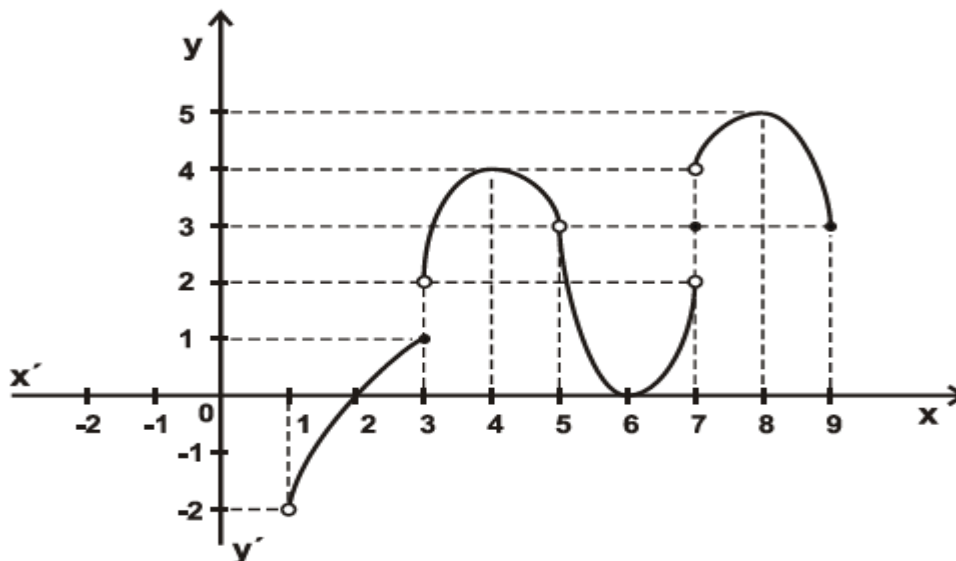


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - x - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x > 1 \end{cases}$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)+2}{x-1} + \frac{f(\beta)+2}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{1\}$.
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες ετερόσημες.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1} + \frac{f(\beta)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.
 - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1) + \eta\mu\alpha = \ln x + \alpha$ έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$ για κάθε θετικό αριθμό α .
154. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$
155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.
- Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια μόνο ρίζα.
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e$
 - Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$.
156. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) - x^2 = \alpha x + \beta - 2f(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

157. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :
- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(ΘΕΜΑ Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)

158. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

- $f(1) \cdot f(3) \cdot f(9) = 27$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 9]$. Να αποδείξετε ότι :
- i. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 9]$.
- ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [1, 9]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3$.
- iii. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 9]$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$.

- i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.
- ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x)}$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = 1$, έχει μοναδική ρίζα.
- v. Αν για τη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει : $e^{3g(x)} + g^3(x) = x^3 e^6 + (\ln x + 2)^3$, για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x) = \ln x + 2$ και να βρεθεί η αντίστροφη της.

(ΘΕΜΑ Β ΟΕΦΕ 2016 Α΄ ΦΑΣΗ)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

160. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1$.

- Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει : $\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$.

(ΘΕΜΑ Β study4exams)

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x^2} - e$, $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε :

- Το πρόσημο της τιμής $f\left(\frac{1}{100}\right)$.
- Το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδείξετε ότι : $f(0,01) \cdot f(\sqrt[3]{2006}) > f(0,01) \cdot f(\sqrt[3]{2007})$
- Να συγκρίνετε τους θετικούς αριθμούς α και β αν ισχύει η ισότητα : $e^{\alpha^2} + \ln \alpha = e^{\beta^2} + \ln \beta$.

162. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δυο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$
 - Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$

- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3)x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)x^3 + 5} = -\infty$

(ΘΕΜΑ Β study4exams)

163. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
- Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .
- Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha < 2$.
- Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha > 3$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

164. Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ (1)
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0 τότε να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x \cdot y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

165. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$

ii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

166. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ, λ .

ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

167. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

• $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2016$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. Να βρείτε το $f(1)$

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

168. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0,8] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in [0,8].$$

Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. $f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{3}{2}$

iii. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

iv. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συνταγμένες του.

