iii. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- iv. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$.
- v. Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$. (E.M.E. 2008)

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3**ΘΕΜΑ 2 #29835**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #27317

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0, 2]$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι :
- i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)
 - ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)
 - iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #35171

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$g(x) = 2\ln x$, $x > 0$ και $h(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι :
- i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)
 - ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #29926

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α)
- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)
 - ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)
- β)
- i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)
 - ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 #32695

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$. (Μονάδες 06)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 07)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2 #24130

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$. (Μονάδες 07)
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f . (Μονάδες 10)
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} . (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2 #24991

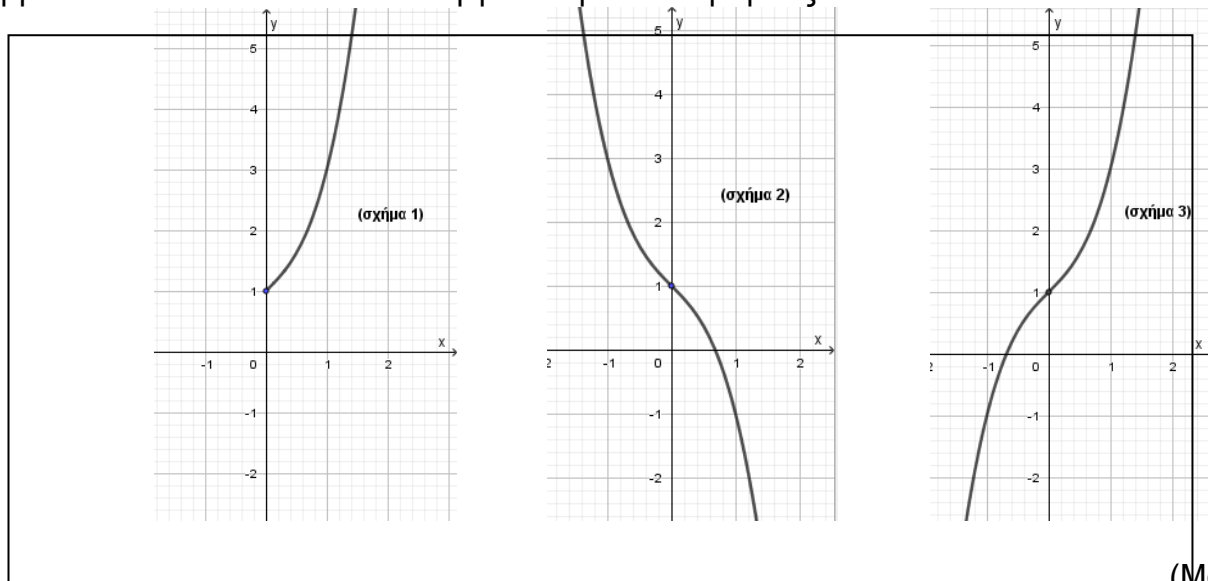
Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 09)
γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2 #23642

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)
β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

- γ)
i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 06)
ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$. (Μονάδες 05)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2 #24569

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$. (Μονάδες 05)

β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$. (Μονάδες 10)

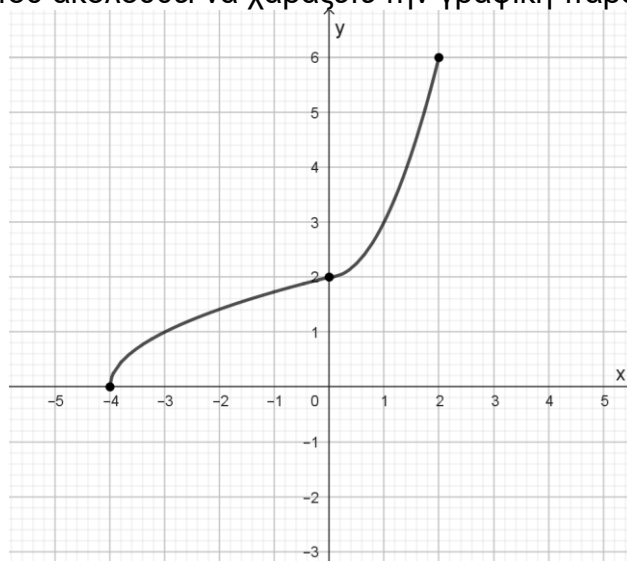
ΘΕΜΑ 2 #27277

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



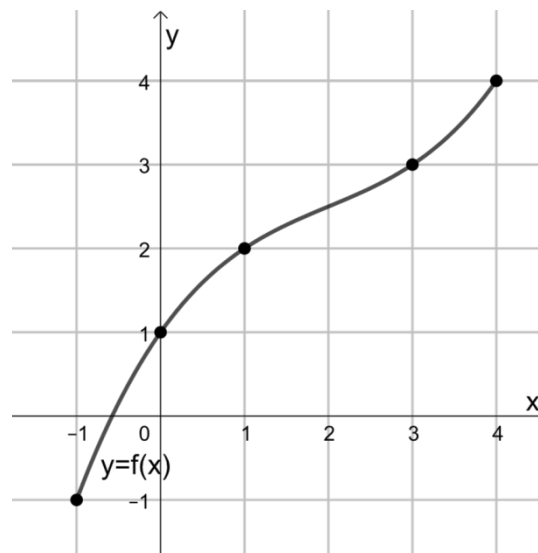
ΘΕΜΑ 2 #28299

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2 #28300

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,
- γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν,
- δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)

