

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$, με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, λέγεται **γραμμική εξίσωση**. Οι μεταβλητές x, y είναι οι άγνωστοι της εξίσωσης αυτής. Οι αριθμοί a, b λέγονται συντελεστές των αγνώστων της εξίσωσης ενώ το γ λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης. Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που έχει την ιδιότητα να επαληθεύει την εξίσωση $ax + by = \gamma$, δηλαδή να ισχύει $ax_0 + by_0 = \gamma$, λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης. Άρα το ζεύγος (x_0, y_0) είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης αν και μόνο αν οι αριθμοί x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση.

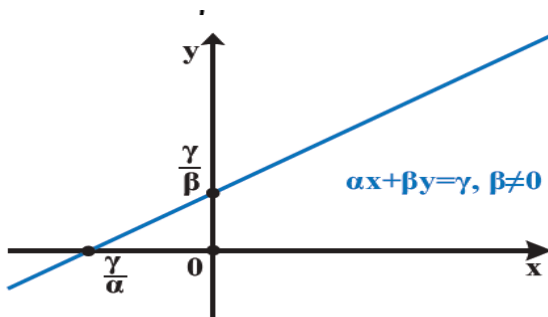
π.χ. αν έχω τη γραμμική εξίσωση : $3x - 2y = 8$ τότε το ζεύγος $(2, -1)$ λέγεται λύση της εξίσωσης γιατί την επαληθεύει : $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8 \Leftrightarrow 6 + 2 = 8$ που ισχύει.

Για την εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

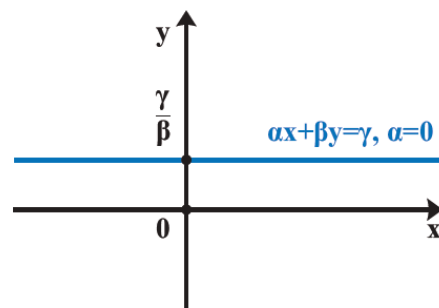
- Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται : $ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$

και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$.



Σχήμα α'



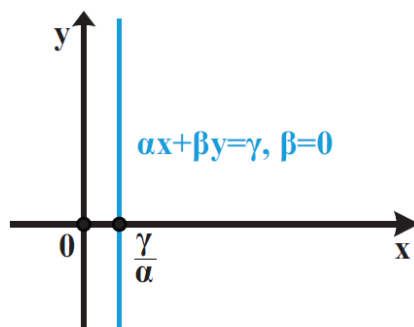
Σχήμα β'

Ειδικότερα :

- ✓ Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α'), ενώ
- ✓ Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{b}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$ (Σχ. β').

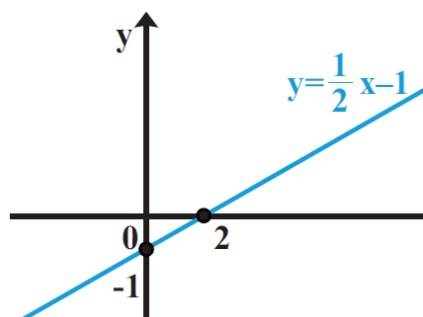
- Αν $b = 0$ (οπότε $a \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται $ax = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{a}$.

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

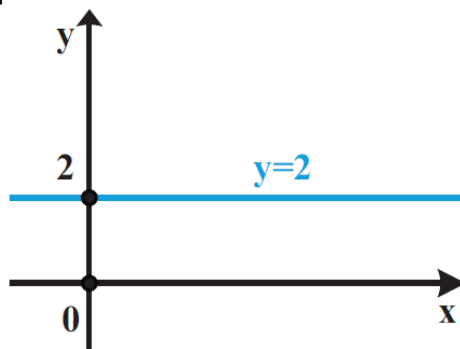


Για παράδειγμα :

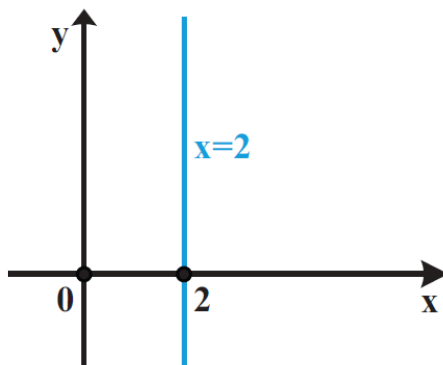
- ✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο -1 .



- ✓ Η εξίσωση $y=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 2.



- ✓ Η εξίσωση $x=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2.



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, το ζεύγος $(4, -1)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = 6$, αφού $4 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$. Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη $(16, 5)$, $(-10, -8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k, \frac{1}{2}k - 3\right)$, $k \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2x2

Όταν ψάχνουμε τις κοινές λύσεις δυο γραμμικών εξισώσεων : $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε γραμμικό σύστημα 2x2 :
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$
. Δηλαδή έχω 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους. Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 διαλέγουμε έναν από τους παρακάτω τρόπους. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος οδηγεί στο αποτέλεσμα είτε : το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΒΗΜΑ 1 : Διαλέγω μια από τις 2 εξισώσεις, συνήθως αυτή που έχει τουλάχιστον έναν από τους δυο αγνώστους με συντελεστή 1, και λύνω ως προς τον άγνωστο αυτό.
ΒΗΜΑ 2 : Στη συνέχεια αντικαθιστώ αυτό που βρήκα στην άλλη και έτσι θα έχω δημιουργήσει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνω.
ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του στην άλλη εξίσωση και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να λύσετε τα σύστημα : i. $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x - 12y = 9 \end{cases}$ (1) (2)

Λύση :

i. **ΒΗΜΑ 1 :** Έχω : $\begin{cases} 4x + 3y = 5, (1) \\ 2x + y = 1, (2) \end{cases}$, διαλέγω τη (2) γιατί αυτή έχει τον άγνωστο y με συντελεστή 1. Άρα $2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x, (1)$

ΒΗΜΑ 2 : Παίρνω την εξίσωση (1) και θα αντικαταστήσω όπου $y = 1 - 2x$, άρα : $4x + 3y = 5 \xrightarrow{y=1-2x} 4x + 3(1 - 2x) = 5 \Leftrightarrow 4x + 3 - 6x = 5 \Leftrightarrow 4x - 6x = 5 - 3 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

ΒΗΜΑ 3 : $y = 1 - 2x \xrightarrow{x=-1} y = 1 - 2(-1) \Leftrightarrow y = 1 + 2 \Leftrightarrow y = 3$

ii. $(1) \Leftrightarrow x = 4y + 3$, άρα $(2) \Leftrightarrow 3(4y + 3) - 12y = 9 \Leftrightarrow 12y + 9 - 12y = 9 \Leftrightarrow 0y = 0$, η οποία είναι αόριστη, επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος, λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. $x = 4y + 3$. Για $y = k$, όπου k τυχαίος αριθμός, είναι $x = 4k + 3$. Άρα κάθε ζεύγος της μορφής $(4k + 3, k)$, $k \in \mathbb{R}$.

(Θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς y δηλ. $(1) \Leftrightarrow x = 4y + 3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}$ και για $x = k$

το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\left(k, \frac{k-3}{4}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΒΗΜΑ 1 : Δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές σε έναν από τους δυο αγνώστους πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό τα μέλη της μιας εξίσωσης ή και των δυο.

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε ως προς τον άγνωστο αυτό.

ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του σε οποία από τις 2 εξισώσεις θέλω και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε το σύστημα :
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases}$$

Λύση :

ΒΗΜΑ 1 : Έχω :
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -3 \\ 2x - 5y = -28 \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -3 \\ -6x + 15y = 84 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $13y = 78 \Leftrightarrow y = 6$

ΒΗΜΑ 3 : Πάω στην εξίσωση $3x - y = -3$ και θα βάλω όπου $y = 6$, άρα έχω :

$3x - 6 = -3 \Leftrightarrow 3x = 6 - 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, 6)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2

Καθεμία από τις εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$, παριστάνει μια ευθεία

γραμμή $(\varepsilon): ax + by = \gamma$ και $(\varepsilon'): a'x + b'y = \gamma'$ αντίστοιχα. Η λύση (x_0, y_0) του συστήματος είναι το κοινό ή τα κοινά σημεία των δυο ευθειών. Η γραφική επίλυση ενός συστήματος, ουσιαστικά είναι ο σχεδιασμός των δυο αυτών ευθειών σε ένα σύστημα συντεταγμένων και στην εύρεση των συντεταγμένων του κοινού τους σημείου. Για να σχεδιάσω μια ευθεία, χρειάζομαι δυο σημεία τα οποία θα ενώσω. Συνήθως διαλέγω τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες. Για σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ βάζω $y=0$ στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο x άρα το σημείο $A(x,0)$. Ενώ για σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ βάζω $x=0$ στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο y άρα το σημείο $B(0,y)$.

ΒΗΜΑ 1 : Δίνω στα x, y διαδοχικά την τιμή 0 και βρίσκω τα σημεία τομής με τους άξονες $A(x,0)$ και $B(0,y)$

ΒΗΜΑ 2 : Σχεδιάζω ένα σύστημα συντεταγμένων και εντοπίζω τα σημεία τομής με τους άξονες $A(x,0)$ και $B(0,y)$, τα ενώνω και έτσι σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon): ax + by = \gamma$

ΒΗΜΑ 3 : Επαναλαμβάνω τη διαδικασία και σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon'): a'x + b'y = \gamma'$. Από το σχήμα βρίσκω τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους, που είναι και η λύση του συστήματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε γραφικά το σύστημα :
$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Λύση :

Έστω $(\varepsilon_1) : x - y = -2$ και $(\varepsilon_2) : 2x + y = 5$ οι ευθείες που παριστάνουν οι δυο εξισώσεις του παραπάνω συστήματος. Στην (ε_1)

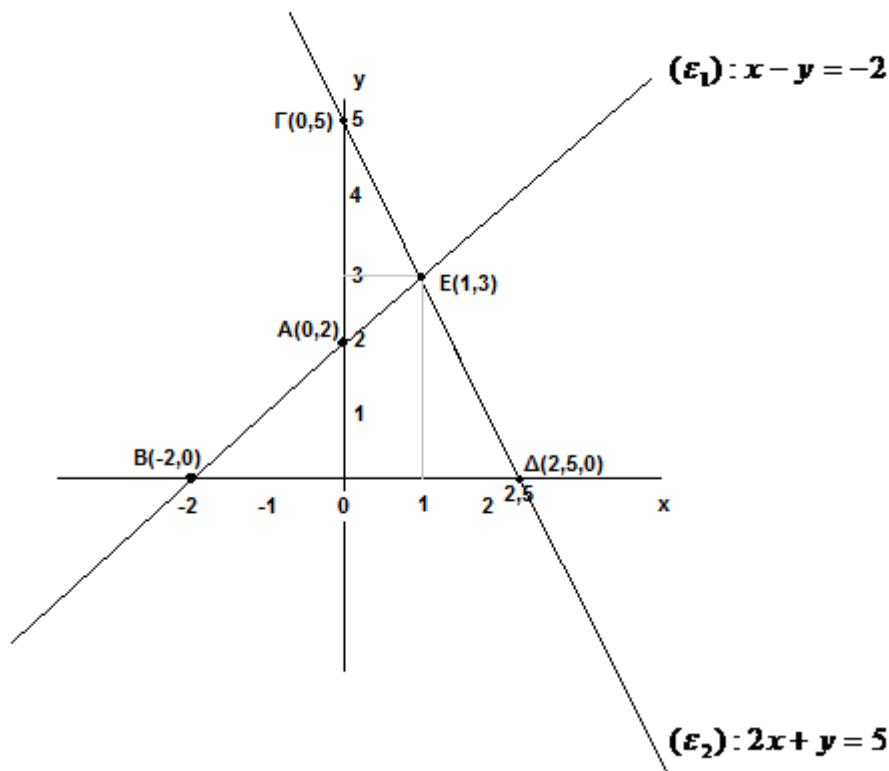
για $x = 0$ έχω $0 - y = -2 \Leftrightarrow y = 2$ άρα $A(0,2)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον $y'y$

για $y = 0$ έχω $x - 0 = -2 \Leftrightarrow x = -2$ άρα $B(-2,0)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον $x'x$

Ομοίως στην (ε_2)

για $x = 0$ έχω $2 \cdot 0 + y = 5 \Leftrightarrow y = 5$ άρα $\Gamma(0,5)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον $y'y$

για $y = 0$ έχω $2x + 0 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2,5$ άρα $\Delta(2,5,0)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον $x'x$.



Παρατηρούμε από το σχήμα ότι οι δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $E(1,3)$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (1,3)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. Η εξίσωση $\frac{\alpha}{x} + \beta y = \gamma$ είναι γραμμική.
- ii. Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει κατ'ανάγκη ευθεία.
- iii. Οι ευθείες $x=k$ και $y=\lambda$ είναι κάθετες.
- iv. Η ευθεία $x=k$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω εξισώσεις με **Σωστό**, αν παριστάνουν ευθεία ή ευθείες πάντοτε και με **Λάθος**, αν δεν παριστάνουν.

i. $|x-3y|=0$

ii. $ax + \beta y = \gamma$

iii. $\alpha x + (\alpha - 1)y = 2$

iv. $\lambda x + (\lambda^2 - \lambda)y = 5$

v. $\frac{y}{x-1} = 2$

vi. $x^2 - 2xy = -y^2$

vii. $y^2 - x^2 = 0$

viii. $x^2 - xy = 0$

ix. $x^2 + y^2 = 0$

6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω (Σ) το σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους.

i. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) τέμνονται, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.

ii. Αν το (Σ) έχει δυο λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.

iii. Αν το (Σ) είναι αδύνατο, τότε οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) ταυτίζονται.

iv. Αν το (Σ) έχει ως λύση το ζεύγος (0,0), τότε οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι μηδέν.

