

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-2016

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ (4)

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- β.** Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι άρτια, τότε η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
- γ.** Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε ισχύει $\log_a a = 1$.
- δ.** Η εξίσωση $\sin x = a$, με $a > 1$ έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{R}$.
- ε.** Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ και $a \neq 1$, έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 2x5 = 10)

- B.** Να αποδείξετε ότι αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, τότε το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο το -4 και περίοδο $T = \pi$.

- A.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = 2$.

(Μονάδες 10)

- B.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - 2\sqrt{3} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 .

A. Να υπολογίσετε τα α και β .

(Μονάδες 10)

B. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$ και $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$.

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 8)

B. Να λύσετε την εξίσωση $10^{f(x)} = g(x)$.

(Μονάδες 10)

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = -3$.

(Μονάδες 7)

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

1. Να απαντήσετε στην κόλλα σας σε όλα τα θέματα.
2. Στα σχήματα που θα χρειαστούν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και μολύβι.
3. Διαθέσιμος χρόνος εξέτασης δύο (2) ώρες.
4. Χρόνος δυνατής αποχώρησης 30' από τη διανομή των θεμάτων.

Ευχόμαστε Επιτυχία

www.mathp.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2015-2016
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

α. Σωστό .

β. Λάθος .

γ. Σωστό .

δ. Λάθος .

ε. Σωστό.

B. Απόδειξη:

Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε:

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0$$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$ με $\alpha, \beta > 0$ έχει ελάχιστο το $-\alpha$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

$$\text{Επομένως } -\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και } \frac{2\pi}{\beta} = \pi \Leftrightarrow \beta\pi = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 2$$

B. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x) - 2\sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow \alpha \cdot \eta\mu(\beta x) - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4\eta\mu(2x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu(2x) = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } 2x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \text{ με } k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = k\pi + \frac{\pi}{8} \text{ ή } x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \text{ με } k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αφού το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι 3^{ου} βαθμού έχουμε:

$$\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1 \text{ και } \alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$$

Επομένως $\alpha = 1$.

Ακόμα, επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι -4 , έχουμε:

$$\begin{aligned} P(1) = -4 &\Leftrightarrow (\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1) + 1 + (4\beta - 1) + 6 = -4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 4\beta + 6 = -4 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 4\beta + 10 = 0 \end{aligned}$$

Για $\alpha = 1$ έχουμε:

$$2 + 4\beta + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\beta = -12 \Leftrightarrow \beta = -3$$

B. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ και η προς λύση ανίσωση είναι:

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 < 0$$

Επειδή $P(2) = 0$, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και η διάρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ (ας πούμε με βάση το σχήμα Horner) δίνει:

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) < 0$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το πρόσημο των παραγόντων και του πολυωνύμου $P(x)$

	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	2	∞
x					
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$2x^2 + 5x - 3$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι όλα τα $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Για τη συνάρτηση $f(x) = \log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)$ πρέπει να ισχύει:

$$5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x > 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} > 2 \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} > \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ (αφού η}$$

συνάρτηση $h(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$).

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Για τη συνάρτηση $g(x) = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

B. Για κάθε $x < 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 10^{f(x)} = g(x) &\Leftrightarrow 10^{\log(5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x)} = g(x) \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x - 2 \cdot 25^x = -2 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 2^{x-1} - 5 \Leftrightarrow \\ 5 \cdot 4^x &= 25 \cdot 2^{x-1} - 5 \Leftrightarrow 5 \cdot (2^x)^2 - 25 \cdot \frac{2^x}{2} + 5 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot (2^x)^2 - 25 \cdot 2^x + 10 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Στην τελευταία εξίσωση θέτουμε $2^x = \omega > 0$ και έχουμε την εξίσωση $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$, η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = \frac{1}{2}$. Οπότε είναι:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 2 &\Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \\ \omega_2 = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Όμως η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται, αφού $1 \notin A$ ενώ η τιμή $x = -1$ είναι δεκτή, αφού $-1 \in A$.

Γ. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \log \frac{117}{100} \\ f(0) &= \log 3 \\ g(1) &= -30 \end{aligned}$$

Επομένως η παράσταση K γίνεται:

$$\begin{aligned} K &= f(-1) - f(0) - \log|g(1)| - \log 13 = \log \frac{117}{100} - \log 3 - \log 30 - \log 13 = \log \frac{117}{100} - \log 90 - \log 13 = \\ &= \log \frac{117}{100} - \log(90 \cdot 13) = \log \frac{\frac{117}{100}}{90 \cdot 13} = \log \frac{117}{100 \cdot 90 \cdot 13} = \log \frac{9 \cdot 13}{100 \cdot 90 \cdot 13} = \log \frac{1}{1000} = -3 \end{aligned}$$

Επομένως $K=3$.

Επιμέλεια λύσεων: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών