

Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Γεωμετρία

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα
Θεμάτων
2022

με λύσεις

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

6. Στοιχεία και είδη τριγώνων – Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1 Θέμα 2 - 1627

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α. $MA = MB$

β. Η ημιευθεία $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$.

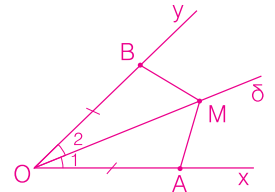
Λύση

α. Τα τρίγωνα OMA , OMB έχουν:

- $OA = OB$
- OM κοινή
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $MA = MB$.

β. Επειδή τα τρίγωνα OMA , OMB είναι ίσα, προκύπτει $\hat{OMA} = \hat{OMB}$. Οπότε η $O\delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{AMB}$.



2 Θέμα 2 - 1674 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

3 Θέμα 2 - 13518

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A} = \hat{A}'$

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουν:

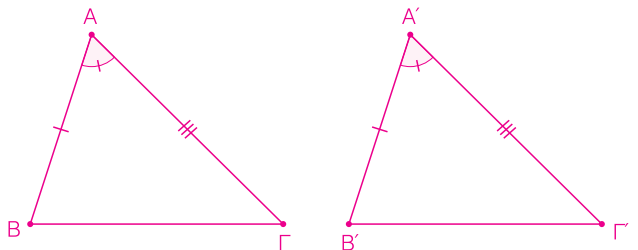
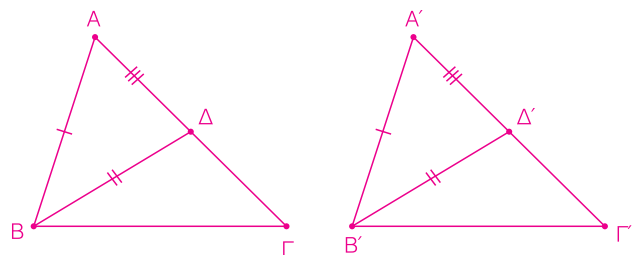
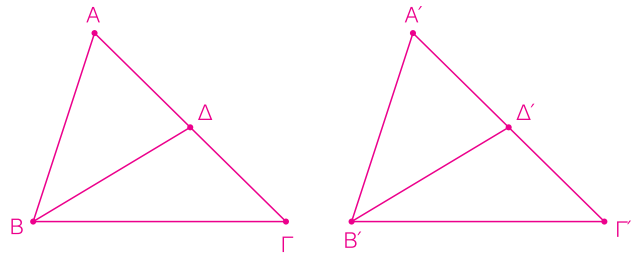
- $B\Delta = B'\Delta'$
- $AB = A'B'$
- $A\Delta = A'\Delta'$, ως μισά των ίσων πλευρών $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$ αντίστοιχα.

Επομένως, είναι ίσα, (ΠΠΠ), άρα $\hat{A} = \hat{A}'$.

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Επομένως, είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).



4 Θέμα 2 - 1598

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και GA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = AG$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $AG = AE$
- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$

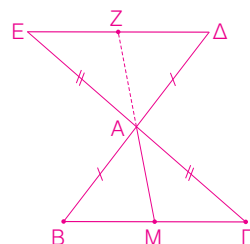
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$, ABM , έχουν:

- $A\Delta = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$
- $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{Z} = \hat{B}\hat{A}\hat{M}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα ABM και $A\Delta Z$ είναι ίσα έχουμε $Z\Delta = BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{E\Delta}{2}$.



5 Θέμα 2 - 1592

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ. Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

Λύση

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι ισοσκελές ($AB = AG$), προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε και $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$, ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

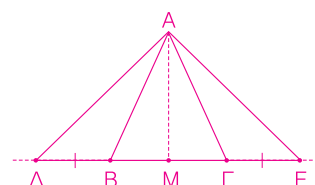
β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Gamma E$, έχουν:

- $AB = AG$
- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Είναι $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$ οπότε $BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Rightarrow M\Delta = ME$.

Άρα AM διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.



6 Θέμα 2 - 12635

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών $AB, A\Gamma$ προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

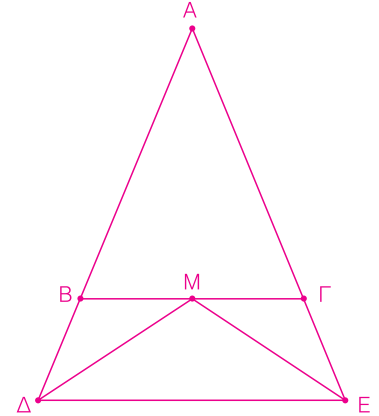
Λύση

α. Τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$, αφού το M είναι μέσο της $B\Gamma$
 - $B\Delta = \Gamma E$, από την υπόθεση
 - $\hat{MBA} = \hat{M\Gamma E}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$
- Άρα τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma E$ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε: $MA = ME$.

Επομένως το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{M\Delta E} = \hat{ME\Delta}$.



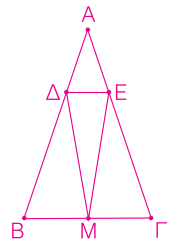
7 Θέμα 2 - 1621

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AB = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

Λύση

- Είναι $B\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}A\Gamma = \Gamma E$.
- Τα τρίγωνα $B\Delta M, \Gamma E M$ έχουν:
 - $MB = M\Gamma$
 - $B\Delta = \Gamma E$
 - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.



8 Θέμα 2 - 12705

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του Δ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. $\Delta B = \Delta E$.

γ. $AZ \perp BE$.

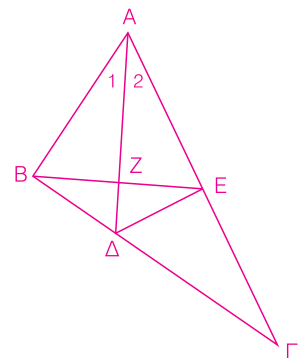
Λύση

α. Η BE είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, επομένως, $AE = \frac{A\Gamma}{2}$. Όμως $AB = \frac{A\Gamma}{2}$, οπότε $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ έχουν:

- $AB = AE$
- $A\Delta$ κοινή πλευρά
- $\hat{A_1} = \hat{A_2}$, αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Delta B = \Delta E$.



γ. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και η AZ είναι διχοτόμος του. Επομένως, η AZ είναι και ύψος, άρα, $AZ \perp BE$.

9 Θέμα 2 - 1632

Αν $\hat{AOB} = \hat{BOG} = \hat{GOD}$ και $OA = OB = OG = OD$, να αποδείξετε ότι:

α. $AG = BD$

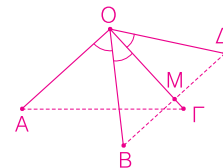
β. το M είναι μέσο της BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BA .

Λύση

- α. Τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν:
- $OA = OB$
 - $OG = OD$
 - $\hat{AOG} = \hat{BOD}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $AG = BD$.

β. Επειδή το τρίγωνο BOD είναι ισοσκελές και η OM είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος. Άρα το M είναι το μέσο της BD .



10 Θέμα 2 - 1601

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = MG$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα AMB και AMG είναι ίσα.
 β. Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\hat{BMG}$.

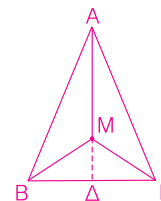
Λύση

- α. Τα τρίγωνα AMB , AMG έχουν:
- $AB = AG$
 - $MB = MG$
 - AM κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Έστω ότι η AM τέμνει την BG στο Δ . Επειδή τα τρίγωνα AMB , AMG είναι ίσα, προκύπτει ότι $\hat{BMA} = \hat{GMA}$.

Οπότε και $\hat{BMD} = \hat{GMD}$, άρα η ευθεία AM διχοτομεί τη $\hat{BMG}$.



11 Θέμα 2 - 12636

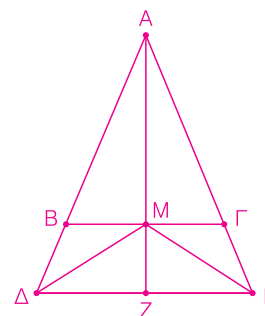
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και M είναι το μέσο της βάσης BG . Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AG παίρνουμε τα τμήματα BA , GE αντίστοιχα ώστε $BA = GE$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MBA και MGE είναι ίσα.
 β. Να αποδείξετε ότι η γωνία MDE είναι ίση με τη γωνία MEA .