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3,y)$, $y \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

ii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,2)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

iii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,x-2)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία

iv. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ είναι ο άξονας

v. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ο άξονας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 - 2)x - |\beta - 1|y + 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε το ζεύγος (1,-1) να είναι λύση της εξίσωσης.

9. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση $(|\lambda| - 1)x + (\lambda^2 - \lambda)y + 5 = 0$ να παριστάνει ευθεία.

➤ Γραφική επίλυση συστήματος

10. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

11. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

12. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

➤ Αλγεβρική επίλυση συστήματος

13. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 7x - y = 13 \end{cases}$$

14. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}$$

15. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x-y(2x-1) \end{cases}$$

16. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η εξίσωση $(\alpha-2\beta-1)x+(2\alpha-\beta-5)y+\alpha-1=0$ να παριστάνει ευθεία.

17. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ , που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

18. Να εξετάσετε, ποια από τα ζεύγη $(1,2)$, $(0,-3)$ και $(\alpha,2\alpha-3)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x-y=3$

19. i. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda+2)x+(\lambda-1)y+3=0$, παριστάνει ευθεία, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda^2-4)x+(\lambda-2)y+5=0$, να παριστάνει ευθεία.

20. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} y = 2x \\ x - y = 3 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

21. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$$

22. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - y = 4 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

23. Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 4x - 7y = -3 \end{cases}$$

24. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$$

26. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{4} \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x-2y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x - 2(x - y) = 3 - (2x - y) \\ y - x(1 - 2y) = 1 + 2y(x - 1) \end{cases}$$

27. Αν τα συστήματα: $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ και $\begin{cases} \alpha x + y = 7\beta \\ 5x - \beta y = 3\alpha \end{cases}$ έχουν κοινή λύση, να βρείτε τα α και β .

28. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η εξίσωση $(\alpha - 3\beta + 1)x + (3\alpha - \beta - 5)y + \beta - 3 = 0$ να παριστάνει ευθεία.

29. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών: $\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y - 3 = 0$

30. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\alpha x + \beta y = \alpha + 39$ και $\varepsilon_2: x + (\alpha - \beta)y = \beta - 2$ τέμνονται στο σημείο $A(5, 3)$, να βρείτε τα α και β .

31. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y = -4$ και $\varepsilon_2: x + 2y = 3$.

i. Να βρείτε το σημείο τομής A , των ευθειών ε_1 και ε_2

ii. Να βρείτε την ευθεία ε , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο A .

32. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , που διέρχεται από τα σημεία $A(2, -3)$ και $B(-2, 5)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η , που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

33. Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2 - x^2 = 2x + 1$ παριστάνει δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και να βρείτε το σημείο τομής τους.

34. Αν η εξίσωση $(\alpha - 2\beta - 1)x = 2\alpha - \beta - 5$ έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των α και β .

35. Αν ισχύει $x - 2y + 1 + \lambda(x - y) = 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα x και y .

36. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 8x^3 - 4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\alpha - 3\beta$ τέμνει τον άξονα των $x'x$ στο σημείο -1 και διέρχεται από το σημείο $A(-\frac{1}{2}, -20)$, να βρείτε τα α και β .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2 ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \quad (\text{Ορίζουσα } D \text{ του συστήματος})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad (\text{Ορίζουσα } D_x: \text{ δεν έχει } x, \text{ δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του } x \text{ με τους σταθερούς όρους})$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \quad (\text{Ορίζουσα } D_y: \text{ δεν έχει } y, \text{ δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του } y \text{ με τους σταθερούς όρους})$$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών : βρίσκουμε τις ορίζουσες των D , D_x , D_y και μετά :

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , όπου : $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37. (Άσκηση 5 σελ. 21 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών :

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Λύση :

$$\text{i. } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Έχω : } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 3 = -10 - 3 = -13 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

$$\text{Άρα : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1, \text{ δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση } (x, y) = (3, 1)$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Έχω : } D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 2 = -22, \quad D_y = \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$$

Άρα : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-22}{-11} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{-11} = -1$, δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση
 $(x, y) = (2, -1)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των οριζουσών. Συγκεκριμένα ακολουθούμε τα εξής βήματα :

ΒΗΜΑ 1 : Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

ΒΗΜΑ 2 : Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$

ΒΗΜΑ 3 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D \neq 0$

ΒΗΜΑ 4 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38. (Άσκηση 8 σελ. 23 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών :

$$\text{i. } \begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ii. } \begin{cases} (\mu - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu + 2)y = 5 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

Λύση :

i. (Τα παραμετρικά συστήματα, λύνονται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών)

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 4 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 8 = -(\lambda^2 - 1) + 8 = -\lambda^2 + 1 + 8 = 9 - \lambda^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda + 1) - (-2)(-2) = -\lambda - 1 - 4 = -\lambda - 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) - 4 = -2\lambda + 2 - 4 = -2\lambda - 2$$

$$\text{ΒΗΜΑ 2 : } D = 0 \Leftrightarrow 9 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ & $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\text{την : } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda - 5}{9 - \lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2\lambda - 2}{9 - \lambda^2}$$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$ τότε :

$$\bullet \text{ Αν } \lambda = 3 \text{ έχω : } \begin{cases} (3-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (3+1)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = -2 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :}$$

$$0 = -4 \quad \text{άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

$$\bullet \text{ Αν } \lambda = -3 \text{ έχω : } \begin{cases} (-3-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (-3+1)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $0 = -1$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\text{ii. } \begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2) - 5 = \mu^2 - 4 - 5 = \mu^2 - 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2) - 25 = 5\mu + 10 - 25 = 5\mu - 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2) - 5 = 5\mu - 10 - 5 = 5\mu - 15$$

$$\text{ΒΗΜΑ 2 : } D = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 9 \Leftrightarrow \mu = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \mu = \pm 3$$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 3, \mu \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5\mu - 15}{\mu^2 - 9} = \frac{5(\mu - 3)}{(\mu - 3)(\mu + 3)} = \frac{5}{\mu + 3},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5\mu - 15}{\mu^2 - 9} = \frac{5(\mu - 3)}{(\mu - 3)(\mu + 3)} = \frac{5}{\mu + 3}$$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D = 0 \Leftrightarrow \mu = \pm 3$ τότε :

$$\bullet \text{ Αν } \mu = 3 \text{ έχω : } \begin{cases} (3-2)x + 5y = 5 \\ x + (3+2)y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = 5 \\ -x - 5y = -5 \end{cases} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :}$$

$0 = 0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις της μορφής $(5 - 5y, y)$ όπου y είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. (Για να βρω τις λύσεις διαλέγω μια από τις δυο εξισώσεις και λύνω ως προς έναν από τους δυο αγνώστους : $x + 5y = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 5y$)

$$\bullet \text{ Αν } \mu = -3 \text{ έχω : } \begin{cases} (-3-2)x + 5y = 5 \\ x + (-3+2)y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 5 \\ 5x - 5y = 25 \end{cases} \text{ Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει } 0 = 30 \text{ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

39. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

$$\text{Έστω το σύστημα } \begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

i. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε $D=0$

ii. Αν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Αν το σύστημα είναι αόριστο, τότε $D=0$.

iv. Αν $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

40. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ (Σ) παριστάνουν τις ευθείες ε και ε' .

