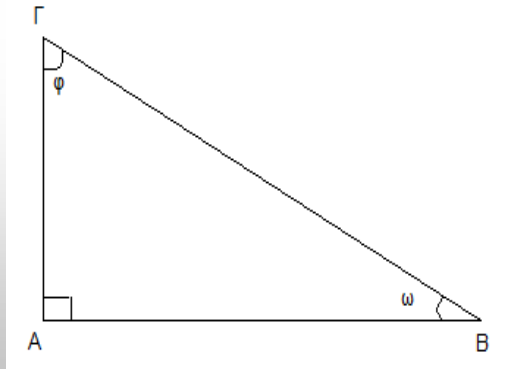


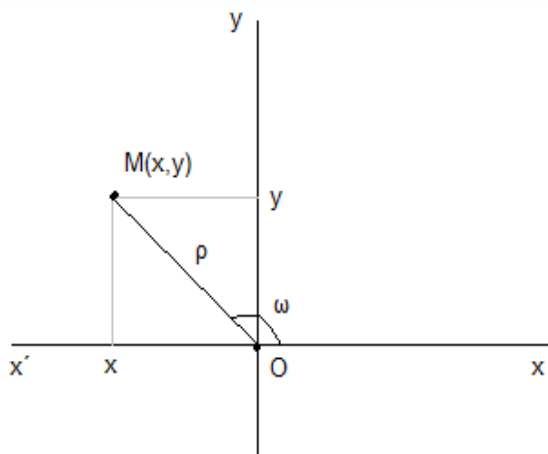
3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



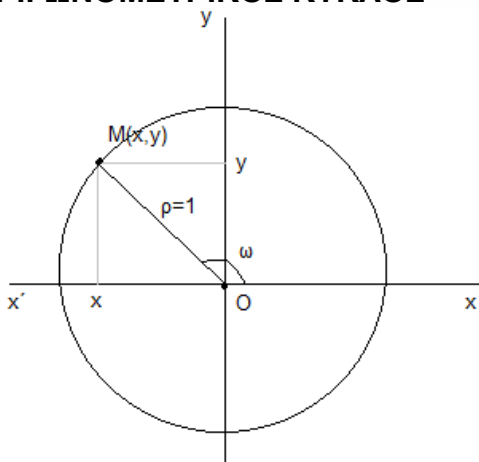
$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= \frac{AG}{BG} = \frac{\text{Απέναντι_κάθετη}}{\text{Υποτέινουσα}} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{AB}{BG} = \frac{\text{Προσκάμενη_κάθετη}}{\text{Υποτέινουσα}} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{AG}{AB} = \frac{\text{Απέναντι_κάθετη}}{\text{Προσκάμενη_κάθετη}} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{AB}{AG} = \frac{\text{Προσκάμενη_κάθετη}}{\text{Απέναντι_κάθετη}}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



$$\begin{aligned}\eta\mu\omega &= \frac{y}{\rho} \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{x}{\rho} \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{y}{x} \quad \text{η απόσταση του M από} \\ \sigma\phi\omega &= \frac{x}{y} \quad \text{την αρχή των αξόνων O}\end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

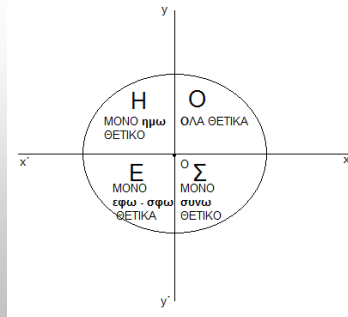


Για έναν σύντομο κατά προσέγγιση υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο, ο κύκλος δηλ. που έχει κέντρο O και $\rho=1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει :

- $\eta\mu\omega = y$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = x$
- $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ (ή $|\eta\mu\omega| \leq 1$)
- $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ (ή $|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1$).

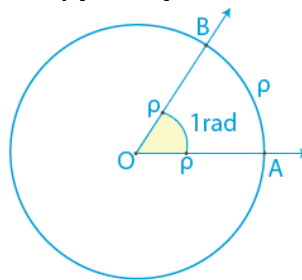
ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο προκύπτουν και τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Οι γωνίες εκτός από μοίρες, μετριοούνται και με ακτίνια (rad). Ένα τόξο AB ενός κύκλου (O,ρ) λέγεται τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου. **Ακτίνιο (ή 1rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad).**



Ένας κύκλος είναι 2π rad, οπότε προκύπτει ο τύπος που μετατρέπει τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα για μια γωνίας ω : $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ όπου η γωνία ω είναι μ° και α rad. π.χ. η

$$\text{γωνία } \omega = 30^\circ \text{ είναι } \frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 6\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Έτσι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών του 1° τεταρτημορίου δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0 \text{ rad}$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΕΝΑΣ ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΝΑΚΑ**1° ΒΗΜΑ :** Αρχικά γράφουμε :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$	$\frac{\sqrt{\quad}}{2}$
συνω					
εφω					
σφω					

2° ΒΗΜΑ : Συμπληρώνουμε κάτω από τις ρίζες κατά σειρά τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 και υπολογίζουμε το κάθε αποτέλεσμα.

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
συνω					
εφω					
σφω					

3° ΒΗΜΑ : Οι τιμές του συνω είναι «ανάποδες» από τις τιμές του ημω

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω					
σφω					

4° ΒΗΜΑ : Για την εφω ισχύει : $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ άρα :

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{0} = -$ δεν ορίζεται
σφω					

5° ΒΗΜΑ : Οι τιμές της εφω είναι «ανάποδες» από τις τιμές της σφω

Γωνία ω	$\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90^\circ$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται
σφω	δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ή $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

- $\eta\mu 0^\circ = 0$, $\eta\mu 90^\circ = 1$, $\eta\mu 180^\circ = 0$, $\eta\mu 270^\circ = -1$
- $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$, $\sigma\upsilon\nu 270^\circ = 0$

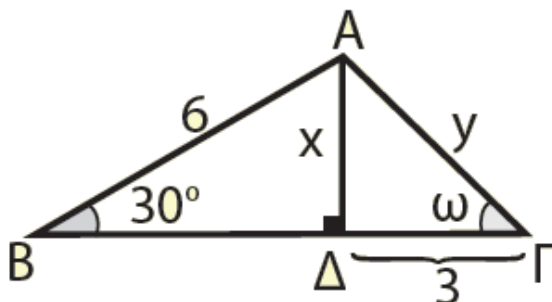
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ «ΜΕΓΑΛΩΝ» ΓΩΝΙΩΝ

- $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \eta\mu\theta$ ή σε ακτίνια $\eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \varepsilon\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\varepsilon\phi(2\kappa\pi + \theta) = \varepsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\phi(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\phi\theta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία ω .



Λύση :

Το τρίγωνο ABD είναι ορθογώνιο άρα : $\eta\mu B = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Το τρίγωνο ADG είναι ορθογώνιο άρα : $\epsilon\phi\Gamma = \frac{AD}{DG} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = 1$

άρα $\omega = 45^\circ$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{DG}{AG} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \sqrt{2}y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2}$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να εκφράσετε σε rad γωνία :

- i. 30° ii. 120° iii. 1260° iv. -1485°

Λύση :

i. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 30^\circ$ και έχω :

$$\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 6\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} rad. \text{ Άρα } \mu = 30^\circ = \frac{\pi}{6} rad$$

ii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 120^\circ$ και έχω :

$$\frac{120}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 3\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} rad. \text{ Άρα } \mu = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} rad$$

iii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 1260^\circ$ και έχω :

$$\frac{1260}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 7 = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = 7\pi rad. \text{ Άρα } \mu = 1260^\circ = 7\pi rad$$

iv. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = -1485^\circ$ και έχω :

$$\frac{-1485}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{33}{4} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 4\alpha = -33\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{33\pi}{4} rad. \text{ Άρα } \mu = -1485^\circ = -\frac{33\pi}{4} rad$$

3. (Άσκηση 5 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία :

- i. $\frac{\pi}{10}rad$ ii. $\frac{5\pi}{6}rad$ iii. $\frac{91\pi}{3}rad$ iv. $100rad$

Λύση :

- i. Γνωρίζουμε ότι $2\pi rad = 360^\circ \Leftrightarrow \pi rad = 180^\circ$

$$\frac{\pi}{10}rad = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$$

ii. $\frac{5\pi}{6}rad = \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^\circ$

iii. $\frac{91\pi}{3}rad = \frac{91 \cdot 180}{3} = 91 \cdot 60^\circ = 5460^\circ$

- iv. Από τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, για $\alpha = 100$, έχουμε :
- $$\frac{\mu}{180} = \frac{100}{\pi} \Leftrightarrow \mu \cdot \pi = 18000 \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

4. (Άσκηση 6 σελ. 58 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

- i. 1830° ii. 2940° iii. 1980° iv. 3600°

Λύση :

- i. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \epsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \theta) = \sigma\phi\theta$

Αν κάνουμε τη διαίρεση $1830 : 360$ θα βρούμε πηλίκo 5 και υπόλοιπο 30.

Άρα ισχύει : $1830^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 30^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 1830^\circ = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1830^\circ = \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 1830^\circ = \epsilon\phi(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\phi 1830^\circ = \sigma\phi(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}$$

- ii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $2940 : 360$ θα βρούμε πηλίκo 8 και υπόλοιπο 60.

Άρα ισχύει : $2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 2940^\circ = \eta\mu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2940^\circ = \sigma\upsilon\nu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 2940^\circ = \epsilon\phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sigma\phi 2940^\circ = \sigma\phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- iii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $1980 : 360$ θα βρούμε πηλίκo 5 και υπόλοιπο 180.

Άρα ισχύει : $1980^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}\eta\mu 1980^\circ &= \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \eta\mu 180^\circ = 0 \\ \sigma\upsilon\nu 1980^\circ &= \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1 \\ \epsilon\phi 1980^\circ &= \epsilon\phi(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \epsilon\phi 180^\circ = 0 \\ \sigma\phi 1980^\circ &= \sigma\phi(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sigma\phi 180^\circ = - \text{ (δεν ορίζεται)}\end{aligned}$$

iv. Αν κάνουμε τη διαίρεση $3600 : 360$ θα βρούμε πηλίκο 10 και υπόλοιπο 0.

Άρα ισχύει : $3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 0^\circ$ οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}\eta\mu 3600^\circ &= \eta\mu(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \eta\mu 0^\circ = 0 \\ \sigma\upsilon\nu 3600^\circ &= \sigma\upsilon\nu(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1 \\ \epsilon\phi 3600^\circ &= \epsilon\phi(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \epsilon\phi 0^\circ = 0 \\ \sigma\phi 3600^\circ &= \sigma\phi(10 \cdot 360^\circ + 0^\circ) = \sigma\phi 0^\circ = - \text{ (δεν ορίζεται)}\end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

5. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της γραμμής Α με τα ίσα τους στη γραμμή Β.

Γραμμή Α Γωνία ω σε μοίρες	Α. 30°	Β. 45°	Γ. 60°	Δ. 120°	Ε. 135°	ΣΤ. 150°	
Γραμμή Β Γωνία ω σε rad	1. $\frac{\pi}{3}$	2. $\frac{\pi}{4}$	3. $\frac{6\pi}{5}$	4. $\frac{3\pi}{4}$	5. $\frac{5\pi}{6}$	6. $\frac{2\pi}{3}$	7. $\frac{\pi}{6}$

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Γωνία ω	Πρόσημο			
	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
130°				
-100°				
87°				
-80°				

7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- | | |
|---------------------------------|--|
| i. $\eta\mu 200^\circ > 0$ | ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} < 0$ |
| iii. $\eta\mu 30^\circ > 0$ | iv. $\sigma\upsilon\nu 300^\circ < 0$ |
| v. $\epsilon\phi 200^\circ > 0$ | vi. $\sigma\phi \frac{7\pi}{6} > 0$ |

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο μήκους 20cm. Να εκφράσετε τη γωνία ω σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=5\text{cm}$.

9. Να εκφράσετε τη γωνία

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| i. 120° σε rad | ii. $\frac{3\pi}{4}$ rad σε μοίρες |
|-----------------------|------------------------------------|

10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

- | | |
|----------------|---------------------------|
| i. 765° | ii. $\frac{49\pi}{6}$ rad |
|----------------|---------------------------|

11. Να δείξετε ότι : $|2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu y| \leq 5$.

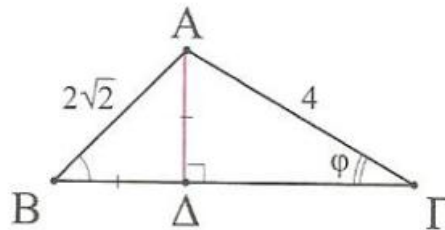
12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :

i. $A = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu y$ ii. $B = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu y$ iii. $\Gamma = 5 - 3\eta\mu^2 x$

13. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\frac{\pi}{3} < y < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

i. $A = \sigma\upsilon\nu(x+y)$ ii. $B = \epsilon\phi 3y$ iii. $\Gamma = \eta\mu(x-y)$

14. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε :



- i. το ύψος ΑΔ ii. τη γωνία φ iii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

15. Να μετατρέψετε σε μοίρες τα τόξα :

i. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ii. $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$ iii. $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}$

16. Να μετατρέψετε σε ακτίνια (rad) τις γωνίες :

i. $120^\circ, 150^\circ, 135^\circ, 270^\circ$ ii. $10^\circ, 15^\circ, 12^\circ$

17. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \frac{2\eta\mu 30^\circ + 2\epsilon\phi 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \epsilon\phi 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - 2\sigma\phi 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\phi 45^\circ}$ ii. $B = \frac{2\eta\mu \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\epsilon\phi \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi \frac{\pi}{3} + \sigma\phi \frac{\pi}{4}}$

iii. $\Gamma = \frac{3\epsilon\phi \frac{\pi}{3} + 2\eta\mu \frac{\pi}{3} - 3\sigma\phi \frac{\pi}{6} + 6\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{2\sigma\phi \frac{\pi}{6} + 2\epsilon\phi \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + 6\eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}$

18. Να βρείτε του τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

i. $\omega = \frac{41\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{601\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{901\pi}{3}$

iv. $\omega = \frac{61\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{49\pi}{4}$ vi. $\omega = \frac{301\pi}{3}$

19. Να υπολογίσουμε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \frac{6\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}\epsilon\phi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$ ii. $B = \frac{2\eta\mu \frac{13\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{61\pi}{3}}{\epsilon\phi \frac{17\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi \frac{25\pi}{3} + \sigma\phi \frac{33\pi}{4}}$

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$

Απόδειξη :

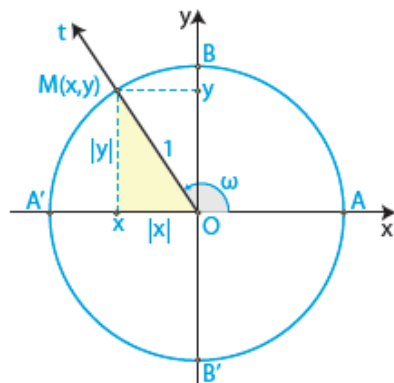
Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι : $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = \eta\mu\omega$

Επειδή όμως, $(OM) = 1$ και

$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2, \text{ θα ισχύει :}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ οπότε θα έχουμε :}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



2. $\boxed{\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} \quad \boxed{\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$

Απόδειξη :

Στο ίδιο σχήμα έχουμε : $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (εφόσον $x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

3. $\boxed{\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1}$

Απόδειξη :

Είναι :

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0 \text{)}$$

$$\text{Επομένως : } \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

4. $\boxed{\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$ και $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω} \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x &= \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Όμως $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, άρα βρισκόμαστε στο 2^ο τεταρτημόριο όπου $\sigma\upsilon\nu x < 0$, άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}}$

$$\text{Επίσης : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\phi x = -\frac{3}{4}} \text{ και}$$

$$\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi x = -\frac{4}{3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω} \quad : \quad \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x &= 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2 x &= \frac{9}{9} - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Όμως $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, άρα βρισκόμαστε στο 3^ο τεταρτημόριο όπου $\eta\mu x < 0$, άρα $\boxed{\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$

$$\text{Επίσης : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ και}$$

$$\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\phi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

$$\text{Έχω : } \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3\eta\mu x = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}$$

$$\text{Όμως : } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{9}\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \sigma \nu \nu^2 x + \sigma \nu \nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 x + 3 \sigma \nu \nu^2 x = 3 \Leftrightarrow 4 \sigma \nu \nu^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \iota x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ όμως } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi, \text{ άρα βρισκόμαστε στο 4}^\circ \text{ τεταρτημόριο όπου}$$

$$\sigma \nu \iota x > 0, \text{ άρα } \boxed{\sigma \nu \iota x = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$\text{Επίσης } \varepsilon \phi x = \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \iota x} \Leftrightarrow \eta \mu x = \varepsilon \phi x \cdot \sigma \nu \iota x \Leftrightarrow \eta \mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta \mu x = -\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Τέλος } \varepsilon \phi x \cdot \sigma \phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma \phi x = \frac{1}{\varepsilon \phi x} \Leftrightarrow \sigma \phi x = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sigma \phi x = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \boxed{\sigma \phi x = -\sqrt{3}}$$

4. (Άσκηση 5 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma \phi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta \mu x \cdot \sigma \nu \iota x}{1 + \sigma \nu \iota x}$.

