

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

«ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ»



Επιμέλεια :
Παλαιολόγου Παύλος
Μαθηματικός

3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- **Αιτιοκρατικό πείραμα** ονομάζουμε κάθε πείραμα για το οποίο, όταν ξέρουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται, μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα.
- **Πείραμα τύχης** ονομάζουμε κάθε πείραμα το οποίο όσες φορές και να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.
π.χ. η ρίψη ενός ζαριού είναι ένα πείραμα τύχης.
- **Δειγματικός χώρος Ω** ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν κατά την εκτέλεση του πειράματος. Το πλήθος των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου συμβολίζεται με $N(\Omega)$.
π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ με $N(\Omega) = 6$.
- **Ενδεχόμενο** ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία του ένα ή περισσότερα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος. Δηλαδή κάθε ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου και συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα. Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου συμβολίζεται με $N(A)$.
π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού το ενδεχόμενο A "η ρίψη να είναι περιττός αριθμός" είναι $A = \{1,3,5\}$ με $N(A) = 3$
- **Βέβαιο ενδεχόμενο** ονομάζεται ο δειγματικός χώρος Ω , γιατί πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος.
π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού το ενδεχόμενο A "η ρίψη να είναι αριθμός από 1-6" είναι $A = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- **Αδύνατο ενδεχόμενο** είναι αυτό που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και συμβολίζεται με το κενό σύνολο $\emptyset$.
π.χ. στη ρίψη ενός ζαριού το ενδεχόμενο A "η ρίψη να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 6" είναι $A = \emptyset$
- **Απλό** ονομάζεται το ενδεχόμενο που έχει μόνο ένα στοιχείο, ενώ **σύνθετο** ονομάζεται το ενδεχόμενο που έχει περισσότερα από ένα στοιχεία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω , εφαρμόζονται γι' αυτά οι γνωστές πράξεις συνόλων. Έτσι αν A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω , ισχύει :

➤ **Τομή** των A, B : $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ \& } x \in B\}$ $\cap = \text{και}$

Δηλαδή η Τομή των A, B περιέχει τα κοινά τους στοιχεία.

➤ **Ένωση** των A, B : $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$ $\cup = \text{ή}$

Δηλαδή η Ένωση των A, B περιέχει τα στοιχεία και των δυο συνόλων.

➤ **Συμπλήρωμα** του A ή αντίθετο του A : $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

Δηλαδή περιέχει τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν ανήκουν στο A .

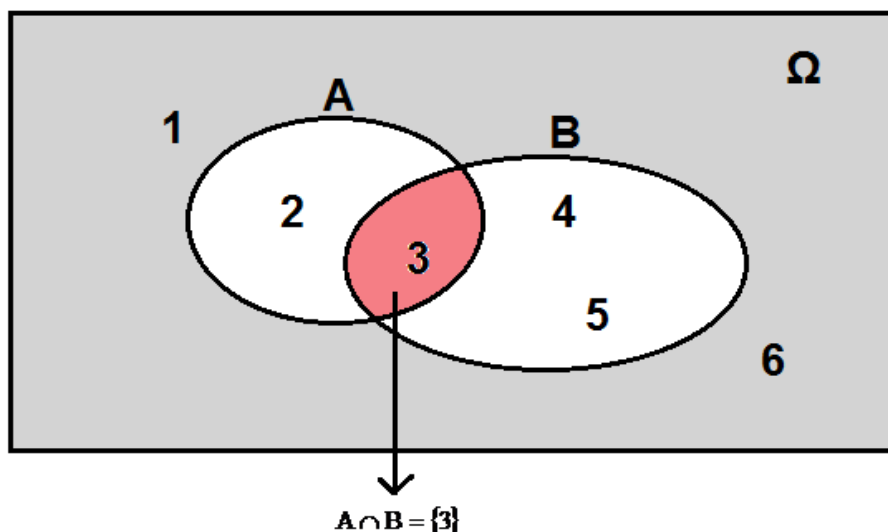
➤ **Διαφορά** του B από το A ονομάζεται το ενδεχόμενο $A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega / x \in A, \text{ και } x \notin B\}$

➤ Δυο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται **ασυμβίβαστα** όταν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλ. $A \cap B = \emptyset$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

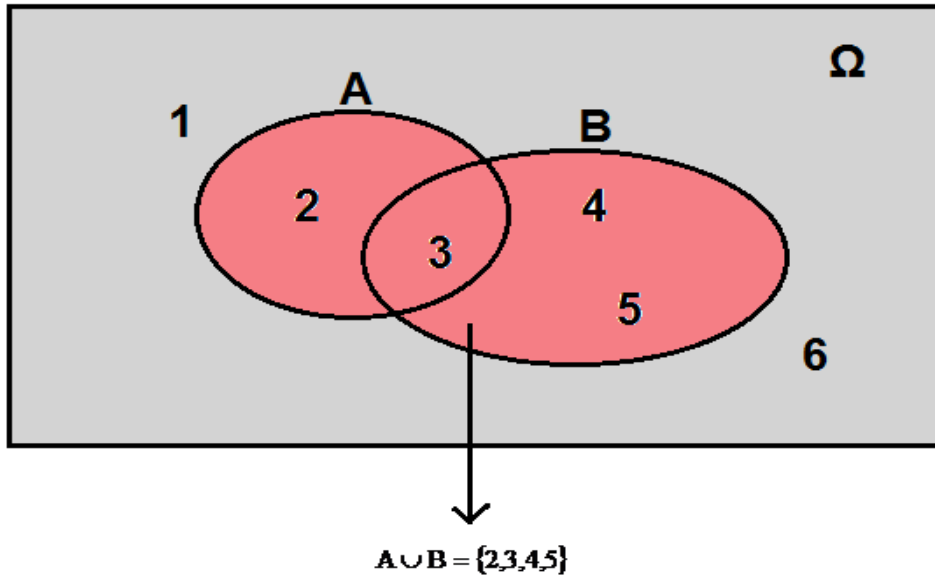
1. Ρίχνουμε ένα ζάρι και έστω A, B δυο ενδεχόμενα τέτοια ώστε $A = \{2,3\}$ και $B = \{3,4,5\}$. Προφανώς $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Να βρείτε τα ενδεχόμενα : i. $A \cap B$ ii. $A \cup B$ iii. A' iv. $A - B$

