

1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** ;

Απάντηση : (2005 ΕΣΠ. Β', 2018Β, 2019)

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Σχόλια :

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε : $f: A \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$.

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

2. Τι λέμε **γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A** ;

Απάντηση :

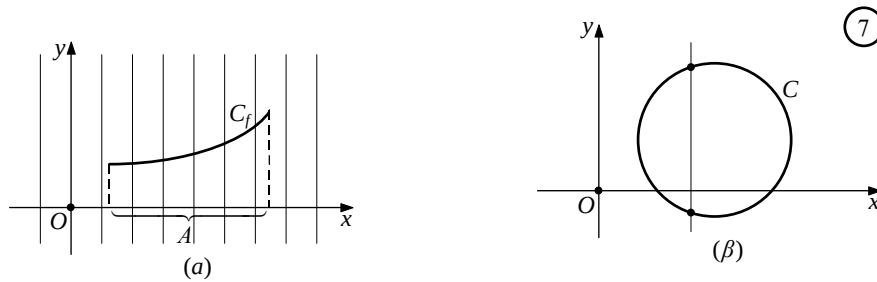
Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια :

- Η γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .
- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .
- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

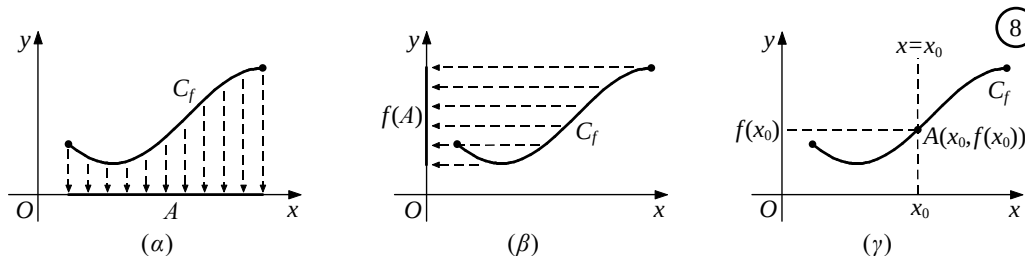
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).



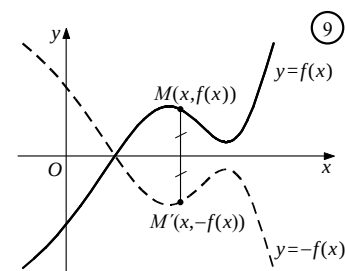
- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε :

- α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
- β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
- γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

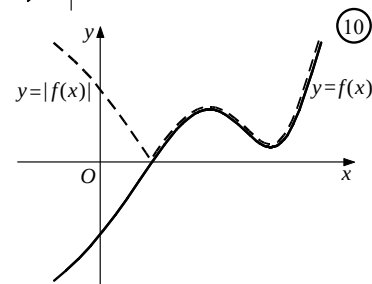


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

- α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



- β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



- γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$.

3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x) = ax + \beta$

β) $f(x) = ax^2, a \neq 0$

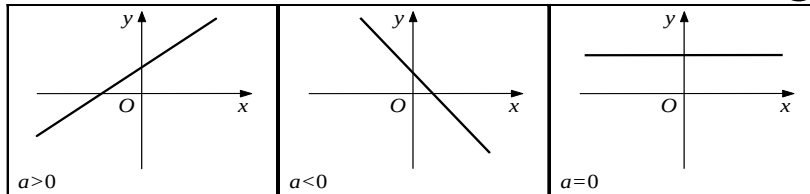
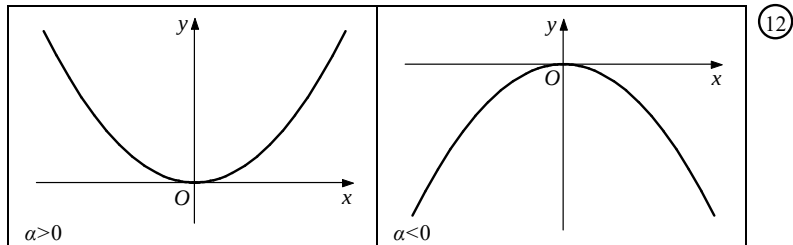
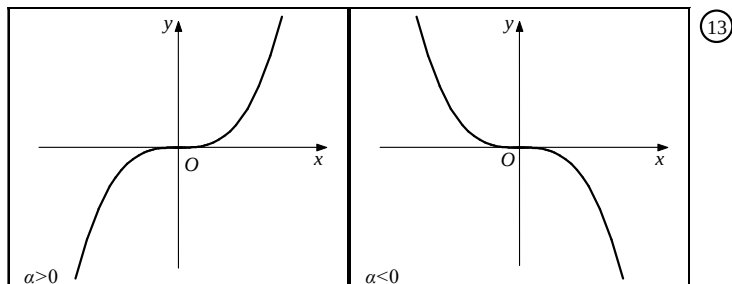
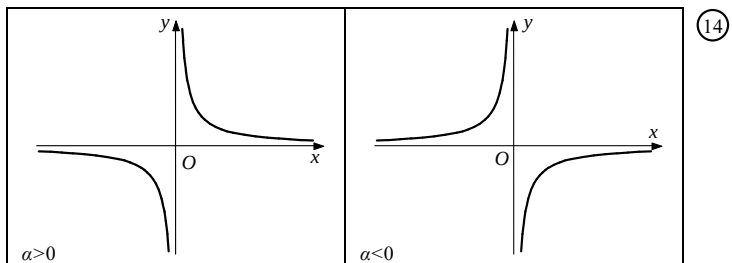
γ) $f(x) = ax^3, a \neq 0$

δ) $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$

ε) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{|x|}$.