Λύση:

$$\text{Έχω: } \varepsilon \phi x \cdot \sigma \phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \phi x = \frac{1}{\sigma \phi x} \Leftrightarrow \varepsilon \phi x = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \varepsilon \phi x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Από τον τύπο } \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \varepsilon \phi^2 \omega} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu \omega = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu \omega = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ όμως } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\text{άρα βρισκόμαστε στο 4}^\circ \text{ τεταρτημόριο άρα } \sigma \nu \iota x > 0, \text{ άρα } \boxed{\sigma \nu \iota x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

$$\text{Επίσης } \varepsilon \phi x = \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \iota x} \Leftrightarrow \eta \mu x = \varepsilon \phi x \cdot \sigma \nu \iota x \Leftrightarrow \eta \mu x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\eta \mu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Τελικά η παράσταση } \frac{2\eta \mu x \cdot \sigma \nu \iota x}{1 + \sigma \nu \iota x} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4 \cdot 5}{5}}{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-4}{5 + 2\sqrt{5}}.$$

5. (Άσκηση 7 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι, τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου με $x = 3\sigma \nu \nu \theta$ και $y = 3\eta \mu \theta$, είναι σημεία κύκλου $O(0,0)$ κέντρου και ακτίνας $\rho=3$.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απόσταση του σημείου $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι ίση με 3. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (OM) &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sigma \nu \nu \theta)^2 + (3\eta \mu \theta)^2} = \sqrt{9\sigma \nu \nu^2 \theta + 9\eta \mu^2 \theta} = \\ &= \sqrt{9(\sigma \nu \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta)} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

6. (Άσκηση 8 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν ισχύει $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } 9x^2 + 4y^2 = 36 &\Leftrightarrow 9(2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 4(3\eta\mu\theta)^2 = 36 \Leftrightarrow 9 \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 \cdot 9\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 36\sigma\upsilon\nu^2\theta + 36\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow 36(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = 36 \Leftrightarrow 36 \cdot 1 = 36 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

7. (Άσκηση 10 σελ. 63 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

- i. $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$
- ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

Λύση :

- i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\alpha \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha \neq -1$ έχω :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \stackrel{\text{ζιαστί}}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\alpha = (1-\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha) \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

- ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 - (\eta\mu^2\alpha)^2 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha) \cdot 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \text{ που ισχύει.}$

8. (Άσκηση 11 σελ. 64 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

- i. $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta}$
- ii. $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Λύση :

- i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\theta \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \neq -1$ έχω :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} &= \frac{2}{\eta\mu\theta} \stackrel{\cdot\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 2(1+\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

- ii. Με τον περιορισμό ότι : $1-\eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq 1$, $1+\eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq -1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{έχω : } \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} &= \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi} \stackrel{\cdot(1-\eta\mu\chi)(1+\eta\mu\chi)\sigma\upsilon\nu\chi}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi(1+\eta\mu\chi) + \sigma\upsilon\nu^2\chi(1-\eta\mu\chi) = 2(1-\eta\mu\chi)(1+\eta\mu\chi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu\chi = 2(1-\eta\mu^2\chi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2 - 2\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \\ &\text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

9. (Άσκηση 3 σελ. 64 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\frac{1+\eta\mu\chi}{1-\eta\mu\chi}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu\chi}{1+\eta\mu\chi}} = 2\varepsilon\phi\chi$.

Λύση :

Έχω :

$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \text{ όμως } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$$

$$\text{Άρα } \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1+\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}} - \frac{\sqrt{(1-\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} - \frac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = 2\varepsilon\phi x. \text{ Όμως : } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ άρα βρισκόμαστε στο } 1^\circ \text{ και στο}$$

4^ο άρα ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$, οπότε $|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$. Επίσης $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ άρα ισχύει $1 + \eta\mu x \geq 0$ και $1 - \eta\mu x \geq 0$. Άρα

$$\frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} - \frac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x - 1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \Leftrightarrow 2 \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\phi x \text{ που ισχύει.}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

10. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στη στήλη Β, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu^2\omega$	1. $\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$
Β. $\varepsilon\phi\omega$	2. $1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$
Γ. $\sigma\phi\omega$	3. $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
Δ. $\sigma\upsilon\nu^2\omega$	4. $\frac{1}{\varepsilon\phi\omega}$
Ε. $1+\varepsilon\phi^2\omega$	5. $\frac{1}{\eta\mu^2\omega}$
	6. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu^2 1 + \sigma\upsilon\nu^2 1 = 2$

ii. $\eta\mu 3 = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 3}$

iii. $\sigma\upsilon\nu 2 = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 2}$

iv. $\sigma\upsilon\nu 3 \cdot \varepsilon\phi 3 = \eta\mu 3$

v. $\varepsilon\phi 2012 \cdot \sigma\phi 2012 = 1$

vi. $\varepsilon\phi 10 = \frac{1}{\sigma\phi 10}$

vii. $\sigma\upsilon\nu^2 5 = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 5}$

viii. $\eta\mu^2 7 = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2 7}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**A. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

12. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

13. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

14. Αν $\sigma\phi\omega = -\frac{5}{12}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

15. Αν $\epsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να αποδείξετε ότι :

i. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$

ii. $\frac{5\eta\mu\omega - 15\sigma\upsilon\nu\omega}{6\epsilon\phi\omega - 5\eta\mu 90^\circ} = -1$

16. Για μια γωνία $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει : $5\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega - 6 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$

ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$.

17. Αν είναι $3\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi = 5$, τότε :

i. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$, $\epsilon\phi\chi$ και $\sigma\phi\chi$.

ii. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο χ .

18. Αν είναι $3\eta\mu\chi - 4\sigma\upsilon\nu\chi = 5$, τότε :

i. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$, $\epsilon\phi\chi$ και $\sigma\phi\chi$.

ii. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο χ .

19. Αν για τη γωνία χ , ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2\chi + 4\eta\mu\chi + 1 = 0$, να βρείτε το $\eta\mu\chi$.

20. Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου με $x=5\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=5\eta\mu\theta$, είναι σημεία κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=5$.

21. Αν $x=\eta\mu\theta$ και $y=\sigma\upsilon\nu^2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ ανήκουν σε παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή.

22. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x , για τις οποίες να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = \frac{2}{3}$ και

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$$

23. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

- i. $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ ii. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x$

24. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η παράσταση : $A = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\epsilon\phi x + \sigma\phi x}$.

B. ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Να δείξετε ότι : $\frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}$.

26. Να δείξετε ότι : $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

27. Να δείξετε ότι : $\frac{1 - \epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi x} = \frac{\sigma\phi x - 1}{\sigma\phi x + 1}$.

28. Να δείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \epsilon\phi\theta} - \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\phi\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta$.

29. Να δείξετε ότι : $\frac{1 + \sigma\phi^5 x}{1 + \epsilon\phi^5 x} = \left(\frac{1 + \sigma\phi x}{1 + \epsilon\phi x}\right)^5$.

30. Αν $0 < x < \pi$, να δείξετε ότι : $\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}} - \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}} = -2\sigma\phi x$.

31. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$.

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu^4\beta + 2\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^4\beta}$.

33. Να αποδειχθεί ότι :

i. $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2$

ii. $\frac{\eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

iii. $\frac{1}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} + \frac{1}{1 - \sigma\phi^2\alpha} = 1$

iv. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \left(\eta\mu^2\alpha + \frac{1}{\sigma\phi^2\alpha} \right) = 1$

- v. $\eta\mu^2\alpha \cdot \varepsilon\phi\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\phi\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha$
 vi. $\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x = \sigma\upsilon\nu^4x$
 vii. $(\varepsilon\phi x + \sigma\phi x)^2 - (\varepsilon\phi x - \sigma\phi x)^2 = 4$

34. Να αποδειχθεί ότι :

- i. $\sigma\upsilon\nu^4x + \sigma\upsilon\nu^2x \cdot \eta\mu^2x + \eta\mu^2x = 1$
 ii. $\sigma\upsilon\nu^4x + 2\eta\mu^2x - \eta\mu^4x = 1$
 iii. $(\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 = 1$
 iv. $(\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta)^2 = 1$
 v. $\frac{\eta\mu^3x - \sigma\upsilon\nu^3x}{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$
 vi. $\frac{\eta\mu^3x + \sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^3x - \sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 2$
 vii. $\frac{(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{(1 + \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} = 2$
 viii. $\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi^2x - 1} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
 ix. $\frac{1 - 3\eta\mu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{2\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2x} = -3\varepsilon\phi^2x$
 x. $\frac{\varepsilon\phi x}{1 - \sigma\phi x} + \frac{\sigma\phi x}{1 - \varepsilon\phi x} = \frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$
 xi. $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{\varepsilon\phi x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1}{\varepsilon\phi x}$

Γ. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

35. Να αποδειχθεί ότι :

- i. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \leq 2$
 ii. $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 \leq 2$
 iii. $\left(3\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 \geq 12$
 iv. $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$
 v. $-13 \leq 5\eta\mu x + 12\sigma\upsilon\nu x \leq 13$

36. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x + \sigma\phi x \geq 2$.

37. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x + \sigma\phi x \leq -2$.

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 1^{ου} τεταρτημορίου (δηλαδή γωνιών από $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ ή αλλιώς από $0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$), όπως δίνονται από τον πίνακα. Θα μάθουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μεγαλύτερων γωνιών. Αυτή η διαδικασία γίνεται με αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο.

ΑΠΟ ΤΟ 2^ο ΣΤΟ 1^ο

Δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα 180° ή $\pi \text{ rad}$. Δηλαδή οι γωνίες ω και $180^\circ - \omega$ ή ω και $\pi - \omega$ είναι παραπληρωματικές και ισχύει :

➤ $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	ή	$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$
➤ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	ή	$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
➤ $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$	ή	$\epsilon\phi(\pi - \omega) = -\epsilon\phi\omega$
➤ $\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$	ή	$\sigma\phi(\pi - \omega) = -\sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu 120^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$ iii. $\epsilon\phi 150^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$ vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$

Λύση :

i. $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\phi 150^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4} = \epsilon\phi(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i. $\eta\mu 150^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$ iii. $\epsilon\phi 120^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{2\pi}{3}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6}$ vi. $\epsilon\phi \frac{3\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 3^ο ΣΤΟ 1^ο

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ή πrad είναι οι ω και $180^\circ + \omega$ ή ω και $\pi + \omega$ για τις οποίες ισχύει :

➤ $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	ή	$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$
➤ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	ή	$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
➤ $\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$	ή	$\epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega$
➤ $\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$	ή	$\sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° ή πrad , έχουν ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, ενώ έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu 210^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 225^\circ$ iii. $\epsilon\phi 240^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{4}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6}$ vi. $\epsilon\phi \frac{4\pi}{3}$

Λύση :

i. $\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 225^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\phi 240^\circ = \epsilon\phi(180^\circ + 60^\circ) = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$

iv. $\eta\mu \frac{5\pi}{4} = \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

vi. $\epsilon\phi \frac{4\pi}{3} = \epsilon\phi(\pi + \frac{\pi}{3}) = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i. $\eta\mu 225^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 240^\circ$ iii. $\epsilon\phi 210^\circ$ iv. $\eta\mu \frac{7\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3}$ vi. $\epsilon\phi \frac{5\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 4° ΣΤΟ 1°

Έστω ότι μια γωνία ω βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο. Τότε η αντίθετη της $-\omega$ θα βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο και ισχύει :

- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$

Δηλαδή :

Οι γωνίες ω και $-\omega$ έχουν ίδιο συνημίτονο και αντιθέτους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

- i. $\eta\mu 330^\circ$ ii. $\sigma\upsilon\nu 300^\circ$ iii. $\epsilon\phi 315^\circ$

Λύση :

- i. $\eta\mu 330^\circ = \eta\mu(360^\circ - 30^\circ) = \eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$
- ii. $\sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$
- iii. $\epsilon\phi 315^\circ = \epsilon\phi(360^\circ - 45^\circ) = \epsilon\phi(-45^\circ) = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $\frac{\pi}{2}$ (90°)

Γωνίες με αθροισμα $\frac{\pi}{2}$ (ή 90°) δηλαδή συμπληρωματικές, είναι οι ω και $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ ή αλλιώς ω και $(90^\circ - \omega)$ και ισχύει :

- | | | |
|--|--------|--|
| ➤ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$ | επίσης | $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ |
| ➤ $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$ | επίσης | $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$ |
| ➤ $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\phi\omega$ | επίσης | $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$ |
| ➤ $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\phi\omega$ | επίσης | $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$ |

Δηλαδή :

Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο καθεμίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη καθεμίας με τη συνεφαπτομένη της άλλης και αντίστροφα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

6. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu(\pi+\theta)$	1. $\eta\mu\theta$
Β. $\epsilon\varphi(\pi-\theta)$	2. $-\sigma\varphi\theta$
Γ. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	3. $-\eta\mu\theta$
Δ. $\sigma\varphi(-\theta)$	4. $\sigma\varphi\theta$
Ε. $\sigma\varphi(\pi+\theta)$	5. $-\epsilon\varphi\theta$
ΣΤ. $\sigma\upsilon\nu(-\theta)$	6. $\epsilon\varphi\theta$
	7. $\sigma\upsilon\nu\theta$

7. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu 25^\circ$	1. $\eta\mu 65^\circ$
Β. $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$	2. $-\sigma\varphi 65^\circ$
Γ. $\epsilon\varphi 10^\circ$	3. $\sigma\upsilon\nu 65^\circ$
Δ. $\sigma\varphi 115^\circ$	4. $\eta\mu 18^\circ$
	5. $\sigma\varphi 80^\circ$

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = 1$

iv. $\eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2}$

vi. $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)}$

Λύση :

Θα απλοποιήσουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά και έχουμε :

$$\triangleright \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi + \pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\eta\mu\theta$$

$$\triangleright \eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{10\pi + \pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(4\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi + \pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(6\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta$$

Άρα η τιμή της παράστασης είναι :

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)}{-\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu\theta} = 1$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ :

10. (Άσκηση 1 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. 1200° ii. -2850°

Λύση :

i. Αν διαιρέσουμε το 1200 με το 360 έχουμε $1200^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 120^\circ$ Άρα

$$\triangleright \eta\mu 1200^\circ = \eta\mu(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu 1200^\circ = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi 1200^\circ = \epsilon\phi(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \epsilon\phi 120^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 60^\circ) = -\epsilon\phi 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\triangleright \sigma\phi 1200^\circ = \sigma\phi(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sigma\phi 120^\circ = \sigma\phi(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\phi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ii. Αν διαιρέσουμε το 2850 με το 360 έχουμε $2850^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 330^\circ$ άρα :

$$\triangleright \eta\mu(-2850^\circ) = -\eta\mu 2850^\circ = -\eta\mu(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\eta\mu 330^\circ = -\eta\mu(360^\circ - 30^\circ) = -\eta\mu(-30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu(-2850^\circ) = \sigma\upsilon\nu 2850^\circ = \sigma\upsilon\nu(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = \sigma\upsilon\nu 330^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi(-2850^\circ) = -\epsilon\phi 2850^\circ = -\epsilon\phi(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\epsilon\phi 330^\circ = -\epsilon\phi(360^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi(-30^\circ) = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangleright \sigma\phi(-2850^\circ) = -\sigma\phi 2850^\circ = -\sigma\phi(7 \cdot 360^\circ + 330^\circ) = -\sigma\phi 330^\circ = -\sigma\phi(360^\circ - 30^\circ) = -\sigma\phi(-30^\circ) = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}$$

11. (Άσκηση 2 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. $\frac{187\pi}{6} \text{ rad}$ ii. $\frac{21\pi}{4} \text{ rad}$

Λύση :

i. Αν διαιρέσουμε το 187 με το 6 έχουμε : $187 = 6 \cdot 31 + 1 = 186 + 1$ άρα :

$$\begin{aligned} \text{➤ } \eta\mu \frac{187\pi}{6} &= \eta\mu \frac{186\pi + \pi}{6} = \eta\mu \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\upsilon\nu \frac{187\pi}{6} &= \sigma\upsilon\nu \frac{186\pi + \pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \varepsilon\varphi \frac{187\pi}{6} &= \varepsilon\varphi \frac{186\pi + \pi}{6} = \varepsilon\varphi \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \varepsilon\varphi \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \varepsilon\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\varphi \frac{187\pi}{6} &= \sigma\varphi \frac{186\pi + \pi}{6} = \sigma\varphi \left(31\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\varphi \left(30\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \sigma\phi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

ii. Αν διαιρέσουμε το 21 με το 4 έχουμε : $21 = 4 \cdot 5 + 1 = 20 + 1$ άρα :

$$\begin{aligned} \text{➤ } \eta\mu \frac{21\pi}{4} &= \eta\mu \frac{20\pi + \pi}{4} = \eta\mu \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma\upsilon\nu \frac{21\pi}{4} &= \sigma\upsilon\nu \frac{20\pi + \pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } \varepsilon\varphi \frac{21\pi}{4} = \varepsilon\varphi \frac{20\pi + \pi}{4} = \varepsilon\varphi \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\varphi \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{➤ } \sigma\varphi \frac{21\pi}{4} = \sigma\varphi \frac{20\pi + \pi}{4} = \sigma\varphi \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\varphi \left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\varphi \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

12. (Άσκηση 3 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

i. $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ ii. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$

iii. $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$ iv. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$

Λύση :

- i. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Leftrightarrow \hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{\Gamma})$
 Άρα $\eta\mu A = \eta\mu(\pi - (B + \Gamma)) = \eta\mu(B + \Gamma)$
- ii. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(\pi - (B + \Gamma)) + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) =$
 $= -\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$
- iii. Ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$, άρα :
 $\eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$
- iv. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2}\right) = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$

13. (Άσκηση 4 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)}$

Λύση :

- $\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\eta\mu(-\alpha) = -\eta\mu\alpha$
- $\eta\mu(90^\circ + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

Επομένως έχουμε : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{-\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\alpha$

14. (Άσκηση 5 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : $\frac{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1$

Λύση :

- $\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi + \pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$
- $\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(\frac{20\pi + \pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\phi x$

Επομένως έχουμε : $\frac{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\eta\mu x)}{-\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi x} = -1$