i. $A \cap B = \{3\}$

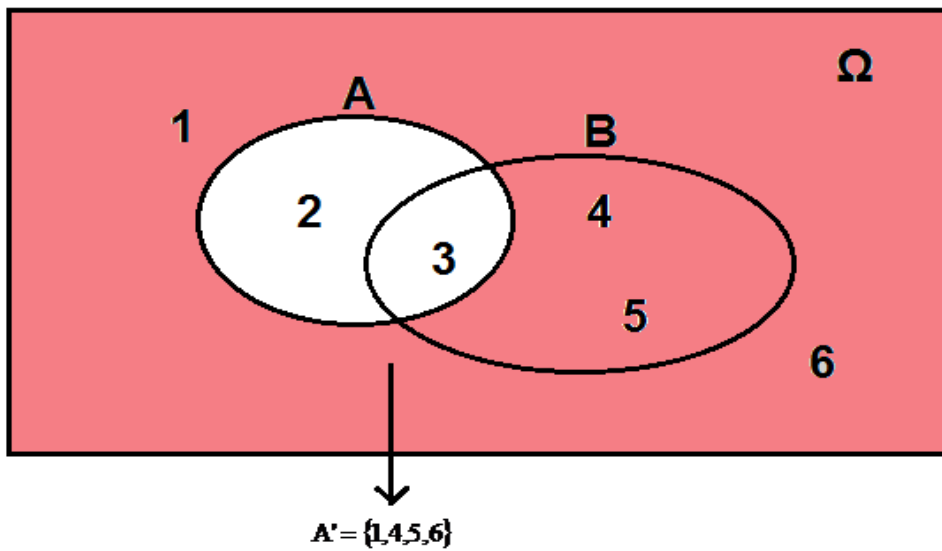


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

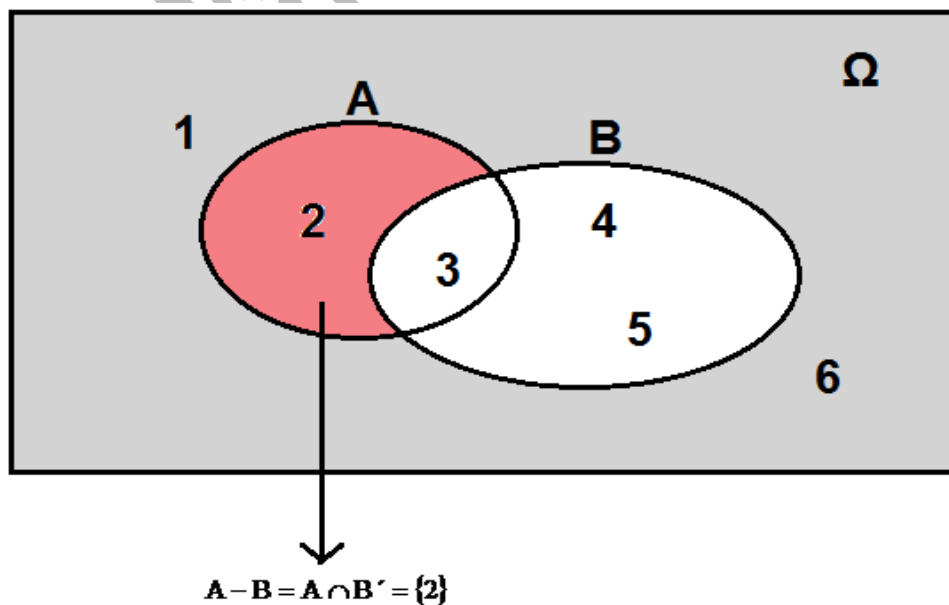
ii. $A \cup B = \{2,3,4,5\}$



iii. $A' = \{1,4,5,6\}$



iv. $A - B = A \cap B' = \{2\}$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι και έστω A, B δυο ενδεχόμενα τέτοια ώστε $A = \{1,2,3\}$ και $B = \{1,3,5\}$. Προφανώς $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Να βρείτε τα ενδεχόμενα : i. $A \cap B$ ii. $A \cup B$ iii. A' iv. $A - B$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2Α : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ (ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ)

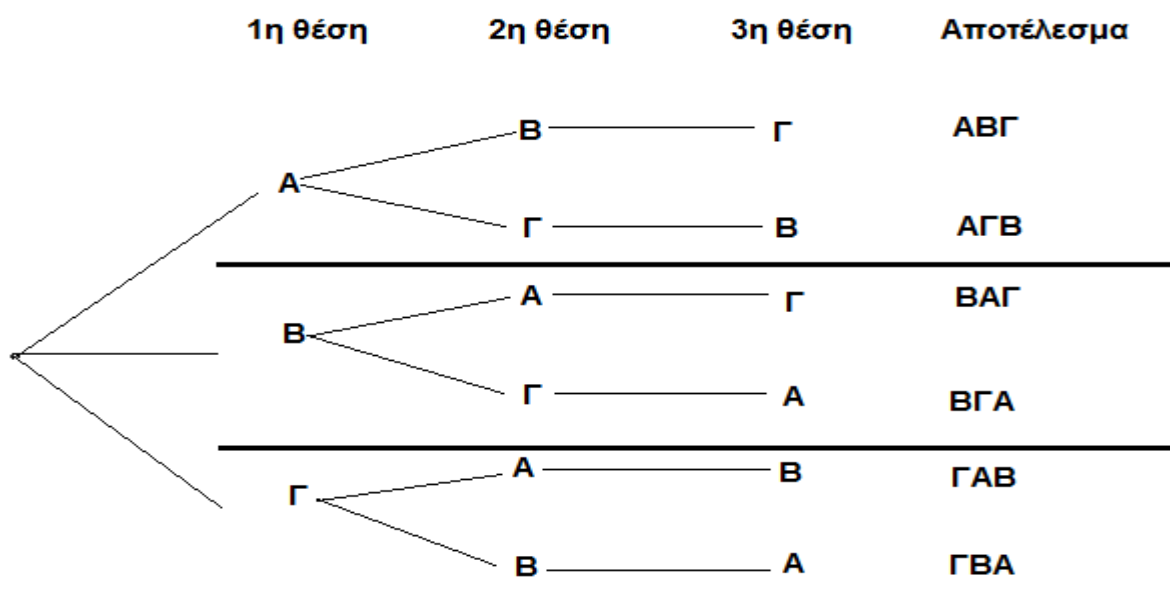
Πολλές φορές για τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και των ενδεχομένων του χρησιμοποιούμε **δενδροδιαγράμματα**. Όταν η διαδικασία εκτέλεσης ενός πειράματος τύχης μπορεί να χωριστεί σε δυο τουλάχιστον φάσεις ή βήματα, τότε ο δειγματικός χώρος προσδιορίζεται με τη βοήθεια ενός διαγράμματος στο οποίο περιγράφουμε διαδοχικά τα δυνατά αποτελέσματα σε κάθε φάση του πειράματος. Το διάγραμμα αυτό καλείται **δενδροδιαγράμμα**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Τρεις φίλοι, ο Αντρέας, ο Βασίλης και ο Γιώργος διαγωνίστηκαν μεταξύ τους σε ένα μαθηματικό τεστ. Η κατάταξη ως προς τις θέσεις που κατέλαβαν ήταν ανάλογη των αποτελεσμάτων τους στο παραπάνω τεστ.
- Να βρεθεί το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ως προς τη σειρά κατάταξης τους. (Δειγματικός χώρος)
 - Έστω τα ενδεχόμενα A : ο Γιώργος βγήκε πρώτος και B : ο Βασίλης βγήκε δεύτερος. Να γράψετε τα ενδεχόμενα $A, B, A \cap B, A \cup B, A', A - B$

Λύση :

i.



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{AB\Gamma, A\Gamma B, B\Lambda\Gamma, B\Gamma A, \Gamma A B, \Gamma B A\}$

- ii. $A = \{\Gamma A B, \Gamma B A\}$, $B = \{A B \Gamma, \Gamma B A\}$, $A \cap B = \{\Gamma B A\}$, $A \cup B = \{\Gamma A B, \Gamma B A, A B \Gamma\}$,
 $A' = \{A B \Gamma, A \Gamma B, B A \Gamma, B \Gamma A\}$, $A - B = A \cap B' = \{\Gamma A B\}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2B : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ (ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ)

Σε κάποια πειράματα τύχης (συνήθως ρίψη δυο ζαριών) για τον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον **πίνακα διπλής εισόδου**. Ο πίνακας διπλής εισόδου κατασκευάζεται ως εξής :

Βρίσκουμε τα δυνατά αποτελέσματα της 1^{ης} φάσης και τα γράφουμε στην πρώτη στήλη του πίνακα. Βρίσκουμε τα δυνατά αποτελέσματα της 2^{ης} φάσης και τα γράφουμε στην πρώτη γραμμή του πίνακα. Τέλος συμπληρώνουμε τον πίνακα με ζεύγη της μορφής (α,β) όπου α και β είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα της 1^{ης} και της 2^{ης} φάσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές.
- Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος
 - Να βρεθούν τα ενδεχόμενα :
 A : το αποτέλεσμα της 1^{ης} ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2^{ης}.
 B : το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο του 7.
 - Να βρεθεί το ενδεχόμενο $A \cap B$

Λύση:

i.

2 ^η ρίψη 1 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$

- $A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$
 $B = \{(2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$
- $A \cap B = \{(5,3), (5,4), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Μια οικογένεια έχει 4 παιδιά. Εξετάζουμε την οικογένεια ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησης των παιδιών.
- Να γράψετε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων (Δειγματικό χώρο)
 - Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
 A : το πρώτο παιδί είναι κορίτσι,
 B : τα δυο μικρότερα παιδιά είναι αγόρια. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A, B, A', B', $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $A' \cup B$
6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.
- Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
 - Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
 A : μια φορά τουλάχιστον κεφαλή
 B : το πολύ μια φορά γράμματα.
 Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A, B, A', $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $(A \cup B)'$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

7. Ρίχνουμε ένα ζάρι 2 φορές.
- Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος
 - Να βρεθούν τα ενδεχόμενα :
A : το αποτέλεσμα της 1^{ης} ρίψης είναι μικρότερο από το αποτέλεσμα της 2^{ης}.
B : το άθροισμα των ενδείξεων είναι μικρότερο του 8.
Γ : το γινόμενο των ενδείξεων είναι μικρότερο του 5.
 - Να βρεθούν τα ενδεχόμενα $A \cap B, A \cap \Gamma, B \cap \Gamma, (A \cap B) \cap \Gamma$
8. Μεταξύ των οικογενειών με 4 παιδιά, Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και καταγράφουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησης. Να βρεθούν :
- Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
 - Τα ενδεχόμενα :
A : Η οικογένεια έχει μόνο ένα παιδί διαφορετικού φύλλου από το πρώτο.
B : Τα δυο μικρότερα παιδιά είναι του ίδιου φύλλου
9. Ένα κουτί περιέχει 2 μπάλες, 1 άσπρη και 1 μαύρη. Επιλέγουμε από το κουτί τυχαία μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί, στη συνέχεια Επιλέγουμε άλλη μια μπάλα. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
10. Δυο κουτιά περιέχουν μπάλες. Το πρώτο κουτί περιέχει 1 άσπρη, 1 μαύρη και 1 πράσινη μπάλα. Το δεύτερο κουτί περιέχει 1 άσπρη και 1 μαύρη μπάλα. Επιλέγουμε τυχαία ένα κουτί και στη συνέχεια μια μπάλα μέσα από αυτό. Να βρεθούν :
- Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
 - Το ενδεχόμενο να επιλέγει άσπρη μπάλα.
11. Ένα κουτί περιέχει 6 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 6. Τραβάμε από το κουτί μια μπάλα έως ότου επιλέγει η μπάλα με τον αριθμό 6. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
12. Ένας καθηγητής διορθώνει γραπτά 5 μαθητών και γνωρίζει από τον επιτηρητή ότι 3 μαθητές έχουν αντιγράψει.
- Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος, αν ο καθηγητής διορθώσει 3 γραπτά.
 - Με την προϋπόθεση ότι ο καθηγητής διορθώνοντας κάποιο γραπτό μπορεί να καταλάβει αν είναι προϊόν αντιγραφής, να βρείτε το ενδεχόμενο όπου ο καθηγητής μπορεί να βρει τους αντιγραφείς διορθώνοντας μόνο 3 γραπτά.
13. Έστω ένας μαθητής της γ' λυκείου και τα ενδεχόμενα :
- A : «ο μαθητής είναι άριστος στα μαθηματικά»
B : «ο μαθητής είναι άριστος στη φυσική»
Να γράψετε με λόγια καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα :
- A'
 - $A \cup B$
 - $A - B$
 - $A \cap B$
 - $(A \cup B)'$
 - $(A \cap B)'$
 - $(A - B) \cup (B - A)$