γ. Αν η AM τέμνει την DE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην DE .

Λύση

- α. Τα τρίγωνα MBA και MGE έχουν:
- $MB = MG$, αφού το M είναι μέσο της BG
 - $BA = GE$, από υπόθεση
 - $\hat{MBA} = \hat{MGE}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{G}$
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



β. Επειδή τα τρίγωνα $ΜΒΔ$ και $ΜΓΕ$ είναι ίσα, έχουμε $ΜΔ = ΜΕ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΜΔΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{ΜΔΕ} = \widehat{ΜΕΔ}$.

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Είναι $ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ$ και $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ$, οπότε $ΑΔ = ΑΕ$ ως άθροισμα ίσων τμημάτων.

Επομένως, στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΕ$, η $ΑΖ$ ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

Άρα η $ΑΖ$ είναι κάθετη στην $ΔΕ$.

12 Θέμα 2 - 1660

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Ε$ το μέσο της διαμέσου του $ΑΜ$.

Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$ να αποδείξετε ότι:

α. $\widehat{ΑΕΒ} = \widehat{ΕΜΓ}$

β. $ΑΒ = ΕΓ$

Λύση

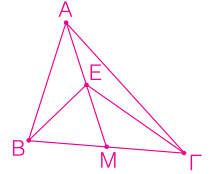
α. Επειδή το $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ και $ΒΓ = 2ΒΕ \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΕ = ΒΜ$, έχουμε $\widehat{ΒΕΜ} = \widehat{ΒΜΕ}$.

Επομένως $\widehat{ΑΕΒ} = \widehat{ΕΜΓ}$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

β. Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$, $ΕΓΜ$ έχουν:

- $ΜΕ = ΑΕ$
- $ΕΒ = ΜΓ$
- $\widehat{ΑΕΒ} = \widehat{ΕΜΓ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΑΒ = ΕΓ$.



13 Θέμα 2 - 1648

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών $ΒΑ$ και $ΓΑ$ (προς το $Α$) θεωρούμε τα σημεία $Ε$ και $Δ$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $ΑΔ = ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α. $ΒΕ = ΓΔ$

β. $ΒΔ = ΓΕ$

γ. $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΕΓΒ}$

Λύση

α. Είναι $ΒΕ = ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ = ΓΔ$.

β. Τα τρίγωνα $ΒΑΔ$ και $ΓΑΕ$ έχουν:

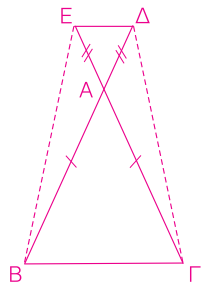
- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$
- $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΕΑΓ}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $ΒΔ = ΓΕ$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$.

Επειδή τα τρίγωνα $ΒΑΔ$, $ΓΑΕ$ είναι ίσα, έχουμε $\widehat{ΔΒΑ} = \widehat{ΕΓΑ}$.

Επομένως $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΕΓΒ}$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.



14 Θέμα 2 - 1622

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΚΑΒ$ ($ΚΑ = ΚΒ$) και $ΚΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Κ}$. Στην προέκταση της $ΒΑ$ (προς το $Α$) παίρνουμε σημείο $Λ$ και στην προέκταση της $ΑΒ$ (προς το $Β$) παίρνουμε σημείο $Μ$, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $ΚΛΜ$ είναι ισοσκελές

β. η $ΚΓ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΚΛΜ$.

Λύση

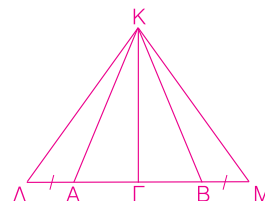
α. Τα τρίγωνα KAL , KBM έχουν:

- $KA = KB$
- $AL = BM$
- $\widehat{KAL} = \widehat{KBM}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ του ισοσκελούς τριγώνου KAB . Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $KL = KM$.

Επομένως το τρίγωνο KLM είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές η διχοτόμος του $K\Gamma$ είναι και διάμεσος, οπότε $\Gamma A = \Gamma B$.

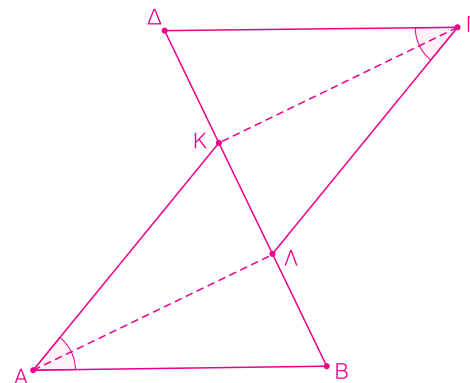
Οπότε $\Lambda\Gamma = \Lambda A + \Lambda\Gamma = BM + \Gamma B = M\Gamma$. Άρα η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου KLM .



15 Θέμα 2 - 13826

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.
- β. Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:
- Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.



Λύση

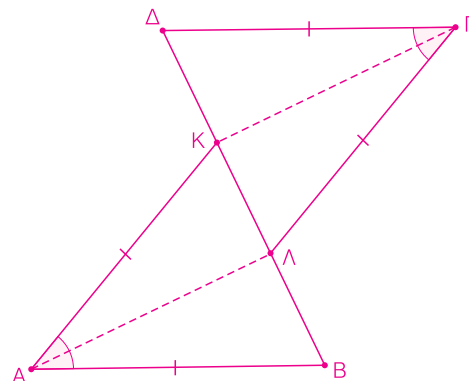
- α. Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ έχουν:
- $AB = \Gamma\Delta$
 - $AK = \Gamma\Lambda$
 - $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $BK = \Delta\Lambda$.

β. i. Αφού Λ και K είναι μέσα των BK και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $B\Lambda = \Lambda K$ και $\Lambda K = K\Delta$, οπότε θα είναι $B\Lambda = \Lambda K = K\Delta$.

ii. Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ισοσκελή και τα $A\Lambda$ και ΓK είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, άρα θα είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή $A\Lambda \perp BK$ και $\Gamma K \perp \Delta\Lambda$.

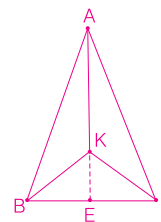
Οπότε οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.



16 Θέμα 2 - 1591

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$.
- γ. Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.



Λύση

- α. Τα τρίγωνα BAK , $KA\Gamma$, έχουν:
- $AB = A\Gamma$
 - $KB = K\Gamma$
 - AK κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα BAK , $KA\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $\widehat{BAK} = \widehat{KA\Gamma}$.

Οπότε η AK είναι διχοτόμος της $\widehat{BA\Gamma}$.

γ. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, η διχοτόμος του $\widehat{A}$ θα είναι και διάμεσος. Άρα το E είναι το μέσο του $B\Gamma$, οπότε η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.

17 Θέμα 2 - 1624

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $ΑΓ, ΒΔ$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α. Η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β. Η $ΒΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΓ$.

Λύση

α. Είναι $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελή.

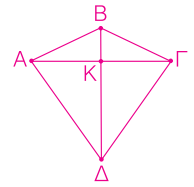
Τα BK , ΔK είναι ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα, οπότε θα είναι και διχοτόμοι.

Επομένως η $ΒΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

β. Είναι $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, οπότε τα σημεία B και Δ ισαπέχουν από τα A και Γ .

Άρα τα B και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$.

Οπότε η ευθεία $ΒΔ$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

**18 Θέμα 2 - 1587**

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{a} = \hat{\beta}$

και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α. Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα.

β. Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές.

γ. Η ευθεία $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΒΓ$.

Λύση

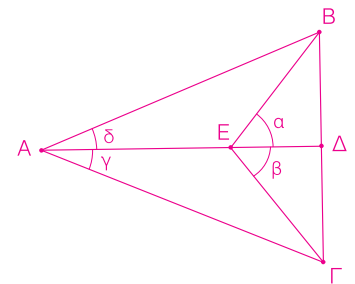
α. Τα τρίγωνα AEB , AEG έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- AE κοινή
- $\hat{\delta} = \hat{\gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα AEB , AEG είναι ίσα, έχουμε $EB = EG$. Άρα το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $EB = EG$, η ευθεία $ΑΔ$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $ΒΓ$.