15. (Άσκηση 6 σελ. 70 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση :

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Λύση :

- $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε : } & \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ & = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \end{aligned}$$

16. (Άσκηση 2 σελ. 71 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

$$\text{Να αποδείξετε ότι : } \frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2 \omega - 1$$

Λύση :

- $\eta\mu(5\pi + \omega) = \eta\mu(4\pi + \pi + \omega) = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(6\pi + \pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{4\pi + \pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{6\pi + \pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$
 $= \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\phi(5\pi + \omega) = \sigma\phi(4\pi + \pi + \omega) = \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$
- $\eta\mu(7\pi - \omega) = \eta\mu(6\pi + \pi - \omega) = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi + \pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{6\pi + \pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$
 $= \sigma\phi\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\phi\omega$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως έχουμε : } & \frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \\ & = \frac{-\eta\mu\omega \cdot (-\sigma\upsilon\nu\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\omega}{\sigma\phi\omega \cdot \eta\mu\omega \cdot \eta\mu\omega \cdot (-\epsilon\phi\omega)} = -\sigma\upsilon\nu^2 \omega \stackrel{\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1 - \eta\mu^2 \omega}{=} - (1 - \eta\mu^2 \omega) = \eta\mu^2 \omega - 1. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = 330^\circ$ ii. $\omega = 660^\circ$ iii. $\omega = 405^\circ$ iv. $\omega = 300^\circ$

18. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ii. $\omega = \frac{3\pi}{4}$ iii. $\omega = \frac{5\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{19\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{22\pi}{3}$

19. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , όταν :

i. $\omega = \frac{23\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{89\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{23\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{43\pi}{2}$ v. $\omega = \frac{29\pi}{3}$

20. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $A = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\phi\frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{\eta\mu\frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\phi\frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\phi\frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

ii. $B = \frac{\eta\mu(9\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(19\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(29\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(93\pi - \theta)}{\eta\mu(7\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(27\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(37\pi + \theta)}$

iii. $\Gamma = \frac{\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\phi 240^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 150^\circ}$

21. Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{\eta\mu(\pi - \alpha)}{\epsilon\phi(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha)}{\eta\mu(4\pi - \alpha)} = \eta\mu\alpha$

ii. $\frac{\eta\mu(3\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(7\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(9\pi - \theta)}{\eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(6\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(8\pi + \theta)} = 1$

iii. $\frac{\eta\mu(24\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(37\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi(15\pi + \theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi(\theta - 12\pi)} = 1$

iv. $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \eta\mu(\pi - \alpha) + \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \epsilon\phi\alpha$

v. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2(\pi - \alpha) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha)}{\epsilon\phi^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\phi^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

22. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(\pi - \theta)}$

ii. $B = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(360^\circ + \theta)}{\eta\mu(360^\circ + \theta) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}$

23. Να υπολογίσετε την παράσταση : $A = \eta\mu^2(13\pi + \omega) + \eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2} + \omega\right)$

24. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{29\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{27\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{37\pi}{2} + \theta\right)}$

ii. $B = \frac{2\eta\mu\frac{31\pi}{6} + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{35\pi}{4} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{23\pi}{3}}{\sigma\phi\frac{39\pi}{4} + \sqrt{3} \cdot \varepsilon\phi\frac{53\pi}{6} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}}$

25. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$

26. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^4\frac{\pi}{12} + \eta\mu^4\frac{5\pi}{12} = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}$

27. Να δείξετε ότι: $0 < \frac{\varepsilon\phi(\pi - x)}{\sigma\phi(\pi - x) - \varepsilon\phi x} < 1$

28. Να αποδείξετε ότι :

i. $\eta\mu^2 70^\circ + \eta\mu^2 20^\circ + 3\eta\mu^2 110^\circ + \sigma\upsilon\nu^5 50^\circ + \sigma\upsilon\nu^5 130^\circ + 3\sigma\upsilon\nu^2 70^\circ = 4$

ii. $\frac{\eta\mu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 70^\circ}{\eta\mu 20^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 50^\circ} + \frac{\eta\mu 10^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 55^\circ}{\eta\mu 35^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 80^\circ} + \frac{\varepsilon\phi 15^\circ \cdot \sigma\phi 65^\circ}{\varepsilon\phi 25^\circ \cdot \sigma\phi 75^\circ} = 3$

iii. $\eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \dots + \eta\mu 89^\circ = \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 89^\circ$

iv. $\varepsilon\phi 10^\circ \cdot \varepsilon\phi 15^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 75^\circ \cdot \varepsilon\phi 80^\circ = 1$

v. $\varepsilon\phi 1^\circ \cdot \varepsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 89^\circ = 1$

29. Να δείξετε ότι : $\frac{2\sigma\upsilon\nu^2(2015\pi - x) - 1}{1 - 2\eta\mu(x - \pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{\eta\mu^2\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - 1}{1 - \eta\mu^2(2016\pi - x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x - 2015\pi)}$

30. Να δείξετε ότι : $\frac{2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 1}{1 - 2\eta\mu(180^\circ + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} - \frac{\eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 1}{1 - \eta\mu^2(720^\circ - x)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(3\pi - x)}$

31. Αν $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \varepsilon\phi(-x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

32. Δίνεται γωνία x με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει :

$$15\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - x) - 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 12. \text{ Να υπολογίσετε :}$$

i. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x ,

ii. την τιμή της παράστασης :
$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + 2\sigma\upsilon\nu(17\pi + x)}{3\varepsilon\phi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\phi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}.$$

33. Δίνεται γωνία x με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η παράσταση :

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu(5\pi - x) + \eta\mu(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}.$$

i. Να δείξετε ότι : $A = \varepsilon\phi x$.

ii. Αν ισχύει ότι : $A = \frac{\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \eta\mu 170^\circ} - \frac{\eta\mu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ}{\eta\mu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 50^\circ}$, να βρείτε σε ποιο

τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας x .

iii. Να βρείτε το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\nu x$

34. Δίνεται γωνία x για την οποία ισχύει : $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$.

i. Να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ και $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

ii. Να βρείτε το $\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3} + x\right) + x\right)$.

iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|12x - 7\pi| < 3\pi$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$.

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$, τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει ότι :

➤ $x + T \in A$ και $x - T \in A$

➤ $f(x + T) = f(x)$ και $f(x - T) = f(x)$.

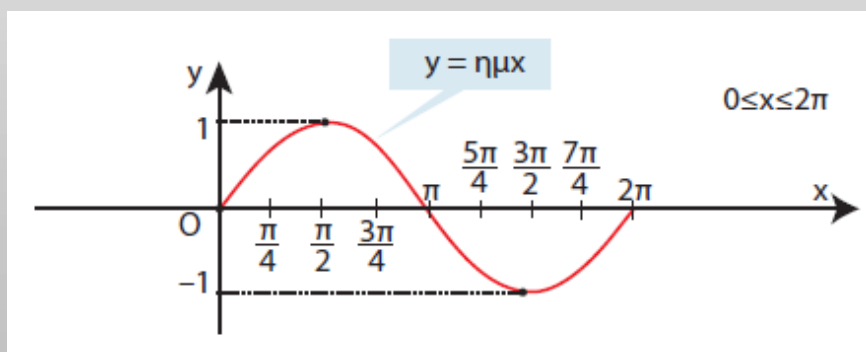
Ο αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f . Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\phi x$ τις οποίες και θα μελετήσαμε.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \eta\mu x$

1. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει **πεδίο ορισμού** όλο το $A = \mathbb{R}$.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει **σύνολο τιμών** το $f(A) = [-1, 1]$ καθώς ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\eta\mu x$ παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι **περιττή** καθώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:
 - $x + 2\pi, x - 2\pi \in \mathbb{R}$
 - $f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$ και $f(x - 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu[-(2\pi - x)] = -\eta\mu(2\pi - x) = -\eta\mu(-x) = \eta\mu x = f(x)$
5. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει χαρακτηριστικές τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
		μεγ.		ελαχ.	

Έτσι προκύπτει και η γραφική της παράσταση στο διάστημα μιας περιόδου $T=2\pi$.



6. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , βρίσκουμε ότι:

- $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f \downarrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f \downarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f \uparrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- Η συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παρουσιάζει:

μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

ελάχιστο στο $x = \frac{3\pi}{2}$, το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$

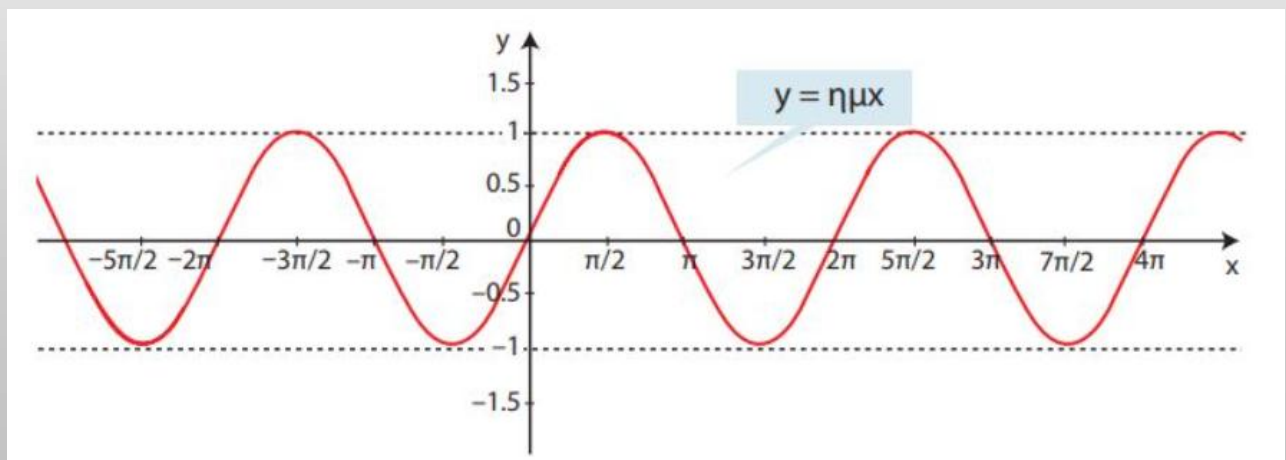
7. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, ... καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$, ...

Οπότε η f παρουσιάζει:

μέγιστο στα $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, το 1

ελάχιστο στα $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, το -1

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση στο $\mathbb{R}$, της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, η οποία λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$

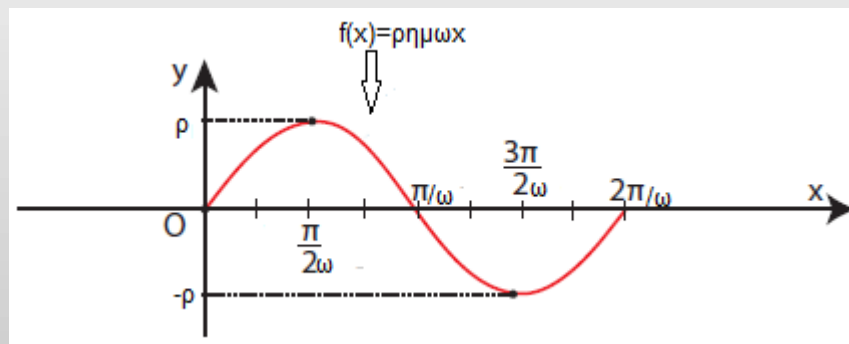
Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω . Δηλαδή: $0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \eta\mu x$	0	1	0	-1	0

γίνεται για την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή:



Παρατηρήσεις:

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x + \alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν $\alpha > 0$ ή προς τα κάτω αν $\alpha < 0$, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = -\rho \cdot \eta\mu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**1. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α' ομάδας)**

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.

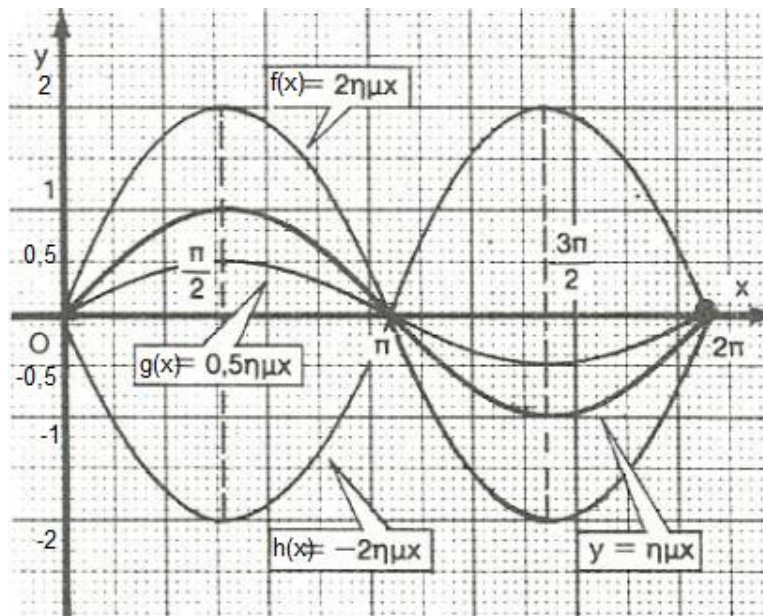
i. $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0,5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση :

i. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0,5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$ ισχύει : $T = 2\pi$
 άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0	-2	0
$g(x) = 0,5\eta\mu x$	0	0,5	0	-0,5	0
$h(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

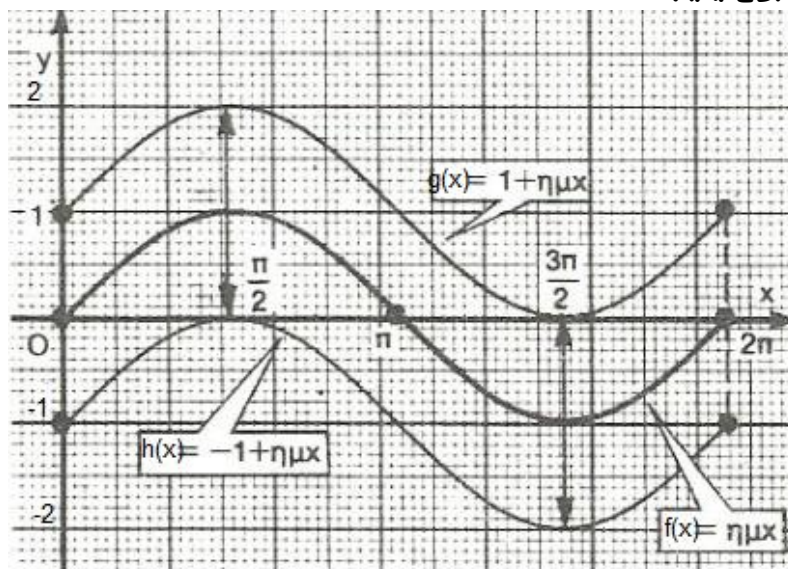
Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :

**2. (Άσκηση 2 σελ. 81 Α' ομάδας)**

Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 1 + \eta\mu x$ και $h(x) = -1 + \eta\mu x$.

Λύση :

Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \eta\mu x$ προκύπτει αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα πάνω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$, ενώ της $h(x) = -1 + \eta\mu x$ αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$.



3. (Άσκηση 3 σελ. 81 Α' ομάδας)

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu 3x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

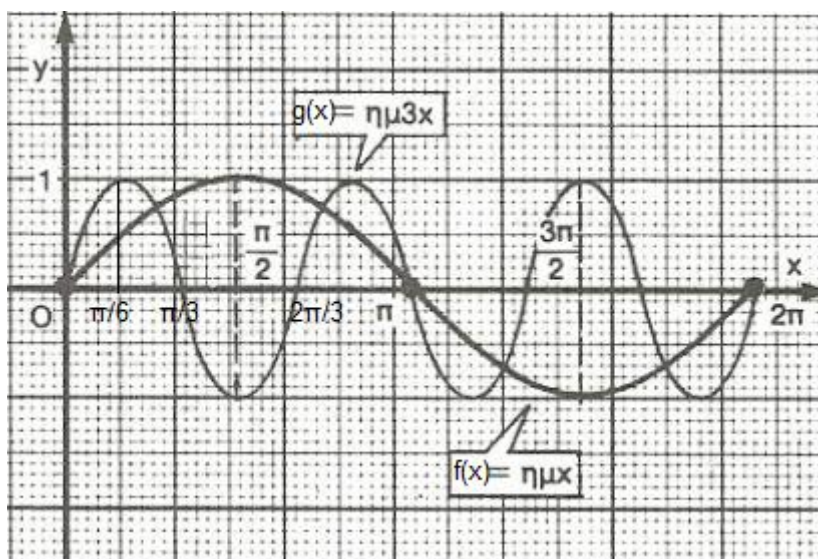
Λύση :

Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x) = \eta\mu 3x$	0	1	0	-1	0

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι :



4. (Άσκηση 5 σελ. 81 Α΄ ομάδας)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση:

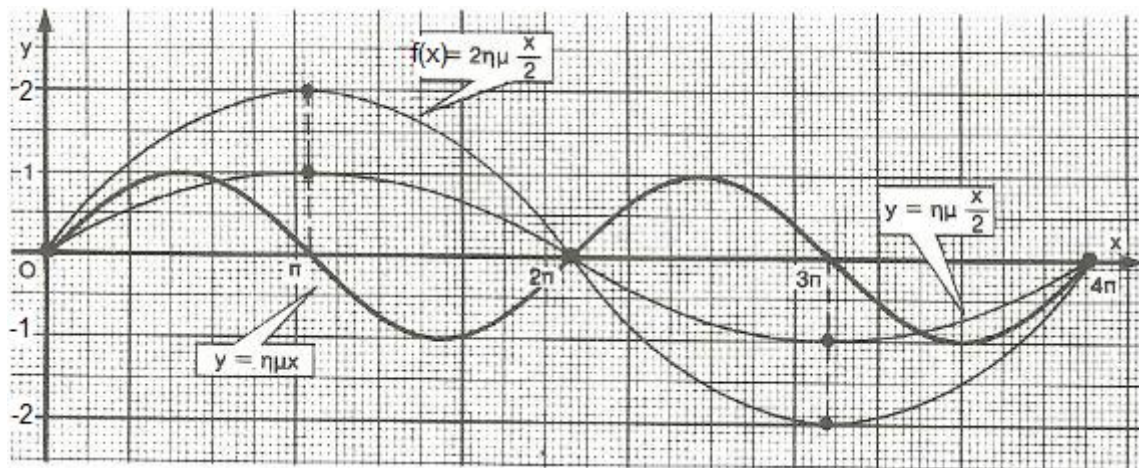
Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$, με $\rho = 2$ και $\omega = \frac{1}{2}$. Άρα έχει μέγιστη τιμή $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho = -2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε

με το $\frac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και 4π , έτσι ο

βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$:

$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$:

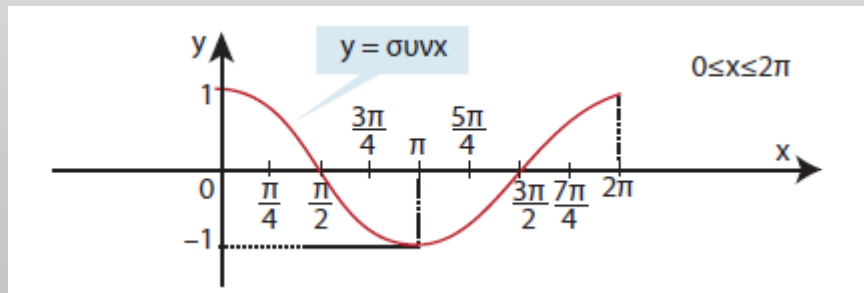


Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει **πεδίο ορισμού** όλο το $A = \mathbb{R}$.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει **σύνολο τιμών** το $f(A) = [-1, 1]$ καθώς ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\sigma\upsilon\nu x$ παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι **άρτια** καθώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:
 - $x + 2\pi, x - 2\pi \in \mathbb{R}$
 - $f(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$ και
 $f(x - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu[-(2\pi - x)] = \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x = f(x)$
5. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει χαρακτηριστικές τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1 μεγ.	0	-1 ελαχ.	0	1 μεγ.