(ΘΕΜΑ Γ E.M.E 2014)

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

169. Έστω η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $[f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Αν η C_f έχει με τον άξονα x' δυο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x=1$ η f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1)=1$. **(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2008)**

170. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1)

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x-1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)**

171. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x) = x^6$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

iii. Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$

iv. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

v. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} . **(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)**

172. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει :

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - \sin^2 x - x^2, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ με } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(kx)}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$, με $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την

παράμετρο k , ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Για $k=2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

iv. Για $k=2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

(ΘΕΜΑ Γ Ο.Ε.Φ.Ε. 2016 ΦΑΣΗ Α')

➤ **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

- 1) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
- 2) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- 3) Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- 4) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $fo g$ και gof , τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
- 5) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
- 6) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.
- 7) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
- 8) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $fo g$ και gof , τότε είναι υποχρεωτικά $fo g \neq gof$.
- 9) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- 10) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν : $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- 11) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- 12) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx') τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.
- 13) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
- 14) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- 15) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$$
- 16) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
- 17) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- 18) Η συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- 19) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $fo g$ και gof , τότε πάντοτε ισχύει $fo g = gof$.
- 20) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.
- 21) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- 22) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 23) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- 24) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- 25) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.
- 26) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- 27) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
- 28) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- 29) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.
- 30) Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1 τότε ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$
- 31) Αν η f είναι 1-1 και το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C της f , τότε το $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως.

➤ ΟΡΙΑ

- 32) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- 33) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- 34) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
- 35) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει:
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
- 36) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει :
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{εφόσον} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$
- 37) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$.
- 38) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.
- 39) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$.
- 40) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε :
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$
- 41) Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- 42) Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε : $\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
- 43) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

44) Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

45) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

46) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

47) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$

48) Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

49) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

50) Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$

51) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

52) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

53) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

54) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 , και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

55) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

56) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

57) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

58) Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

59) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

60) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$

61) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

62) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

63) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

64) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

65) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

66) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

➤ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- 67) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[α,β]$ και συνεχής στο $(α,β]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[α,β]$ μία μέγιστη τιμή.
- 68) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(α) \cdot f(β) < 0$.
- 69) Αν f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $ξ \in (α,β)$ ώστε $f(ξ)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$.
- 70) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- 71) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 72) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
- 73) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 74) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(α,β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- 75) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- 76) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 77) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(α,β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.
- 78) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[α, β]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.
- 79) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- 81) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή, M , και μια ελάχιστη τιμή, m .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2023

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΕΛ. 173

- 1)Σ 2)Λ 3)Λ 4)Λ 5)Σ 6)Λ 7)Σ 8)Λ 9)Σ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Σ 14)Σ 15)Σ
16)Σ 17)Σ 18)Σ 19)Λ 20)Σ 21)Σ 22)Σ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Σ 27)Σ 28)Λ 29)Λ
30)Σ 31)Σ 32)Σ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Σ 38)Σ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Σ 43)Σ
44)Λ 45)Σ 46)Σ 47)Σ 48)Λ 49)Λ 50)Λ 51)Σ 52)Σ 53)Λ 54)Σ 55)Λ 56)Σ 57)Λ
58)Λ 59)Λ 60)Λ 61)Λ 62)Σ 63)Λ 64)Σ 65)Σ 66)Λ 67)Λ 68)Λ 69)Λ 70)Σ 71)Σ
72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Σ 76)Σ 77)Λ 78)Σ 79)Σ 80)Σ 81)Σ

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

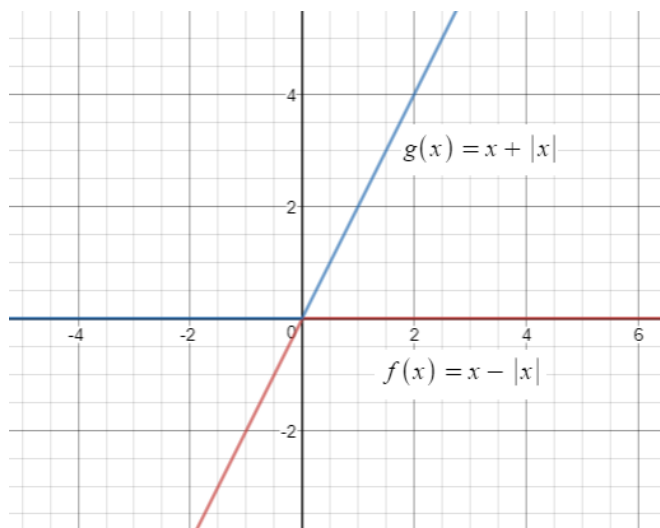
Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν ότι :

$$f(x) \cdot g(x) = (x - |x|) \cdot (x + |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0.$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι παραπάνω συναρτήσεις και οπτικοποιείται το αποτέλεσμα :