**19 Θέμα 2 - 1588 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ****20 Θέμα 4 - 1846**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$.

Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$.

Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

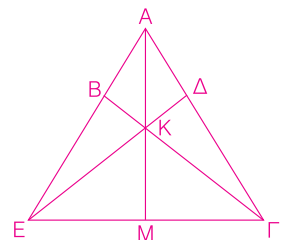
α. $B\Gamma = \Delta E$

β. $BK = K\Delta$

γ. Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .

δ. Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

Λύση



α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ έχουν:

- $AG = AE$
- $AB = A\Delta$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα $B\Gamma = \Delta E$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε:

- $\hat{B}\hat{E}K = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}K$
- $\hat{A}\hat{B}K = \hat{A}\hat{\Delta}K$

Οπότε $\hat{E}\hat{B}K = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}K$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα BEK και $\Delta\Gamma K$ έχουν:

- $BE = \Delta\Gamma$ ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $\hat{B}\hat{E}K = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}K$
- $\hat{E}\hat{B}K = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}K$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ). Άρα $BK = K\Delta$.

γ. Τα τρίγωνα ABK , $A\Delta K$ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $BK = K\Delta$
- AK κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ). Άρα $\hat{B}\hat{A}K = \hat{\Delta}\hat{A}K$.

Επομένως η AK είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma E$ η AM είναι διχοτόμος, οπότε είναι διάμεσος και ύψος.

Άρα η AM είναι μεσοκάθετος της EG .

21 Θέμα 4 - 13499

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = BA$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{H}$ και $\hat{E}\hat{A}\hat{B} = \hat{H}\hat{A}\hat{E}$

β. $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

Λύση

α. • Είναι: $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B}$, (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$ είναι

$$\hat{\Delta}\hat{A}\hat{H} = 90^\circ - \hat{A}\hat{\Delta}\hat{H}, \quad (2).$$

Αφού $B\Delta = BA$, το τρίγωνο $B\Delta A$ θα είναι

ισοσκελές οπότε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{H}$, (3).

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε

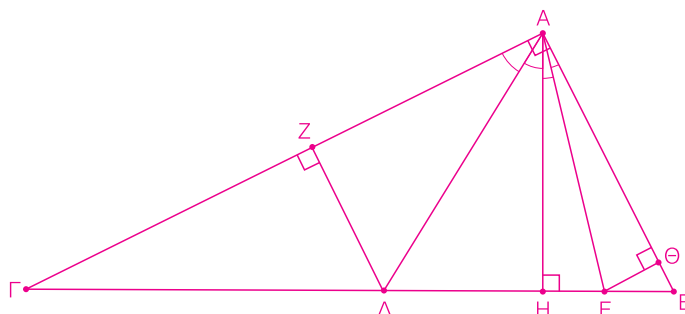
$$\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{H}, \quad (4).$$

• Είναι: $\hat{E}\hat{A}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} - \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ - \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E}$, (5).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι $\hat{H}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ - \hat{A}\hat{E}\hat{H}$, (6).

Αφού $\Gamma E = \Gamma A$, το τρίγωνο $\Gamma E A$ θα είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{E}\hat{H}$, (7).

Από τις σχέσεις (5), (6) και (7) έχουμε $\hat{E}\hat{A}\hat{B} = \hat{H}\hat{A}\hat{E}$, (8).



β. • Από **α.** ερώτημα έχουμε $\hat{EAB} = \hat{HAE}$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{HAB}$ του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ, επομένως $EH = EO$.

• Από **α.** ερώτημα έχουμε $\hat{GAD} = \hat{DAH}$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{HAG}$ του τριγώνου ΑΗΓ.

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι $\Delta H = \Delta Z$.

Επομένως, $\Delta E = \Delta H + EH = \Delta Z + EO$.

22 Θέμα 4 - 13839

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε $AE = GE$ και $BE = ED$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

- $AE = GE$

- $BE = DE$

- $\hat{AEB} = \hat{GED}$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β. Τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ έχουν:

- $AE = GE$

- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$

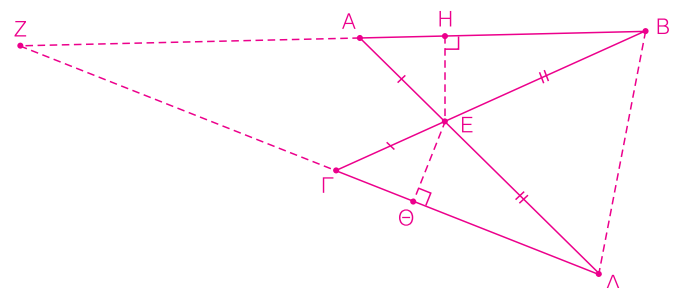
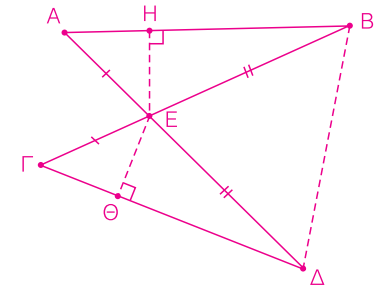
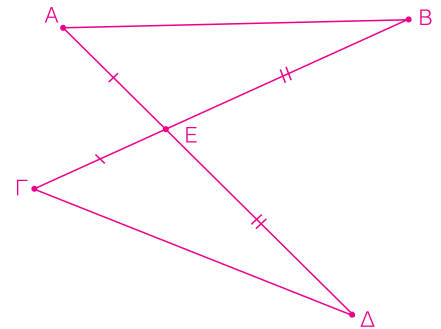
- $\hat{EAH} = \hat{EG\Theta}$ (από σύγκριση) του ερωτήματος **α.**

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και $EH = EO$.

γ. Από την ισότητα των τριγώνων του **α.** ερωτήματος έχουμε ότι $\hat{ABE} = \hat{GDE}$.

Είναι $EB = ED$ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ, άρα $\hat{EBD} = \hat{EDB}$.

Οπότε $\hat{ABE} + \hat{EBD} = \hat{GDE} + \hat{EDB} \Leftrightarrow \hat{ZBD} = \hat{ZDB}$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.



23 Θέμα 4 - 1725

Δίνεται οξεία γωνία $\chi\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$,

που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και την Ογ στα Λ, Β αντίστοιχα.

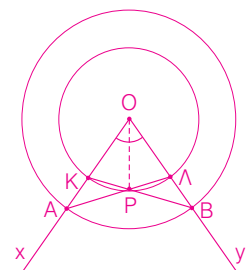
Να αποδείξετε ότι:

α. $AL = BK$

β. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.

γ. Η ΟΡ διχοτομεί την $\chi\hat{O}y$.

Λύση



α. Τα τρίγωνα OAL , OBK , έχουν:

- $OL = OK$ ($= \rho_1$)
- $OA = OB$ ($= \rho_2$)
- $\hat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $AL = BK$.

β. Τα τρίγωνα OAL και OBK είναι ίσα, οπότε $\hat{OAL} = \hat{OBK}$ και $\hat{OKB} = \hat{OLA}$.

Τα τρίγωνα PKA , PLB έχουν:

- $KA = LB$, ως διαφορές ίσων τμημάτων
- $\hat{KAP} = \hat{PBL}$
- $\hat{AKP} = \hat{BLP}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{OKP}$ και $\hat{OLP}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $PA = PB$.

Επομένως το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές.

γ. Τα τρίγωνα OPK , OPL έχουν:

- $OK = OL$
- OP κοινή
- $KP = PL$ (αφού τα τρίγωνα PKA , PLB είναι ίσα).

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα $\hat{KOP} = \hat{POL}$.

Επομένως η OP είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle XOY$.

24 Θέμα 4 - 1582

Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ABD και AGD είναι ίσα.

β. Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ABD , AGD έχουν:

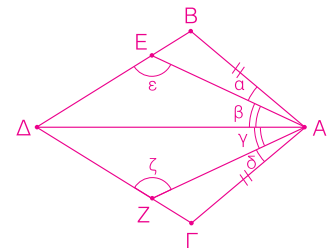
- $AB = AG$
- AD κοινή
- $\hat{BAD} = \hat{GAD}$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα τρίγωνα DEA , DZA έχουν:

- AD κοινή
- $\hat{EAD} = \hat{ZAD}$
- $\hat{EDA} = \hat{ZDA}$, αφού τα τρίγωνα ABD και AGD είναι ίσα.