Έτσι προκύπτει και η γραφική της παράσταση στο διάστημα μιας περιόδου $T=2\pi$.



6. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , βρίσκουμε ότι:

- $f \downarrow [0, \pi]$, $f \uparrow [\pi, 2\pi]$
- Η συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2\pi]$ παρουσιάζει:
μέγιστο στα $x=0$ και $x=2\pi$ το $f(0) = f(2\pi) = 1$
ελάχιστο στο $x=\pi$, το $f(\pi) = -1$

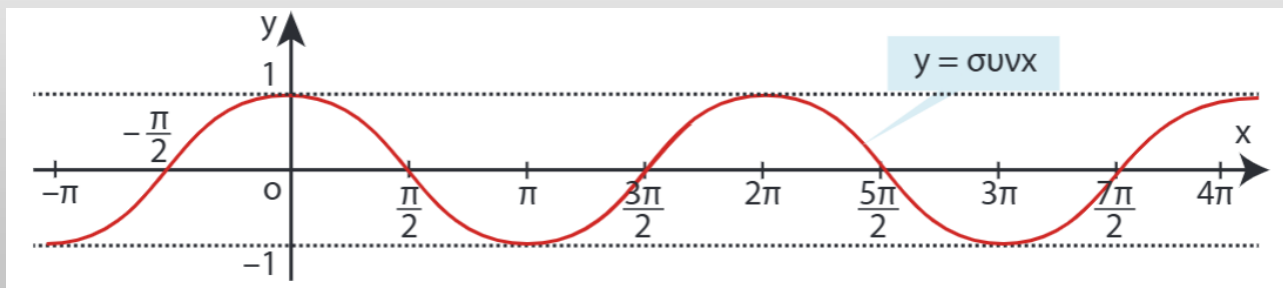
7. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, ... καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$, ...

Οπότε η f παρουσιάζει:

μέγιστο στα $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, το 1

ελάχιστο στα $x = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, το -1

Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση στο $\mathbb{R}$, της συνάρτησης $f(x) = \sin x$.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$

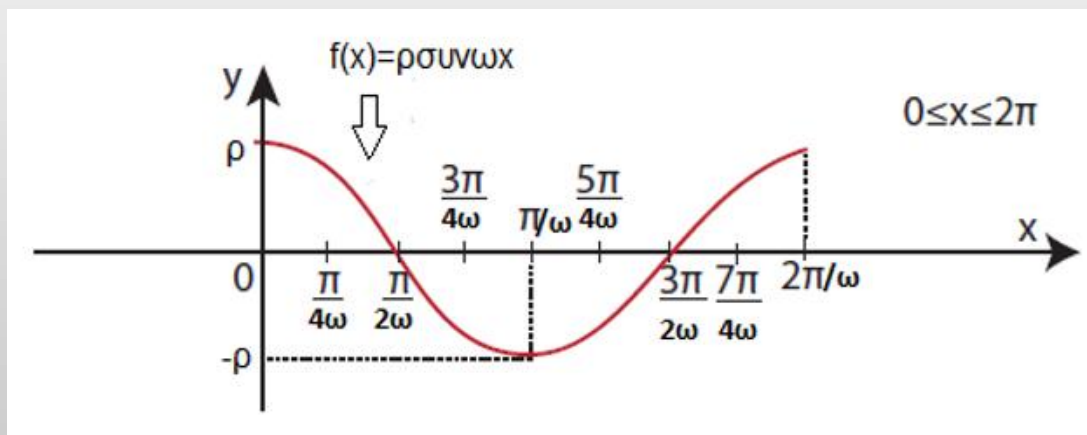
Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ με $\rho, \omega > 0$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω . Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1

γίνεται για την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ στο διάστημα $\Delta = \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή :



Παρατηρήσεις :

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x + \alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν $\alpha > 0$ ή προς τα κάτω αν $\alpha < 0$, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x) = -\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α΄ ομάδας)

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.

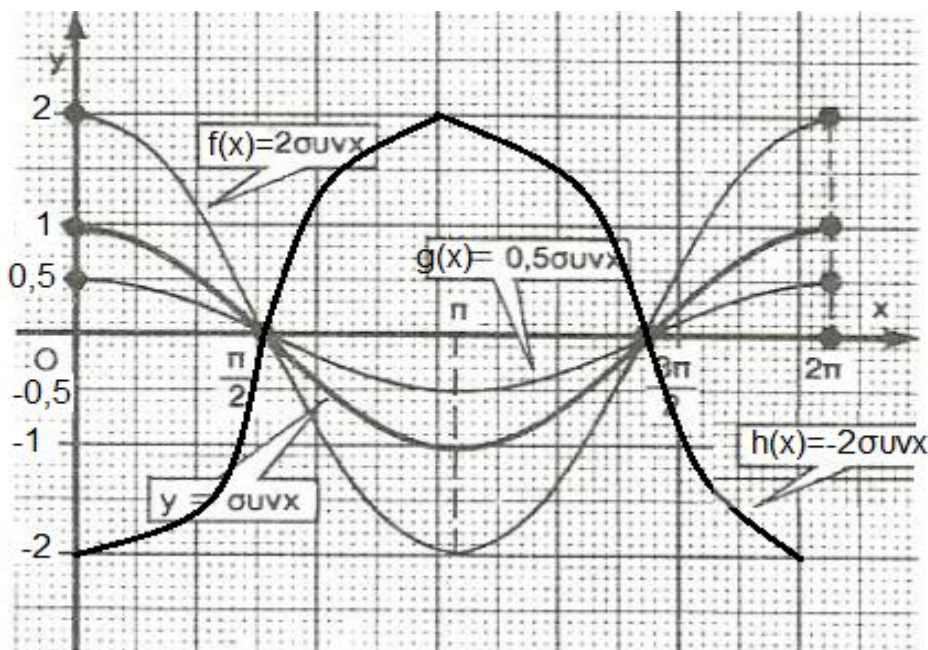
ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση :

ii. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ ισχύει : $T = 2\pi$ άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$	2	0	-2	0	2
$g(x) = 0,5\sigma\upsilon\nu x$	0,5	0	-0,5	0	0,5
$h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$	-2	0	2	0	-2

Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :



6. (Άσκηση 4 σελ. 81 Α΄ ομάδας)

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ $0 \leq x \leq 2\pi$

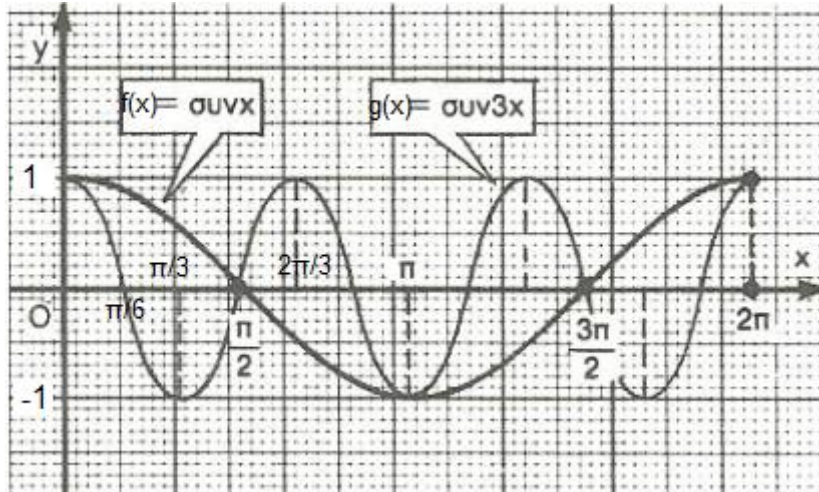
Λύση :

Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$	1	0	-1	0	1

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ είναι :



7. (Άσκηση 6 σελ. 82 Α' ομάδας)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu \omega x$, με $\rho = 2$ και $\omega = \frac{1}{2}$.

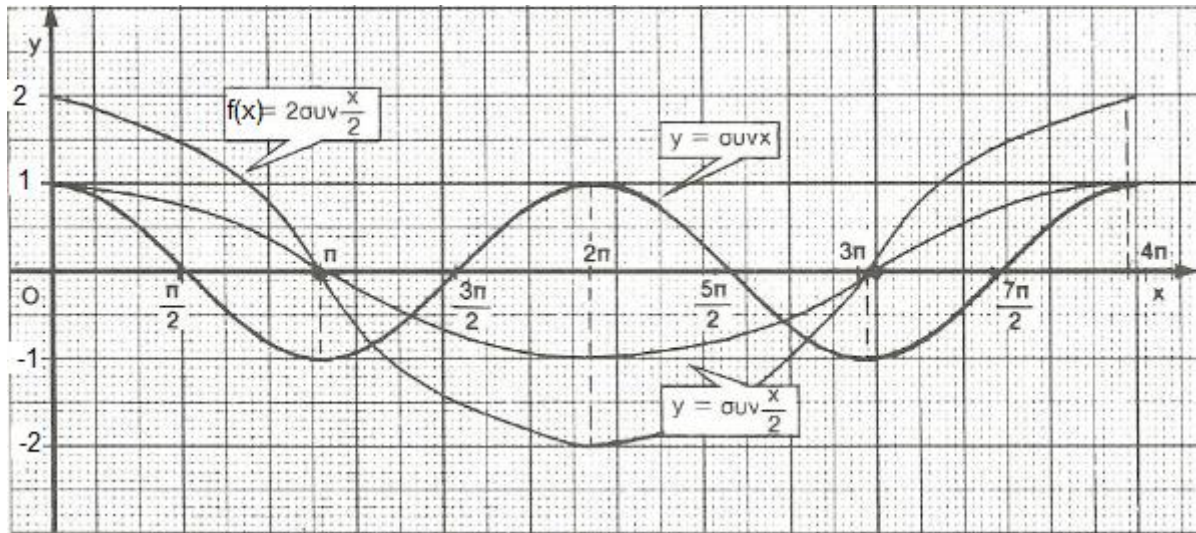
Άρα έχει μέγιστη τιμή $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho = -2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το $\frac{1}{2}$

με το $\frac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή : $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και 4π , έτσι ο

βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$:

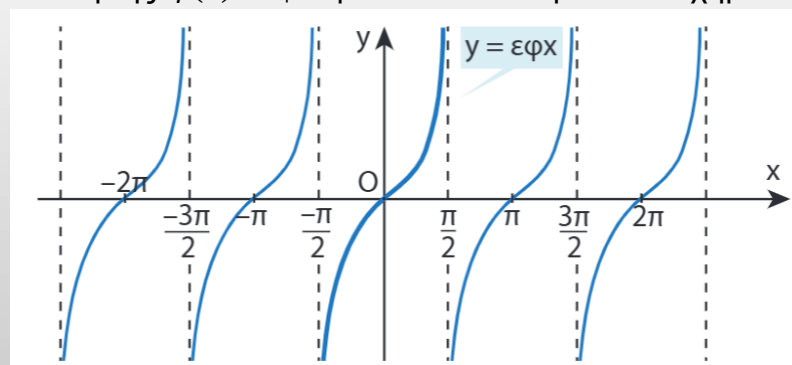
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$:



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \varepsilon\phi x$

1. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι περιττή, αφού για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = \varepsilon\phi(-x) = -\varepsilon\phi x = -f(x)$, $x \in A$.
Η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$, αφού για κάθε $x \in A$ ισχύουν:
 - $x + \pi, x - \pi \in A$
 - $f(x + \pi) = \varepsilon\phi(x + \pi) = \varepsilon\phi x = f(x)$ και $f(x - \pi) = \varepsilon\phi(x - \pi) = \varepsilon\phi[-(\pi - x)] = -\varepsilon\phi(\pi - x) = \varepsilon\phi x = f(x)$
5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \varepsilon\phi x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



6. Από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \varepsilon\phi x$, προκύπτει ότι $f \uparrow \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$, $f \uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, ..., και ότι δεν έχει ακρότατα. Επίσης η γραφική παράσταση της $f(x) = \varepsilon\phi x$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}, \dots$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. (Άσκηση 7 σελ. 82 Α' ομάδας)

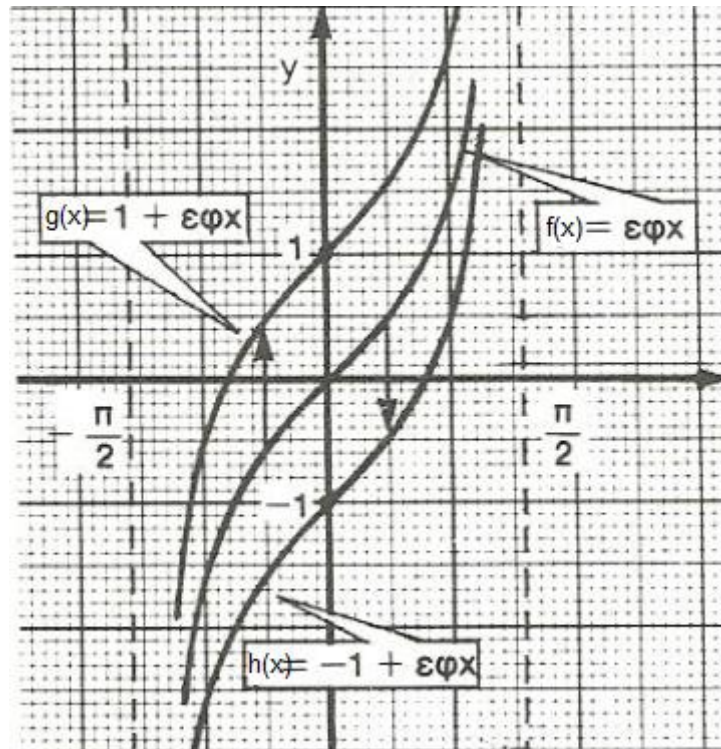
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \varepsilon\phi x$ ii. $g(x) = 1 + \varepsilon\phi x$ iii. $h(x) = -1 + \varepsilon\phi x$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

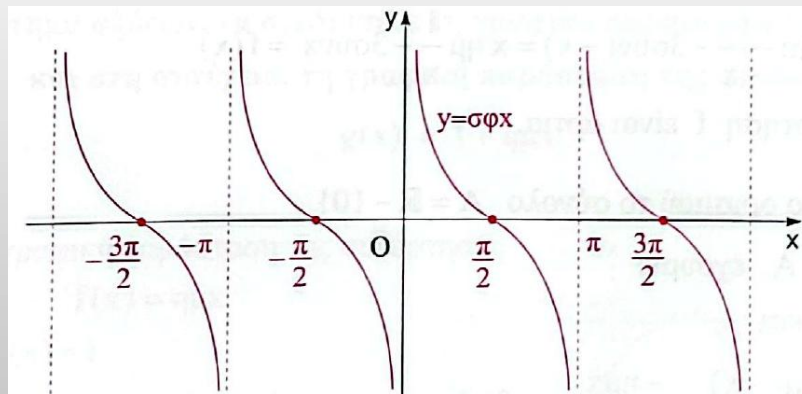
Λύση :

Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \varepsilon\phi x$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \varepsilon\phi x$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $h(x) = -1 + \varepsilon\phi x$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \sigma\phi x$

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{x / x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι περιττή, αφού για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και $f(-x) = \sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x = -f(x)$, $x \in A$.
Η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$, αφού για κάθε $x \in A$ ισχύουν:
 - $x + \pi, x - \pi \in A$
 - $f(x + \pi) = \sigma\phi(x + \pi) = \sigma\phi x = f(x)$ και $f(x - \pi) = \sigma\phi(x - \pi) = \sigma\phi[-(\pi - x)] = -\sigma\phi(\pi - x) = \sigma\phi x = f(x)$
5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\phi x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



6. Από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\phi x$, προκύπτει ότι $f \downarrow (-\pi, 0)$, $f \downarrow (0, \pi)$, ..., και ότι δεν έχει ακρότατα. Επίσης η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\phi x$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$,...