3.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα τύχης ν φορές. Αν στις ν εκτελέσεις του πειράματος τύχης ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ λέγεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A και συμβολίζεται με f_A . Επειδή $0 \leq \kappa \leq \nu$ τότε ισχύει : $0 \leq f_A \leq 1$. Στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι το σύνολο : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_\lambda$ των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ ισχύει : $f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = 1$.

π.χ. ρίχνουμε ένα νόμισμα 100 φορές και έστω A_1 το ενδεχόμενο να εμφανιστεί κορόνα και A_2 το ενδεχόμενο να εμφανιστεί γράμματα με $\Omega = \{A_1, A_2\}$. Ας υποθέσουμε ότι το A_1 (κορόνα) εμφανίζεται 55 φορές και το A_2 (γράμματα) εμφανίζεται 45 φορές. Τότε

$$f_1 = \frac{55}{100} \quad \text{και} \quad f_2 = \frac{45}{100}. \quad \text{Προφανώς} \quad \text{ισχύει} \quad 0 \leq f_1 \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq f_2 \leq 1 \quad \text{και}$$

$$f_1 + f_2 = \frac{55}{100} + \frac{45}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

Αν επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα άπειρες φορές τότε η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A_1 (κορόνα) θα γίνει $f_1 = \frac{1}{2}$, αντίστοιχα και του A_2 (γράμματα) θα γίνει $f_2 = \frac{1}{2}$. Η παραπάνω διαπίστωση είναι γνωστή ως **νόμος των μεγάλων αριθμών** ή **στατιστική ομαλότητα**.

ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ - ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω ένα πείραμα τύχης όπου κάθε απλό ενδεχόμενο, έχει την ίδια δυνατότητα να εμφανιστεί, δηλαδή όπως λέμε τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπιθανά**. Τότε ορίζουμε **πιθανότητα** του ενδεχομένου A τον αριθμό :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$N(A)$: το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το A

$N(\Omega)$: το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων του πειράματος

Συνέπειες :

$$\triangleright P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \quad \text{Δηλαδή, το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα ίση με 1.}$$

$$\triangleright P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0 \quad \text{Δηλαδή το αδύνατο ενδεχόμενο έχει μηδενική πιθανότητα.}$$

$\triangleright$ Για κάθε ενδεχόμενο A δειγματικού χώρου Ω , ισχύει :

$$A \subseteq \Omega \quad \text{άρα} \quad N(A) \leq N(\Omega) \Leftrightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

Επιπλέον, αν $A \neq \emptyset$, τότε $N(A) > 0 \Leftrightarrow P(A) > 0$

Γενικά ισχύει : $0 \leq P(A) \leq 1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ (π.χ. ζαριά, ρίψη κέρματος κ.α.)

Αν δίνεται πείραμα τύχης, του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπιθανά και ζητείται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A του πειράματος, τότε :

- Θα γράφουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος και θα βρίσκουμε το πλήθος $N(\Omega)$ των στοιχείων του.
- Θα βρίσκουμε τα απλά ενδεχόμενα που ικανοποιούν το A και αν είναι δυνατόν, θα γράφουμε το A με αναγραφή.
- Θα βρίσκουμε το πλήθος $N(A)$ των στοιχείων του A.
- Τέλος, η ζητούμενη πιθανότητα είναι : $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

A : η ένδειξη του ζαριού να είναι περιττός.

B : η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος και μεγαλύτερος του 2.

Γ : η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός ή μικρότερος του 3 και να εξετάσετε αν τα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Λύση :

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ με $N(\Omega) = 6$

$A = \{1,3,5\}$ με $N(A) = 3$, άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{4,6\}$ με $N(B) = 2$, άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\Gamma = \{1,2,3,5\}$ με $N(\Gamma) = 4$, άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα γιατί δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλ. $B \cap \Gamma = \emptyset$.

2. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,\dots,20\}$ και τα ενδεχόμενα

$A = \{x \in \Omega / x = \text{πολλαπλασιο}, 2\}$ και $B = \{x \in \Omega / x = \text{πολλαπλασιο}, 3\}$

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$

Λύση :

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ με $N(A) = 10$, άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$B = \{3,6,9,12,15,18\}$ με $N(B) = 6$, άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$A \cap B = \{6,12,18\}$ με $N(A \cap B) = 3$, άρα $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{20}$

$A - B = \{2,4,8,10,14,16,20\}$ με $N(A - B) = 7$, άρα $P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{7}{20}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :
- A : η ένδειξη του ζαριού να είναι άρτιος.
B : η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός και μεγαλύτερος του 2.
Γ : η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός ή μικρότερος του 3 και να εξετάσετε αν τα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.
4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,\dots,20\}$ και τα ενδεχόμενα
 $A = \{x \in \Omega / x = \text{πολλαπλασιο}, 2\}$ και $B = \{x \in \Omega / x = \text{πολλαπλασιο}, 5\}$
Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$
5. Ένας αριθμός σχηματίζεται με τα ψηφία 3, 0, 9, που χρησιμοποιούνται μια φορά το καθένα. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :
- i. A : «ο αριθμός διαιρείται με το 3»
ii. B : «ο αριθμός διαιρείται με το 4»
6. Ρίχνουμε 2 ζάρια το ένα μπλε και το άλλο κόκκινο. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :
- i. A : «οι δυο ενδείξεις να είναι ίσες»
ii. B : «το μπλε ζάρι έχει μικρότερη ένδειξη από το κόκκινο»
7. Έστω $\Omega = \{0,1,2,3\}$ ο δειγματικός χώρος. Επιλέγουμε τυχαία ένα $\lambda \in \Omega$. Να βρείτε την πιθανότητα η ανίσωση $x^2 - 2x + \lambda > 0$, να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ο δειγματικός χώρος. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A = \{\lambda \in \Omega / \eta \text{ εξίσωση } x^2 + 4x + \lambda = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}\}$
 $B = \{\mu \in \Omega / \eta \text{ εξίσωση } x^2 + \mu x + 2\mu - 3 = 0 \text{ έχει πραγματικές ρίζες}\}$
9. Κάνουμε το εξής πείραμα : σκεφτόμαστε ένα μονοψήφιο ακέραιο αριθμό διαφορετικό του 0 και τον υψώνουμε στο τετράγωνο. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων :
- i. Ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο το 6.
ii. Ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο το 9.
iii. Ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο το 6 ή το 9.
10. Σε ένα κουτί υπάρχουν 2 άσπρες, 4 μπλε, 6 πράσινες και 8 κόκκινες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί. Να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα :
- i. Να είναι μπλε
ii. Να είναι άσπρη ή πράσινη
iii. Να μην είναι άσπρη
11. Σε ένα κουτί υπάρχουν 6 άσπρες, 5 μπλε, 6 και 4 κόκκινες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί. Να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα :
- i. Να είναι άσπρη
ii. Να είναι άσπρη ή κόκκινη
iii. Να μην είναι μπλε