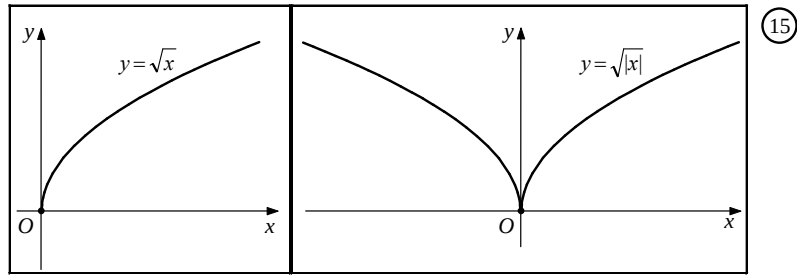
Απάντηση :

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ β) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^2, a \neq 0$.γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^3, a \neq 0$.δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ε) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.



4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

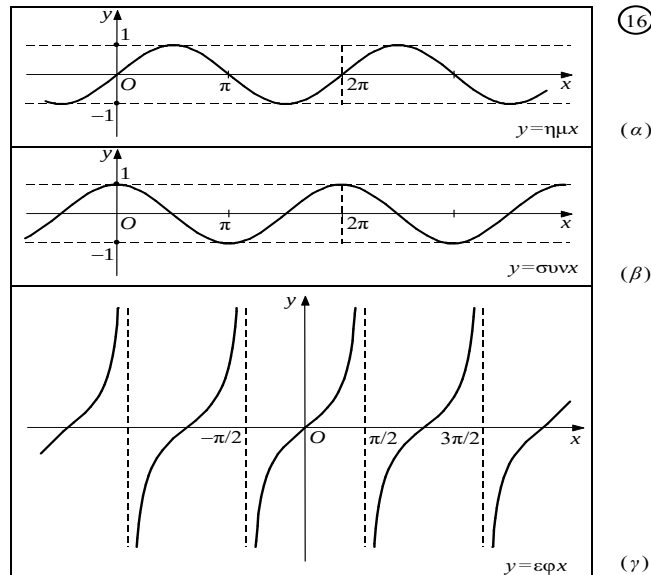
α) $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \epsilon\phi x$

β) $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ γ) $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$

Απάντηση :

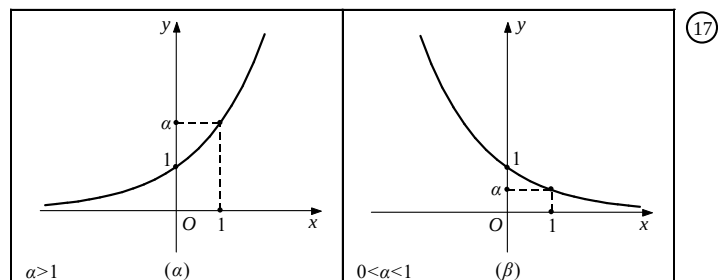
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \epsilon\phi x$



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.



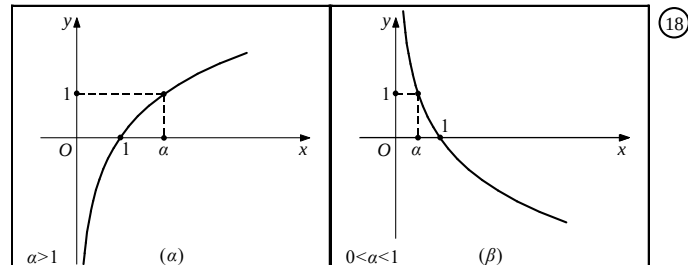
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ιδιότητες :

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $a > 1$, ΤΟΤΕ: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < a < 1$, ΤΟΤΕ: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$



Ιδιότητες :

- 1) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- 2) $\log_a a^x = x$ ΚΑΙ $a^{\log_a x} = x$
- 3) $\log_a a = 1$ ΚΑΙ $\log_a 1 = 0$
- 4) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- 5) $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- 6) $\log_a x_1^k = k \log_a x_1$
- 7) Αν $a > 1$, ΤΟΤΕ: $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < a < 1$, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- 8) $a^x = e^{x \ln a}$, αφού $a = e^{\ln a}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Απάντηση : (2007, 2008 ΟΜΟΓ, 2012 Β', 2016, 2021)

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Σχόλια :

- Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και Γ ένα υποσύνολο του $A \cap B$. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ είναι $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .
- Για να εξετάσουμε αν δυο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ύστερα να ελέγξουμε αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Οι ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική παράσταση.
- Είναι λάθος να πούμε ότι «δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο». Π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, $x \in A = \{-1, 1\}$ είναι ίσες, χωρίς να έχουν τον ίδιο τύπο.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f, g ;

Απάντηση :

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

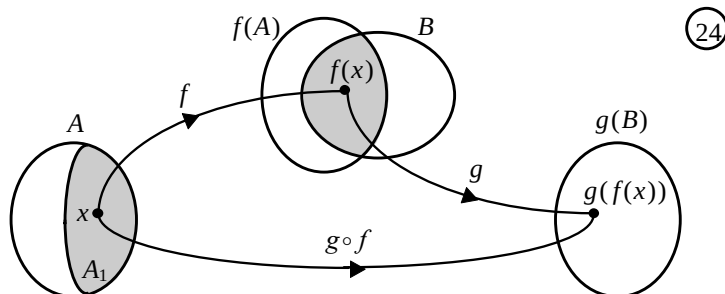
Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο :

$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση :

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Σχόλια :

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται ,αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) • Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες.

• Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$f(x) = \ln(P(x))$	$P(x) > 0$
$f(x) = (P(x))^{Q(x)}$	$P(x) > 0$
$f(x) = \varepsilon\phi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \sigma\phi(P(x))$	$P(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $f(x) = \ln(1-e^x)$
- $f(x) = (2-x)^{\sqrt{x-1}}$
- $f(x) = \ln(\pi^2 - x^2) - \varepsilon\phi x + x^{2016}$

Λύση :

- Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1,2\}$
- Πρέπει : $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2]$. Άρα $D_f = [1,2]$
- Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1-x^2 \geq 0$ (2)
Έχω $1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1,0) \cup (0,1]$.