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.



7. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

25 Θέμα 2 - 12149

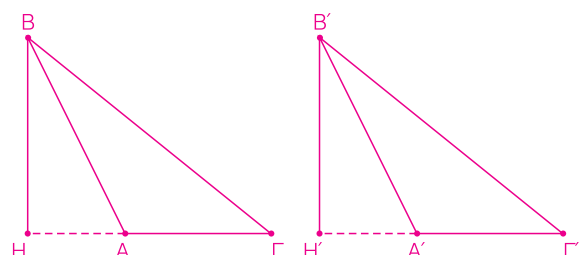
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ABG ($\hat{A} > 90^\circ$) και

$A'B'G'$ ($\hat{A'} > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων ABG και $A'B'G'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α. $BAH = B'A'H'$.

β. Τα τρίγωνα ABG και $A'B'G'$ είναι ίσα.

Λύση



α. Τα τρίγωνα BHA και $B'H'A'$ έχουν:

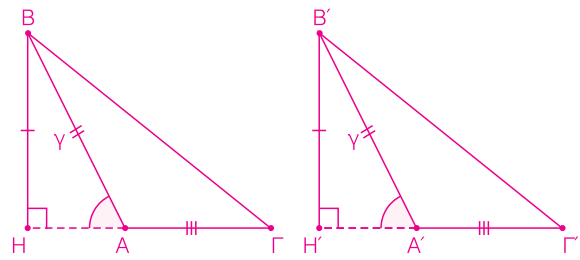
- $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$, αφού τα BH και $B'H'$ είναι ύψη
- $BH = B'H'$, από υπόθεση
- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, άρα $\hat{BAH} = \hat{B'A'H'}$ (1).

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση
- $\beta = \beta'$, από υπόθεση
- $\hat{BA\Gamma} = \hat{B'A'\Gamma'}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{BAH} = \hat{B'A'H'}$.

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ).



26 Θέμα 2 - 13517

Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta EZ}$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α. $AB = \Delta E$.

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ έχουν:

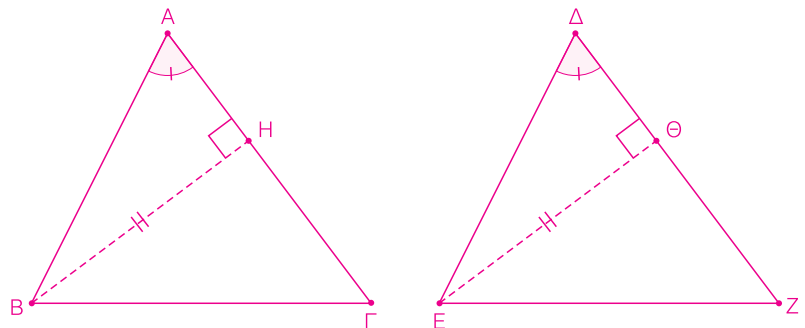
- $BH = E\Theta$, από (1)
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$

Επομένως, είναι ίσα, οπότε $AB = \Delta E$.

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $AB = \Delta E$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$
- $\hat{AB\Gamma} = \hat{\Delta EZ}$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΠΓΠ).



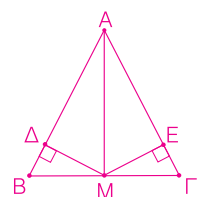
27 Θέμα 2 - 1657

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MA και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $MA = ME$, τότε τα τρίγωνα AMA και AME είναι ίσα.

β. Αν $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $MA = ME$.

Λύση



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AM\Delta$ και $\triangle AME$ έχουν:

- $M\Delta = ME$
- AM κοινή

Οπότε είναι ίσα.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle MB\Delta$ και $\triangle M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = ME$.

28 Θέμα 2 - 1568

Θεωρούμε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

β. Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = AB$.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ έχουν:

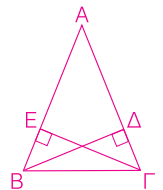
- $AB = A\Gamma$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ έχουν:

- $B\Delta = \Gamma E$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Gamma = AB$.



29 Θέμα 2 - 1659

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

α. $A\Delta = AE$

β. $EZ = \Delta H$

Λύση

α. Τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle A\Gamma\Delta$ έχουν:

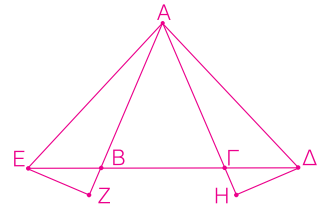
- $AB = A\Gamma$
- $BE = \Gamma\Delta$
- $\hat{ABE} = \hat{A\Gamma\Delta}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $A\Delta = AE$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ZBE$ και $\triangle H\Gamma\Delta$ έχουν:

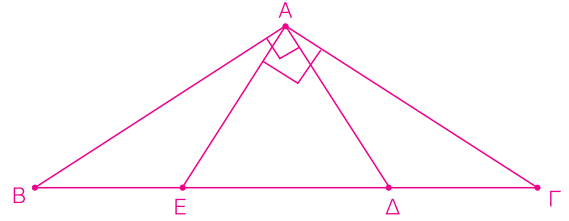
- $BE = \Gamma\Delta$
- $\hat{EBZ} = \hat{\Delta\Gamma H}$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$.

Οπότε είναι ίσα, άρα $EZ = \Delta H$.



30 Θέμα 2 - 13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.
 Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:



- τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- $BE = \Gamma\Delta$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ$
- $AB = A\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ προκύπτει ότι $A\Delta = AE$.

Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

Άρα $BE = B\Delta - \Delta E = \Gamma E - \Delta E = \Gamma\Delta$.

31 Θέμα 2 - 1574

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
- Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

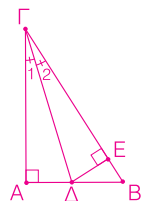
- $\Gamma\Delta$ κοινή
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, προκύπτει $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$.

Τα σημεία Γ , Δ ισαπέχουν από τα σημεία A και E , άρα τα Γ , Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE .

Επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .

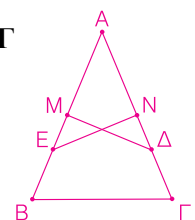


32 Θέμα 2 - 1656

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- αν $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
- αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

Λύση



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΑΔ$ και $ΝΑΕ$ έχουν:

- $ΜΔ = ΝΕ$

- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα: $ΑΜ = ΑΝ \Rightarrow 2ΑΜ = 2ΑΝ \Rightarrow ΑΒ = ΑΓ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΑΔ$ και $ΝΑΕ$ έχουν:

- $ΑΜ = ΑΝ$, ως μισά των ίσων τμημάτων $ΑΒ$ και $ΑΓ$

- $\hat{A}$ κοινή.

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΜΔ = ΝΕ$.

33 Θέμα 2 - 1705 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ που τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ (προς το $Α$) στο $Ζ$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $ΒΕ = ΑΒ$

β. το τρίγωνο $ΒΓΖ$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$ έχουν:

- $ΒΔ$ κοινή

- $\hat{A}ΒΔ = \hat{Δ}ΒΕ$, αφού $ΒΔ$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΒΕ = ΑΒ$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΖΕΒ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΒΕ$ (από το **α.** ερώτημα)

- $\hat{B}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα. Άρα $ΒΓ = ΒΖ$.

Οπότε το τρίγωνο $ΒΓΖ$ είναι ισοσκελές.

34 Θέμα 2 - 1532

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και οι διχοτόμοι του $ΒΔ$ και $ΓΕ$. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $ΒΓΔ$ και $ΓΒΕ$ είναι ίσα

β. $ΕΗ = ΔΖ$

Λύση

α. Τα τρίγωνα $ΒΓΔ$ και $ΓΒΕ$ έχουν:

- $ΒΓ$ κοινή

- $\hat{Γ}ΒΕ = \hat{Β}ΓΔ$

- $\hat{Δ}ΒΓ = \hat{Ε}ΓΒ$ ως μισά ίσων γωνιών.

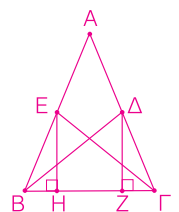
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΗΕΒ$ και $ΖΔΓ$ έχουν:

- $ΕΒ = ΓΔ$, αφού τα τρίγωνα $ΓΒΕ$, $ΒΓΔ$ είναι ίσα

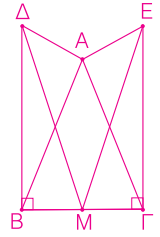
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $ΕΗ = ΔΖ$.