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

9. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T , τότε

$f(x+T) = \dots = \dots$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει σύνολο τιμών το

iii. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ λέγεται

iv. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $R_1 = \{x \in \mathbb{R} / \dots\}$

v. Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$, $\rho, \omega > 0$ έχει περίοδο $T = \dots$, μέγιστη τιμήκαι ελάχιστη τιμή

10. i. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $\uparrow, \downarrow$ τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $f(x) = \eta\mu x$, τότε $f \dots \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

β. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε $f \dots [\pi, 2\pi]$.

γ. Αν $f(x) = \epsilon\phi x$, τότε $f \dots \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ. Αν $f(x) = -2\eta\mu x$, τότε $f \dots \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

- ii. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα $<, >$ τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\alpha \dots \sigma\upsilon\nu\beta$

β. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\epsilon\phi\alpha \dots \epsilon\phi\beta$

γ. Αν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$, τότε $\eta\mu\alpha \dots \eta\mu\beta$

δ. Αν $1 < \alpha < 1,5$, τότε $\eta\mu\alpha \dots \eta\mu 1$

ε. $\sigma\upsilon\nu 1 \dots \sigma\upsilon\nu 2$

στ. Αν $x \in (2, 3)$, τότε $\eta\mu 3 \dots \eta\mu x \dots \eta\mu 2$

ζ. Αν $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, τότε $\epsilon\phi x \dots \epsilon\phi 2x$

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

i. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι άρτια.

iii. Η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ έχει σύνολο τιμών το $[-2, 2]$.

iv. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ έχει βασική περίοδο το 2π .

v. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές.

i. $f(x) = \eta\mu 2x + x$

ii. $f(x) = \eta\mu 5x + \eta\mu 3x$

iii. $f(x) = \eta\mu x + \epsilon\phi x$

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

i. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu 2x$

14. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1$ έχει περίοδο τον αριθμό $T=2\pi$.

ii. η συνάρτηση $f(x) = 3\epsilon\phi x + \sigma\phi x$ έχει περίοδο τον αριθμό $T=\pi$.

15. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 4\eta\mu x$
- ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$
- iii. $f(x) = -3\eta\mu 3x$
- iv. $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu 3x$

16. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = 3\eta\mu 2x$
- ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$
- iii. $f(x) = 5\eta\mu \frac{x}{2}$
- iv. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$

17. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu 2x$ $0 \leq x \leq 2\pi$
- ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ $0 \leq x \leq 2\pi$
- iii. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = 3\eta\mu x$ $h(x) = -\eta\mu x$
- iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ $h(x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- v. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu x + 2$ $h(x) = \eta\mu x - 1$
- vi. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$ $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{2}$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα της f
- iii. Να βρείτε την περίοδο της f
- iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$

- i. Να βρείτε τα ακρότατα της f
- ii. Να βρείτε την περίοδο της f
- iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f
- iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $-f$
- v. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $|f|$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(\pi - 2x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu 2x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f
- ii. Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f
- iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f
- iv. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση.

21. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$ διέρχεται από το σημείο $M(2\pi, -2)$
- Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
22. Αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$ έχει μέγιστο το 2 και περίοδο τον αριθμό $T=6\pi$, να βρείτε :
- Τον τύπο της συνάρτησης
 - Τις τιμές $f(2\pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu 2x$ με $\alpha > 0$ η οποία έχει μέγιστο το 3.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του α .
 - Να βρείτε την περίοδο της f
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ είναι αδύνατη.
24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \kappa + 3 + 2\eta\mu \frac{(2\lambda + 1)x}{3}$ και $g(x) = 6\lambda + 10 - 3\sigma\upsilon\nu \frac{(\kappa - 2)x}{4}$. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g .
25. Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδο τους.
- $f(x) = \eta\mu 2x$
 - $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$
 - $f(x) = \varepsilon\phi \frac{\pi x}{2}$
26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$ και $g(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$.
- Από ποιες μετατοπίσεις της C_f προκύπτει η C_g ;
 - Να σχεδιάσετε τη C_f και τη C_g , στο ίδιο σύστημα αξόνων.
27. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
- $f(x) = -2 + \eta\mu x$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
 - $f(x) = 1 + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
 - $f(x) = 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
28. Αν η συνάρτηση $f(x) = (2 - \alpha) \cdot \eta\mu(\beta x)$, $\alpha > 2$ και $\beta > 0$ έχει περίοδο το $\frac{\pi}{2}$ και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα α και β .

29. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \frac{2}{3}\eta\mu\frac{x}{3}$.

- Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
- Να βρείτε την περίοδο της f .
- Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους ίσο με τη περίοδο της f .
- Να λύσετε γραφικά: α) Την εξίσωση $f(x)=0$, στο $[0,6\pi]$
β) Την ανίσωση $f(x)>0$, στο $[0,6\pi]$.

30. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=|\eta\mu x|$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

31. Η θερμοκρασία σε βαθμούς κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta = 10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

- Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου;
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για : $0 \leq t \leq 24$.
- Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν: α) 0°C β) κάτω από 0°C

32. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

- $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\upsilon\nu 2x$
- $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{x} - 2\epsilon\phi x$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x$
- $f(x) = \epsilon\phi x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |\eta\mu x|$

33. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ έχει περίοδο $T=12\pi$.

34. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

- $f(x) = 2x^5 + 3\eta\mu x$ στο διάστημα $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x + \frac{2}{x}$ στο διάστημα $A = (0, \pi)$

35. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $A = [0, 2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

- $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{10}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12}$

36. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $A = [0, 2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

- $\eta\mu\frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{29\pi}{7}$
- $\eta\mu\frac{7\pi}{12}$ και $\eta\mu\frac{35\pi}{12}$
- $\eta\mu\frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{73\pi}{10}$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : $\eta\mu x = \alpha$, $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$,

$$\varepsilon\phi x = \alpha \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sigma\phi x = \alpha$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$ τότε :

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ τότε :

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = \alpha$ τότε :

$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

➤ Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\phi x = \alpha$ τότε :

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : ΠΩΣ ΔΙΩΧΝΩ ΤΟ « - » (ΜΕΙΟΝ)

1. $-\eta\mu x = \eta\mu(-x)$

2. $-\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$

3. $-\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi(-x)$

4. $-\sigma\phi x = \sigma\phi(-x)$

• Σε όλους τους παραπάνω τύπους των x, θ μπορεί να καταλαμβάνουν διάφορες παραστάσεις της μορφής $f(x), g(x)$.

• Σε εξισώσεις με $\varepsilon\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

• Σε εξισώσεις με $\sigma\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

A. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

1. (Άσκηση 1 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = 0$ ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii. $\sigma\upsilon\nu x = 0$ iv. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση :

$$i. \quad \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + 0 \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$iv. \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i. \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2} \quad ii. \quad \eta\mu x = -1 \quad iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad iv. \quad \sigma\upsilon\nu x = -1$$

Λύση :

$$i. \quad \eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$iii. \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv. } \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\sin 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin(\pi - 0) \Leftrightarrow \sin x = \sin \pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \pi, k \in \mathbb{Z}$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \varepsilon\phi x = 0 \quad \text{ii. } \varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{iii. } \sigma\phi x = 1 \quad \text{iv. } \sigma\phi x = \sqrt{3}$$

Λύση :

$$\text{i. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\iota x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\iota x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\iota x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi 0 \Leftrightarrow x = k\pi + 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\iota x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\iota x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\iota x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\iota x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\iota x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

4. (Άσκηση 4 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ii. } \sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Λύση :

$$\text{i. } \text{Επειδή : } \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\iota x} \text{ πρέπει } \sigma\upsilon\iota x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\iota x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii. } \text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\iota x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Έτσι έχω : } \sigma\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\sigma\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

5. (Άσκηση 5 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$ ii. $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0$

Λύση :

i. $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad 1 - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$, \kappa \in \mathbb{Z}$

ή

$$\bullet \quad 2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\bullet \quad 2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \quad 1 - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

6. (Άσκηση 6 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(\sqrt{3} + \varepsilon\phi x)(1 - \varepsilon\phi x) = 0$ ii. $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\phi^2 x - 3)\sigma\phi x = 0$

Λύση:

i. Επειδή : $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$(\sqrt{3} + \varepsilon\phi x)(1 - \varepsilon\phi x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bullet \sqrt{3} + \varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet 1 - \varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Επειδή : } \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \text{ πρέπει } \eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2\kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases}$$

$$\text{Έτσι έχω : } (2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\phi^2 x - 3)\sigma\phi x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bullet 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \varepsilon\phi^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi^2 x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi x = \sqrt{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \sigma\phi x = 0 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ απορρίπτεται λόγω περιορισμού.}$$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \eta\mu(g(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x)) = \varepsilon\phi(g(x))$ ή $\sigma\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

7. (Άσκηση 8 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2\eta\mu 3x = \sqrt{3}$ ii. $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} + 1 = 0$ iii. $3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0$

Λύση :

$$i. \quad 2\eta\mu 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$ii. \quad \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = -\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu(\pi - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = 10\kappa\pi \pm 5\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iii. Επειδή : $\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \frac{\eta\mu \frac{2x}{7}}{\sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7}}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7} \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{2x}{7} \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{7} \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq 14\kappa\pi \pm \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq 7\kappa\pi \pm \frac{7\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Έτσι έχουμε : $3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi \frac{2x}{7} = \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2x}{7} = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 7\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{7\kappa\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

8. (Άσκηση 9 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ii. $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ iii. $\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 &\Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } 2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \\ x = \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii. } \text{Πρέπει : } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \neq 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 5x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\kappa\pi}{5} - \frac{\pi}{20}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 5x = -\kappa\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x = -\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{\kappa\pi}{5} - \frac{\pi}{60}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Δ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

9. (Άσκηση 1 σελ. 89 Β' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\text{i. } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \quad \text{ii. } \varepsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 &\Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} - x \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4} + x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ (αδύνατη)} \end{cases}$$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi 2x = \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \neq \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Επειδή : $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)}$ πρέπει : $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)\right) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \Leftrightarrow 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x) + \beta f(x) + \gamma = 0$

10. (Άσκηση 10 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ iii. $3\varepsilon\phi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\phi t$

Λύση :

i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ θέτω $\eta\mu\omega = y$ και έχω $2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = \frac{1}{2}$

• Αν $y = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\bullet \text{ Av } y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \omega = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \omega = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ θέτω $\sigma\upsilon\nu x = y$ και έχω $2y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ή $y = \frac{1}{2}$

$\bullet \text{ Av } y = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2$ αδύνατο αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

$\bullet \text{ Av } y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii. $3\varepsilon\phi^2t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\phi t \Leftrightarrow 3\varepsilon\phi^2t - 2\sqrt{3}\varepsilon\phi t - 3 = 0$

Επειδή: $\varepsilon\phi t = \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Θέτω $\varepsilon\phi t = y$ και έχω $3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}$ ή $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\bullet \text{ Av } y = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi t = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$\bullet \text{ Av } y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi t = -\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\phi t = \varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

11. (Άσκηση 11 σελ. 88 Α' ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4$ ii. $\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$

Λύση:

i. $\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x = 4 \xrightarrow[\eta\mu^2x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2x]{\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1} 1 - \sigma\upsilon\nu^2x + 5\sigma\upsilon\nu^2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\bullet \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$\bullet \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii. $\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$

Επειδή: $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Επειδή: $\sigma\phi 2x = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$ πρέπει :

$$\eta\mu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 2k\pi \\ \text{και} \\ 2x \neq 2k\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ \text{και} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \sigma\phi x \Leftrightarrow 2x = k\pi + x \Leftrightarrow x = k\pi$
 $, k \in \mathbb{Z}$. Απορρίπτεται λόγω περιορισμού. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

12. (Άσκηση 3 σελ. 89 Β' ομάδας)

Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = 1$ στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$.

Λύση :

Πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως : } x \in (3\pi, 4\pi) &\Leftrightarrow 3\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi < k\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi - \frac{\pi}{4} < k\pi < 4\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{11\pi}{4} < k\pi < \frac{15\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{11}{4} < k < \frac{15}{4} \Leftrightarrow k = 3 \text{ αφού } , k \in \mathbb{Z} . \text{ Άρα είναι : } x = 3\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{4} . \end{aligned}$$

Ζ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΡΙΓ/ΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

13. (Άσκηση 2 σελ. 89 Β' ομάδας)

Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\phi x = 4$.

Λύση :

Πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\phi x = 4 &\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\phi x = 4 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\phi x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\phi^2 x - 2\varepsilon\phi x - 3 = 0 \text{ (1). Θέτουμε : } \varepsilon\phi x = y, \text{ άρα : (1) } \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -1 \end{aligned}$$

$$\bullet y = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \text{ (δεκτή)}$$

$$\bullet y = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -\varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ (δεκτή)}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

14. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

- Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$, με $\alpha > 1$ είναι αδύνατη.
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \theta \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$

15. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις που βρίσκονται στην στήλη Α με τις ρίζες τους στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	Στήλη Β - Ρίζες
Α. $\sin x = 0$	1. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Β. $\eta \mu x = 0$	2. $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Γ. $\sin x = 1$	3. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Δ. $\eta \mu x = -1$	4. $x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$
Ε. $\sin x = -1$	5. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
ΣΤ. $\eta \mu x = 1$	6. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
	7. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

16. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα $[0, \pi]$ που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	Στήλη Β - Ρίζες στο $[0, \pi]$
Α. $\eta \mu x = \sin x$	1. $\frac{\pi}{4}$
Β. $\sin x = -\eta \mu x$	2. $\frac{3\pi}{4}$
Γ. $\epsilon \phi x = \sigma \phi x$	3. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$
	4. 0

17. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	Στήλη Β - Ρίζες στο $[0, \pi/2]$
Α. $\eta \mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1. $\frac{\pi}{3}$
Β. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2. $\frac{\pi}{4}$
Γ. $\eta \mu x = \sin x$	3. $\frac{\pi}{2}$
Δ. $\sin x = 0$	4. 0
	5. $\frac{\pi}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :**A. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ**

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

ii. $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

iii. $\eta\mu x = 0$

iv. $\sigma\upsilon\nu x = 0$

v. $\eta\mu x = 1$

vi. $\sigma\upsilon\nu x = 1$

vii. $\eta\mu x = -1$

viii. $\sigma\upsilon\nu x = -1$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

iii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iv. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

v. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$

vi. $\epsilon\phi x = -1$

vii. $2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

viii. $\frac{\sqrt{3} \cdot \sigma\phi x + 7}{3} = 2$

ix. $2\eta\mu x = \sqrt{2}$

x. $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$

xi. $\sigma\phi^2 x - 3 = 0$

xii. $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

B. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

20. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\eta\mu x - 1) = 0$

ii. $(\epsilon\phi x - 1)\sigma\phi x = 0$

iii. $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

iv. $(\sqrt{2} \eta\mu x - 1)(\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$

v. $(2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{5}) = 0$

vi. $\sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\eta\mu x + 1)(\eta\mu x - 1) = 0$

ii. $(4\eta\mu^2 x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

iii. $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0$

iv. $1 + 2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^2 x - 1) = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \eta\mu(g(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\epsilon\phi(f(x)) = \epsilon\phi(g(x))$ ή $\sigma\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $6\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$

ii. $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

iii. $\epsilon\phi 4x = \epsilon\phi x$

iv. $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

v. $\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

vi. $\sqrt{3} \cdot \epsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

vii. $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \epsilon\phi x = 0$

viii. $\sigma\phi\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\phi\left(\frac{2\pi}{5} - 2x\right)$

ix. $2\eta\mu(2x - \pi) - 1 = 0$

x. $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

vii. $\eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$

viii. $\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Δ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\epsilon\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- ii. $\epsilon\phi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
- iii. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- iv. $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$
- v. $\eta\mu(x - \pi) = -\sigma\upsilon\nu(x - 3\pi)$
- vi. $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3} + \eta\mu(x - \pi) = 0$
- vii. $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \epsilon\phi x$
- viii. $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
- ix. $\eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$
- x. $\eta\mu x + \epsilon\phi \frac{3\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x) + \beta f(x) + \gamma = 0$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$
- ii. $2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 2 = 0$
- iii. $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$
- iv. $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$
- v. $2\eta\mu^2 x = 3(1 - \sigma\upsilon\nu x)$
- vi. $16\sigma\upsilon\nu^4 x - 25\sigma\upsilon\nu^2 x + 9 = 0$
- vii. $2\eta\mu^2 x = 5\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu^2 x$
- viii. $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 5\eta\mu x$
- ix. $\eta\mu^2 x + 7\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
- x. $5\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x = 5$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις

- i. $2\eta\mu^2 x + \sqrt{5} \eta\mu x = 0$
- ii. $3\sigma\upsilon\nu^2 2x + 5\sigma\upsilon\nu 2x = 0$
- iii. $\sigma\phi^2 x = \sigma\phi x$
- iv. $\epsilon\phi^2 2x + \epsilon\phi 2x = 0$

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $\sqrt{2}\eta\mu x = 1$ στο $[-\pi, \pi]$
- ii. $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$ στο $[0, 2\pi]$
- iii. $3\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x - 2$ στο $[0, 4\pi]$
- iv. $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ στο $(-\pi, \pi)$

Ζ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

27. Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i. $\frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = 4$
- ii. $\epsilon\phi x - 1 + 2 \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\eta\mu x$
- iii. $\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x = 1 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$
- iv. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \epsilon\phi x = 2$

Η. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(7\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

- Να δείξετε ότι : $f(x) = 2\eta\mu x$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1$, όταν $x \in [0, \pi]$.
- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f , την περίοδο της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
- Με βάση το σχήμα, να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $A = [0, 2\pi]$.