- Πρέπει : $1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα $D_f = (-\infty, 0)$
- Πρέπει : $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,2)$ Άρα $D_f = [1,2)$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

vi. Πρέπει :

- $\pi^2 - x^2 > 0$, είναι $\pi^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\pi$

x	$-\infty$	$-\pi$		π	$+\infty$
$\pi^2 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $\pi - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi, \pi)$

- $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς έχω :

$$x \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow -\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα $\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$

Για $\kappa = -1$ είναι $x \neq -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2}$

Για $\kappa = 0$ είναι $x \neq \frac{\pi}{2}$

Άρα $D_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-2} + \frac{1}{x-3}$

ii. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-8} + \frac{1}{x^3+1}$

iii. $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$

iv. $f(x) = \frac{e^x + x^5}{5 - e^x}$

v. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

vi. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

vii. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{x-1}}$

viii. $f(x) = \sqrt{1-e^x}$

ix. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

3) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln(-x^2 + 3x + 10)$

ii. $f(x) = \ln(4 - x^2)$

iii. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

iv. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

v. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{1-|x|}$

vi. $f(x) = \frac{x-1}{\sigma\upsilon\nu 2x-1}$

vii. $f(x) = \frac{x}{|x-3|-2} + \frac{3}{|7-2x|-1}$

viii. $f(x) = \sqrt{|x-3|-5} + \sqrt{7-|x-4|}$

4) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = (x^2 - 25)^{x^2+e^x}$

ii. $f(x) = (16 - x^2)^{3x^5+\ln x}$

iii. $f(x) = (e^x - 1)^{x^{2015}+\sqrt{2-x}}$

iv. $f(x) = (9 - x^2)^{\sqrt{|x|-1}}$

v. $f(x) = \ln(2\pi x - x^2) - \varepsilon\phi x$

5) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

ii. $f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{2-x}}$

iii. $f(x) = \frac{x-1}{\ln^2 x - \ln x}$

iv. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(x-1)}$

v. $f(x) = \frac{\ln(x+5)}{x^2-3x-4}$

vi. $f(x) = \frac{\ln(4-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

vii. $f(x) = \frac{\ln(x^2-9)}{x-7}$

viii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$

ix. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\ln(x+3)}$

x. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\ln(e^x-1)} + \ln(x^2+1) - \frac{\eta\mu x}{e^x+2017}$

xi. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1} + \frac{x^2}{e^x+1}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 6) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.
- 7) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)$.
- 8) Να βρείτε τις τιμές $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν πεδίο ορισμού του $\mathbb{R}$.
- i. $f(x) = \frac{x-20}{x^2 - \lambda x + 4}$
- ii. $f(x) = \ln(3x^2 - 2\lambda x + 3)$
- 9) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{\frac{4}{\rho}x^2 + \alpha x + \frac{\rho}{2}}$ με $\rho, \alpha \in \mathbb{Z}$ και $\rho < \alpha$, $\rho \neq 0$. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των $\rho, \alpha \in \mathbb{Z}$.

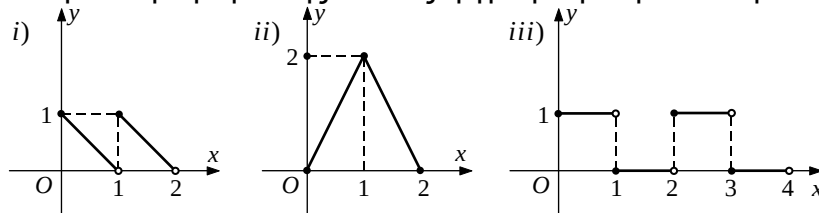
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1B : ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 10) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \alpha \nu -5 \leq x \leq -2 \\ |x| + \beta, & \alpha \nu -2 < x < 6 \end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-4) = 8$ και $f(-1) = 0$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε τους αριθμούς α, β
- iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(f(-3))$
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.
- 11) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \alpha \nu -6 \leq x < -1 \\ x^2 + \beta, & \alpha \nu -1 \leq x < 7 \end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-2) = 5$ και $f(5) = 24$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να βρείτε τους αριθμούς α, β
- iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(f(-3))$
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.
- 12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 1 \\ \ln(x-1) + \lambda, & x > 1 \end{cases}$, με $f(f(0)) = 1$
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\lambda = 1$.
- ii. Να υπολογίσετε τις τιμές : α) $f\left(\ln \frac{2}{5}\right)$ β) $f(\eta \mu \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ γ) $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0, 1)$
- iii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

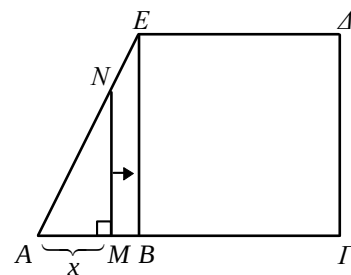
13) Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(20 - x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x .

14) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

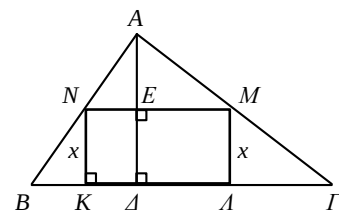


15) Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm³. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 €. ανά cm², ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας $1,25$ €. ανά cm². Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x . Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm, και ύψος 8 cm;

16) Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 1$, $AG = 3$ και $GD = 2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = AM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AG .



17) Ένα ορθογώνιο $KLMN$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ABG βάσης $BG = 10$ cm και ύψους $AG = 5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδό E και την περίμετρο P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .



18) Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t} + 4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

- Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t .
- Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα ;

19) Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8).$$

(Θέμα Γ1. 2018)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν είναι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε με πεδίο ορισμού το $A \cap B$ ορίζουμε τις συναρτήσεις :

- **Άθροισμα**, με $D_{f+g} = A \cap B$ και τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Διαφορά**, με $D_{f-g} = A \cap B$ και τύπο $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Γινόμενο**, με $D_{f \cdot g} = A \cap B$ και τύπο $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Τέλος με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση **Πηλίκο**, με $D_{\frac{f}{g}} = A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(2-x)$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{f}$.