35 Θέμα 2 - 1698

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $BA \perp B\Gamma$ και $GE \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $BA = GE$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:



α. τα τρίγωνα BAM και GEM είναι ίσα.

β. $AA = AE$

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα BAM και GEM έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BA = GE$

Οπότε είναι ίσα.

β. Τα τρίγωνα ABA και AGE έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $BA = GE$
- $\hat{A}BA = \hat{A}GE$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{AB}\Gamma$ και $\hat{A}\Gamma B$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AA = AE$.

36 Θέμα 2 - 1545

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του BA και GE . Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα BAG και GBE είναι ίσα.

β. $AA = AE$

Λύση

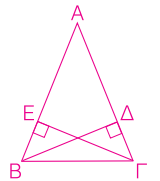
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα BAG και GBE έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή
- $\hat{G} = \hat{B}$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές)

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα BAG , GBE είναι ίσα, έχουμε $AG = EB$.

Είναι $AA = A\Gamma - AG = AB - BE = AE$.



37 Θέμα 2 - 1547

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MA και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $MA = ME$

β. το τρίγωνο AAE είναι ισοσκελές

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔBM$ και $EΓM$ έχουν:

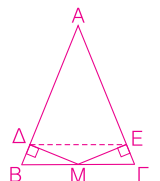
- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $MA = ME$.

β. Είναι:

- $AB = A\Gamma$
- $ΔB = E\Gamma$, αφού τα τρίγωνα $ΔBM$, $EΓM$ είναι ίσα.

Οπότε $AA = AB - ΔB = A\Gamma - E\Gamma = AE$, άρα το τρίγωνο AAE είναι ισοσκελές.



38 Θέμα 2 - 1569

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
- β. Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ABM , $M\Gamma\Delta$ έχουν:

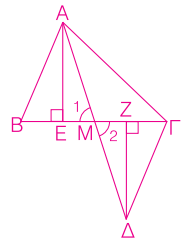
- $MB = M\Gamma$
- $AM = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAM και $Z\Delta M$ έχουν:

- $MA = M\Delta$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = \Delta Z$.



39 Θέμα 2 - 1670

Δίνεται γωνία $\hat{x}\hat{A}\hat{y}$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα.
- β. Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .

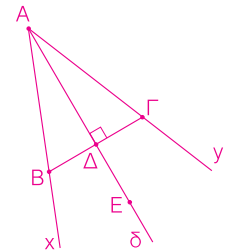
Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.

Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $A\Delta$ είναι και διάμεσος.

Οπότε η ευθεία $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, άρα $EB = E\Gamma$.



40 Θέμα 2 - 1571

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

- α. $AB = BE$
- β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $EB\Delta$ ($\hat{E} = 90^\circ$) έχουν:

- $B\Delta$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AB = BE$.

- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν:
- $AB = BE$
 - $\hat{B}$ κοινή

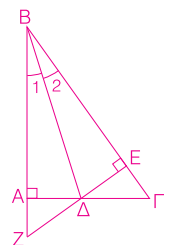
Οπότε είναι ίσα.

41 Θέμα 2 - 1546

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και MA του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $MK = MA$
- β. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KMA .

Λύση



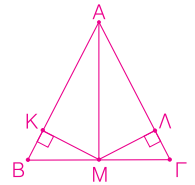
α. Επειδή η AM είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$, θα είναι και διχοτόμος, οπότε $MK = ML$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα KAM και LAM έχουν:

- AM κοινή
- $MK = ML$

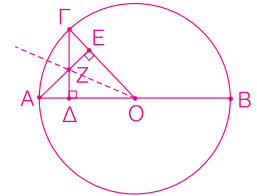
Οπότε είναι ίσα, άρα $\hat{KMA} = \hat{LMA}$.

Άρα η AM είναι διχοτόμος της KML .



42 Θέμα 2 - 1677

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

β. Η OZ διχοτομεί τη γωνία ΔOG και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου $\Delta\Gamma$.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAO , ΔGO έχουν:

- $OA = OG$, ως ακτίνες του κύκλου
- $\hat{O}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $OD = OE$.

Επομένως το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα EZO , ΔZO έχουν:

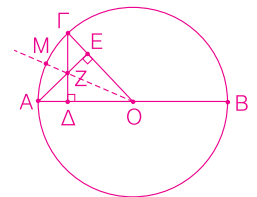
- OZ κοινή
- $OD = OE$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\hat{DOZ} = \hat{EOZ}$.

Επομένως η OZ είναι η διχοτόμος της ΔOG .

• Έστω ότι η OZ τέμνει το κύκλο στο M .

Έχουμε $\hat{AOM} = \hat{MOG}$, άρα $\widehat{MA} = \widehat{MG}$, επομένως το M είναι το μέσο του τόξου $\Delta\Gamma$.



43 Θέμα 4 - 1724

Έστω $ABΓ$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ. Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα EAB και ΔAG έχουν:

- $AB = AG$
- $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = \Gamma\Delta$.

Επομένως η πρόταση Π ισχύει.

β. Η αντίστροφη πρόταση της Π είναι:

Π': Αν σε ένα τρίγωνο $ABΓ$ τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

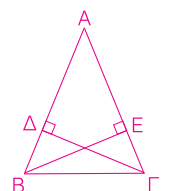
Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα EAB και ΔAG έχουν:

- $BE = \Gamma\Delta$
- $\hat{A}$ κοινή

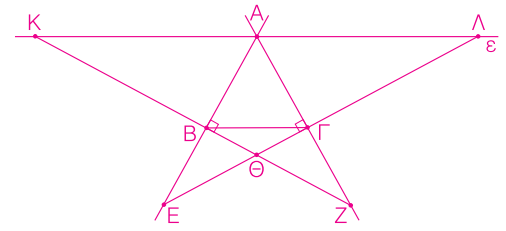
Οπότε είναι ίσα, άρα $AB = AG$. Επομένως η πρόταση Π' ισχύει.

γ. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές τους είναι ίσα.



44 Θέμα 4 - 1875

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ = AE$

ii. $AK = A\Lambda$

β. Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα AZB και $AE\Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$

- $\hat{A}$ κοινή

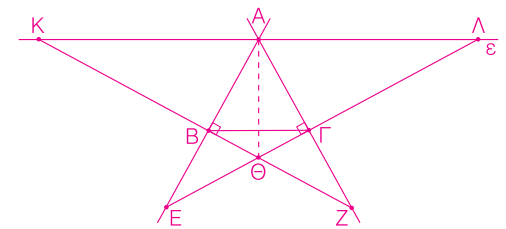
Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABK και $A\Gamma\Lambda$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$

- $\hat{BAK} = \hat{\Gamma A\Lambda} \left(= \frac{\hat{A_{εξ}}}{2} \right)$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AK = A\Lambda$.



β. Συμφωνούμε διότι: Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Theta B$ και $A\Theta \Gamma$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$

- $A\Theta$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $\hat{BA\Theta} = \hat{\Gamma A\Theta}$.

Επομένως η $A\Theta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$.

45 Θέμα 4 - 13854

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι BA και ΓE των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο O .

α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β. Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες $E\Lambda$ και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = E\Lambda$.

γ. Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

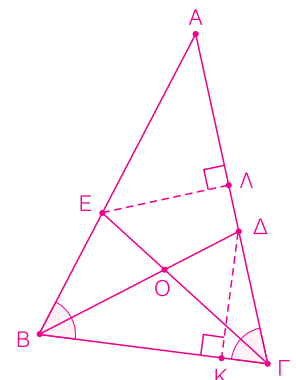
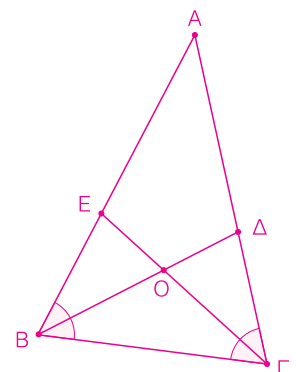
α. Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή

- $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{\Gamma B E}$ (μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$)

- $\hat{\Delta \Gamma B} = \hat{E B \Gamma}$ (ως προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε $B\Delta = \Gamma E$.