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

12. Ένας σάκος περιέχει πράσινους, κόκκινους, άσπρους και μπλε βόλους. Παίρνουμε τυχαία ένα βόλο. Οι άσπροι βόλοι είναι 15. Αν η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινο βόλο είναι $\frac{1}{5}$, η πιθανότητα να πάρουμε μπλε είναι $\frac{3}{10}$ και η πιθανότητα να πάρουμε πράσινο είναι $\frac{7}{20}$, να βρείτε πόσους βόλους έχει ο σάκος.
13. Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ένας δειγματικός χώρος, ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπιθανά ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\kappa \in \Omega$. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2 + 4x + \kappa = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.
14. Σ' ένα τεστ Γεωγραφίας δίνονται 3 κράτη K_1, K_2, K_3 και οι πρωτεύουσες τους Π_1, Π_2, Π_3 με τυχαία αντιστοίχιση και ζητείται οι μαθητές να αντιστοιχίσουν σε κάθε κράτος τη σωστή πρωτεύουσα. Ένας μαθητής δίνει τυχαία την απάντηση του. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- A : σε κάθε κράτος να αντιστοιχίσει τη σωστή πρωτεύουσα
B : μόνο σε ένα κράτος να αντιστοιχίσει τη σωστή πρωτεύουσα
Γ : σε κανένα κράτος δεν αντιστοιχίσει τη σωστή πρωτεύουσα
15. Ο Γιώργος γραφεί 4 κάρτες για 4 φίλους του. Πάνω στο γραφείο του υπάρχουν οι αντίστοιχοι φάκελοι με τις διευθύνσεις των παραληπτών. Αφηρημένος ο Γιώργος βάζει τυχαία τις κάρτες στους φακέλους. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- A : ο κάθε παραλήπτης να πάρει τη δική του κάρτα
B : μόνο ένας παραλήπτης να πάρει τη δική του κάρτα
Γ : κανένας παραλήπτης να μην πάρει τη δική του κάρτα

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2: ΜΗ ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- Αρχικά θα βρίσκουμε (αν δεν δίνεται) το δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και θα καταγράφουμε τη σχέση : $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$ (1)
- Στη συνέχεια θα βρίσκουμε, με βάση την εκφώνηση, τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\omega_i, i=1,2,\dots,n$ (σε συνδυασμό με την (1))
- Θα βρίσκουμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο A του οποίου αναζητούμε την πιθανότητα
- Αν $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\kappa\}$ $\kappa \leq n$, τότε $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_\kappa)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

16. Έστω ότι έχουμε ένα μη αμερόληπτο (άτιμο) ζάρι (κάθε πλευρά δεν έχει τις ίδιες πιθανότητες να έρθει με τις άλλες). Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ με $P(3) = 3P(2) = 6P(1)$ και $P(6) = 2P(5) = 3P(4)$. Επίσης για το ενδεχόμενο $A = \{3,4\}$ ισχύει ότι $P(A) = \frac{2}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων.
- i. Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- ii. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα : $B = \{\lambda \in \Omega / \lambda = \text{περιττός}\}$ και $\Gamma = \{\lambda \in \Omega / \lambda > 3\}$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B), P(\Gamma)$ και $P(B \cap \Gamma)$.

Λύση :

- i. Θέτω $P(3) = 3P(2) = 6P(1) = x$ και $P(6) = 2P(5) = 3P(4) = y$

$$\text{Άρα } P(3) = x, \quad 3P(2) = x \Leftrightarrow P(2) = \frac{x}{3}, \quad 6P(1) = x \Leftrightarrow P(1) = \frac{x}{6}$$

$$\text{Επίσης : } P(6) = y, \quad 2P(5) = y \Leftrightarrow P(5) = \frac{y}{2}, \quad 3P(4) = y \Leftrightarrow P(4) = \frac{y}{3}$$

$$\text{Ισχύει ότι } P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{x}{3} + x + \frac{y}{3} + \frac{y}{2} + y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x}{6} + 6 \cdot \frac{x}{3} + 6x + 6 \cdot \frac{y}{3} + 6 \cdot \frac{y}{2} + 6y = 6 \Leftrightarrow x + 2x + 6x + 2y + 3y + 6y = 6 \Leftrightarrow 9x + 11y = 6 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης ισχύει : } P(A) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(3) + P(4) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x + \frac{y}{3} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 15x + 15 \cdot \frac{y}{3} = 15 \cdot \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$15x + 5y = 6 \quad (2). \text{ Από (1) και (2) έχω :}$$

$$\begin{cases} 9x + 11y = 6 \cdot (5) \\ 15x + 5y = 6 \cdot (-11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45x + 55y = 30 \\ -165x - 55y = -66 \end{cases} \quad \text{άρα προσθέτοντας κατά μέλη έχω :}$$

$$-120x = -36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{120} \Leftrightarrow x = \frac{3}{10} \quad \text{και στην (1) : } 9x + 11y = 6 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{3}{10} + 11y = 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{27}{10} + 11y = 6 \Leftrightarrow 27 + 110y = 60 \Leftrightarrow 110y = 33 \Leftrightarrow y = \frac{33}{110} \Leftrightarrow y = \frac{3}{10}$$

$$\text{Άρα } P(1) = \frac{x}{6} = \frac{\frac{3}{10}}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}, \quad P(2) = \frac{x}{3} = \frac{\frac{3}{10}}{3} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}, \quad P(3) = x = \frac{3}{10}$$

$$P(4) = \frac{y}{3} = \frac{\frac{3}{10}}{3} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}, \quad P(5) = \frac{y}{2} = \frac{\frac{3}{10}}{2} = \frac{3}{20}, \quad P(6) = y = \frac{3}{10}$$

- ii. $B = \{\lambda \in \Omega / \lambda = \text{περιττός}\} = \{1, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{\lambda \in \Omega / \lambda > 3\} = \{4, 5, 6\}$ και $B \cap \Gamma = \{5\}$

$$\text{Άρα } P(B) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{20} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} = \frac{1}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(\Gamma) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{3}{10} = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{11}{20}$$

$$P(B \cap \Gamma) = P(5) = \frac{3}{20}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Δίνεται δειγματικός χώρος : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ με $P(\omega_1) = \frac{1}{20}$, $P(\omega_2) = \frac{3}{10}$ και

$$P(\omega_3) = \frac{1}{4}. \text{ Να βρείτε :}$$

- i. την πιθανότητα $P(\omega_4)$
ii. την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_2, \omega_4\}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

18. Δίνεται δειγματικός χώρος : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ με $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = \frac{1}{2}$. Να βρείτε :
- την πιθανότητα $P(\omega_1)$
 - θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_2\}$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$.
19. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $\Gamma = \{\omega_1, \omega_3\}$. Αν $P(A) = \lambda$, $P(B) = \frac{\lambda}{2}$, $P(\Gamma) = \frac{3\lambda}{2}$, $\lambda > 0$, να υπολογίσετε :
- Την τιμή του λ .
 - Τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.
 - Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .
20. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.
- Αν $P(\omega_2) = 0,2$ και $P(\omega_3) = 0,5$, να βρείτε την πιθανότητα $P(\omega_1)$.
 - Αν $P(\omega_1) = 3P(\omega_2) = 2P(\omega_3)$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$.
21. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{2, 3, 4\}$. δίνονται και οι πιθανότητες $P(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4}$, $\lambda = 3, 4$. να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(2)$.
22. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $\Gamma = \{\omega_3, \omega_4\}$. Αν $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{7}{20}$ και $P(\Gamma) = \frac{2}{5}$ να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .
23. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με $P(5) = 2P(4) = 4P(3) = 2P(2) = 4P(1)$.
- Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων
 - Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A = \{\lambda \in \Omega / \lambda = \text{περιττός}\}$ και $B = \{\lambda \in \Omega / \lambda > 2\}$. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cap B)$.
24. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με $P(3) = 2P(2) = 4P(4) = 8P(1)$. Επίσης για το ενδεχόμενο $A = \{1, 2\}$ ισχύει $P(A) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε
- τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων
 - Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :
 $B = \{\lambda \in \Omega / \eta \text{ - εξίσωση } -x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x + \lambda = 0 \text{ - έχει - πραγματικές - ρίζες}\}.$
25. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ενός πειράματος τύχης και $P(\omega_1) = \kappa^2$, $P(\omega_2) = 3\kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa$ και $P(\omega_3) = 2 - \frac{9}{2}\kappa$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

26. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ενός πειράματος τύχης και $P(\omega_1) = \frac{\kappa}{10}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{10\kappa}$ και $P(\omega_3) = \frac{2}{3}$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ .

27. Έστω ο θετικός ακέραιος n και $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Δίνονται οι πιθανότητες $P(\kappa) = \frac{1}{2^\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3, \dots, 2n$. να υπολογίσετε :

- Την πιθανότητα $P(0)$
- Την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$.

28. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με $P(3) = 3P(2) = 6P(1)$ και $P(6) = 2P(5) = 3P(4)$. Επίσης για το ενδεχόμενο $A = \{3, 4\}$ ισχύει $P(A) = \frac{2}{5}$. Να βρείτε

- τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων
- Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :
 $B = \{\lambda \in \Omega / \text{ισχύει } x^2 - 2\lambda x + 6\lambda - 5 > 0 \text{ } \forall x \in \mathbb{R}\}.$

29. **Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ με $\frac{P(3)}{4} = \frac{P(1)}{3} = P(2)$ και $P(4) = \frac{4\kappa - 3}{3}$,

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Να βρείτε :

- τον ακέραιο κ
- τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

iii. την πιθανότητα του ενδεχομένου : $A = \left\{ \lambda \in \Omega / \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda^2 x - 2(\lambda^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 6x - 4}} \leq \frac{32}{5} \right\}$

30. **Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{3, 4, 6, 12\}$. Δίνονται επίσης οι τύποι $P(\kappa) = \frac{\kappa}{24}$ και

$P(\kappa) = \frac{6}{5\kappa}$ ένας από τους οποίους εκφράζει την πιθανότητα κάθε απλού ενδεχομένου κ του Ω .