Λύση :

Αρχικά πρέπει να βρούμε τα πεδία ορισμού των f, g .

Για την $f(x) = \sqrt{x-1}$ πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα $D_f = [1, +\infty)$

Για τη $g(x) = \ln(2-x)$ πρέπει $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ άρα $D_g = (-\infty, 2)$

- $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-1} + \ln(2-x)$
- $D_{f-g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-1} - \ln(2-x)$
- $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [1, 2)$ και $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \ln(2-x)$
- Για την $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2-x) \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\} = (1, 2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$.

- Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$ είναι το σύνολο $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \neq 0\}$

Δηλαδή $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Άρα $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \neq 0\} = (1, +\infty)$ και ο τύπος της είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21) Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

22) Αν $f(x) = \ln(x^2-1)$ και $g(x) = \ln x$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

23) Αν $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

24) Αν $f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x-2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{αν } x \leq -1 \\ x+1, & \text{αν } x > -1 \end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

25) Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \leq 2 \\ -x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

26) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x-1$ και $g(x) = e^x - 1$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f, g, f \cdot g, \frac{f}{g}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $(f \cdot g)(x) = 0$
- Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) > 0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y = f(x)$. Δηλ. $M(x, f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη C_f , αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημεία της της μορφής $M(x_0, 0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y = f(x) = 0$
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε σημεία της της μορφής $M(0, y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης :

Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

 - $g(x) = f(x) + c$ ή $g(x) = f(x) - c$, $c > 0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατακόρυφα κατά c μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα.
 - $g(x) = f(x - c)$ ή $g(x) = f(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f οριζόντια κατά c μονάδες προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αντίστοιχα.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3,5)$, να βρείτε :

- τον αριθμό α
- τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- τα σημεία όπου η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα $x'x$
- τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = -4x + 1$.
- τη σχετική θέση των C_f και C_h όπου $h(x) = \frac{2x^2 - |x-3|}{2}$.

Λύση :

- i. $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$, με $A_f = \mathbb{R}$.

Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3,5)$ άρα $f(-3) = 5 \Leftrightarrow 9 - 3\alpha + \alpha - 4 = 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, δηλ. $f(x) = x^2 - 4$.

- ii. Η C_f τέμνει τον $x'x$ για $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ άρα στα σημεία $A(2,0)$ και $B(-2,0)$
Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$ άρα $f(0) = -4$ δηλ. στο σημείο $\Gamma(0,-4)$.

- iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα $x'x$ άρα $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$

Είναι : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2,2)$

- iv. Για να βρω τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = -4x + 1$ (δηλ. τη συνάρτηση $g(x) = -4x + 1$), θα λύσω την εξίσωση : $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = -4x + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -5$, άρα στα σημεία $\Delta(1, f(1)) \rightarrow \Delta(1,-3)$ και $E(-5, f(-5)) \rightarrow E(-5,21)$.

- v. Για να βρω τη σχετική θέση των C_f και C_h , θεωρώ τη συνάρτηση :

$$\phi(x) = f(x) - h(x) = x^2 - 4 - \frac{2x^2 - |x-3|}{2}, A_h = \mathbb{R}.$$

Η C_f τέμνει τη C_h όταν :

$$\bullet \phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x) = x^2 - 4 = \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=8 \Leftrightarrow x=11 \\ \text{ή} \\ x-3=-8 \Leftrightarrow x=-5 \end{cases} \text{ δηλ. στα σημεία : } Z(11, f(11)) \text{ ή } Z(11,117) \text{ και } E(-5, f(-5)) \text{ ή } E(-5,21)$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Η C_f είναι πάνω από τη C_h , όταν :

$$\begin{aligned} f(x) > h(x) &\Leftrightarrow \phi(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 8 \Leftrightarrow x > 11 \\ \text{ή} \\ x-3 < -8 \Leftrightarrow x < -5 \end{cases} \quad \text{δηλ. } x \in (-\infty, -5) \cup (11, +\infty). \end{aligned}$$

- Η C_f είναι κάτω από τη C_h , όταν :

$$\begin{aligned} f(x) < h(x) &\Leftrightarrow \phi(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8 < 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| < 8 \Leftrightarrow -8 < x-3 < 8 \Leftrightarrow -5 < x < 11 \Leftrightarrow x \in (-5, 11). \end{aligned}$$

28)(Άσκηση 2 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ iii. $f(x) = e^x - 1$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ ή }, x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

iii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ άρα $x \in (0, +\infty)$

29)(Άσκηση 3 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση :

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + 1$	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0$

Έχω $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ή, $x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

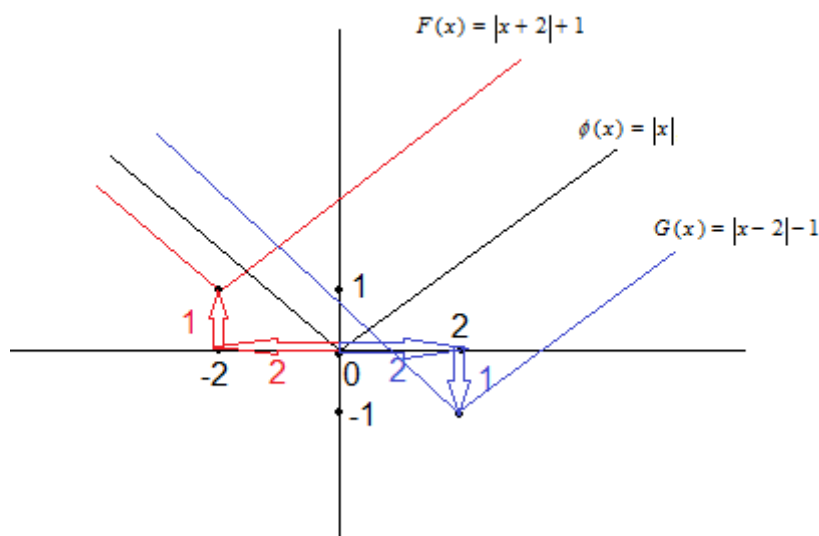
Άρα επειδή θέλω $x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

30) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\phi(x) = |x|, \quad F(x) = |x+2|+1, \quad G(x) = |x-2|-1$$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = |x+2|+1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x) = |x-2|-1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x) = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

31) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία A(-1,3) και B(1,7).

32) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία A(0,3), B(-1,0) και Γ(-2,-1).

33) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+9}$

ii. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

iii. $f(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi]$

iv. $f(x) = e^x - 1$

34) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'x.

i. $f(x) = e^{x^2-5x+6} - 1$

ii. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

iii. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

35) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

i. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 10$ και $g(x) = x^2 + 3x + 4$

ii. $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x-5$

iii. $f(x) = e^{x^2-4x+8}$ και $g(x) = e^{x+2}$

36) Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια από τη γραφική παράσταση να βρείτε το σύνολο τιμών :

i. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

ii. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

iii. $f(x) = \ln(x+1) - 1$

iv. $f(x) = \ln(x-1) + 2$

v. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

vi. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\forall -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \alpha\forall x > 1 \end{cases}$

vii. $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

viii. $f(x) = e^{-x} + 2$ και $g(x) = -\ln(x-2)$ (στο ίδιο σύστημα αξόνων)

(Θέμα Β 2019)

ix. $f(x) = \frac{|x|}{x} + 1$

x. $f(x) = x|x|$

xi. $f(x) = |\ln x|$

xii. $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$

xiii. $f(x) = \frac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}, x \in [0, 2\pi]$.

xiv. $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$ και η ευθεία $(\varepsilon): 6x - y - 4 = 0$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της (ε)

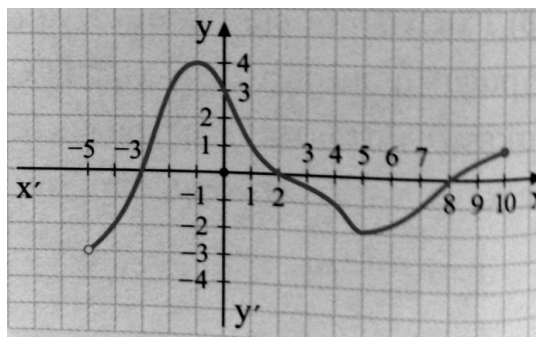
ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και (ε)

38) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = \kappa \ln(x+1) + \lambda$, για την οποία ισχύει ότι η C_f τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα y' στο 2.

i. Να βρείτε τα κ, λ

ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.

39) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f(f(-1))$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

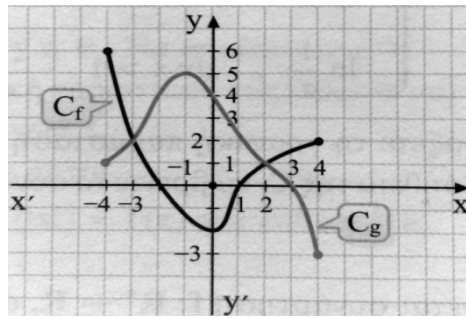
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$

vi. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

40) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f, g
- Να βρείτε τις τιμές $f(g(0))$ και $g(f(0))$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
- Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \leq 0$

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 2x e^x$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- Τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον x' .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αποτελείται από τις τιμές του y , για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση ως προς x , η οποία ανήκει στο A .

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f :

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
- Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x , βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y .
- Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το σύνολο τιμών της f .

Αν ένας αριθμός α ανήκει στο σύνολο τιμών της f , τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

42) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η

εξίσωση : $\pi e^x - \pi = e^x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Λύση :

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \text{ πρέπει } e^x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ άρα } D_f = A = \mathbb{R}.$$

$$\text{Θέτω } y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x - ye^x = y + 1 \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y + 1 \stackrel{\substack{\Gamma\iota\alpha \\ y \neq 1(1)}}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow$$

$$(\text{επίσης πρέπει : } \frac{y + 1}{1 - y} > 0 \Leftrightarrow (y + 1)(1 - y) > 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 1) \text{ (2) })$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + 1}{1 - y}, y \in (-1, 1).$$

$$\text{Συναληθεύοντας έχω : } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln \frac{y + 1}{1 - y} \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } y \in (-1, 1).$$

$$\text{Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει } y \in (-1, 1), \text{ άρα } f(A) = (-1, 1)$$

Η εξίσωση : $\pi e^x - \pi = e^x + 1$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα :

$$\pi e^x - \pi = e^x + 1 \Leftrightarrow \pi(e^x - 1) = e^x + 1 \Leftrightarrow \frac{\pi(e^x - 1)}{e^x + 1} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}.$$

Επομένως $\frac{1}{\pi} \in f(A) = (-1, 1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \pi e^x - \pi = e^x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

43) Να εξετάσετε αν :

- i. Ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$.
- ii. Ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

45) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $A = \mathbb{R}$ και $f(A) = (2, +\infty)$.

- i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2027$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{|\alpha|} + 1$ έχει μια, τουλάχιστον, λύση, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 2 + \ln x_0$

46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x - \ln(1 + e^x) = 1 - \ln \pi$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, όταν :

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A,
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

47) (Άσκηση 7 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

- i. $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$
- ii. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$
- iii. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

Λύση :

- i. $f(x) = \sqrt{x^2}$ πρέπει $x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_f = \mathbb{R}$
 $g(x) = (\sqrt{x})^2$ πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_g = [0, +\infty)$. Δηλ. $D_f \neq D_g$ άρα και $f \neq g$.
 Αν όμως $x \in [0, +\infty)$ τότε :

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x \quad \text{επίσης : } g(x) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \text{άρα αν } x \in [0, +\infty) \text{ ισχύει } f(x) = g(x).$$

- ii. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$ πρέπει $x^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| + 1) \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
 και $|x| + 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$g(x) = 1 - \frac{1}{|x|} \text{ πρέπει } |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0. \text{ Άρα } D_g = \mathbb{R} - \{0\}. \text{ Δηλ. } D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + |x|} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x|(|x| + 1)} = \frac{|x| - 1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x).$$

Άρα ισχύει $f(x) = g(x)$

- iii. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Άρα $D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$g(x) = \sqrt{x} + 1 \text{ πρέπει } x \geq 0 \text{ άρα } D_g = [0, +\infty). \text{ Δηλ. } D_f \neq D_g \text{ άρα και } f \neq g.$$

Αν όμως $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ τότε :

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x} + 1 = g(x)$$

Άρα αν $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

48) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

- Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
- Αν $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.
- Να γράψετε τη συνάρτηση g στη μορφή δύναμης.