28. Έστω $f(x) = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2$.

- Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$.
- Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 0$.
- Να δείξετε ότι η f είναι άρτια, περιοδική με περίοδο το 2π , και μέγιστο το 4.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu 2x - \epsilon\phi\frac{35\pi}{4}$, της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{25\pi}{6}, 2\right)$

- Να βρείτε το α .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.
- Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - f(x) = 2$ στο $[-\pi, \pi]$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν C_f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1 + \sqrt{3}$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$.

- Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu^2 x$
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 3f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- Να λύσετε την εξίσωση : $2f(x) = 3\sqrt{1 - f(x)}$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{20\pi}{3}, \frac{10}{3}\right)$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \alpha$.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - 4x\right) + \eta\mu(21\pi + 4x)$ και

$$g(x) = \eta\mu\left(\frac{37\pi}{2} + 2x\right) - \sigma\upsilon\nu(37\pi - 2x).$$

i. Να δείξετε ότι : $f(x) = 2\eta\mu 4x$ και $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.

iii. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της g και για ποια τιμή του x η g παίρνει την ελάχιστη τιμή.

iv. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + g(x) = 0$.

34. Η συνάρτηση $f(x) = 4\kappa - 3 + \lambda \cdot \eta\mu \frac{x}{\kappa}$, με $\lambda > 0$, έχει μέγιστο το 7 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

i. Να δείξετε ότι : $\kappa = \frac{3}{2}$ και $\lambda = 4$.

ii. Να βρείτε την περίοδο και την ελάχιστη τιμή μ της f .

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 5$.

35.

i. Να αποδείξετε ότι : $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $2 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

- ✓ Αποδεικνύεται ότι για οποιεσδήποτε γωνίες α, β ισχύουν:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta\end{aligned}$$

- ✓ Επίσης, αν $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ και $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

για κάθε ακέραιο κ , ώστε να ορίζονται οι αριθμοί $\epsilon\phi\alpha$, $\epsilon\phi\beta$ και $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$, τότε ισχύει

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

- ✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς, ώστε να ορίζονται οι $\epsilon\phi\alpha$, $\epsilon\phi\beta$, $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$, ισχύει και η ισότητα

$$\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

- ✓ Τέλος, αν

$\eta\mu\alpha \neq 0$, $\eta\mu\beta \neq 0$ και $\eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \kappa\pi$ και $\alpha + \beta \neq \kappa\pi$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$

τότε :

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$$

- ✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς ισχύει και η ισότητα

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να αντιστοιχίσετε στους παρακάτω πίνακες κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της στη στήλη Β, με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι περιορισμοί για τις γωνίες, όπου χρειάζεται.

i.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\sin(\alpha + \beta)$	1. $\sin\alpha \cos\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
Β. $\eta\mu\alpha \sin\beta - \sin\alpha \eta\mu\beta$	2. $\sin\alpha \cos\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
Γ. $\sin(\alpha - \beta)$	3. $\eta\mu(\alpha + \beta)$
Δ. $\eta\mu\alpha \sin\beta + \sin\alpha \eta\mu\beta$	4. $\eta\mu(\beta - \alpha)$
	5. $\eta\mu(\alpha - \beta)$

ii.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$	1. $\frac{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}{1 + \sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta}$
B. $\sigma\phi(\alpha - \beta)$	2. $\frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$
Γ. $\sigma\phi(\alpha + \beta)$	3. $\frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$
Δ. $\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$	4. $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$
	5. $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$

iii.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)$	1. 2συναημβ
B. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$	2. -2ημβσυνα
Γ. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$	3. 2συνασυνβ
Δ. $\eta\mu(\alpha - \beta) - \eta\mu(\alpha + \beta)$	4. 2ημασυνβ
	5. -2ημαημβ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

- i) $\sigma\upsilon\nu 140 \sigma\upsilon\nu 40 - \eta\mu 140 \eta\mu 40$
- ii) $\sigma\upsilon\nu 130 \sigma\upsilon\nu 10 + \eta\mu 130 \eta\mu 10$
- iii) $\eta\mu(\pi/12) \sigma\upsilon\nu(\pi/4) - \sigma\upsilon\nu(\pi/12) \eta\mu(\pi/4)$
- iv) $\eta\mu 50 \sigma\upsilon\nu 40 + \sigma\upsilon\nu 50 \eta\mu 40$
- v) $\eta\mu 2\chi \sigma\upsilon\nu \chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi \eta\mu \chi$

3. Να δείξετε ότι : $\eta\mu(\alpha - \beta) \sigma\upsilon\nu \beta + \eta\mu \beta \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \eta\mu \alpha$

4. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει ότι : $\epsilon\phi A = 1/2$ και $\epsilon\phi B = 1/3$, να δείξετε ότι η γωνία Γ είναι $3\pi/4$.

5. Να δείξετε ότι:

- i. $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} = \sigma\phi \beta - \sigma\phi \alpha$
- ii. $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu \beta \eta\mu \gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu \gamma \eta\mu \alpha} = 0$

6. Αν $\epsilon\phi \alpha = -3$, να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi(2\chi - \alpha) = -2$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

- ♦ Αν στους τύπους των $\eta\mu(\alpha + \beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$, $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$ και $\sigma\phi(\alpha + \beta)$ θέσουμε όπου β το α , προκύπτουν:

$$\triangleright \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\begin{aligned} \triangleright \sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{aligned}$$

$$\triangleright \epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$$

$$\triangleright \sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$$

- ♦ Από τους τύπους του $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ προκύπτει ότι (τύποι αποτετραγωνισμού)

$$\triangleright \eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\triangleright \epsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}, \quad \sigma\phi^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω πίνακες, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α .

i.

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$
$\eta\mu 4\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu 3\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu\alpha = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \dots\dots\dots$

$\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2} \eta\mu 2\alpha$
$\eta\mu \frac{\beta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\beta}{2} = \dots\dots\dots$
$\eta\mu 2\gamma \sigma\upsilon\nu 2\gamma = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{x+y}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} = \dots\dots\dots$
$\eta\mu \frac{x}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{4} = \dots\dots\dots$

ii.

$\sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = \sin 2\alpha$
$\sin^2 2x - \eta\mu^2 2x = \dots\dots\dots$
$\sin^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 \frac{x}{2} = \dots\dots\dots$

$1 + \sin 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$
$1 + \sin \alpha = \dots\dots\dots$
$1 + \sin \frac{\alpha}{2} = \dots\dots\dots$

iii.

$\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$
$\eta\mu^2 2x = \dots\dots\dots$
$\eta\mu^2 \frac{x}{8} = \dots\dots\dots$
$\eta\mu^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \dots\dots\dots$

iv.

$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi \alpha}{1 - \epsilon\phi^2 \alpha}$
$\epsilon\phi \alpha = \dots\dots\dots$
$\epsilon\phi 10\alpha = \dots\dots\dots$

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\sin^2 \alpha$	1. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$
Β. $\epsilon\phi^2 \alpha$	2. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$
Γ. $\eta\mu^2 \alpha$	3. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$
	4. $\frac{\sin 2\alpha - 1}{2}$

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\eta\mu \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$	1. $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$
Β. $\sin^2 \frac{x}{2} - \eta\mu^2 \frac{x}{2}$	2. $\frac{1 + \sin x}{2}$
Γ. $\epsilon\phi^2 \frac{x}{2}$	3. $\frac{1 - \sin x}{2}$
Δ. $\sin^2 \frac{x}{2}$	4. $\frac{\eta\mu x}{2}$
Ε. $\epsilon\phi x$	5. $\sin x$
	6. $\frac{2\epsilon\phi \frac{x}{2}}{1 - \epsilon\phi^2 \frac{x}{2}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να δείξετε ότι : $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu^3\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha \eta\mu\alpha$.
2. Να δείξετε ότι : $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu 2\alpha \epsilon\phi\alpha = 2$.
3. Να δείξετε ότι : $(1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha)\epsilon\phi\alpha = \eta\mu 2\alpha$.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.
5. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = -4/5$ και $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$, να υπολογίσετε τα : $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\phi 2\alpha$, $\sigma\phi 2\alpha$.
6. Αν $\eta\mu\alpha = 3/5$ και $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, να υπολογίσετε τα : $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\phi 2\alpha$, $\sigma\phi 2\alpha$.

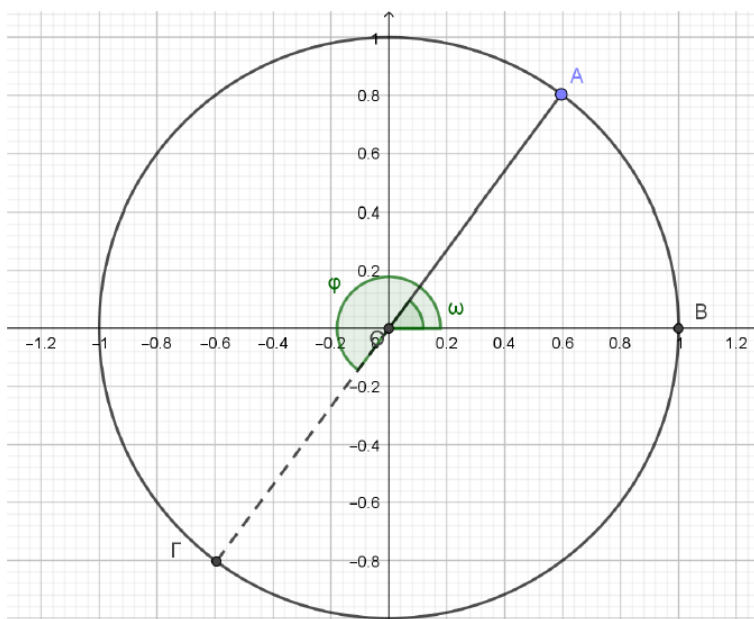
7. Να δείξετε ότι:
$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \cdot \frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\phi\frac{\alpha}{4}$$

8. Να δείξετε ότι: i. $\frac{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha} = \sigma\phi^2\alpha$ ii. $\frac{1+\eta\mu 10 + \sigma\upsilon\nu 10}{1+\eta\mu 10 - \sigma\upsilon\nu 10} = \sigma\phi 5^\circ$

9. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} = 0$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 1 15079**

Στον παρακάτω κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \text{BOA}$.

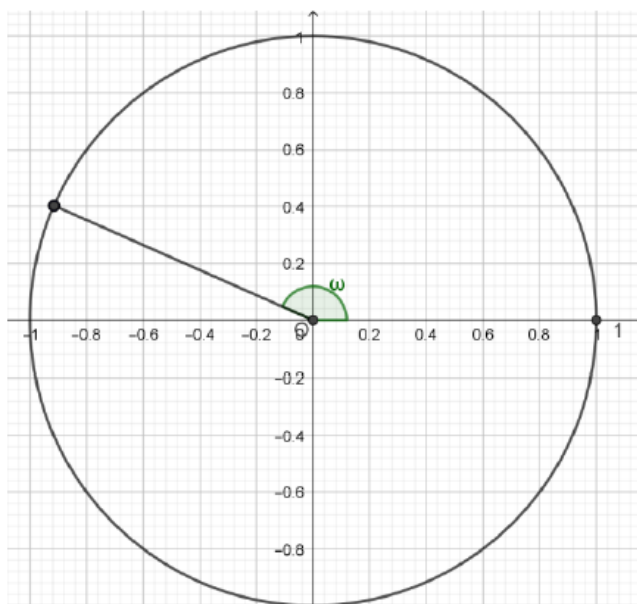


- α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$. (Μονάδες 8)
- β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Να εκφράσετε τη γωνία $\hat{\phi} = \text{BOΓ}$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)
 - Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sin \phi$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 15191

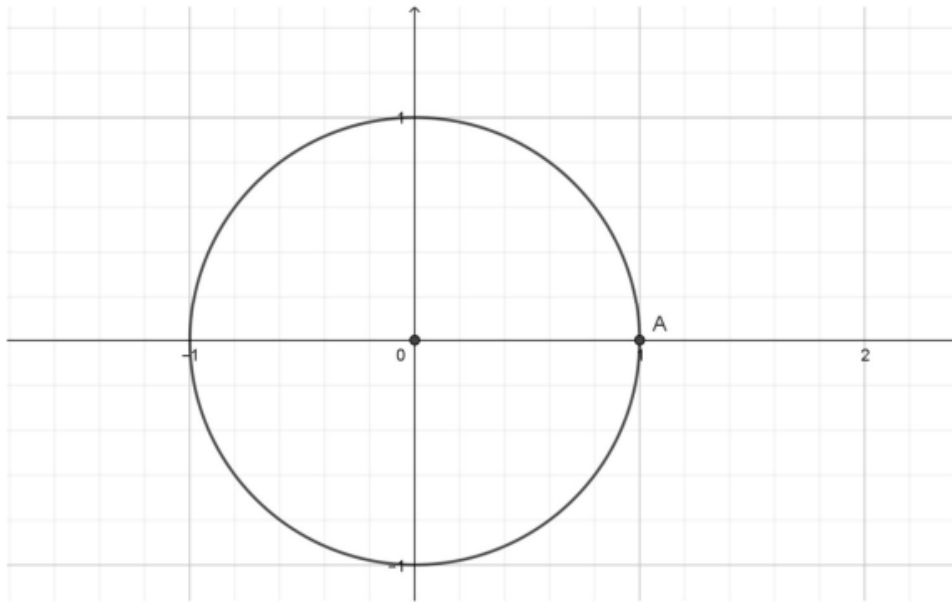
Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu \omega = 0,4$.

- α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 3 17793

Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A .



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $AB = 1rad$, $A\Gamma = 2rad$ και $A\Delta = 4rad$. (Μονάδες 13)

β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 18868

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 500^\circ = \varepsilon\varphi 140^\circ$. (Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $\varepsilon\varphi 500^\circ$ (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = \varepsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5 21161

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με 2ρ .

α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB , επίκεντρη γωνία ω .

(Μονάδες 13)

β) Αν $\omega = 2$ ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

(Μονάδες 12)

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ**ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 6 15046**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

(Μονάδες 15)

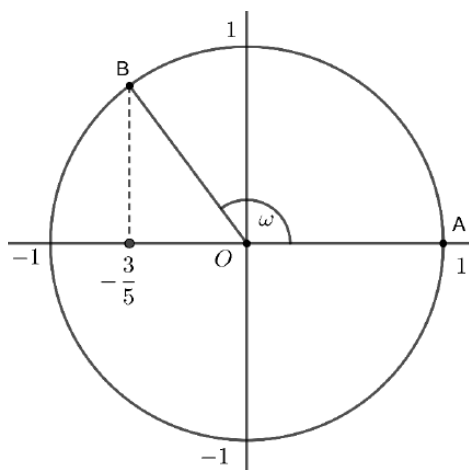
ΘΕΜΑ 7 15185

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

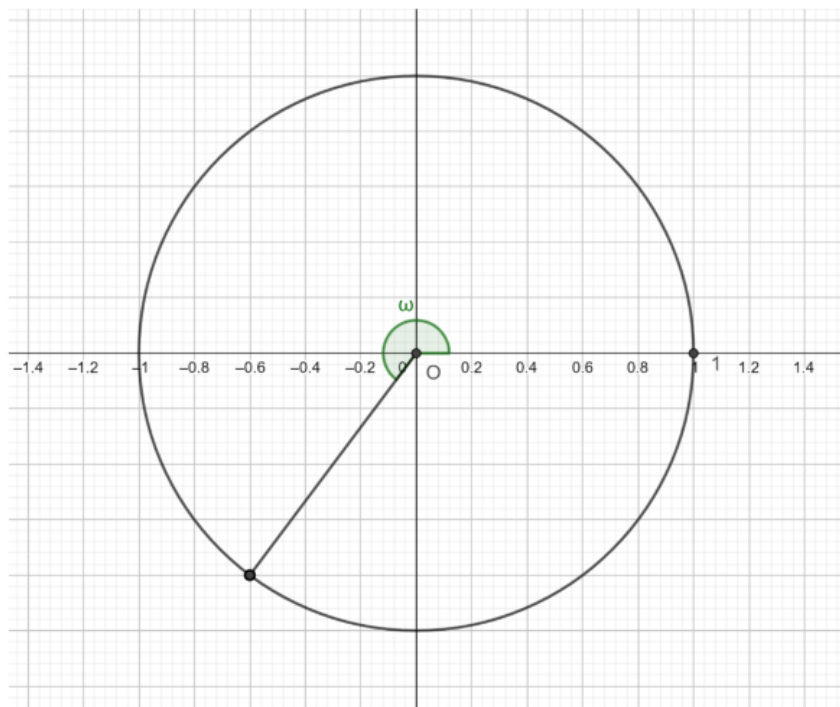
(Μονάδες 11)

β) Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Μονάδες 14)

**ΘΕΜΑ 8 15192**

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω .



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu \omega$ ii. $\epsilon\phi \omega$

(Μονάδες 6+7)

ΘΕΜΑ 9 15429

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$.

(Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 10 15814

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1,2 rad.