β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$
- $BD = GE$
- $\hat{KBD} = \hat{LGE}$

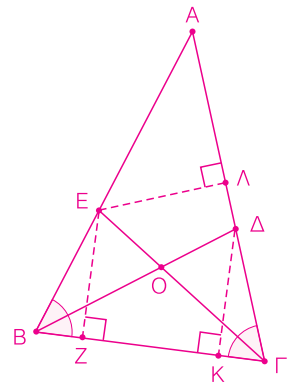
Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, οπότε

$$DK = EL.$$

γ. Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ για το οποίο να ισχύει $ZE = DK$.

Έχουμε ότι $DK = EL$, οπότε $ZE = EL$. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας

$\hat{G}$ οπότε $EL = EZ$. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.



8. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

46 Θέμα 2 - 1688

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- ισαπέχει από τα δύο πλατάνια
- ισαπέχει από τα δύο ποτάμια
- ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

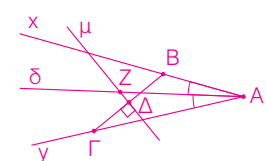
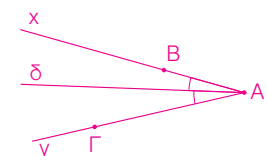
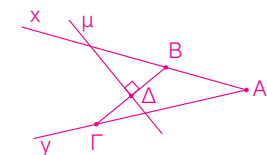
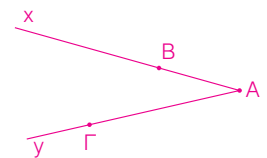
Λύση

Γεωμετρικά οι δυνατές θέσεις του θησαυρού είναι:

α. Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ, αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος.

β. Πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

γ. Πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, άρα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΒΓ και της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$.



10. Ανισοτικές σχέσεις

47 Θέμα 2 - 1540

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{G}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- $AD = DE$
- $AD < DB$

Λύση

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Οπότε και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως μισά ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

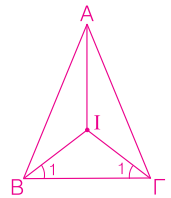
β. Τα τρίγωνα ABI , AGI έχουν:

- $AB = AG$
- AI κοινή
- $IB = IG$, αφού το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

Άρα $\hat{AIB} = \hat{AIG}$.

γ. Επειδή $AB = AG$ και $IB = IG$, τα A, I ισαπέχουν από τα B, Γ , οπότε τα A, I ανήκουν στη μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Άρα η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του $B\Gamma$.



51 Θέμα 2 - 1553

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και AG .

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

β. Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$.

Λύση

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B}_{εξ} = \hat{\Gamma}_{εξ} \Rightarrow \frac{\hat{B}_{εξ}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{2} \Rightarrow \hat{MB\Gamma} = \hat{M\Gamma B}$$

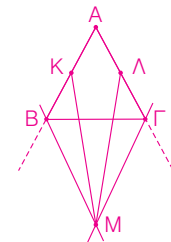
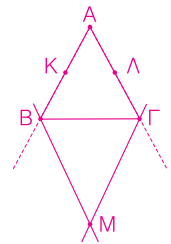
Άρα το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

β. Τα τρίγωνα MKB και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BK = \Gamma\Lambda$
- $\hat{MBK} = \hat{M\Gamma\Lambda}$, ως άθροισμα ίσων γωνιών

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

Άρα $MK = M\Lambda$.



52 Θέμα 2 - 1578

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

Λύση

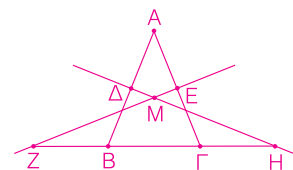
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$ έχουν:

- $\Delta B = \Gamma E$, ως μισά ίσων πλευρών
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΔBH , $E\Gamma Z$ είναι ίσα, προκύπτει $\hat{H} = \hat{Z}$.

Άρα το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.



53 Θέμα 2 - 1646

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A . Η BA είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B . Να αποδείξετε ότι:

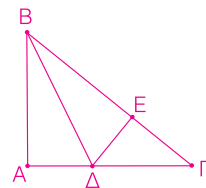
- α. $AA = \Delta E$ β. $AA < \Delta \Gamma$ γ. $A\Gamma > AB$

Λύση

- α. Επειδή το σημείο Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$, ισαπέχει από τις πλευρές της.
Άρα $AA = \Delta E$, (1).
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta \Gamma$ είναι υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά, οπότε

$$\Delta E < \Delta \Gamma \stackrel{(1)}{\Rightarrow} AA < \Delta \Gamma$$

- γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, οπότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες, άρα $A\Gamma > AB$.



54 Θέμα 2 - 1658

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MA και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. Αν $MA = ME$ τότε:

- i. τα τρίγωνα BAM και $ΓEM$ είναι ίσα
- ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- β. Αν $AB = A\Gamma$ τότε $MA = ME$.

Λύση

- α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα BAM και $ΓEM$ έχουν:

- $MA = ME$
- $MB = M\Gamma$, αφού M μέσο της $B\Gamma$

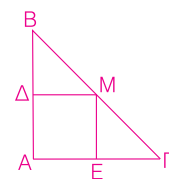
Άρα είναι ίσα.

- ii. Επειδή τα τρίγωνα BAM και $ΓEM$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- β. Αν $AB = A\Gamma$, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAM και $ΓEM$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $MA = ME$.



55 Θέμα 2 - 1664 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

56 Θέμα 2 - 1749

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ε . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ε .

- α. Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $\hat{AOA'}$.
- ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε .

- β. Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε , να αποδείξετε ότι:

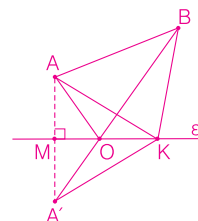
- i. $KA = KA'$ ii. $KA + KB > AO + OB$

Λύση

- α. i. Στο τρίγωνο OAA' η OM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος.

- ii. Η OM είναι διχοτόμος στο τρίγωνο OAA' , οπότε $\hat{AOM} = \hat{MOA'}$.

Είναι $\hat{MOA'} = \hat{KOB}$, ως κατακορυφήν, οπότε $\hat{AOM} = \hat{KOB}$.



β. i. Επειδή η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AA' , έχουμε $KA = KA'$.

ii. Από την τριγωνική ανισότητα $\widehat{KA'B}$ έχουμε

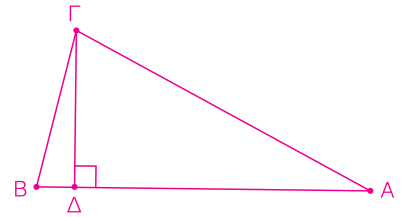
$$KA' + KB > A'B \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB.$$

57 Θέμα 2 - 13844

Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $BL < AL$, και $\widehat{AL\Gamma} = 90^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $AL > BL$.

β. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α. Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας AB έχουμε το κάθετο τμήμα $\Gamma\Delta$ και τα πλάγια τμήματα ΓB και ΓA . Είναι $AL > BL$, οπότε $AL > BL$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AL > BL$, οπότε ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $\widehat{B} > \widehat{A}$.

Επιπλέον, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AL$, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, άρα $\widehat{\Gamma} > \widehat{A}$.

Επομένως η μικρότερη γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η $\widehat{A}$.

11. Ευθεία και κύκλος

58 Θέμα 2 - 13759

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α. $d = 3$.

β. $d = 6$.

γ. $d = 9$.

Λύση

α. Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.

β. Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

γ. Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.

59 Θέμα 2 - 1676

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

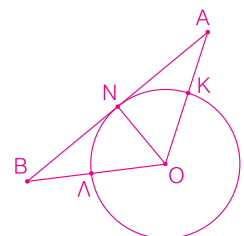
β. Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

Λύση

Στο τρίγωνο OAB το ON είναι το ύψος και διάμεσος, οπότε:

α. το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές

β. η ON είναι διχοτόμος της $\widehat{K\Lambda}$, άρα $\widehat{N\Lambda} = \widehat{N\Lambda}$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{N\Lambda} = \widehat{N\Lambda}$.



