

7 ^ο Γενικό Λύκειο Περιστερίου	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2014	
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ	
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	ΤΜΗΜΑ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16 / 6 / 2014	
ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ:	

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή είναι $u = P(\rho)$.

Μονάδες 10

B. Αν $\theta > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$, να δώσετε τον ορισμό του λογαρίθμου του θ με βάση α .

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα αναφοράς σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις προτάσεις: **Γ1, Γ2, Γ3, Γ4** και **Γ5**.

1. Για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ ισχύει πάντα ότι $\eta \mu^2 \omega + \sigma \nu \omega = 1$.

2. Το ρ είναι πάντα ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ αν ισχύει $P(\rho) = 0$.

3. Αν $x > 0$, ισχύει πάντα η ισοδυναμία: $\ln x = \theta \Leftrightarrow e^x = \theta$.

4. Αν $0 < \alpha < 1$ και $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x$ είναι πάντα γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Ισχύει πάντα ότι: $\sigma \nu x = \sigma \nu \omega \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \omega, k \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$ και αφήνει υπόλοιπο 12 όταν διαιρεθεί με το $x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -7$.

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x-1} \leq 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x - \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το (Σ) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Αν $(x, y) = (x_0, y_0)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος (Σ) για $\lambda = 2$, να

λύσετε την εξίσωση $-\frac{\sin^2 \varphi}{y_0} + 3x_0 \eta \mu \varphi = 0$.

Μονάδες 8

γ) Αν $\lambda = -1$ και το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (-\epsilon \varphi \omega, \sigma \varphi \omega)$ είναι λύση του συστήματος (Σ) , να αποδείξετε για τις τιμές που ορίζεται το ω ότι $\eta \mu \omega \sigma \nu \omega = 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e}{e^x - e}$ και οι πραγματικοί αριθμοί

$\alpha = f(\ln 3) + \ln \frac{e^3}{2}$, $\beta = f(\ln(e^2 + 1))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 5

δ) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x+3} - 3^x > \alpha^{x+1} - \beta^x$.

Μονάδες 5

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x - 1 - \ln(e^x + e) = \ln(e^{x-1} - 1) - f(x)$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Παπαβλάχος Ευστάθιος

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Τατάς Βασίλειος

Ψύχαλος Γεώργιος

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 – 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 134 – 135.

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 174.

Γ. 1. Σ, 2. Σ, 3. Λ, 4. Λ, 5. Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

$$\alpha) \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 6 = 0 \\ (-1)^3 + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + 6 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -7 \\ \alpha - \beta = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -7 \end{cases}.$$

β) Για $\alpha = 0$ και $\beta = -7$, έχουμε $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Τότε:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -3.$$

γ) Για $x \neq 1$, έχουμε ότι:

$$\frac{P(x)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2.$$

Εφόσον έχουμε ότι $x \neq 1$, προκύπτει: $-3 \leq x < 1$ ή $1 < x \leq 2$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Τότε:

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + 1)}, \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + 1)} \right) = \left(1, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right).$$

- Αν $\lambda = 0$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = -1$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1,$

δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y) = (x, x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = 2$, το σύστημα έχει λύση $(x, y) = \left(1, \frac{2-1}{2} \right) = \left(1, \frac{1}{2} \right)$, δηλαδή $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}$.

Τότε η προς λύση εξίσωση είναι:

$$-2\sin^2\varphi + 3\eta\mu\varphi = 0 \Leftrightarrow -2(1 - \eta\mu^2\varphi) + 3\eta\mu\varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\varphi + 3\eta\mu\varphi - 2 = 0 \stackrel{\eta\mu\varphi=u}{\Leftrightarrow} 2u^2 + 3u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = -2 \text{ ή } u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\varphi = -2 \text{ (αδύνατη) ή } \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\varphi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) Για $\lambda = -1$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση $y = x + 1$.

Συνεπώς για $\omega \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $\omega \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$\text{και οι } \sigma\varphi\omega = -\epsilon\varphi\omega + 1 \Leftrightarrow \frac{\sigma\varphi\omega}{\eta\mu\omega} = -\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\omega \sigma\varphi\omega \frac{\sigma\varphi\omega}{\eta\mu\omega} = -\eta\mu\omega \sigma\varphi\omega \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega} + 1 \cdot \eta\mu\omega \sigma\varphi\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\varphi^2\omega = -\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega \sigma\varphi\omega \Leftrightarrow \sigma\varphi^2\omega + \eta\mu^2\omega = \eta\mu\omega \sigma\varphi\omega \Leftrightarrow \eta\mu\omega \sigma\varphi\omega = 1.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έχουμε ότι:

$$e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e = e^{2x} - e e^x - e^x + e = e^x(e^x - e) - (e^x - e) = (e^x - e)(e^x - 1)$$

Πρέπει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e}{e^x - e} > 0 \\ e^x - e \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(e^x - e)(e^x - 1)}{e^x - e} > 0 \\ e^x \neq e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x > 1 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right., \text{ οπότε } A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, έχουμε:

$$f(x) = \ln \frac{e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e}{e^x - e} = \ln \frac{(e^x - e)(e^x - 1)}{e^x - e} = \ln(e^x - 1).$$

$$\gamma) \alpha = f(\ln 3) + \ln \frac{e^3}{2} = \ln(e^{\ln 3} - 1) + \ln e^3 - \ln 2 = \ln(3 - 1) + 3 \ln e - \ln 2 = 3.$$

$$\beta = f(\ln(e^2 + 1)) = \ln(e^{\ln(e^2 + 1)} - 1) = \ln(e^2 + 1 - 1) = \ln e^2 = 2.$$

δ) Για $\alpha = 3$ και $\beta = 2$ η εξίσωση γίνεται:

$$2^{x+3} - 3^x > 3^{x+1} - 2^x \Leftrightarrow 2^{x+3} + 2^x > 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x > 3^x + 3^x \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{9}{4} > \frac{3^x}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^x \Leftrightarrow x < 2.$$

ε) Για $x > 1$, έχουμε:

$$x - 1 + f(x) = \ln(e^{x-1} - 1) + \ln(e^x + e) \Leftrightarrow \ln e^{x-1} + \ln(e^x - 1) = \ln(e^{x-1} - 1) + \ln(e^x + e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln[e^{x-1}(e^x - 1)] = \ln[(e^{x-1} - 1)(e^x + e)] \Leftrightarrow e^{x-1}(e^x - 1) = (e^{x-1} - 1)(e^x + e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x-1} - e^{x-1} = e^{2x-1} + e^x - e^x - e \Leftrightarrow -e^{x-1} = -e \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2, \text{ δεκτή.}$$