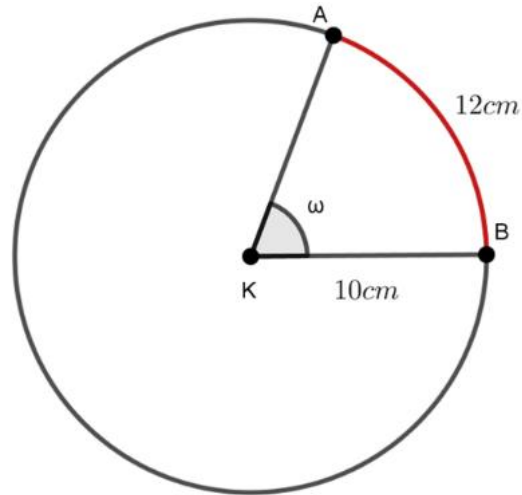
(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 11 16000

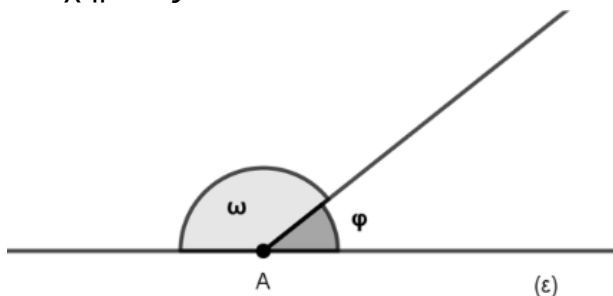
α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ**ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 12 15652**

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 13)

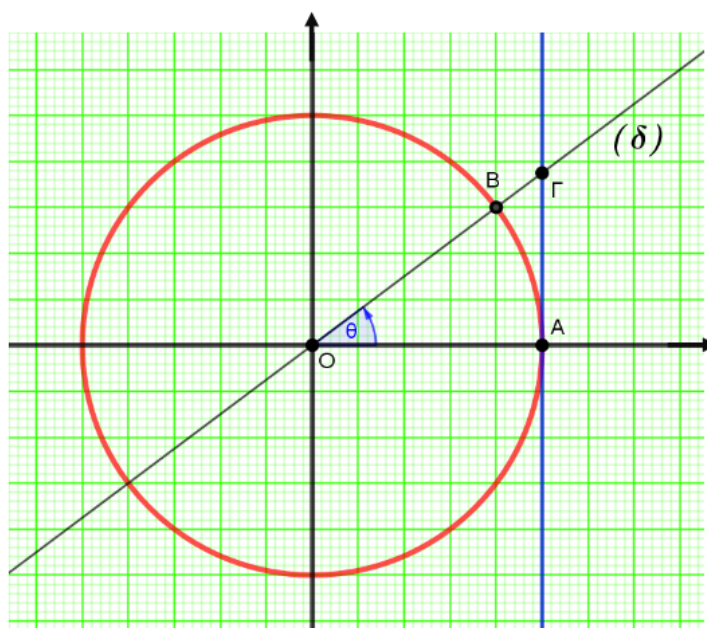
β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13 15092

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά $\widehat{AOB} = \widehat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.



α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14 15191

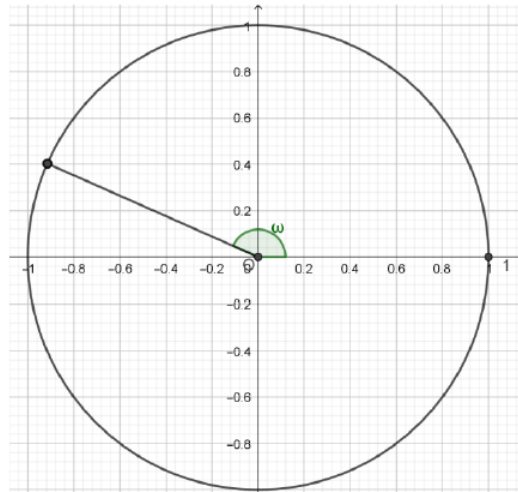
Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu\omega = 0,4$.

- α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

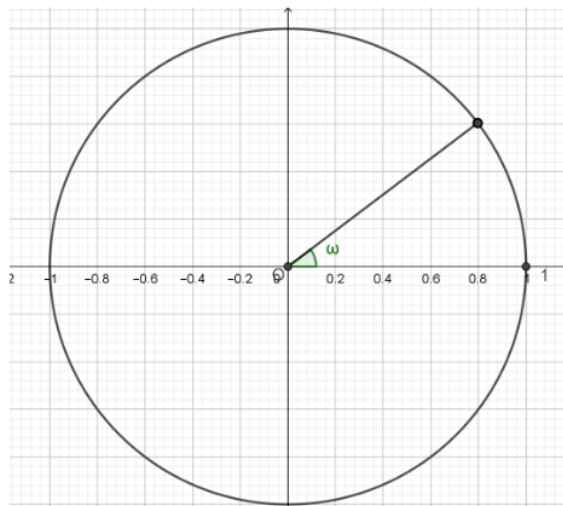
- β) Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 15 15193

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω , με $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$.



- α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

- β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\bar{\omega}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16 15266

Στον διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.

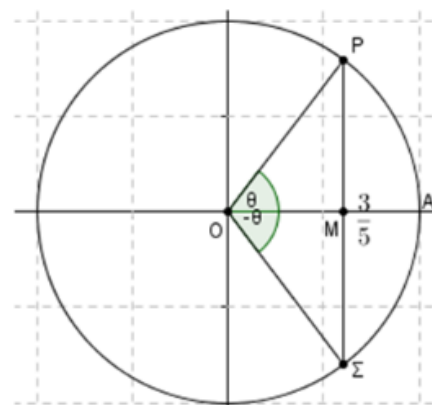
(Μονάδες 8)

- β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 9)

- γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 17 15429

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$.

(Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$.

(Μονάδες 14)

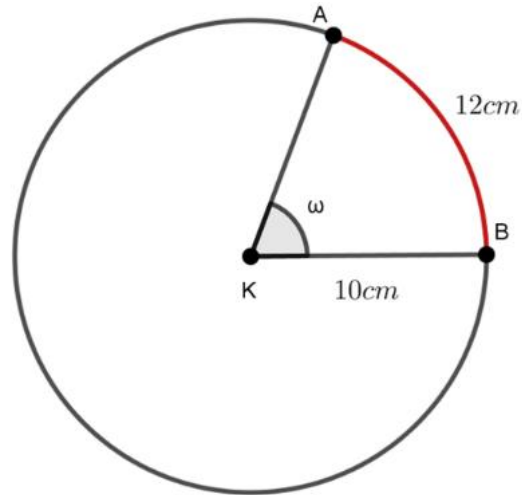
ΘΕΜΑ 18 15814

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

- α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1,2 rad. (Μονάδες 6)
 ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία. (Μονάδες 6)

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 19 15999

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

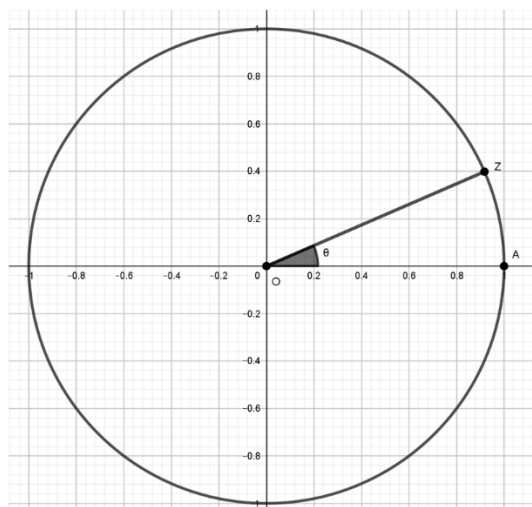
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 20 17933

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\angle AOZ = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

(Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

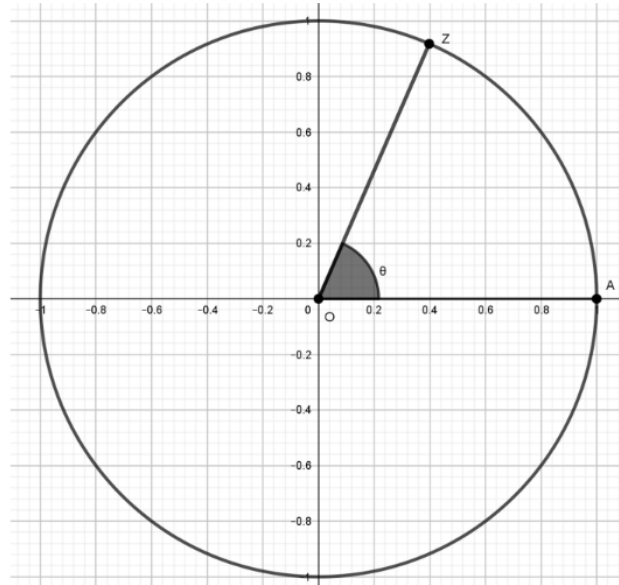
(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21 17936

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.



- α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$. (Μονάδες 9)
- β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0,4$. (Μονάδες 7)
- ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22 22002

Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- α) $\sin 72^\circ$ (Μονάδες 8)
- β) $\sin 108^\circ$ (Μονάδες 9)
- γ) $\eta\mu 162^\circ$ (Μονάδες 8)

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 23 14233**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ; (Μονάδες 9)
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 10)
- γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 24 14323

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 12)
- β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

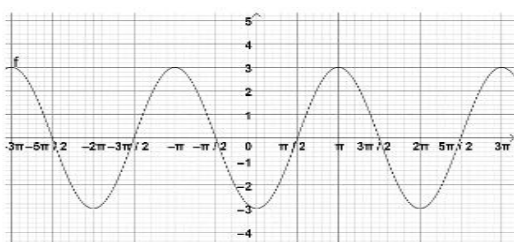
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3 \sin 2x$					

ΘΕΜΑ 25 15009

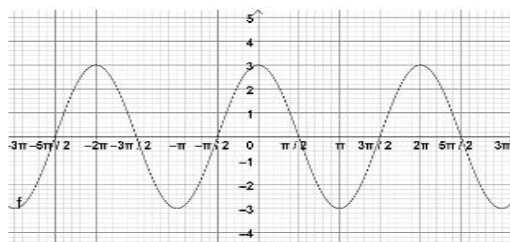
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
- γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μια μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3 \sin x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

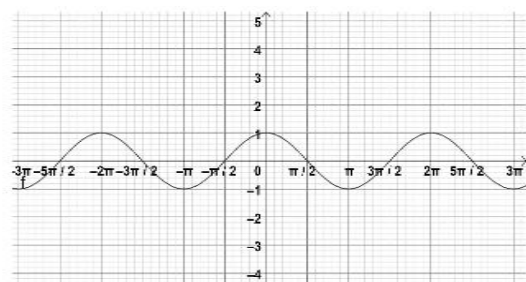
Α)



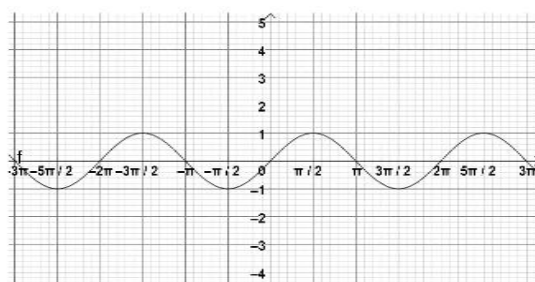
Β)



Γ)



Δ)



(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26 15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)
 ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$ (Μονάδες 8)

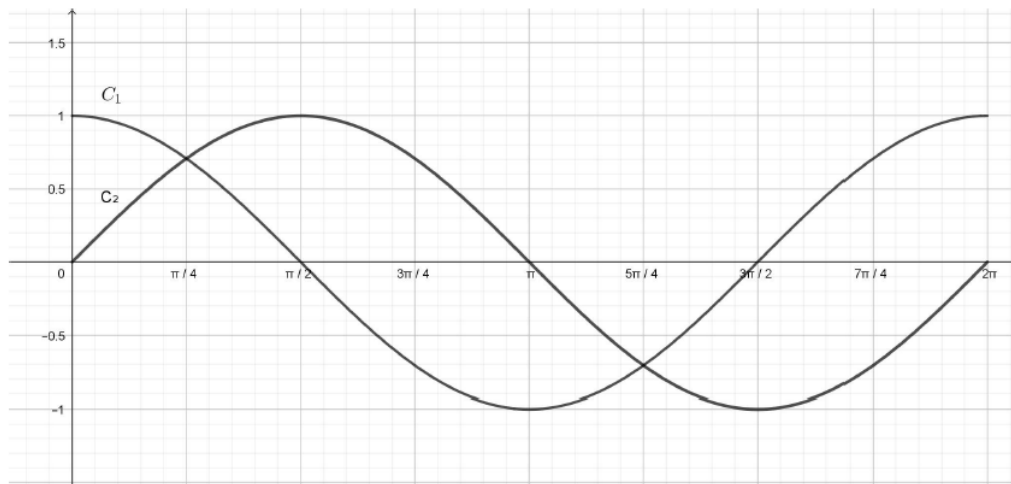
ΘΕΜΑ 27 15172

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι:
 i. $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)
 ii. $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)
 β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

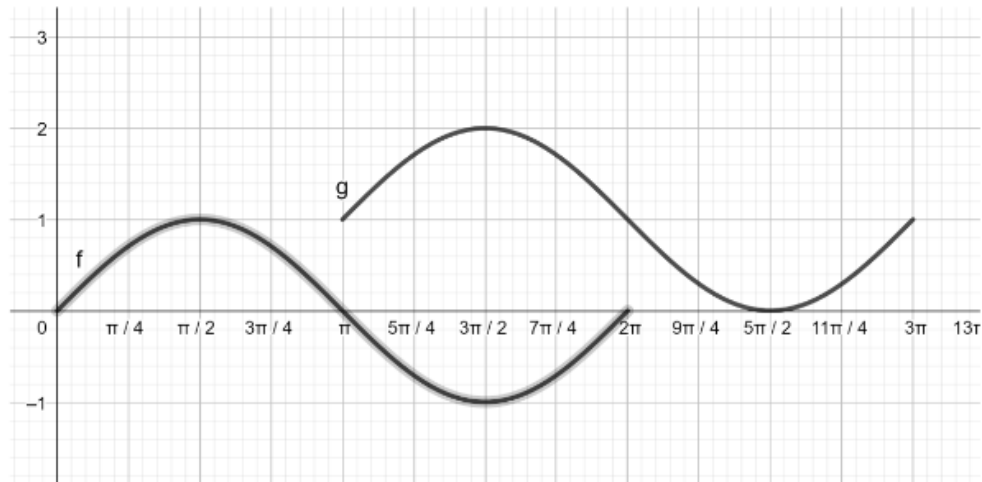
ΘΕΜΑ 28 15644

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



- α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1 και C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
 β) Με τη βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 29 15788



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. (Μονάδες 13)
- β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g (Μονάδες 6)
- ii. τον τύπο της g . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 30 15809

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)
- β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x) = \eta\mu 2x$					

(Μονάδες 10)

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 31 15810

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . (Μονάδες 6)
- β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

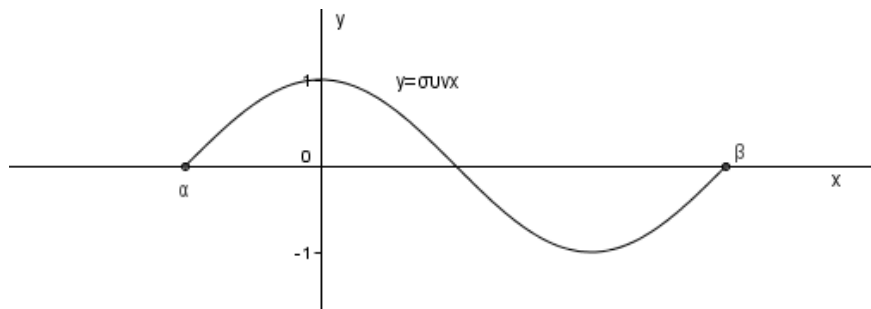
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 32 22007

Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \sin x$.



- α) Να βρείτε τα α και β . (Μονάδες 12)
 β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \sin x$; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 33 14238

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180$$

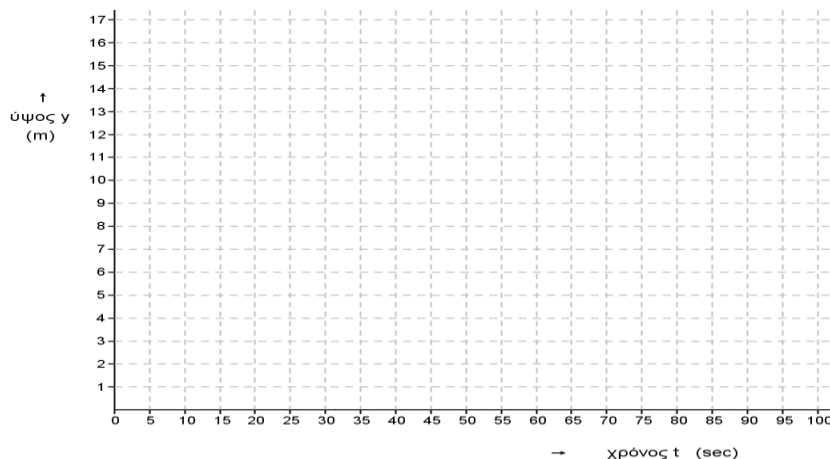
- α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)
 β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)
 γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec; (Μονάδες 4+2)
 δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

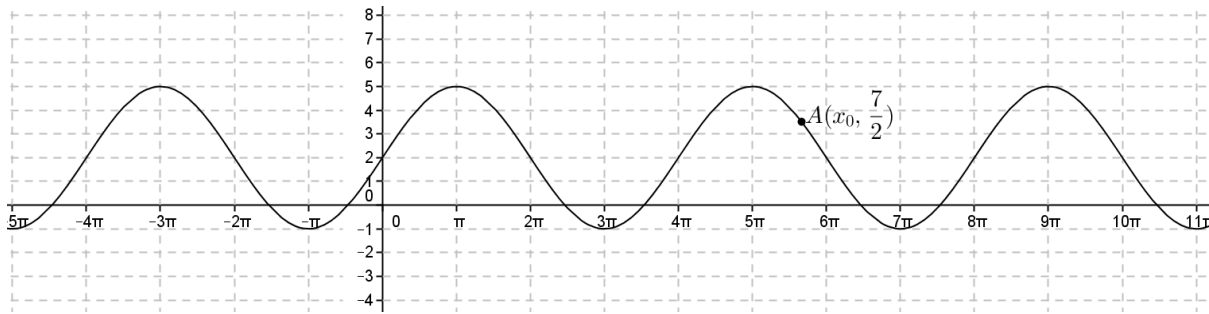
(Μονάδες 3)

- ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 34 14239

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.