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν f, g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A , B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A, B και για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$ τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. A

β.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ που έχουν πεδία

ορισμού τα σύνολα $A = \mathbb{R} - \{1\}$ και $B = \mathbb{R} - \{0\}$ αντίστοιχα, είναι ίσες στο σύνολο

$\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, αφού για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(x) = g(x) = x + 1$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν f, g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $g \circ f = f \circ g$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η παράσταση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει : $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ ή , ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1, \text{ δηλαδή πρέπει } x \geq 1. \text{ Επομένως, ορίζεται η}$$

$g \circ f$ και είναι : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$

Για να ορίζεται η παράσταση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει : $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ ή , ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0, \text{ δηλαδή πρέπει } x > 0. \text{ Επομένως, ορίζεται η}$$

$f \circ g$ και είναι : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}$, $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$. Τελικά

παρατηρούμε ότι $g \circ f \neq f \circ g$.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω f, g, h τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $h \circ (g \circ f) = (g \circ f) \circ h$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Είναι ψευδής καθώς στην σύνθεση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως εξηγήθηκε στο 2. αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(Πανελλήνιες 2018)

«Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο A και “1-1” τότε είναι και γνησίως μονότονη στο A ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

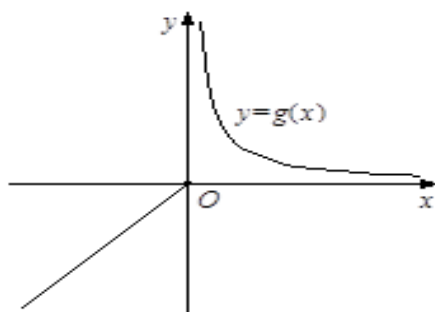
Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι “1-1” αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για

παράδειγμα η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση

δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l \neq 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,

και έτσι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Ενώ η συνάρτηση $|f(x)| = \left| \frac{|x|}{x} \right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$ έχει όριο στο $x_0 = 0$ και είναι

$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = l \neq 0$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$,

και έτσι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ενώ η συνάρτηση $f^2(x) = \left(\frac{|x|}{x}\right)^2 = \frac{|x|^2}{x^2} = 1$ έχει όριο στο $x_0 = 0$ και είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β)

στα οποία θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **A**

β.

Για παράδειγμα αν θέλουμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$

περιοριζόμαστε στο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο παίρνει την

μορφή $f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$, και επομένως το ζητούμενο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(Πανελλήνιες 2020 Π.Σ.)

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu+1}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{2\nu+1}) = 0$. Όμως το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν

υπάρχει καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$.

10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(Πανελλήνιες 2018 Επαναληπτικές)

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

11. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

(Πανελλήνιες 2019)

«Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

(Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β. Ο ισχυρισμός θα ήταν σωστός, αν η f ήταν συνεχής στο x_0 . Για παράδειγμα, η

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \text{ . Ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2, \text{ ενώ } f(1) = 3.$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

12. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **A**

β.

Για παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$,

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x) = 2$ οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

13. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της f στο x_0 .»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **A**

β.

Για παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2, \quad \text{ενώ} \quad f(1) = 3.$$

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)f(\beta) > 0$

τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β.

Αν $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχουμε $f(0) = -1$, $f(2\pi) = -1$, άρα $f(0)f(2\pi) = 1 > 0$ δηλαδή η συνεχής f έχει στα άκρα του διαστήματος ομόσημες τιμές και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 2\pi)$ αφού

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/4 \text{ ή } x = 5\pi/4.$$

15. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **Ψ**

β.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο

$\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν διατηρεί πρόσημο στο σύνολο αυτό αφού $f(x) < 0$, για $x < 0$ και $f(x) > 0$, $x > 0$.

16. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίου ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$ όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. **A**

β.

Αν $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο $[-1, 1]$ αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με ελάχιστη τιμή $m = -1$ και μέγιστη τιμή $M = 1$.