- i. Αν $D \neq 0$, τότε οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$ τέμνονται.
- ii. Αν οι ευθείες $\varepsilon, \varepsilon'$ είναι παράλληλες, τότε $D=0$.
- iii. Αν $D=0$, τότε οι $\varepsilon, \varepsilon'$ δεν τέμνονται. iv. Αν $D=0$, τότε οι $\varepsilon, \varepsilon'$ είναι παράλληλες

41. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$ (Σ)

- i. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε $|D| > 0$
- ii. Αν $D^3 + D^2 - 3 = 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- iii. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε είναι αδύνατο.
- iv. Αν το σύστημα δεν έχει άπειρες λύσεις, τότε είναι αδύνατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

42. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

i. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ iv. $\begin{vmatrix} 3\lambda - 2 & -\lambda^2 \\ -9 & 3\lambda + 2 \end{vmatrix}$

43. Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 3x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0$

44. Να λύσετε τα συστήματα με την μέθοδο των οριζουσών:

i. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x - 7y = 3 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 16 + 5x = 2y \end{cases}$

45. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$

46. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ x - 3y = \lambda - 1 \end{cases}$

47. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = \lambda - 1 \\ 7x - 4y = \lambda \end{cases}$

- i. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $2x_0 - y_0 < 1$

48. Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε): $y = \lambda x - 2$ και (η): $4x + \lambda y - \lambda = 0$ τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

49. Να βρείτε το λ , ώστε οι ευθείες (ε): $(\lambda - 1)x + \lambda y = \lambda$ και (η): $x + \lambda y = 2$ να είναι παράλληλες.

50. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$ (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ (Σ') έχει μοναδική λύση.

51. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = 1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = 2 \end{cases}$

52. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases}$

53. Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (\lambda + 1)x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 1)y = 2 \end{cases}$

54. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$

- i. Να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
ii. Να μην έχει καμία λύση.

55. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: x + \alpha y = 2$ και $\varepsilon_2: \alpha x + 9y = 2$ να τέμνονται.

56. Να βρείτε το α, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \alpha^2 y = 4$ και $\varepsilon_2: x + \alpha y = \alpha + 2$

- i. Να τέμνονται
ii. Να είναι παράλληλες

57. Να διερευνηθεί το σύστημα : $\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda + 2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$

58. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda - 1)x + y = 2 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 4\lambda - 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το : $\begin{cases} \lambda x + (2\lambda + 1)y = 3 \\ 2x - (1 - 3\lambda)y = \lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

59. Να λυθεί το σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y για τις οποίες ισχύει : $D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$.

60. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος : (Σ) : $\begin{cases} (9 + D)x + (8 + D)y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$, τότε :

- i. να δείξετε ότι $D = -7$
ii. να λύσετε το σύστημα (Σ)

- iii. να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η λύση του συστήματος (Σ) να είναι και λύση του συστήματος
$$\begin{cases} (\alpha+1)x - 3\beta = 3 \\ 2\alpha x - (\beta+1)y = -4 \end{cases}$$

61. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$$

- Να βρείτε τις ορίζουσες : D, D_x, D_y
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση για την οποία ισχύει : $x_0 + y_0 > 1$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 3x3

Για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3, δηλαδή ένα σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους, χρησιμοποιούμε τις ίδιες μεθόδους με αυτές που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2. Πιο συγκεκριμένα λύνουμε μια από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο της επιλογής μας, και στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στις 2 άλλες εξισώσεις. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα 2x2 το οποίο και λύνουμε όπως έχουμε μάθει. Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3x3 όπως είδαμε ανάγεται στην επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2, προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3x3 είτε έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

62. (Άσκηση 8 σελ. 22 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases} & \text{iii. } \begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \end{array}$$

Λύση :

$$\text{i. } \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11, (1) \\ 2x - 5y - 2\omega = 3, (2) \\ 5x + y - 2\omega = 33, (3) \end{cases} \text{ διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς } \omega. \text{ Δηλαδή :}$$

(1) : $3x - 2y - \omega = 11 \Leftrightarrow \omega = 3x - 2y - 11$. Αντικαθιστώ την τιμή του ω στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} 2x - 5y - 2(3x - 2y - 11) = 3 \\ 5x + y - 2(3x - 2y - 11) = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y - 6x + 4y + 22 = 3 \\ 5x + y - 6x + 4y + 22 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - y = -19 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2x2 άρα :
$$\begin{cases} -4x - y = -19 \\ -x + 5y = 11 \end{cases} \cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} -20x - 5y = -95 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $-21x = -84 \Leftrightarrow x = 4$ και αντικαθιστώ στη :
 $-x + 5y = 11 \xrightarrow{x=4} -4 + 5y = 11 \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$. Τέλος τα x, y που βρήκα τα
 αντικαθιστώ στην $\omega = 3x - 2y - 11 \xrightarrow{\substack{x=4 \\ y=3}} \omega = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 11 \Leftrightarrow \omega = -5$. Άρα
 $(x, y, \omega) = (4, 3, -5)$

ii.
$$\begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4, (1) \\ x - 3y + \omega = 2, (2) \\ 3x - 2y + 2\omega = 2, (3) \end{cases}$$
 διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y . Δηλαδή :

(1) : $5x - y + 3\omega = 4 \Leftrightarrow y = 5x + 3\omega - 4$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} x - 3(5x + 3\omega - 4) + \omega = 2 \\ 3x - 2(5x + 3\omega - 4) + 2\omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 15x - 9\omega + 12 + \omega = 2 \\ 3x - 10x - 6\omega + 8 + 2\omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ -7x - 4\omega = -6 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2×2 άρα :

$$\begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ -7x - 4\omega = -6 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 8\omega = -10 \\ 14x + 8\omega = 12 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0 = 2$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

iii.
$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \xrightarrow[\text{παρανομασών}]{\text{Απαλειφή}} \begin{cases} 2x + 2 \cdot \frac{y}{2} - 2 \cdot 2\omega = 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot \frac{3x}{2} + 2y + 2\omega = 2 \cdot 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6, (1) \\ 3x + 2y + 2\omega = 10, (2) \\ 5x + 3y - 2\omega = 16, (3) \end{cases}$$

διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y . Δηλαδή :