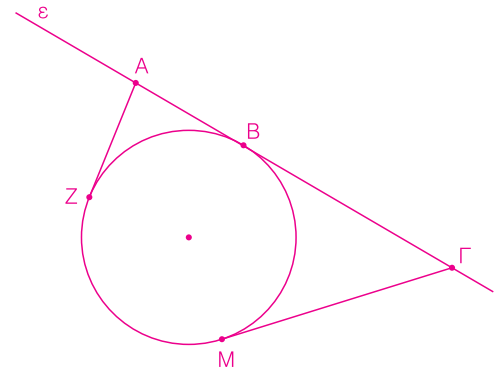
60 Θέμα 2 - 13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

- α.** Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.

Λύση

- α.** Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AZ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα $AB = AZ$.
 Όμοια τα ευθύγραμμα τμήματα GB , GM είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα $GB = GM$.
β. Από το ερώτημα **α.** έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = AZ + M\Gamma$.



61 Θέμα 2 - 1617

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

- α.** τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα
β. οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.

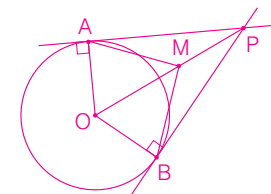
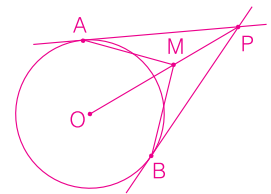
Λύση

- α.** Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:
- $PA = PB$, αφού τα PA , PB είναι εφαπτόμενα τμήματα
 - PM κοινή
 - $\hat{OPA} = \hat{OPB}$, αφού η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί τη γωνία $\hat{APB}$.
- Οπότε είναι ίσα.

- β.** Από το **α.** ερώτημα προκύπτει $\hat{MAP} = \hat{MBP}$.

Είναι $\hat{OAP} = \hat{OBP} = 90^\circ$, αφού οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες.

Οπότε $\hat{MAO} = \hat{MBO}$, ως διαφορές ίσων γωνιών.



62 Θέμα 2 - 1684

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

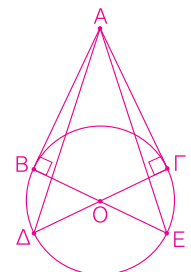
- α.** Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

Λύση

- α.** Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$) και έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $BE = \Gamma\Delta = 2\rho$

Άρα είναι ίσα.



β. Είναι $\hat{BOD} = \hat{GOE}$, άρα $BD = GE$.

Τα τρίγωνα $BA\Delta$ και AGE έχουν:

- $AB = AG$
- $A\Delta = AE$, αφού τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα
- $BD = EG$

Οπότε είναι ίσα.

63 Θέμα 2 - 1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A , Δ και B .

α. Να αποδείξετε ότι:

- $PG = \Gamma\Delta + AP$
- $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

β. Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.
- Τα σημεία P , O και Δ είναι συνευθειακά.

Λύση

α. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα, έχουμε:

$PA = PB$, $AG = \Gamma\Delta$ και $EB = E\Delta$. Οπότε:

- $PG = \Gamma A + AP = \Gamma\Delta + AP$
- $PG - \Gamma\Delta = \overset{a}{\Gamma\Delta + AP} - \Gamma\Delta = AP = BP = PE - BE = PE - \Delta E$

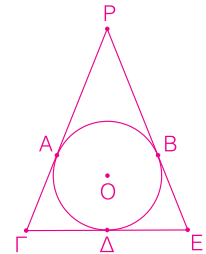
β. Είναι:

i. $PG = PA + AG = PB + BE = PE$. Οπότε το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.

ii. • $OD \perp GE$, αφού GE εφαπτομένη και OD ακτίνα

• $PD \perp GE$, αφού το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές και PD διάμεσος γιατί $AG = BE \Rightarrow \Gamma\Delta = \Delta E$, οπότε το PD είναι και ύψος.

Άρα οι ευθείες OD και PD ταυτίζονται, οπότε τα P , O και Δ είναι συνευθειακά.



64 Θέμα 2 - 1667

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$).

Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

β. Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

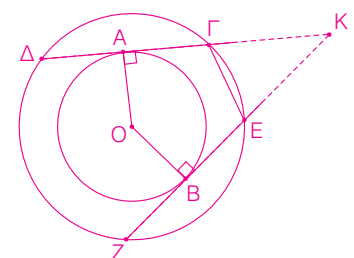
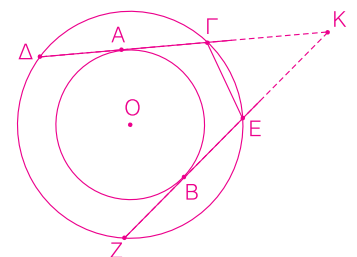
Λύση

α. Οι ακτίνες OA , OB είναι κάθετες στις εφαπτόμενες $\Gamma\Delta$ και EZ του κύκλου (O, ρ) , οπότε $OA \perp \Gamma\Delta$ και $OB \perp EZ$. Επομένως τα OA , OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$, ZE του κύκλου (O, R) και είναι ίσα, αφού $OA = OB = \rho$. Άρα οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, οπότε $\Delta\Gamma = ZE$.

β. Είναι:

- $KA = KB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
- $AG = BE$, ως μισά των ίσων τμημάτων $\Delta\Gamma$, ZE

Οπότε $K\Gamma = KE$, ως διαφορά ίσων τμημάτων.



65 Θέμα 2 - 13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

- α. $KL = 13$.
- β. $KL = 2$.
- γ. $KL = 5$.
- δ. $KL = 11$.
- ε. $KL = 9$.

Λύση

Έστω $R = 8$ και $\rho = 3$, οπότε $R - \rho = 8 - 3 = 5$ και $R + \rho = 8 + 3 = 11$.

- α. Είναι $KL = 13$, οπότε $KL > R + \rho$, άρα ο κύκλος $(\Lambda, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K, 3)$.
- β. Είναι $KL = 2$, οπότε $KL < R - \rho$, άρα ο κύκλος $(K, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 8)$.
- γ. Είναι $KL = 5$, οπότε $KL = R - \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- δ. Είναι $KL = 11$, οπότε $KL = R + \rho$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- ε. Είναι $KL = 9$, οπότε $R - \rho < KL < R + \rho$, άρα οι κύκλοι τέμνονται.

66 Θέμα 2 - 13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

- α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- γ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου KL , αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου KL , αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Έστω $R = 5$ και $\rho = 2$.

- α. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο KL έχουμε :
 $KL = R + \rho = 5 + 2 = 7$
- β. Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε:
 $KL = R - \rho = 5 - 2 = 3$
- γ. Για να είναι ο κύκλος $(K, 2)$ στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$ θα πρέπει
 $KL < R - \rho \Leftrightarrow KL < 5 - 2 \Leftrightarrow KL < 3$
- δ. Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - \rho < KL < R + \rho \Leftrightarrow 5 - 2 < KL < 5 + 2 \Leftrightarrow 3 < KL < 7$.

67 Θέμα 2 - 12417

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $KL = 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .
- β. $\hat{KAA} > \hat{AAK}$.

Λύση

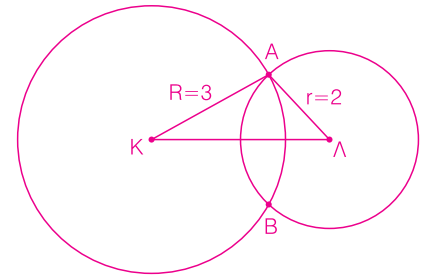
α. Για τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) , έχουμε $KL = 4$, $R + r = 5$ και $R - r = 1$.

Άρα $R - r < KL < R + r$, οπότε οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

β. Στο τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι $KL > AK$, αφού $KL = 4$ και $AK = R = 3$.

Οπότε, οι απέναντι γωνίες $\hat{K\Lambda\Lambda}$ και $\hat{A\Lambda K}$ των άνισων πλευρών KL και AK αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες.

Δηλαδή, $\hat{K\Lambda\Lambda} > \hat{A\Lambda K}$.



68 Θέμα 2 - 13836

α. Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $BA - AG < AB < AG + BA$.