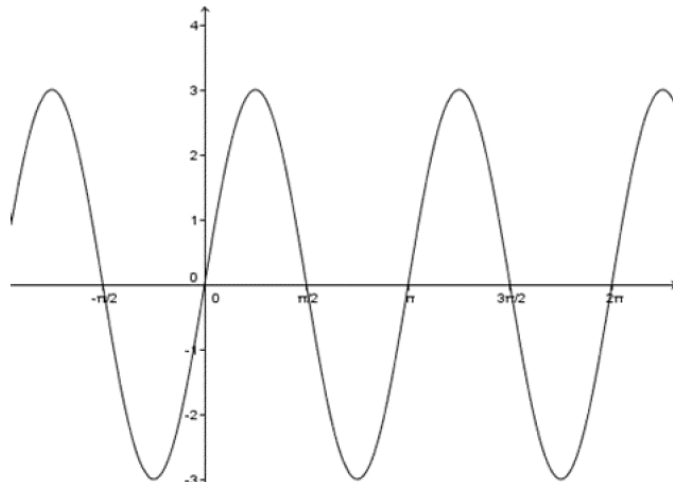


- α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:
- τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 3)
 - την περίοδο T της συνάρτησης f . (Μονάδες 3)
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ , k και ω . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)
- γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 35 15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.

- α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)
- β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ . (Μονάδες 6)



Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)
- δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 36 15095

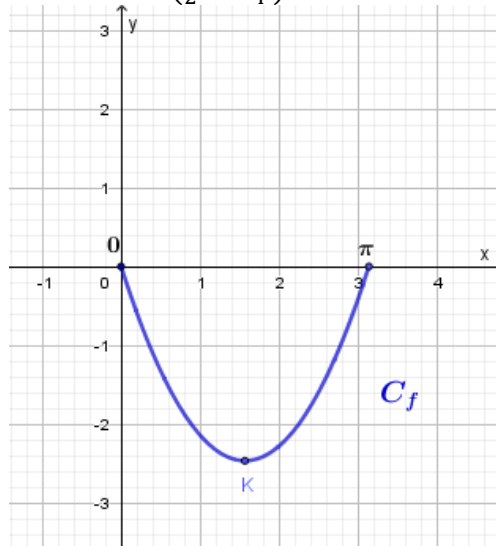
Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, \quad y = x^2 - \pi x, \quad y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \quad \text{και} \quad x = \pi$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α)

- i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 5)

- ii. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους. (Μονάδες 8)

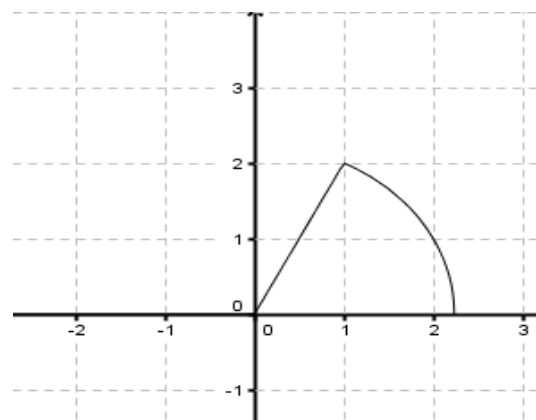
β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 37 15689

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x . (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;



(Μονάδες 8)

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

- i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\upsilon\theta$. (Μονάδες 5)
 ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\upsilon\theta)$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 38 15992

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta \mu x$, $g(x) = \eta \mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

- α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)
- β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta \mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 10)
- ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta \mu \frac{5\pi}{9} > \eta \mu \frac{10\pi}{9}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 39 18234

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές; (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 6)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 7)
- δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$. (Μονάδες 5)

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ 2^ο****ΘΕΜΑ 40 14280**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 41 14324

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$

- α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε την γωνία x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 42 15036

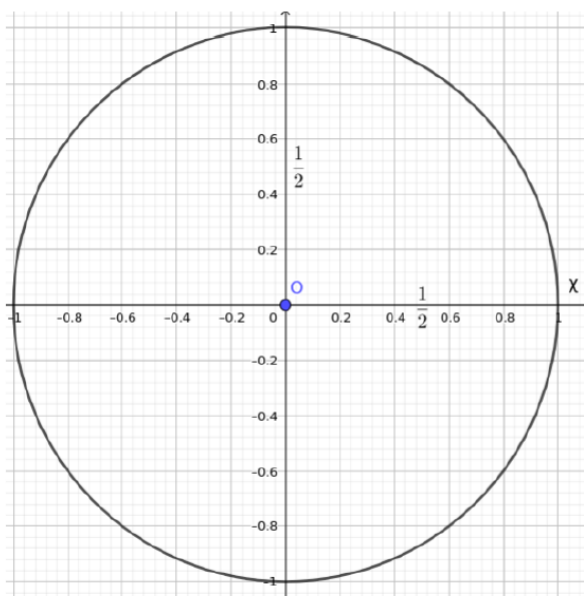
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 43 14977

- α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)



- β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

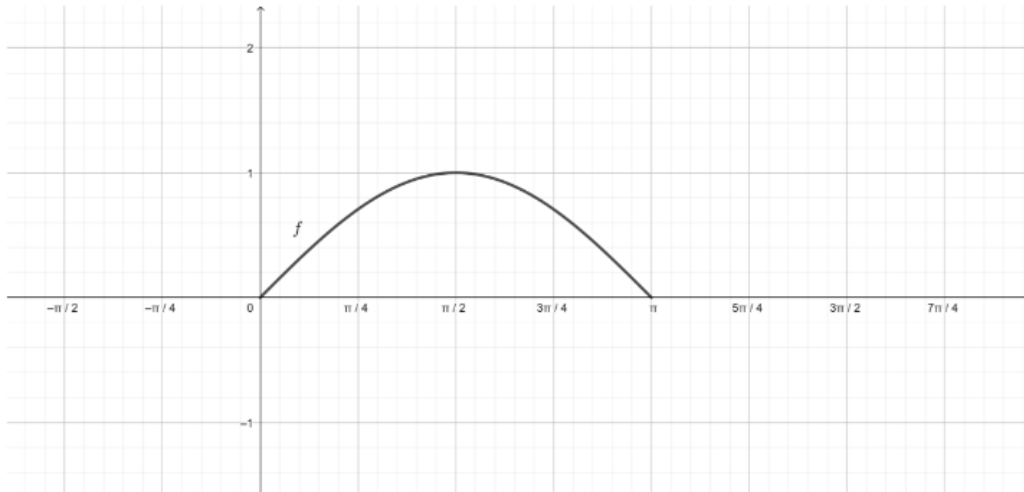
ΘΕΜΑ 44 15969

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

- α) Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$. (Μονάδες 5)
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sin x$. (Μονάδες 8)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 45 15789

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

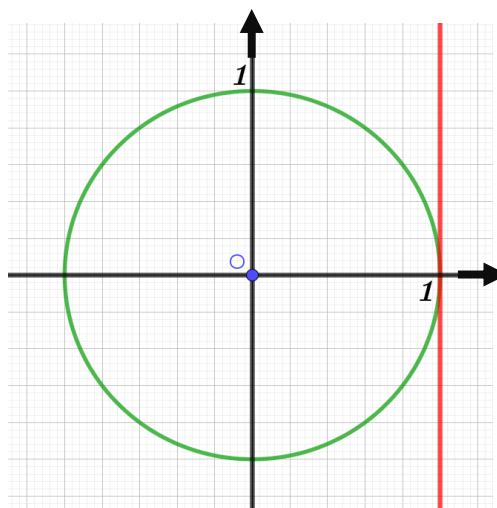


- α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 8)
 ii. Ποιος είναι ο τύπος της f και σε ποιο διάστημα ορίζεται; (Μονάδες 8)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 46 16131

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. (Μονάδες 15)
 β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 47 21995

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta \mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$. (Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$. (Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΘΕΜΑ 4^ο

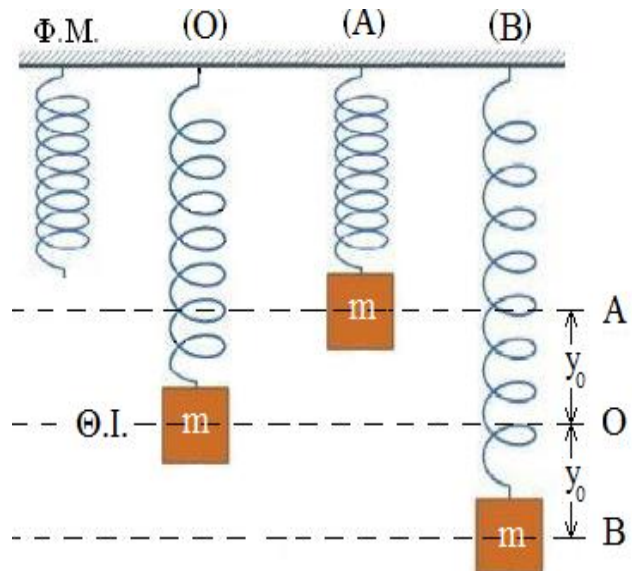
ΘΕΜΑ 48 14975

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t$$



α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 49 15014

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta \mu \beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$. (Μονάδες 10)

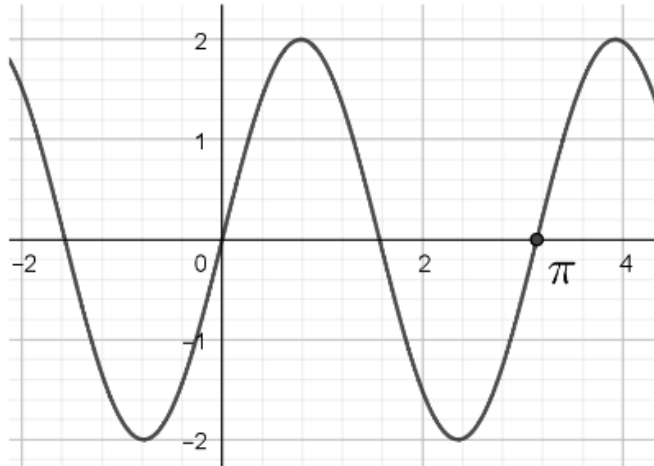
γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 50 15003

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
 ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$. (Μονάδες 6)



- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon : y = 1$ και για κάθε $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 51 15025

Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια

γωνία $\theta = \angle AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$,

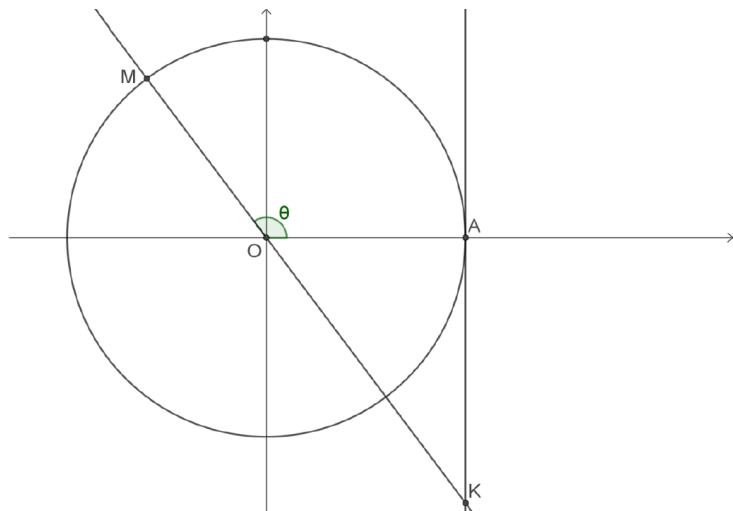
της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K .

- α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\varepsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$.

(Μονάδες 8)

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K .

(Μονάδες 6)



- γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi < 0$.

- i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 52 15026

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
 γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x' . (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 53 15049

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$. (Μονάδες 6)
 β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε:
 i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)
 ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 54 15050

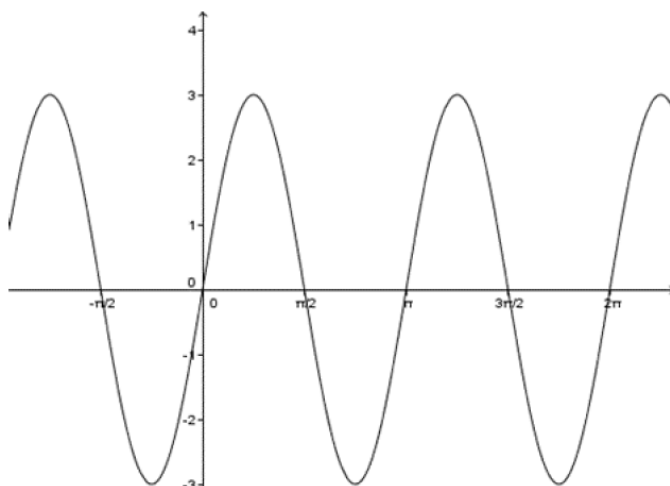
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 5)
 γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (Μονάδες 6)
 δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 55 15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.

- α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)
 β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ . (Μονάδες 6)



Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 56 15287

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

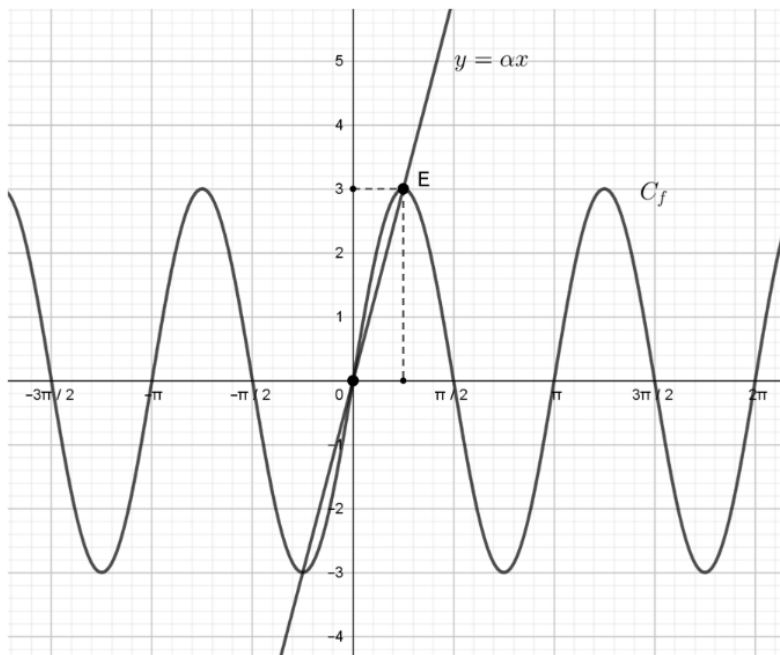
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$.

(Μονάδες 10)



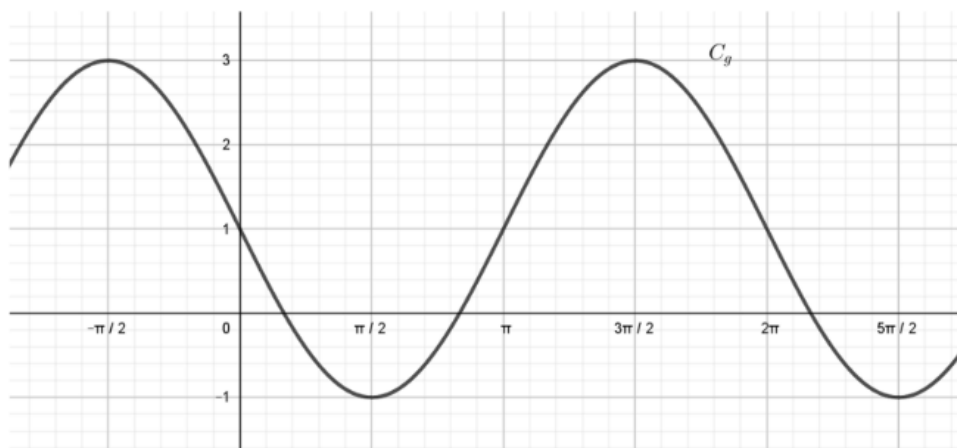
ΘΕΜΑ 57 15288

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha \eta \mu \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



- i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 58 15289

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν $\lambda = -1$, να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 2)
- ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = -1$, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sin \theta$ και $y_0 = \eta \mu \theta$. (Μονάδες 4)
- β) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sin \omega$ και $y_1 = \eta \mu \omega$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με $x_2 = \sin \varphi$ και $y_2 = \eta \mu \varphi$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
- i. Να δείξετε ότι $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta \mu \varphi = \frac{4}{5}$. (Μονάδες 6)
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 59 15347

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin^2(\pi - x) - 3\eta \mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha$. (Μονάδες 8)
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$. (Μονάδες 5)
- δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta \mu^2 x + 9\sin x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 60 15422

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta \mu(\pi + 2x)$, με $\alpha > 0$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta \mu 2x$. (Μονάδες 5)
- β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$. (Μονάδες 5)
- ii. Να βρείτε την περίοδο της f . (Μονάδες 5)
- γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 5)
- δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f , C_g οι γραφικές παραστάσεις των f , g αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 61 18234

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές; (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x' και $y'y$. (Μονάδες 6)
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 7)
- δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 62 20645

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 6)
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$. (Μονάδες 6)
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 63 21244

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 10)