- Να εξετάσετε ποιος από τους παραπάνω τύπους εκφράζει τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \left\{ \alpha \in \Omega / \eta \text{ εφαπτομένη της } C_f \text{ όπου } f(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + (\alpha + 1)^2 x + 2012 \text{ στο σημείο της } M(2, f(2)) \text{ σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } 45^\circ \right\}$$

iii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \left\{ \beta \in \Omega / \eta \text{ } C_g \text{ όπου } g(x) = |x - 6e^x + \beta| - 4, \text{ τέμνει τον άξονα } \left\{ y' y \text{ σε σημείο με θετική τεταγμένη} \right\} \right\}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Πιθανότητα	Ερμηνεία	Τύπος
$P(A \cup B)$	Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B	Αν $A \cap B = \emptyset$ (ασυμβίβαστα), τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Γενικά : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B)$	Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B	
$P(A')$	Η πιθανότητα να μη πραγματοποιηθεί το A	$P(A') = 1 - P(A)$
$P(A - B)$ ή $P(A \cap B')$	Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το A	$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
$P((A - B) \cup (B - A))$	Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B	$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$
$P(A \cup B)'$ ή $P(A' \cap B')$	Η πιθανότητα να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.	$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$
$P(A \cap B)'$ ή $P(A' \cup B')$	Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα το πολύ από τα A και B (ή δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A,B)	$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31. (Άσκηση 7 σελ. 155 Α΄ ομάδας σχολικό βιβλίο)

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{17}{30}$, $P(B) = \frac{7}{15}$,

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

Λύση :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{14}{30} - \frac{20}{30} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{11}{30}.$$

32. (Άσκηση 8 σελ. 155 Α΄ ομάδας σχολικό βιβλίο)

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Να βρείτε την $P(B)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Λύση :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{6} \Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

33. (Άσκηση 10 σελ. 155 Α΄ ομάδας σχολικό βιβλίο)

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$

και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

Λύση :

$$P(B') = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - P(B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

34. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα :

- να μη πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{13}{20}$
- να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{5}$
- να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι $\frac{19}{20}$

Να βρείτε την πιθανότητα :

- να πραγματοποιηθεί το A
- να πραγματοποιηθεί το B
- να πραγματοποιηθεί μόνο το A (αλλά όχι το B)
- να πραγματοποιηθεί το μόνο B (αλλά όχι το A)
- να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B
- να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
- πραγματοποιηθεί ένα το πολύ από τα A και B

Λύση :

i. Πρώτα μεταφράζουμε τα δεδομένα :

- Η πιθανότητα να μη πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{13}{20}$, άρα $P(A') = \frac{13}{20}$
- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{5}$, άρα

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι $\frac{19}{20}$, άρα

$$P(A \cup B) = \frac{19}{20}$$

$$\begin{aligned}
 P(A') &= \frac{13}{20} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{13}{20} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{13}{20} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{20} \\
 \text{ii. } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{19}{20} = \frac{7}{20} + P(B) - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow P(B) = \frac{19}{20} - \frac{7}{20} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{19}{20} - \frac{7}{20} + \frac{4}{20} \Leftrightarrow P(B) = \frac{16}{20} \\
 \text{iii. } P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{20} - \frac{1}{5} = \frac{7}{20} - \frac{4}{20} = \frac{3}{20} \\
 \text{iv. } P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B) = \frac{16}{20} - \frac{4}{20} = \frac{12}{20} \\
 \text{v. } P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\
 &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{7}{20} + \frac{16}{20} - 2 \cdot \frac{4}{20} = \frac{15}{20} \\
 \text{vi. } P(A' \cap B') &= P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20} \\
 \text{vii. } P(A' \cup B') &= P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20}
 \end{aligned}$$

35. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% μαθαίνει γαλλικά και το 20% μαθαίνει και τις 2 γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα :

- i. να μαθαίνει αγγλικά ή γαλλικά
- ii. να μαθαίνει αγγλικά αλλά όχι γαλλικά
- iii. να μη μαθαίνει ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά
- iv. να μαθαίνει μόνο μια από τις 2 γλώσσες
- v. να μαθαίνει το πολύ μια από τις 2 γλώσσες
- vi. να μη μαθαίνει αγγλικά ή να μαθαίνει γαλλικά
- vii. να μη μαθαίνει γαλλικά ή να μαθαίνει αγγλικά

Λύση :

- i. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει αγγλικά και έστω Γ το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει γαλλικά. Τότε $P(A) = \frac{80}{100}$, $P(\Gamma) = \frac{30}{100}$ και $P(A \cap \Gamma) = \frac{20}{100}$. Τότε $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{80}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100} = \frac{90}{100}$
- ii. $P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = \frac{80}{100} - \frac{20}{100} = \frac{60}{100}$
- iii. $P(A' \cap \Gamma') = P((A \cup \Gamma)') = 1 - P(A \cup \Gamma) = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100}$
- iv. $P((A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)) = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = P(A) - P(A \cap \Gamma) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) =$
 $= P(A) + P(\Gamma) - 2P(A \cap \Gamma) = \frac{80}{100} + \frac{30}{100} - 2 \cdot \frac{20}{100} = \frac{70}{100}$
- v. $P(A' \cup \Gamma') = P(A \cap \Gamma)' = 1 - P(A \cap \Gamma) = 1 - \frac{20}{100} = \frac{80}{100}$
- vi. $P(A' \cup \Gamma) = P(A') + P(\Gamma) - P(A' \cap \Gamma) = 1 - P(A) + P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A') =$
 $= 1 - P(A) + P(\Gamma) - P(\Gamma - A) = 1 - P(A) + P(\Gamma) - [P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A)] =$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

$$= 1 - P(A) + P(\Gamma) - P(\Gamma) + P(\Gamma \cap A) = 1 - P(A) + P(A \cap \Gamma) = 1 - \frac{80}{100} + \frac{20}{100} = \frac{40}{100}$$

vii. $P(\Gamma' \cup A) = P(\Gamma') + P(A) - P(\Gamma' \cap A) = 1 - P(\Gamma) + P(A) - P(A - \Gamma) =$
 $= 1 - P(\Gamma) + P(A) - [P(A) - P(A \cap \Gamma)] = 1 - P(\Gamma) + P(A) - P(A) + P(A \cap \Gamma) =$
 $= 1 - P(\Gamma) + P(A \cap \Gamma) = 1 - \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{90}{100}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

36. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{23}{40}$, $P(B) = \frac{3}{8}$,
 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

37. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{4}$,
 $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Να βρείτε την $P(B)$.

38. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,3$,
 $P(B') = 0,65$ και $P(A \cap B) = 0,15$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.

39. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και
 $A \subseteq B$. Να βρείτε τις πιθανότητες :

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A \cup B)$

iii. $P(B - A)$

iv. $P(A \cup B')$

40. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A') = \frac{2}{3}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες :

i. $P(B)$

ii. $P(A \cap B')$

iii. $P((A - B) \cup (B - A))$

iv. $P(A \cup B')$

41. Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B και Γ ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε το A να είναι ασυμβίβαστο με καθένα από τα B και Γ. Επίσης ισχύουν $P(A') = 70\%$,
 $P(A \cup B) = 90\%$ και $P(A \cup \Gamma) = 80\%$. Να βρείτε τις πιθανότητες :

i. $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$

ii. να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

42. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A - B) = 0,1$, $P(B - A) = 0,5$ και $P(A \cup B) = 0,9$. Να βρείτε τις πιθανότητες :

- i. $P(A), P(B)$ και $P(A \cap B)$
- ii. $P(A \cup B')$
- iii. $P(A' \cup B')$
- iv. $P(A' \cap B')$

43. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A \cup B) = 0,8$, $P(B - A) = 0,2$ και $P(A' \cup B') = 0,9$. Να βρείτε τις πιθανότητες :

- i. $P(A), P(B)$ και $P(A \cap B)$
- ii. $P(B' - A')$
- iii. $P(A' - B)$

44. Δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω έχουν γινόμενο πιθανοτήτων ίσο με $\frac{4}{25}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων αυτών.

45. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα :

- να μη πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{2}{3}$
- να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{6}$
- να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι $\frac{11}{12}$

Να βρείτε την πιθανότητα :

- i. να πραγματοποιηθεί το A
- ii. να πραγματοποιηθεί το B
- iii. να πραγματοποιηθεί μόνο το A (αλλά όχι το B)
- iv. να πραγματοποιηθεί το μόνο B (αλλά όχι το A)
- v. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B
- vi. να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
- vii. να πραγματοποιηθεί ένα το πολύ από τα A και B

46. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα :

- να πραγματοποιηθεί το A είναι 60%
- να μην πραγματοποιηθεί το B είναι 70%
- να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι 10%

Να βρείτε την πιθανότητα :

- i. να πραγματοποιηθεί το A ή το B
- ii. να πραγματοποιηθεί μόνο το A (αλλά όχι το B)
- iii. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B

47. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα :

- να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{2}{5}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{5}$
- να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι $\frac{11}{15}$

Να βρείτε την πιθανότητα :

- να πραγματοποιηθεί το B
 - να πραγματοποιηθεί το A
 - να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
 - να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B
 - να πραγματοποιηθεί το B ή να μην πραγματοποιηθεί το A
48. Σε δυο διαγωνίσματα Μαθηματικών οι μαθητές που έγραψαν κάτω από τη βάση αποτελούσαν το 30% στο 1^ο, το 40% στο 2^ο και το 25% και στα δυο. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να έγραψε :
- κάτω από τη βάση σε ένα τουλάχιστον διαγώνισμα
 - από τη βάση και πάνω (τουλάχιστον βάση) και στα δυο διαγωνίσματα
 - κάτω από τη βάση μόνο στο 1^ο διαγώνισμα
 - κάτω από τη βάση σε ένα μόνο διαγώνισμα
49. Από τις οικογένειες των 30 μαθητών μιας αγροτικής περιοχής, 15 έχουν αγροτικό αυτοκίνητο, 20 έχουν Ι.Χ. αυτοκίνητο και 10 έχουν αγροτικό και Ι.Χ. Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια. Να βρείτε την πιθανότητα :
- να έχει ένα τουλάχιστον αυτοκίνητο
 - να μην έχει κανένα αυτοκίνητο
 - να μην έχει δυο αυτοκίνητα
 - να έχει μόνο αγροτικό
 - να έχει ένα μόνο αυτοκίνητο
50. Οι επιβάτες ενός λεωφορείου είναι 12 άνδρες και 18 γυναίκες. Από τους άνδρες οι 6 και από τις γυναίκες οι 8 είναι πάνω από 30 ετών. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν επιβάτη του λεωφορείου, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου :
- να είναι πάνω από 30 ετών
 - να είναι άνδρας
 - να είναι άνδρας πάνω από 30 ετών
 - να είναι άνδρας πάνω από 30 ετών ή γυναίκα όχι πάνω από 30 ετών
51. Ρωτήθηκαν 4000 τουρίστες, μεταξύ των οποίων ήταν και Ιταλοί, αν θα επισκεφτούν ξανά τη χώρα μας. Διαπιστώθηκε ότι η πιθανότητα να επισκεφτεί ξανά τη χώρα μας ένας απ' αυτούς είναι $\frac{1}{5}$, ενώ η πιθανότητα να την επισκευτεί ξανά και να είναι Ιταλός είναι $\frac{1}{40}$. Τέλος η πιθανότητα να μην επισκεφτεί ξανά τη χώρα μας ένας όχι Ιταλός τουρίστας είναι $\frac{7}{10}$. Να βρείτε πόσοι από τους τουρίστες που ρωτήθηκαν ήταν Ιταλοί.
52. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 60% είναι αγόρια, το 40% υποστηρίζουν τον ΑΡΗ και το 30% είναι αγόρια και ΑΡΗΣ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα :
- να είναι αγόρι ή ΑΡΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- ii. να είναι αγόρι αλλά να μην είναι ΑΡΗΣ
 - iii. να μην είναι ούτε αγόρι, ούτε ΑΡΗΣ
 - iv. να μην είναι αγόρι ή να είναι ΑΡΗΣ
 - v. να μην είναι ΑΡΗΣ ή να είναι αγόρι
53. Από τους μαθητές της Γ' λυκείου ενός σχολείου, το 40% ανήκουν στη Θεωρητική κατεύθυνση, το 60% έχει επιλέξει ως μάθημα επιλογής Βιολογία και το 25% ανήκουν στη Θεωρητική και έχουν επιλέξει Βιολογία. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα :
- i. να ανήκει στη Θεωρητική ή να έχει επιλέξει Βιολογία
 - ii. να ανήκει στη Θεωρητική, αλλά να μην έχει επιλέξει Βιολογία
 - iii. να μην ανήκει στη Θεωρητική και να μην έχει επιλέξει Βιολογία
 - iv. να μην ανήκει στη Θεωρητική ή να εξεταστεί στη Βιολογία
54. Σε ένα σχολείο το 65% των μαθητών έχει laptop, το 15% έχει ipad και δεν έχει laptop και το 60% δεν έχει τουλάχιστον ένα από τα δυο (δεν έχει laptop ή δεν έχει ipad). Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα :
- i. Να έχει και laptop και ipad
 - ii. Να έχει ipad
 - iii. Να μην έχει ούτε laptop ούτε ipad
 - iv. Να έχει μόνο ένα από τα δυο.
55. Ένα λύκειο στην επαρχία έχει 50 μαθητές από τους οποίους 20 είναι στην Α' τάξη. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της Β' τάξης είναι 34%. Να βρείτε :
- i. Την πιθανότητα ώστε ο μαθητής να είναι της Α' τάξης.
 - ii. Πόσους μαθητές έχει η Β' τάξη;
 - iii. Την πιθανότητα ο μαθητής να είναι της Γ' τάξης.
56. Ένα λύκειο έχει 200 αγόρια και κορίτσια. Το 90% των αγοριών και τα $\frac{3}{5}$ των κοριτσιών επέλεξαν την θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση ενώ οι υπόλοιποι μαθητές την θεωρητική κατεύθυνση. Εκλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Η πιθανότητα να είναι κορίτσι και να μην επέλεξε την θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση είναι 30%. Να βρείτε
- i. ποσά είναι τα αγόρια και ποσά τα κορίτσια.
 - ii. Την πιθανότητα να είναι αγόρι και να μην επέλεξε την θεωρητική κατεύθυνση.
57. Ένα τμήμα της Γ' λυκείου έχει 10 αγόρια και 14 κορίτσια. Τα μισά αγόρια και τα μισά κορίτσια έχουν καστανά μάτια. Επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- A : να είναι αγόρι και να μην έχει καστανά μάτια
B : να είναι κορίτσι ή να έχει καστανά μάτια
58. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου το νόμισμα να φέρει γράμματα ή το ζάρι περιττό αριθμό.
59. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με πιθανότητες τέτοιες ώστε $P(A') = \frac{3}{4}$ και $P(B \cap A') = \frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$.
60. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει η πιθανότητα,

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- Να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B είναι 25%
- Να πραγματοποιείται μόνο σαν από τα A και B είναι 20%

Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B.

61. Σε μια εκδήλωση τα $\frac{3}{4}$ των καλεσμένων αντρών και τα $\frac{5}{6}$ των καλεσμένων γυναικών είναι παντρεμένοι. Αν είναι γνωστό ότι όλα τα αντρώγυνα βρίσκονται στην εκδήλωση, να βρεθεί η πιθανότητα ένα άτομο που Επιλέγουμε τυχαία, να είναι :
- i. Ανύπαντρο.
 - ii. Ανύπαντρος άντρας ή παντρεμένη γυναίκα.
62. Από την Γ' τάξη ενός λυκείου Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα να είναι κορίτσι ή να έχει γαλανά μάτια είναι 60%. Η πιθανότητα να είναι αγόρι και να έχει γαλανά μάτια είναι 5%. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι κορίτσι.
63. Μια κάλπη περιέχει άγνωστο αριθμό από σφαιρίδια αριθμημένα από 2,3,...,n . Επιλέγουμε ένα στην τύχη. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε άρτιο είναι μεγαλύτερη κατά 0,04 από το να διαλέξουμε περιττό, να βρεθεί το n.
64. Σε μια επαρχιακή πόλη με 20.000 κάτοικους κυκλοφορούν δυο τοπικές εφημερίδες η A και η B. Μια μέρα αγόρασαν 2000 την εφημερίδα A, 1500 την εφημερίδα B και 250 και τις 2 εφημερίδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει αγοράσει :
- i. Μια τουλάχιστον εφημερίδα.
 - ii. Μια το πολύ εφημερίδα.
 - iii. μόνο την εφημερίδα A.
 - iv. μόνο μια εφημερίδα.
65. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , που αποτελείται από ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα $N(A) \leq N(B)$. Αν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $(4x-3)(3x-2)(6x-5)=0$ να βρείτε την πιθανότητα $P((A \cup B)')$.
66. Έστω A ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω για το οποίο ισχύει : $|P(A)-1| - |P(A)+1| = \lambda^2$. Να δείξετε ότι $\lambda=0$.
67. Δίνετε η εξίσωση $ax^2 + \beta x - 2 = 0$, όπου α, β καθορίζονται από τη ρίψη 2 αμερόληπτων ζαριών. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει ρίζα το -2.
68. **Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{P(A)}x^2 + \frac{9}{P(A \cap B)}x - 24$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση (ε): $y = 12x - 13$.
- i. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
 - ii. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία
 - iii. Επιπλέον ισχύει ότι $P(B) = \frac{\mu}{M}$, όπου μ το τοπικό ελάχιστο και M το τοπικό μέγιστο της $f(x)$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow P(B-A)} \frac{f''(x) + 24}{\sqrt{4x^2 + 3} - 2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- iv. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :
- Γ : να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A,B
Δ : να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A,B
Ε : να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A,B
Ζ : να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B

69. **Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = (x - P(A))^2 + (x + P(A \cap B))^2$

i. Να αποδείξετε ότι $f(P(A \cup B)) = f(P(B') - 1)$

ii. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{P(A - B)}{2}$ και να

αποδείξετε ότι το ελάχιστο της $f(x)$ είναι ίσο με $\frac{[P(A) + P(A \cap B)]^2}{2}$

iii. Αν η $f(x)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $A\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{8}\right)$ και η εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης της $f(x)$ στο $M\left(\frac{P(A \cup B)}{2}, f\left(\frac{P(A \cup B)}{2}\right)\right)$ σχηματίζει με τον

άξονα x'x γωνία 45° να βρείτε τις πιθανότητες :

- να πραγματοποιηθεί το A
- να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A,B
- να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το A
- να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A,B
- να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A,B

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➤ Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

➤ Για την απόδειξη ανισοτήτων της μορφής : $\alpha \leq P(A \cup B) \leq \beta$ ή $\alpha \leq P(A \cap B) \leq \beta$

Χρησιμοποιώ τα εξής :

$$\begin{cases} A \subseteq A \cup B, \text{άρα}, P(A) \leq P(A \cup B) \\ B \subseteq A \cup B, \text{άρα}, P(B) \leq P(A \cup B) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A \cap B \subseteq A, \text{άρα}, P(A \cap B) \leq P(A) \\ A \cap B \subseteq B, \text{άρα}, P(A \cap B) \leq P(B) \end{cases} \quad (2)$$

Παρατηρώ ότι τα $P(A), P(B)$ πιθανόν να ισούνται με ένα από τα α, β , χρησιμοποιώ τις (1) και (2) και σε συνδυασμό με τον τύπο : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ καταλήγω σε μια ανισότητα η οποία προφανώς ισχύει (π.χ. $P(A \cup B) \leq 1$, ή $P(A \cap B) \geq 0$)

➤ Για την απόδειξη ανισοτήτων της μορφής : $\alpha \leq P(A - B) \leq \beta$

Χρησιμοποιώ τα εξής :

$$A - B \subseteq A, \text{άρα}, P(A - B) \leq P(A), (1)$$

$$B - A \subseteq B, \text{άρα}, P(B - A) \leq P(B), (2)$$

Παρατηρώ ότι τα $P(A), P(B)$ πιθανόν να ισούνται με ένα από τα α, β , χρησιμοποιώ τις (1) και (2) και σε συνδυασμό με τον τύπο : $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ καταλήγω σε μια ανισότητα η οποία προφανώς ισχύει.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω με $P(A) = 0,8$, $P(B') = 0,6$

i. Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

ii. Να δείξετε ότι $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$.

Λύση :

i. Έστω ότι τα A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

$$P(B') = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0,6 \Leftrightarrow P(B) = 0,4, \text{άρα}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,8 + 0,4 = 1,2 > 1$ που είναι άτοπο. Άρα τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

ii. Θα δείξουμε ότι $P(A \cap B) \leq 0,4$ και ότι $0,2 \leq P(A \cap B)$

• Παρατηρώ ότι $P(B) = 0,4$ είναι το ένα άκρο της ανίσωσης που θέλω να αποδείξω άρα : $A \cap B \subseteq A$, άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,4$ (1)

• Επίσης $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ (2)

Θέλω να δείξω ότι $0,2 \leq P(A \cap B) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0,2 \leq P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow$

$0,2 \leq 0,8 + 0,4 - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq 1$ που ισχύει. Άρα ισχύει ότι $0,2 \leq P(A \cap B)$ (3)

Από (1) και (3) προκύπτει $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

71. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$. Να δείξετε ότι

$$0 \leq P(A' \cap B') \leq \frac{1}{3}.$$

Λύση :

Θα δείξουμε ότι $0 \leq P(A' \cap B')$ και ότι $P(A' \cap B') \leq \frac{1}{3}$

- Η ανισότητα $0 \leq P(A' \cap B')$ (1), ισχύει εξ ορισμού.
- $A' \cap B' \subseteq A'$ άρα $P(A' \cap B') \leq P(A') \Leftrightarrow P(A' \cap B') \leq 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A' \cap B') \leq 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A' \cap B') \leq \frac{1}{3}$ (2). Άρα από (1) και (2) έχω $0 \leq P(A' \cap B') \leq \frac{1}{3}$

72. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$. Να δείξετε ότι

$$\frac{3}{10} \leq P(A - B) \leq \frac{1}{2}.$$

Λύση :

Θα δείξουμε ότι $\frac{3}{10} \leq P(A - B)$ και ότι $P(A - B) \leq \frac{1}{2}$

- $A - B \subseteq A$, άρα $P(A - B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A - B) \leq \frac{1}{2}$ (1)
- Θέλω να δείξω ότι $P(A - B) \geq \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) \geq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - P(A \cap B) \geq \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$. Η τελευταία σχέση στην οποία κατέληξα, ισχύει γιατί $A \cap B \subseteq B$. Άρα ισχύει και $P(A - B) \geq \frac{3}{10}$ (2)
Από (1) και (2) $\frac{3}{10} \leq P(A - B) \leq \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

73. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι :

- $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{11}{12}$
- $\frac{5}{12} \leq P(A - B) \leq \frac{2}{3}$

74. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,4$. Να αποδείξετε ότι : $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$.

75. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,5$ και $P(B) = 0,3$. Να αποδείξετε ότι : $0,2 \leq P(A - B) \leq 0,5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

76. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,8$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των πιθανοτήτων :
- $P(A \cap B)$
 - $P(A \cup B)$
 - $P(B - A)$
77. Έστω A, B και X ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A) = 20\%$, $P(B) = 45\%$ και $A \cup X = B$. Να βρείτε :
- την πιθανότητα $P(B - A)$
 - τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P(X)$
78. Έστω A, B και X ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $A \cup X = B$. Να βρείτε :
- την πιθανότητα $P(B - A)$
 - τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P(X)$
79. Έστω A, B και X ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,25$ και $A \cap X = B$. Να βρείτε :
- την πιθανότητα $P(A - B)$
 - τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P(X)$
80. Έστω A, B και X ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A) = \frac{9}{20}$, $P(B) = \frac{3}{20}$ και $A \cap X = B$. Να βρείτε :
- την πιθανότητα $P(A - B)$
 - τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P(X)$
81. A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (1 - x)^2$, $x \in [0, 1]$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .
B. Αν A, B 2 συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι $P^2(A) + P^2(B) \geq \frac{1}{2}$.
82. A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - 2x$, $x \in \mathcal{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
B. Έστω A, B 2 ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
- Αν $A \subseteq B$, να δείξετε ότι $2P(A) + \eta\mu P(B) \leq 2P(B) + \eta\mu P(A)$.
 - Αν $P(A) = \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι $2f(P(A \cap B)) \geq \sqrt{2} - \pi$.
 - Να αποδείξετε ότι $f(P(A - B)) \leq 0$.
83. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ για τις οποίες ισχύει : $P(A) + P(B) = \frac{4}{3}$.
- Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- ii. Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$
- iii. Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$

84. Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι ισχύει $P(A') + P(B') + P(A \cup B) \geq 1$.

85. Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι ισχύει $P(A \cap B) \leq 1 + P(A) - P(B')$.

86. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,3$.

- i. Να αποδείξετε ότι $P(A' \cap B') \leq 0,4$
- ii. Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B') \geq 0,4$

87. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P[(A \cup B)'] = \frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(B) \leq \frac{1}{2}$

88. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{1}{3}$ Να

δείξετε ότι :

- i. $A \cap B \neq \emptyset$
- ii. $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$
- iii. $P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$
- iv. $\frac{1}{2} \leq P(A \cup B') \leq \frac{5}{6}$
- v. $P(A \cap B') \leq P(A)$

89. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$. Να δείξετε ότι :

- i. $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$
- ii. Το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι κενό.

90. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A') \leq \kappa$ και $P(B') \leq \lambda$, $\kappa + \lambda < 1$. Να δείξετε ότι :

- i. $P(A \cap B) + P(A \cup B) \geq 2 - (\kappa + \lambda)$
- ii. $A \cap B \neq \emptyset$

91. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδείξετε ότι $P(B) + P(A - B) \leq 1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

92. **Εστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Θεωρούμε και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$. Οι πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι διαφορετικές ανά δυο και ανήκουν στο σύνολο : $K = \left\{ \mu, M, f(0), \frac{f(2)}{f(3)}, f'(-1) \right\}$, όπου μ το τοπικό ελάχιστο και M το τοπικό μέγιστο της $f(x)$. Να βρείτε :
- τους αριθμούς μ και M
 - τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cup B)$
 - την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B και να μην πραγματοποιηθεί το A

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

- Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:
A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;
B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;
Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; **(2000)**
- Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.
Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$, $x \in \mathbb{R}$.
α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.
β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$
γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$. **(2002)**
- Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:
α. γυναίκα ή φιλόλογος
β. γυναίκα και όχι φιλόλογος
γ. άνδρας και φιλόλογος
δ. άνδρας ή φιλόλογος. **(2003)**
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$
Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- A.** Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$
- B.** Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:
- i. $P(A \cap B)$
 - ii. $P(A - B)$
 - iii. $P[(A \cap B)']$
 - iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$. **(2004)**
5. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2$ όπου $k \in \mathbb{Q}$.
Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:
- α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$.
 - β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου
 A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
 B : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».
 - γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ , όπου
 Γ : «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ». **(2004 B')**
6. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν:
- (i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$.
 - (ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$, όπου $k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$.
- α. Να βρεθεί το k .
 - β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
 - (1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .
 - (2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A . **(2005)**
7. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A - B = \{2, 6\}$ και $\Gamma = \left\{x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2\right\}$
- α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.
 - β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ .
 - γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ .
 - δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$. **(2005 B')**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

8. Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.
- α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.
- β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.
- γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής; (2006)
9. Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.
- α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.
- β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- i. «έχει πάρει καταναλωτικό».
- ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό». (2006 Β')
10. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)$.
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :
- $$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$
- όπου x ένας πραγματικός αριθμός.
- α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$.
- β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$.
- γ. Για $x = -1$ ναδειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}, P(B) = \frac{7}{11}, P(A \cap B) = \frac{3}{11}$
και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$. (2007)
11. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:
 $A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\}$,
 $B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}$.
- α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(B \cup A')$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$. (2007 Β')

12. Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α , ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και β δεν διαβάζουν την εφημερίδα β .

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β ;

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β ».

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \leq P(B) = \frac{7}{10}$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$, $x \in \mathbb{R}$ και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ακρότατα. (2008)

13. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B-A) > P(A-B)$. (2008Β')

14. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), \quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $X_0 = \frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0) = 0$,

να αποδείξετε ότι: $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B.

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

15. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει : $64 < N(\Omega) < 72$, τότε
B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$
B2. Να υπολογίσετε την τιμή του λ
B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.
B4. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη. **(2011)**
16. Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει
- Γαλλικά είναι $\frac{3n}{n^2+1}$
 - Ισπανικά είναι $\frac{n+2}{n^2+1}$
 - και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n+1}{n^2+1}$
 - μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$
- B1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.
B2. Να αποδείξετε ότι $n = 3$
B3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.
B4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. **(2012)**
17. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ δύο ενδεχόμενα του Ω , με $P(A) = \frac{1}{2}$. Αν είναι $P(\omega_1) = \alpha$, $P(\omega_2) = \beta$, με $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$, $P(\omega_3) = \gamma$ και η συνάρτηση $g(x) = P(\omega_4)x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:
- C1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \frac{1}{5}$ και $\gamma = \frac{1}{10}$
C2. Να βρείτε το $P(\omega_4)$, αν η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της g , στο σημείο $(1, g(1))$, είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = x$, και στη συνέχεια να βρείτε το $P(\omega_5)$
C3. Αν είναι $P(\omega_4) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_5) = \frac{1}{6}$ τότε να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων K , L , όπου:
 K : «ένα μόνο από τα A και B να πραγματοποιείται»
 L : «να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B ». **(2012B')**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(B')=0,6$ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες :
 - i. $P(B), P(A), P(A-B)$
 - ii. $P(B \cap A') = \frac{1}{5}$, $P[(A-B) \cup (B-A)]$, $P(A' \cup B')$
2. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Να δείξετε ότι $P[(A \cup B)'] = P(A') \cdot P(B')$.
3. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(B) = 0,4$ και $P(A \cap B) = 0,1$. Να βρείτε την πιθανότητα :
 - i. Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B .
 - ii. Να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .
 - iii. Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B .
 - iv. Να πραγματοποιηθεί μόνο το A .
4. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A \cap B) = \frac{P(A) + P(B)}{2}$. Να δείξετε ότι A, B είναι ισοπιθανά.
5. Αν για το ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $|2003P(A) - 2004| + 2\kappa = |P(A) - 1|$ να βρεθούν οι τιμές του κ .
6. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης
 - i. Αν $P(\omega_1) = \frac{1}{8}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$ και $P(\omega_4) = \frac{1}{6}$ να βρεθεί η $P(\omega_5)$
 - ii. Αν $P(\omega_1) = 2P(\omega_2)$, $P(\omega_2) = 2P(\omega_3)$ και $P(\omega_3) = P(\omega_4) = P(\omega_5)$ τότε να βρεθούν :
 - Οι πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3), P(\omega_4), P(\omega_5)$.
 - Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_4, \omega_5\}$.
7. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ με $P(A)=0,8$ και $P(B)=0,5$ να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$.
8. Έστω ο θετικός ακέραιος n με $n > 1$ και $\Omega = \left\{ \alpha, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n} \right\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Δίνονται οι πιθανότητες $P(\kappa) = \ln \kappa$, για κάθε $\kappa \in \Omega$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$\frac{1}{3}$

9. Αν η πιθανότητα να διαλέξουμε ένα γλυκό καρπούζι από το μανάβη είναι $\frac{1}{3}$ της πιθανότητας να μην είναι γλυκό, να προσδιοριστεί η πιθανότητα να διαλέξουμε γλυκό καρπούζι.
10. Αν η πιθανότητα να πετύχει κάποιος στη σχολή μαθηματικών είναι δεκαπλάσια της πιθανότητας του να μην πετύχει, να βρεθεί η πιθανότητα να πετύχει.
11. Έστω A, B δυο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ξένα μεταξύ τους. Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το A είναι 0,4 και η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A, B είναι 0,8. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B.
12. Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι ρήγας σπαθί.
13. Το 30% των μαθητών ενός σχολείου δεν έχουν παίξει βόλεϊ, το 45% δεν έχει παίξει ποδόσφαιρο και το 10% δεν έχει παίξει ούτε βόλεϊ ούτε ποδόσφαιρο. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :
- i. Να έχει παίξει ποδόσφαιρο και βόλεϊ
 - ii. Να έχει παίξει βόλεϊ
 - iii. Να έχει παίξει μόνο ένα από τα 2 παιχνίδια.
14. Ένας αθλητής στοχεύει σε 2 μετάλλια στο χρυσό X και στο άργυρο A. η πιθανότητα να κερδίσει το χρυσό μετάλλιο είναι 0,7 και η πιθανότητα να χάσει το άργυρο είναι 0,5 και η πιθανότητα να χάσει ένα τουλάχιστον από τα 2 μετάλλια είναι 0,6. Να βρεθεί η πιθανότητα να κερδίσει ένα τουλάχιστον από τα 2 μετάλλια.
15. Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρεθεί η πιθανότητα να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος του 4 ή μεγαλύτερος του 4.
16. Ένας παίκτης του τάβλι παίρνει το παιχνίδι διπλό αν δε φέρει 6 ή 10 (άθροισμα). Ποια η πιθανότητα να πάρει το παιχνίδι διπλό;
17. Σε μια ομάδα ανθρώπων κάποιοι έχουν μαύρα μάτια, κάποιοι γαλανά και άλλοι καστανά. Αυτοί που έχουν μαύρα μάτια είναι τριπλάσιοι αυτών που έχουν καστανά, ενώ Αυτοί που έχουν γαλανά είναι εξαπλάσιοι αυτών που έχουν καστανά. Παίρνουμε στην τύχη ένα άτομο :
- i. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει :
 - α. μαύρα μάτια
 - β. γαλανά μάτια
 - γ. όχι καστανά
 - ii. Να βρεθεί το πλήθος των ανθρώπων της ομάδας αν οι άνθρωποι με μαύρα μάτια είναι 18.
18. Ένας καθηγητής διορθώνει γραπτά 5 μαθητών. Αν ξέρει ότι 3 από αυτούς έχουν αντιγράψει και ελέγχει τα γραπτά το ένα μετά το άλλο μέχρι να εντοπίσει τους αντιγράφεις, να βρεθεί η πιθανότητα να βρει τους αντιγράφεις με 3 το πολύ δόκιμες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

19. Ένα κουτί περιέχει 10 λευκές μπάλες, χ κόκκινες κ γ πράσινες. παίρνουμε μια στη τύχη. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη είναι $\frac{1}{4}$. Να βρεθεί πόσες μπάλες έχει το κουτί.
20. Σε ένα ράφι υπάρχουν 60 βιβλία μαθηματικών και φυσικής. Τα $\frac{2}{3}$ από κάθε είδος είναι της Γ' λυκείου. Η πιθανότητα ένα βιβλίο να είναι φυσικής και όχι Γ' λυκείου είναι $\frac{1}{5}$. Αν επιλέξουμε ένα βιβλίο στην τύχη να βρεθεί η πιθανότητα να είναι βιβλίο φυσικής και της Γ' λυκείου.