

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα προαγωγικών εξετάσεων Περιόδου Ιουνίου
στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-\rho)$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $u = P(\rho)$.

Μονάδες 15

- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i. $\log(q_1 + q_2) = \log q_1 + \log q_2, \theta_1, \theta_2 > 0$
- ii. Το πολυώνυμο $ax^3 + 2x^2 - x + 1, a \in \mathbb{R}$ είναι 3ου βαθμού για κάθε τιμή του a .
- iii. $\ln q_1 + \ln q_2 = \ln(q_1 \cdot q_2)$
- iv. Το σύστημα $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x - ay = 1 \end{cases}$ έχει πάντοτε λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- v. Αν $a > 0, m$ ακέραιος και n θετικός ακέραιος, τότε $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (1-4)x + 3y = 5 \\ 3x + (1+4)y = 15 \end{cases}$

- α) Να λυθεί το σύστημα για $\lambda = -10$. Μονάδες 7
- β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση. Μονάδες 6
- γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Μονάδες 6
- δ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το σύστημα είναι αδύνατο. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ και $Q(x) = x^2 + 1$

α) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$

Μονάδες 7

β) Να λυθεί η εξίσωση $p(x) = 0$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του ερωτήματος α)

Μονάδες 6

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0$

Μονάδες 6

δ) Να λυθεί η εξίσωση $Q(e^j x) = \sin x, x \neq kp + \frac{p}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{e^{2x} \cdot \ln x - \ln x - e^{2x} + 1}{e^x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να δείξετε ότι

$$f(x) = \frac{(\ln x - 1)(e^{2x} - 1)}{e^x}.$$

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x}$.

γ) Να βρείτε διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

Μονάδες 6

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) \cdot (2\sin^2 x + 5\sin x - 3) = g(x) \cdot (\ln x - 1)$

Μονάδες 6

-Ο-
Δ/ΝΤΗΣ

-ΟΙ-
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (1-4)x+3y=5 \\ 3x+(1+4)y=15 \end{cases}$$

α) Για $\lambda = -10$ έχουμε το σύστημα.

$$\begin{cases} -14x+3y=5 & (^{\cdot 2}) \\ 3x-6y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -28x+6y=10 & (1) \\ 3x-6y=15 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{cases} -25x=25 \\ 3x-6y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -3-6y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -6y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$$

β) Για να έχει το σύστημα έχει μοναδική λύση πρέπει

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-4 & 3 \\ 3 & 1+4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (1-4)(1+4)-9 \neq 0 \Leftrightarrow 1^2-16-9 \neq 0 \Leftrightarrow 1^2 \neq 25 \Leftrightarrow$$

$$1 \neq \pm 5$$

γ) Για να έχει το σύστημα άπειρες λύσεις ή να είναι αδύνατο πρέπει $D = 0 \Leftrightarrow 1 = \pm 5$

Για $\lambda = 5$ έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x+9y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5 \\ x+3y=5 \end{cases}$ οπότε το σύστημα είναι

ισοδύναμο με την γραμμική εξίσωση $x+3y=5$ δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

δ) Για $\lambda = -5$ έχουμε το σύστημα $\begin{cases} -9x+3y=5 & (^{\cdot (-3)}) \\ 3x-y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=-\frac{5}{3} \\ 3x-y=15 \end{cases}$, το οποίο είναι αδύνατο.

ΘΕΜΑ 3ο

α)

x^5	$-2x^3$	$+2x^2$	$-3x$	$+2$	x^2+1
$-x^5$	$-x^3$				x^3-3x+2
	$-3x^3$	$+2x^2$	$-3x$	$+2$	
	$3x^3$		$+3x$		
		$2x^2$		$+2$	
		$-2x^2$		-2	
		0			

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):Q(x)$ είναι το $p(x) = x^3 - 3x + 2$ και το υπόλοιπο $v=0$.

β)

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Το πηλίκο του $p(x)$ της διαίρεσης με το $x-1$ είναι το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ το οποίο έχει ρίζες 1, -2. Άρα $p(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$

$$\gamma) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow \underset{>0}{(x^2+1)} \underset{\geq 0}{(x-1)^2} (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (x=1) \text{ ή } (x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2)$$

$$\text{Άρα } x \in [-2, +\infty)$$

δ) Πρέπει $\sin x \neq 0$

$$Q(e^j x) = \sin x \Leftrightarrow e^{j^2 x} + 1 = \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x \Leftrightarrow \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ δεκτές}$$

ΘΕΜΑ 4ο

$$\alpha) A_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} \cdot \ln x - \ln x - e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{(e^{2x} - 1) \cdot \ln x - (e^{2x} - 1)}{e^x} = \frac{(\ln x - 1)(e^{2x} - 1)}{e^x}.$$

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα

$$x'x, \text{ λύνουμε την εξίσωση } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^{2x} - 1) \cdot (\ln x - 1)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 1) \cdot (\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή}$$

$$(\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 = \ln e \Leftrightarrow x = e \text{ δεκτή}). \text{ Άρα σημείο τομής το } (e, 0).$$

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g λύνουμε την ανίσωση

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{(e^{2x} - 1) \cdot (\ln x - 1)}{e^x} < \frac{(e^x + 1) \cdot (e^x - 1)}{e^x} \Leftrightarrow \cancel{(e^{2x} - 1)} \cdot (\ln x - 1) < \cancel{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow \begin{matrix} e^{2x} - 1 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 = \ln e \Leftrightarrow x < e.$$

Επομένως το ζητούμενο διάστημα είναι το $(0, e)$ αφού $x > 0$

$$\delta) f(x) \cdot (2\sin^2 x + 5\cos x - 3) = g(x) \cdot (\ln x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\ln x - 1)(e^{2x} - 1)}{e^x} \cdot (2\sin^2 x + 5\cos x - 3) = \frac{(e^{2x} - 1)}{e^x} \cdot (\ln x - 1) \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x + 5\cos x - 3 = 1 \Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\cos x = w(2)$.

$$(1) \Rightarrow 2w^2 - 5w + 2 = 0 \quad (3).$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 \text{ και οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι :}$$

$$w_1 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2, \quad w_2 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad (2) \Rightarrow \cos x = 2 \text{ αδύατο } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

$$(2) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right) \text{ ή } \left(x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right)$$