(1) : $2x + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow y = -2x + 4\omega + 6$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} 3x + 2(-2x + 4\omega + 6) + 2\omega = 10 \\ 5x + 3(-2x + 4\omega + 6) - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 8\omega + 12 + 2\omega = 10 \\ 5x - 6x + 12\omega + 18 - 2\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2×2 άρα : $\begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 10\omega = -2 \\ x + 10\omega = 2 \end{cases}$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0 = 0$. Άρα το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει

άπειρες λύσεις. Έχω $\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6, (1) \\ -x + 10\omega = -2, (2) \\ -x + 10\omega = -2, (3) \end{cases}$, παρατηρώ δηλαδή ότι οι (2) και (3)

ταυτίζονται άρα : $\begin{cases} 2x + y - 4\omega = 6 \\ -x + 10\omega = -2 \end{cases}$. Από τη (2) έχω : $x = 10\omega + 2$, αντικαθιστούμε το

x στην (1) και έχω : $2x + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow 2(10\omega + 2) + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20\omega + 4 + y - 4\omega = 6 \Leftrightarrow y = 2 - 16\omega$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $(x, y, z) = (10\kappa + 2, 2 - 16\kappa, \kappa)$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

63. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - y + w = -5 \\ y + 3w = 7 \\ w = 2 \end{cases}$$

64. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - y + 3w = 4 \\ 3x + 2y - w = -7 \\ x - 3y + 2w = 1 \end{cases}$$

65. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7w = 0 \\ 3x - y - 5w = 0 \\ 5x + 2y - 12w = 0 \end{cases}$$

66. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2y + w = 1 \\ 2x - y - 3w = 2 \\ 3x - 3y - 2w = 4 \end{cases}$$

67. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - y - 2w = 4 \\ 2x - 3y + w = 2 \\ x - 2y + 3w = -2 \end{cases}$$

68. Θεωρούμε το 2×2 γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x, y . Για τις ορίζουσες

D, D_x, D_y ισχύουν τα εξής :
$$\begin{cases} 2D_x - 3D + D_y = -1 \\ D_x + 2D - 2D_y = 8 \\ 3D_x - 8D + 3D_y = -8 \end{cases}$$
 . Να βρείτε τα x, y .

69. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 4x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$$

iv.
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

70. Να λύσετε τα συστήματα:

i.
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

iv.
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

71. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii. } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΑ

Ορισμένα συστήματα, αν και δεν είναι γραμμικά, μπορούν με κατάλληλο τέχνασμα να μετατραπούν σε γραμμικά. Ένα τέτοιο τέχνασμα συνήθως είναι η αντικατάσταση. Αντικαθιστούμε κάποιον ή κάποιους όρους του συστήματος που βρίσκονται και στις δυο εξισώσεις, με έναν νέο άγνωστο και έτσι οδηγούμαστε σε ένα νέο σύστημα που είναι όμως γραμμικό. Λύνουμε το νέο σύστημα και στη συνέχεια, επιστρέφοντας στις αρχικές σχέσεις, βρίσκουμε τις λύσεις του αρχικού συστήματος. Σε άλλες περιπτώσεις μπορούμε να προσθέσουμε όλες ή μερικές από τις εξισώσεις του συστήματος και με αντικατάσταση να βρούμε ευκολότερα τη λύση του δοσμένου συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

$$72. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } (\Sigma): \begin{cases} x + y = 4 \\ y + w = -1 \\ w + x = 1 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x + y = 1 \\ y + w = 0 \\ w + x = 5 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x + y = 5 \\ y + w = 2 \\ x + w = -1 \end{cases}$$

$$73. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = -2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 17 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = -2 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 9 \end{cases}$$

$$74. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} \frac{3}{x-2y} - \frac{5}{2x-y} = 2 \\ \frac{4}{x-2y} + \frac{15}{2x-y} = 7 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} \frac{3}{2x-y+1} - \frac{2}{x-3y+4} = \frac{13}{6} \\ \frac{2}{2x-y+1} - \frac{4}{x-3y+4} = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$75. \text{ Να λύσετε τα συστήματα : } \text{i. } \begin{cases} 3|x| - 4|y| = -6 \\ 4|x| + |y| = 11 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 3|x| + 4|y-2| = 5 \\ 5|x| + 9|y-2| = 13 \end{cases}$$

$$\text{iii. } \begin{cases} 4|x-1| - 3|y+1| = 3 \\ 5|x-1| - 4|y+1| = -1 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} |2x-1| - |3y-2| = 2 \\ |1-2x| - |6y-4| = 1 \end{cases} \quad \text{v. } \begin{cases} |x+y| = 2 \\ \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{vi.} \begin{cases} |x-y| = |2x-y-1| \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases} & \text{vii.} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = 4 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = 8 \end{cases} & \text{viii.} \begin{cases} \frac{1}{x+2y-3} + \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12} \end{cases} \end{array}$$

76. Δίνονται οι αριθμοί α, β και γ με : $3\alpha - \beta - \gamma = 0$ και $\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$. Να εκφράσετε τα α, β ως συνάρτηση του γ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma - \beta + 6\gamma \geq -1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για τη λύση προβλημάτων, που ανάγονται σε συστήματα με δυο ή περισσότερους αγνώστους, αρχικά σχηματίζουμε τις εξισώσεις από τα δεδομένα του προβλήματος και σχηματίζουμε το σύστημα που προκύπτει. Θέτουμε περιορισμούς για τους αγνώστους εφόσον είναι απαραίτητο και στη συνέχεια λύνουμε το παραπάνω σύστημα. Τέλος επαληθεύουμε τις λύσεις που έχουμε βρει με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

77. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε το μισό της ζωής του, ενώ αν πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα βασίλευε το $\frac{1}{8}$ της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασίλευε ο Μέγας Αλέξανδρος.

78. Ένας μαθητής απάντησε σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 4 μονάδες, ενώ για κάθε λανθασμένη του αφαιρούνταν δυο μονάδες. Αν συνολικά συγκέντρωσε 50 μονάδες, σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

79. Ένα ξενοδοχείο έχει 30 δωμάτια, δίκλινα και τρίκλινα, και μπορεί να φιλοξενήσει μέχρι και 80 άτομα. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

80. Σε μια εκδήλωση ο αριθμός των γυναικών που συμμετέχουν είναι διπλάσιος από τον αριθμό των ανδρών. Μια ώρα μετά την έναρξη της εκδήλωσης αποχωρούν δέκα ζευγάρια. Ο αριθμός των ανδρών που απομένουν είναι ίσος με τα $\frac{4}{9}$ του αριθμού των γυναικών που απομένουν. Να βρείτε τον αριθμό των ανδρών και των γυναικών που συμμετείχαν αρχικά στην εκδήλωση.

81. Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και ο Ανέστης θέλουν να αγοράσουν με τα χρήματα τους ένα δώρο για τη Μαριάννα. Τα χρήματα του Δημήτρη και του Γιώργου μαζί είναι κατά 20€ περισσότερα από τα χρήματα του Ανέστη. Τα χρήματα του Γιώργου και του Ανέστη είναι κατά 60€ περισσότερα από τα χρήματα του Δημήτρη και τέλος τα χρήματα του Δημήτρη και του Ανέστη είναι κατά 40€ περισσότερα από τα χρήματα του Γιώργου. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας; Πόσο κοστίζει το δώρο της Μαριάννας;

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (4\lambda + \mu)x + \lambda + 2\mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3. Επίσης η κορυφή της C_f έχει τετμημένη 1.

- i. Να δείξετε ότι : $\lambda = -1, \mu = 2$.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) + f(x-2) \leq 8$.

82. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} 2x - y = 3\lambda - 3 \\ x + y = -\lambda^2 + 2\lambda \end{cases}$$

- i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος, να βρείτε για ποια τιμή του λ η παράσταση $5x_0 - y_0$ γίνεται μέγιστη.

83. Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + \lambda y = -2 \\ \lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$
 το οποίο έχει ορίζουσα D. Επίσης η εξίσωση : $x^2 - (D + 5)x + 4(D + 1) = 0$ έχει διπλή ρίζα.

- i. Να βρείτε την ορίζουσα D και τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.
- ii. Να λύσετε το σύστημα.

84. Η εξίσωση $x^2 + (\lambda + \mu)x + \mu - \nu = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 . Ισχύουν οι σχέσεις : $x_1 + x_2 = -3, x_1 x_2 = -2$ και $x_1^2 + x_2^2 = -3\lambda + \mu + \nu$. Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ν .

85. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - y = -\lambda \\ -4x + (\lambda + 1)y = \lambda + 1 \end{cases}$$
 έχει μοναδική λύση το ζεύγος (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $y_0^2 - 2x_0 = 1$.

86. Ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων, με αγνώστους x και y , έχει μοναδική λύση και ισχύει : $5D_x + 4D_y = 7D$ και $4D_x + 5D_y = 2D$ όπου D_x, D_y, D οι αντίστοιχες ορίζουσες του συστήματος. Να βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος.

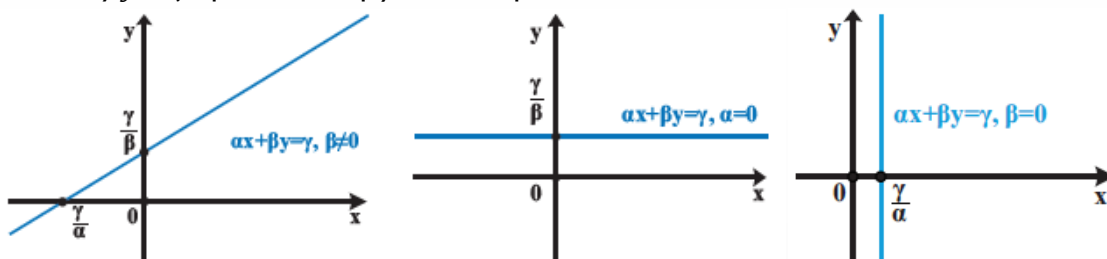
1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

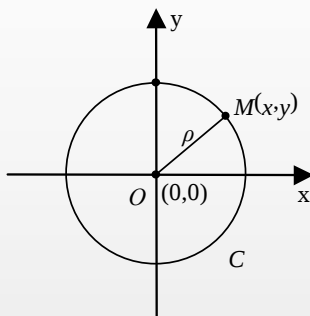
Για την επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε δηλαδή τη φαινομενικά πιο «εύκολη» από τις δυο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, και αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην άλλη.

Προσοχή : επειδή το σχολικό βιβλίο αναφέρεται σε γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων καλό θα είναι να γνωρίζουμε ότι εξισώσεις της μορφής :

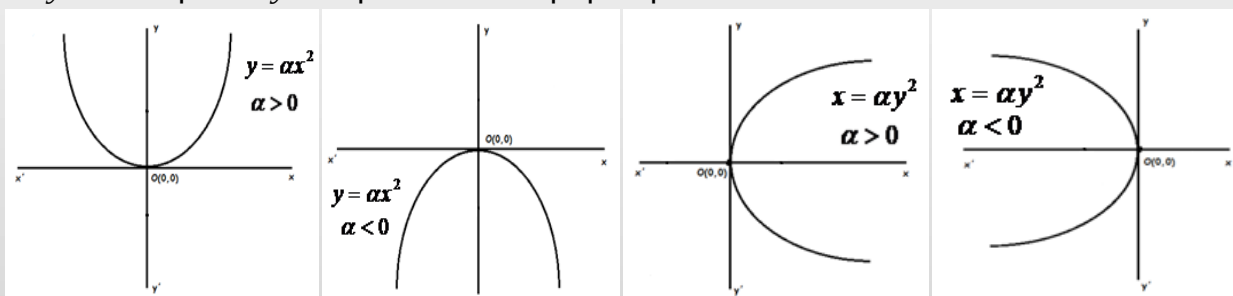
➤ $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνουν ευθεία



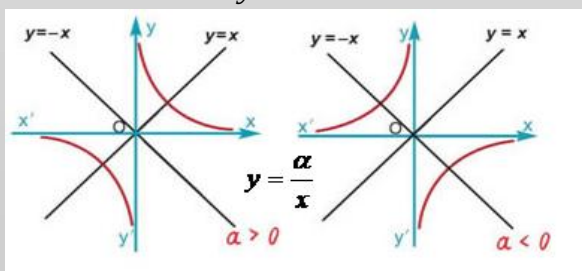
➤ $x^2 + y^2 = \rho^2$ παριστάνουν κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ



➤ $y = ax^2$ ή $x = ay^2$ παριστάνουν παραβολή



➤ $y = \frac{\alpha}{x}$ ή $x = \frac{\alpha}{y}$ παριστάνουν υπερβολή.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 27 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Λύση :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3, (1) \\ x + y = 1, (2) \end{cases}$$
 διαλέγω τη φαινομενικά πιο «εύκολη» (2): $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$

και λύνω ως προς y . Στη συνέχεια αντικαθιστώ στην (1) την τιμή του x που βρήκα και έχω: (1): $x^2 + y^2 + xy = 3 \xrightarrow{y=1-x} x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -2$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

- Αν $x = 2$ τότε λόγω της (2): $y = 1 - x \xrightarrow{x=2} y = -1$ άρα $(x, y) = (2, -1)$
- Αν $x = -1$ τότε λόγω της (2): $y = 1 - x \xrightarrow{x=-1} y = 2$ άρα $(x, y) = (-1, 2)$

2. (Άσκηση 2 σελ. 27 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα συστήματα :

i. $\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

Λύση :

i. $\begin{cases} y = 3x^2, (1) \\ 12x - 3y = 4, (2) \end{cases}$, Η (2) λόγω της (1) γίνεται : (2): $12x - 3y = 4 \xrightarrow{y=3x^2} 12x - 3 \cdot 3x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$12x - 9x^2 = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \Delta = 0 \quad x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