Προσοχή : Για τη συνάρτηση $h(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$, $A_f = [0, +\infty)$
- Αν $\alpha < 0$, $A_f = (0, +\infty)$

Λύση :

- Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι : $x \geq 0$, δηλαδή $A_f = [0, +\infty)$.
Για τη συνάρτηση g ισχύει ότι : $x^4 \geq 0$, δηλαδή $A_g = \mathbb{R}$.
Επειδή $A_f \neq A_g$ άρα και $f \neq g$.
- Αν όμως $x \in \Gamma = [0, +\infty)$ τότε : $f(x) = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4} = g(x)$.
- Είναι : $g(x) = \sqrt[3]{x^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{4}{3}}, & x < 0 \end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

49) Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. Αν δεν είναι να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο Γ του $\mathbb{R}$ στο οποίο $f=g$.

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ και $g(x) = |x - 1|$
- $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$
- $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$ και $g(x) = |x| + 2$
- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $h(x) = e^{\frac{2}{3} \ln x}$
- $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$ και $g(x) = \frac{x + 4}{x - 1}$

50) Να αποδειχθεί η ισότητα των παρακάτω συναρτήσεων :

- $f(x) = \sqrt{x} - 2$ και $g(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$
- $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ και $g(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 2)$

51) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f^2(x) + g^2(x) + 8x^2 \leq 4x(f(x) + g(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι } f = g.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για να προσδιορίσουμε την $(f \circ g)(x)$ δηλ. την $f(g(x))$

- 1) Βρίσκω το D_f και D_g
- 2) Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$
- 3) Για να βρω τον τύπο της $(f \circ g)(x)$ δηλ. της $f(g(x))$ πάω στην $f(x)$ και βάζω όπου x το $g(x)$. (Ομοίως ορίζεται και $g \circ f$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52)(Άσκηση 11 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση :

• $g \circ f$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [2, +\infty)$$

$$\text{Για να ορίζεται η } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ πρέπει : } \begin{cases} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 + 1 \in [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 + 1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \stackrel{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

* $x^2 - 1 \geq 0$, έχω $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0

$$\text{Άρα } D_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \text{ και } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$$

• $f \circ g$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [2, +\infty)$$

$$\text{Για να ορίζεται η } (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ πρέπει : } \begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, +\infty) \\ \text{και} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow D_{f \circ g} = [2, +\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-2}^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

53) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Θέμα Β1 2017)

Λύση :

$$f(x) = \ln x \text{ με } A_f = (0, +\infty) \text{ και } g(x) = \frac{x}{1-x} \text{ με } A_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει :

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases}. \text{ Δηλ. } A_{f \circ g} = (0,1).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x} \text{ με } x \in (0,1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

54) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x) = \frac{x}{x-4}$ και $g(x) = x^2 - x + 2$

ii. $f(x) = \sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

55) Αν $f(x) = x^2 + 5$ και $g(x) = \sqrt{x-9}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

56) Αν $f(x) = \ln(x-3)$ και $g(x) = \sqrt{x}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

57) Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις : i. $f \circ \frac{1}{g}$ ii. $f \circ \frac{1}{f}$.

58) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ και $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$

ii. $f(x) = x^2 + x + 2$ και $g(x) = \sqrt{1-|x-3|}$

iii. $f(x) = \begin{cases} x-2, & \alpha\nu \ 1 \leq x \leq 4 \\ 5-x, & \alpha\nu \ 4 < x < 8 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-3, & \alpha\nu \ 0 < x < 3 \\ 4-x, & \alpha\nu \ 3 \leq x < 6 \end{cases}$

59) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $g(x) = f(x-2) + f(\ln x)$.

60) Αν $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g \circ f$, $f \circ g$ και $f \circ f$.

61) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x+1$ και $g(x) = x+3$. Να λυθεί $(g \circ f \circ f)(x) = (f \circ g \circ g)(x)$.

62) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x+1$ και $g(x) = ax+2$. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

63) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$, με $\beta \neq -\alpha^2$ και $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Να

αποδείξετε ότι :

- $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και
- $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

64) Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, αν :

- $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$
- $f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$
- $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$
- $f(x) = \eta\mu^2(3x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

A) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $g(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

- Θέτουμε $g(x) = u$
- Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς x
- Αντικαθιστούμε το x που βρήκαμε στον τύπο $f(g(x))$

B) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $f(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $g(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

- Θέτουμε όπου x το $g(x)$ στον τύπο της $f(x)$
- Έχουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$ με δυο μορφές (μία αυτή που βρήκαμε και μία από τα δεδομένα). Εξισώνουμε τις δυο αυτές μορφές και βρίσκουμε τη $g(x)$.