- Αν $x = \frac{2}{3}$ τότε λόγω της (1): $y = 3x^2 \xrightarrow{x=\frac{2}{3}} y = 3 \cdot \frac{4}{9} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$ άρα $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

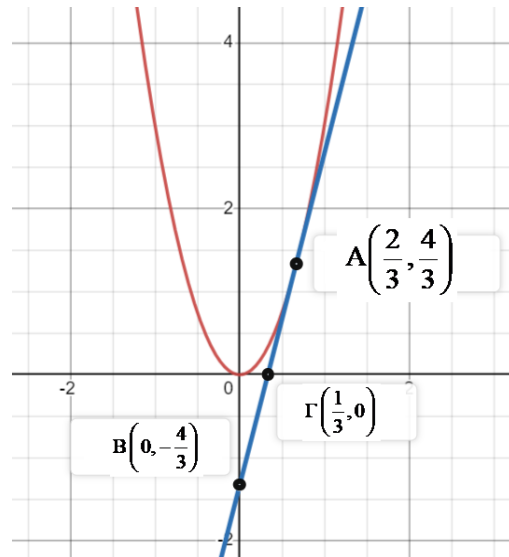
Γεωμετρικά η (1): $y = 3x^2$ παριστάνει παραβολή, ενώ η (2): $12x - 3y = 4$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει μόνο μια λύση, αυτό σημαίνει ότι η παραβολή και η ευθεία έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, δηλαδή η ευθεία εφάπτεται στην

παραβολή στο σημείο $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία (2): $12x - 3y = 4$, θα πρέπει να βρούμε δύο σημεία.

Για $x = 0$ η (2) δίνει $y = -\frac{4}{3}$, δηλαδή το σημείο $B\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

Για $y = 0$ η (2) δίνει $x = \frac{1}{3}$, δηλαδή το σημείο $\Gamma\left(\frac{1}{3}, 0\right)$



- ii. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, & (1) \\ x - y = 0, & (2) \end{cases}$, Έχω (2): $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :

$$(1): x^2 + y^2 = 9 \stackrel{y=x}{\Leftrightarrow} x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

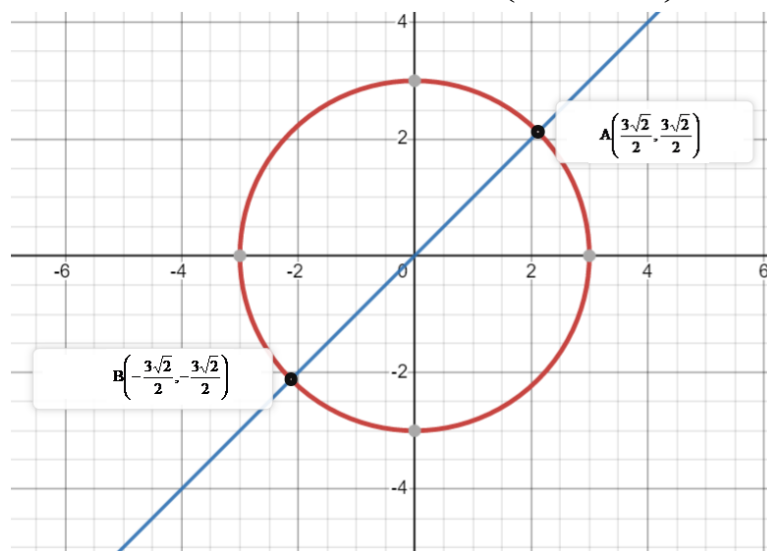
- Αν $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ τότε λόγω της (2): $y = x \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα $(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$

- Αν $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ τότε λόγω της (2): $y = x \Leftrightarrow y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα $(x, y) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$

Γεωμετρικά η (1): $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$, ενώ η (2): $x - y = 0$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει 2 λύσεις, αυτό σημαίνει ότι

ο κύκλος και η ευθεία έχουν δυο κοινά σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

δηλαδή η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.



iii. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, & (1) \\ xy = 2, & (2) \end{cases}$ Έχω (2): $xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$. Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :

$$(1): x^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι «διτετράγωνη» οπότε θέτω $x^2 = \omega \geq 0$ άρα γίνεται :
 $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = 4$ δεκτές.

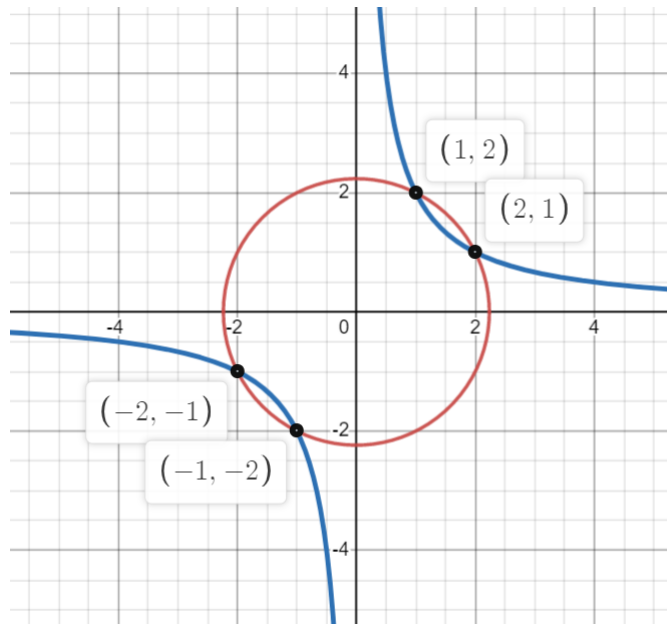
➤ Αν $\omega = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- Αν $x = 1$ τότε λόγω της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = 2$ άρα $(x, y) = (1, 2)$
- Αν $x = -1$ τότε λόγω της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = -2$ άρα $(x, y) = (-1, -2)$

➤ Αν $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

- Αν $x = 2$ τότε λόγω της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = 1$ άρα $(x, y) = (2, 1)$
- Αν $x = -2$ τότε λόγω της (2): $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = -1$ άρα $(x, y) = (-2, -1)$

Γεωμετρικά η (1): $x^2 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$, ενώ η (2): $y = \frac{2}{x}$ παριστάνει υπερβολή. Το σύστημα τους έχει 4 λύσεις, αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος και η υπερβολή έχουν 4 κοινά σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$ και $\Delta(-2,-1)$ δηλαδή ο κύκλος και η υπερβολή τέμνονται στα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$ και $\Delta(-2,-1)$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

i. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 - 2xy - y^2 = 7 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

4. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$

i. Αλγεβρικά ii. Γραφικά

5. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-y=-2 \\ 4x-y^2+5=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+xy=60 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x^2-xy=6 \end{cases}$

6. Να λύσετε αλγεβρικά και γραφικά τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ xy=-4 \end{cases}$

7. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=2x^2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

8. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=2x^2 \\ x+y=3 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα.