(Αν η σύνθετη συνάρτηση και η συνάρτηση που μου δίνεται ξεκινούν με διαφορετικό γράμμα, κάνω το A, αν ξεκινούν με το ίδιο κάνω το B)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65) (Άσκηση 6 σελ. 148 σχολικό βιβλίο Β' ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

- $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$ και $g(x) = x + 1$
- $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$ και $g(x) = -x^2$
- $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Λύση :

- A)** Θέτω $g(x) = u \Leftrightarrow x + 1 = u \Leftrightarrow x = u - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$.
 $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow f(u) = (u - 1)^2 + 2(u - 1) + 2 \Leftrightarrow$
 $f(u) = u^2 - 2u + 1 + 2u - 2 + 2 \Leftrightarrow f(u) = u^2 + 1$ άρα $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- A)** Θέτω $g(x) = u \Leftrightarrow -x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = -u$, με $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -u \geq 0 \Leftrightarrow u \leq 0$
 $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(g(x)) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(u) = \sqrt{1 - u}$ δηλαδή $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $A_f = (-\infty, 0]$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- iii. **B)** $(g \circ f)(x) = |\sin x| \Leftrightarrow g(f(x)) = |\sin x| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |\sin x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \sin^2 x \Leftrightarrow$
 $f^2(x) = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}.$ Δυο τέτοιες συναρτήσεις είναι
π.χ. $f(x) = \eta\mu x$ ή $f(x) = -\eta\mu x.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

66) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , αν :

- $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 6x - 10$ και $g(x) = 2x - 1$
- $(f \circ g)(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}$
- $(g \circ f)(x) = 3x - 4$ και $g(x) = x + 2$
- $(g \circ f)(x) = 9x^2 - \eta\mu x + 1$ και $g(x) = 3x - 1$

67) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2x - 1) = 4x^2 - 14x + 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$
Να βρείτε τον τύπο της $f.$

68) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(5 - 3x) = 9x^2 - 30x + 21$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$
Να βρείτε τον τύπο της $f.$

69) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$ για κάθε $x > 0.$ Να
βρείτε τον τύπο της $f.$

70) Δίνεται συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1 - e^x) = \ln x + x$ για κάθε $x > 0.$
Να βρείτε τον τύπο της $f.$

71) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , αν :

- $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $f(x) = 3x + 1$
- $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4$ και $f(x) = 2x - 1$

72) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 3x - 2$ και $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x + 10.$ Να
βρείτε :

- τη συνάρτηση $f,$
- τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g.$

73) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x - 3$ και $(g \circ f)(x) = 2e^x(e^x + 1) - 15.$ Να
βρείτε :

- τη συνάρτηση $f,$
- τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΑΡΤΙΕΣ – ΠΕΡΙΤΤΕΣ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για να δείξω ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται άρτια αν για $x \in A$ και $-x \in A$ τότε ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Ενώ λέγεται περιττή αν για $x \in A$ και $-x \in A$ τότε ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Τέλος η f λέγεται περιοδική όταν υπάρχει $T \neq 0$ με : $f(x+T) = f(x)$ και $f(x-T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. **Προσοχή :**

- Μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ (και αντίστροφα)
- Αν η f είναι περιττή τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει οπωσδήποτε το πεδίο ορισμού να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή να ισχύει $x, -x \in D_f$ για κάθε $x \in D_f$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :

i. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ ii. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

Λύση :

i. Πρέπει : $\sqrt{x^2+1} + x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$ (1)

1^{ος} τρόπος :

- Αν $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, τότε :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

- Αν $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$, τότε η (1) προφανώς ισχύει.

Οπότε η ανισότητα (1) ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$

2^{ος} τρόπος :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$.

Άρα $A_f = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{(-x)^2+1} - x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln 1 - \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x) = -f(x) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Πρέπει :

- $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

- $\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

*

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 > 0$ τότε $x \in (-1,1)$

Τελικά $A_f = (-1,1)$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης :

$$f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x). \text{ Άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

75) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές :

- i. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ii. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ iii. $f(x) = x^2 + x \eta \mu x$
iv. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ v. $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ όταν $x \in [-1, +\infty)$
vi. $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ vii. $f(x) = x \eta \mu \frac{1}{x}$

76) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{\alpha - x}{x + 3}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g

διέρχεται από το σημείο A(-5,-4).

- i. Να βρείτε τον αριθμό α .
ii. Να ορίσετε τη $(f \circ g)(x)$.
iii. Να αποδείξετε ότι η $(f \circ g)(x)$ είναι περιττή.

77) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.
ii. Η f είναι περιττή.
iii. Η C_f έχει με τον x'x μόνο ένα κοινό σημείο.

78) Αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνθέσιμες συναρτήσεις τότε :

- i. Να δείξετε ότι αν η g είναι άρτια, τότε και η $f \circ g$ είναι άρτια.
ii. Να δείξετε ότι αν οι f, g είναι περιττές, τότε και η $f \circ g$ είναι περιττή.
iii. Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, τότε και η $f \circ g$ είναι άρτια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σε κάποιες ασκήσεις δεν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, αλλά κάποια σχέση ή γενική ιδιότητα που έχουν οι τιμές της. Π.χ $f(x+y) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η σχέση ισχύει για κάθε τιμή των x, y , συνήθως επιλέγουμε κατάλληλες τιμές που μας βολεύουν όπως : $x=y=0$, ή $x=y=1$ ή $x=y$ ή $x=0$ ή $y=-x$ κλπ.

- Αν προκύψει σχέση της μορφής $f(x) \cdot g(x) = 0$ είναι λάθος να συμπεράνω ότι : $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν ότι : $f(x) \cdot g(x) = (x - |x|) \cdot (x + |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$.

- Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση και με κατάλληλη επιλογή τιμών για τις μεταβλητές οδηγούμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

79) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Λύση :

$$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5 \quad (1)$$

Στην (1) έστω $x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1$ και έχω

$$3f(y-1+1) - 2f[2-(y-1)] = (y-1)^2 + 14(y-1) - 5 \Leftrightarrow$$

$$3f(y) - 2f(2-y+1) = y^2 - 2y + 1 + 14y - 14 - 5 \Leftrightarrow 3f(y) - 2f(3-y) = y^2 + 12y - 18 \quad \text{ή}$$

$$\boxed{3f(x) - 2f(3-x) = x^2 + 12x - 18} \quad (2)$$

Επίσης στην (1) έστω $2-x = y \Leftrightarrow x = 2-y$ και έχω :

$$3f(2-y+1) - 2f[2-(2-y)] = (2-y)^2 + 14(2-y) - 5 \Leftrightarrow 3f(3-y) - 2f(y) = 4 - 4y + y^2 + 28 - 14y - 5 \Leftrightarrow$$

$$3f(3-y) - 2f(y) = y^2 - 18y + 27 \quad \text{ή} \quad \boxed{3f(3-x) - 2f(x) = x^2 - 18x + 27} \quad (3).$$

Τις (2) και (3) τις κάνω σύστημα και έχω :

$$\begin{cases} 3f(x) - 2f(3-x) = x^2 + 12x - 18 \cdot (3) \\ -2f(x) + 3f(3-x) = x^2 - 18x + 27 \cdot (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x) - 6f(3-x) = 3x^2 + 36x - 54 \\ -4f(x) + 6f(3-x) = 2x^2 - 36x + 54 \end{cases} \quad \text{προσθέτω}$$

$$\text{κατά μέλη και έχω : } 5f(x) = 5x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

80) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x^2+6) + f(5x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

Λύση :

$$[\text{Είναι } x^2 + 6 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3]$$

Η σχέση $f(x^2+6) + f(5x) = 0$ (1) για :

- $x = 2$ γίνεται $f(4+6) + f(10) = 0 \Leftrightarrow 2f(10) = 0 \Leftrightarrow f(10) = 0$, άρα η $x = 10$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- $x = 3$ γίνεται $f(9+6) + f(15) = 0 \Leftrightarrow 2f(15) = 0 \Leftrightarrow f(15) = 0$, άρα η $x = 15$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

81) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(f(x)) = 2x - 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Στη σχέση (1), θέτω όπου x το $f(x)$ και έχω :

$$f(f(f(x))) = 2f(x) - 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}.$$

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

82) Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ (1) για κάθε $x, y > 0$. Να δείξετε ότι :

- $f(1) = 0$
- $f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$ για κάθε $y > 0$.
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y > 0$.

Λύση :

- Στη σχέση (1), θέτω $x = y = 1$ και έχουμε : $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$
- Στη σχέση (1), θέτω $x = \frac{1}{y}$ και έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) \Leftrightarrow f(1) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) \Leftrightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$$

- Έχουμε : $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \stackrel{(1)}{=} f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \stackrel{ii.}{=} f(x) - f(y)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

83) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x - 2) + 2f(3 - x) = 11 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι $f(x) + 2f(1 - x) = 7 - 2x$
- Να αποδειχθεί ότι $f(1 - x) + 2f(x) = 5 + 2x$
- Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

84) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2) + f(2x) = x^4 - 8x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

85) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δυο τουλάχιστον σημεία.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

86) Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x - 1$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

87) Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 3x - 2$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

88) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

- i. $f(0) = 0$.
- ii. Η f είναι περιττή
- iii. $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

89) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση :
 $f(x) + x \leq x^2 \leq f(x+1) - x$.

- i. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x^2 - x$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
- iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

90) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $x^3[f(x) + f(-x) + 6] = 3f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

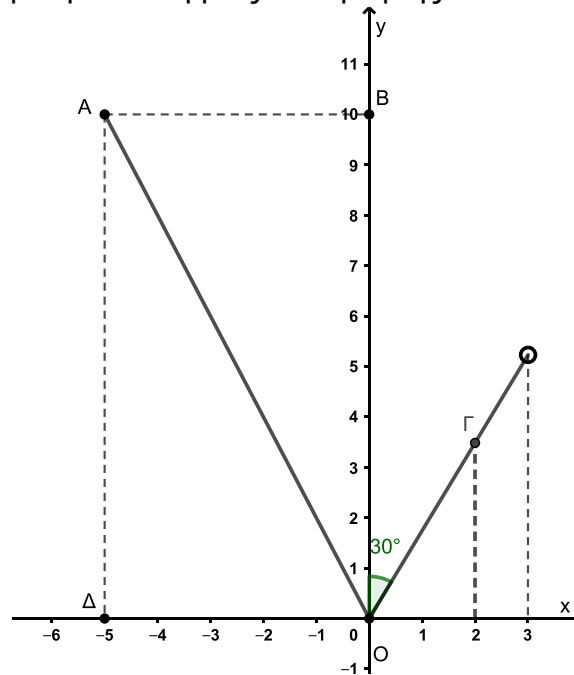
91) Έστω μια συνάρτηση : $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - 2 = \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- i. Να δείξετε ότι $f(1) = 1$.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < \ln x + 2$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΙΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ 1.1-1.2

ΘΕΜΑ 2 #26603

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2 #29831

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2 #35168

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$f(x) = \ln(1 + e^x)$, $g(x) = 2\ln x$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2 #29832

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 9)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2 #29830

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$ (Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$ (Μονάδες 8)

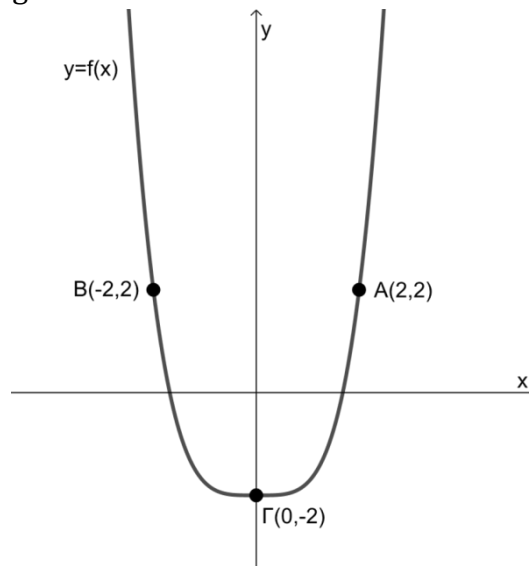
ΘΕΜΑ 2 #28304

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4 #26604

Δυο εταιρείες E_1 και E_2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E_1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E_2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E_1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

i. Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E_1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)

iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E_2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E_1 ; (Μονάδες 6)