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής (C): $y=3x^2$ και της ευθείας (ε): $y=2x+1$.
Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραβολή και την ευθεία στο ίδιο σύστημα αξόνων.

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής (C₁): $y=2x^2$ και της υπερβολής (C₂): $y=\frac{27}{4x}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραβολή και την υπερβολή στο ίδιο σύστημα αξόνων.

11. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ xy-1=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 5x^2-y^2=19 \\ xy=2 \end{cases}$

12. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y=-1 \\ 2x^2+2y^2+3x-3y=1 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3 \\ 25x-9y=81 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6} \\ xy=5 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2-4xy+12y=8 \end{cases}$

14. Να λύσετε τα συστήματα : (Μετατροπή μη γραμμικού συστήματος σε γραμμικό με αντικατάσταση)

i. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 11 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{6}{2y-5} = 1 \\ \frac{8}{2-x} - \frac{3}{5-2y} = 3 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y+2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

15. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \text{i. } \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{ii. } \begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x - y = 1 \end{cases} & \text{iii. } \begin{cases} \sqrt{2x-y} - \sqrt{x+y} = 1 \\ x + y + \sqrt{2x-y} = 3 \end{cases} & \text{iv. } \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \\ 25x - 9y = 81 \end{cases} \\ \text{v. } \begin{cases} x^2 - 9x = y^2 - 9y \\ xy = 18 \end{cases} & \text{vi. } \begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-3} = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-12} = -1 \end{cases} & \text{vii. } \begin{cases} xy = -8 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}$$

16. Η παραβολή με εξίσωση : $y = x^2 + (\lambda - \mu)x - 3\mu - 5\lambda$ έχει κορυφή το σημείο $K(2,8)$.

- Να δείξετε ότι $\lambda = -3, \mu = 1$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραπάνω παραβολής και της ευθείας $(\varepsilon): -x + y = 8$.

17. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = \lambda x - 2$ και η παραβολή $(C): y = 2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή :

- Ένα κοινό σημείο,
- δύο κοινά σημεία,
- κανένα κοινό σημείο.

18. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση : $(C): x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + \lambda$.

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος και η ευθεία :
 - έχουν δύο κοινά σημεία,
 - έχουν ένα κοινό σημείο,
 - δεν έχουν κοινά σημεία.
- Για $\lambda = \sqrt{5}$ να βρείτε :
 - τις συντεταγμένες του κοινού σημείου ,
 - το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από την ευθεία (ε) , τον κύκλο (C) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

19. Δίνεται υπερβολή με εξίσωση : $(C): y = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$ η οποία διέρχεται από το σημείο :

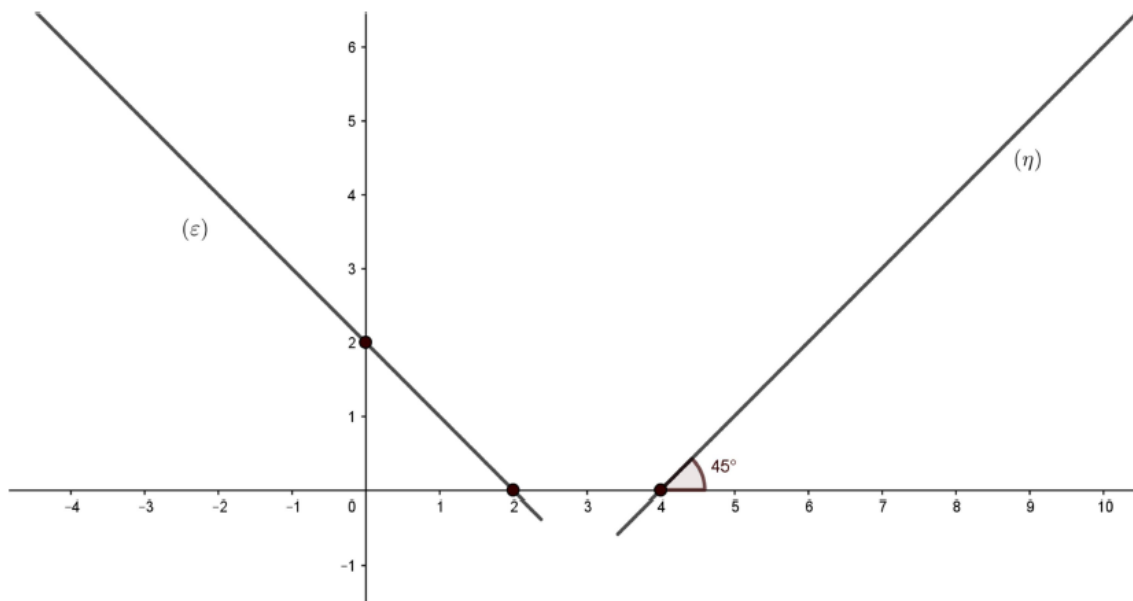
$$M\left(\alpha - 4, 2\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right). \text{ Θεωρούμε επίσης ευθεία } (\varepsilon), \text{ η οποία διέρχεται από το σημείο } N(1, -2)$$

και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω για την οποία ισχύει : $|\varepsilon\phi\omega - 3| = 3\varepsilon\phi\omega - 5$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $(\varepsilon): 2x - y = 4$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής C και της ευθείας ε .
- Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και την υπερβολή C στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 1^Ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ****ΘΕΜΑ 2ο****ΘΕΜΑ 1 14235**

α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η).

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14321

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$, $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 13)

β) Να δείχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 15006

α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$$

(Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$;

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 15011

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και 50€ αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$1. y = 15 - x \quad 2. y - x = 15.$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480€. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

$$3. 50y - 20x = 480 \quad 4. 20x + 50y = 480$$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αι) και αιι) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20€ και 50€ κατάθεσε ο Κώστας. (Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 5 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\epsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\epsilon_2): 2x - y = 3$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 6 15195

α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$
 (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\epsilon_1): 5x - y = -1$ και $(\epsilon_2): 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$\begin{array}{ll} \text{Α. } \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} & \text{Β. } \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases} \\ \text{Γ. } \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} & \text{Δ. } \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases} \end{array}$$

(Μονάδες 10)

- β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 8 15147

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3 €	3,8 €
2 ^ο	1	2	3	0,3 €	3,55 €
3 ^ο	3	0	3	0,3 €	4,05 €
4 ^ο	2	2	1	0,3 €	
				Σύνολο	

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μια φέτα τυρί, η μια φέτα γαλοπούλα και η μια φέτα ζαμπόν. (Μονάδες 10)
- γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους; (Μονάδες 6)

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 9 14979

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

- α) Να λύσετε το σύστημα (Σ). (Μονάδες 12)
- β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο**ΘΕΜΑ 10 14237**

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$ και επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 11 14289

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12 15118

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

(Μονάδες 8)

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) , λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$; Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) .

(Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του.

(Μονάδες 8)