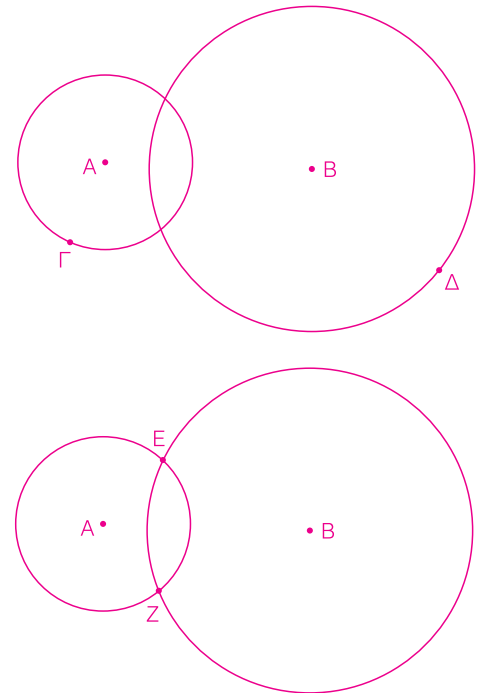
β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

Λύση

α. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα $R - \rho < AB < R + \rho \Leftrightarrow BA - AG < AB < BA + AG$.

β. Ο θησαυρός είναι σημείο του κύκλου (A, ρ) και του κύκλου (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Είναι $AB = 6$, $R - \rho = 2$ και $R + \rho = 8$, οπότε $R - \rho < AB < R + \rho$.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



69 Θέμα 2 - 13835

Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α. Να αποδείξετε ότι $1 < KL < 9$.

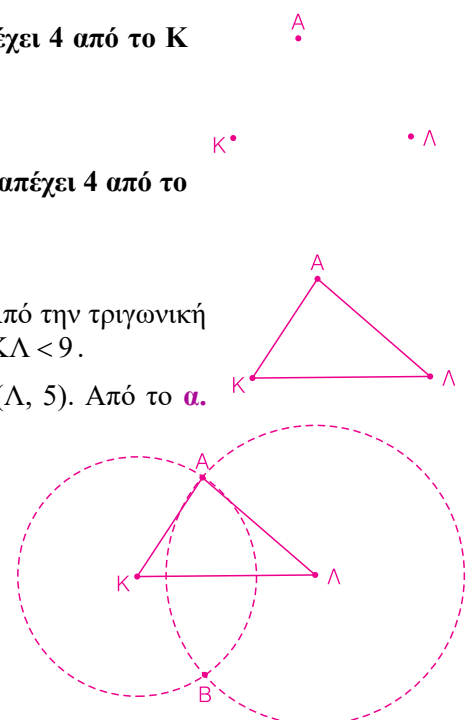
β. Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

Λύση

α. Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο $AK\Lambda$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $AL - AK < KL < AL + AK \Leftrightarrow 5 - 4 < KL < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < KL < 9$.

β. Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου $(K, 4)$ και του κύκλου $(\Lambda, 5)$. Από το α. ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

$AL - AK < KL < AL + AK$ ή $R - \rho < KL < R + \rho$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



70 Θέμα 4 - 1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- $\Gamma A = \Delta B$
- η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

Λύση

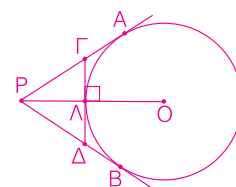
α. Η PO είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι διχοτόμος της $\widehat{APB}$.
Η ακτίνα OL είναι κάθετη στην εφαπτόμενη $\Gamma\Delta$, άρα $OL \perp \Gamma\Delta$, οπότε $OP \perp \Gamma\Delta$.
Στο τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ το PL είναι ύψος και διχοτόμος του, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

- β.** Είναι:
- $PA = PB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
 - $P\Gamma = P\Delta$, αφού το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

Οπότε και $\Gamma A = \Delta B$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

γ. Είναι $\Gamma A = \Gamma\Lambda$ και $\Delta B = \Delta\Lambda$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

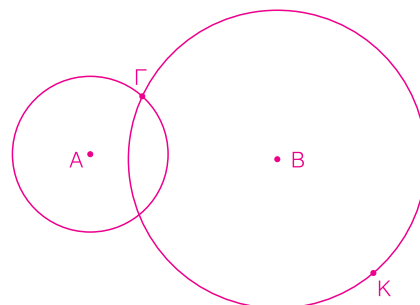
Η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι $\Pi = P\Gamma + P\Delta + \Gamma\Delta = P\Gamma + P\Delta + \Gamma\Lambda + \Lambda\Delta = P\Gamma + P\Delta + \Gamma A + \Delta B = PA + PB$.



71 Θέμα 4 - 13823

- α.** Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.

- Να αποδείξετε ότι $BK - \Lambda\Gamma < AB < BK + \Lambda\Gamma$.
- Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;



Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- β.** Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

Λύση

- α. i.** Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα $R - \rho < \delta < R + \rho \Leftrightarrow BK - \Lambda\Gamma < AB < BK + \Lambda\Gamma$.

- ii.** Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ) .

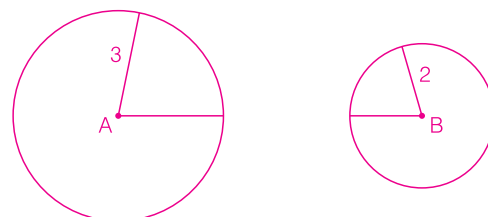
Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B .

- β.** Έστω A και B τα δύο σημεία του χάρτη.

Το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου A και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου B και ακτίνας 2, οπότε θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρξει.

Είναι $AB = 6$, $R + \rho = 5$, οπότε $AB > R + \rho$. Άρα οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Επομένως η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.



72 Θέμα 4 - 13846

Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α. Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

β. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο $K\Lambda M$ με $K\Lambda$ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛM να είναι ίση με R . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

γ. Έστω το τρίγωνο $K\Lambda M$ που σχεδιάσατε στο β. ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I_1 και I_2 που περιγράφονται παρακάτω;

I_1 : «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ ».

I_2 : «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R ».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου άρα $R + \rho < AB \Leftrightarrow R + \rho < 9$.

β. Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα R , όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα $A\Gamma = \rho$ και $B\Delta = R$ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda$ και ΛM . Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την KM .

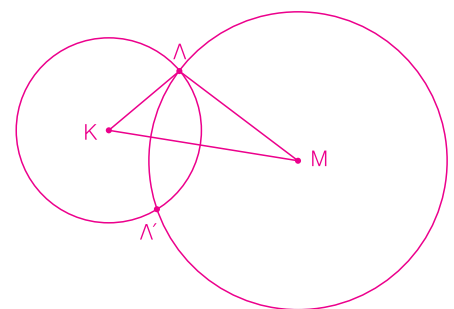
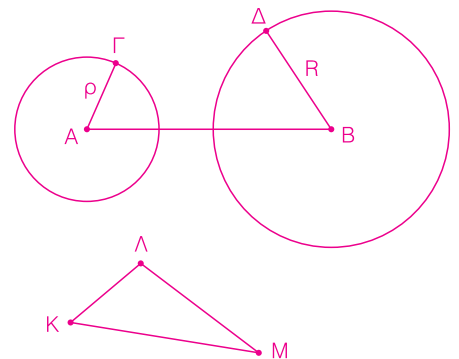
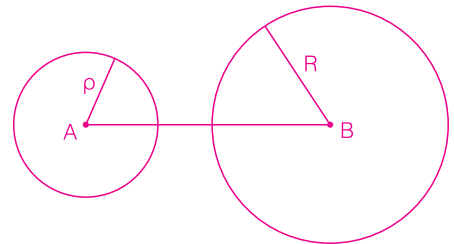
Από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο $K\Lambda M$ έχουμε ότι

$$\Lambda M - K\Lambda < KM < \Lambda M + K\Lambda \Rightarrow R - \rho < KM < R + \rho \Rightarrow KM < 9.$$

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ. Έστω το τρίγωνο $K\Lambda M$ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I_1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο K και ακτίνα ρ , ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I_2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο M και ακτίνα R . Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες I_1 και I_2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Είναι $R - \rho < KM < R + \rho$, επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (K, ρ) και (M, R) , δηλαδή τα Λ και Λ' .



14. Παράλληλες ευθείες

73 Θέμα 2 - 1544

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο AD και μια ευθεία ε παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

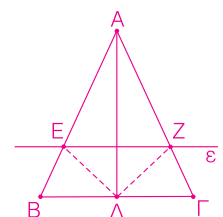
α. Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

Λύση

α. Επειδή $EZ \parallel B\Gamma$, έχουμε $\hat{B} = \hat{ZEA}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{EZA}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{ZEA} = \hat{EZA}$. Άρα το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.



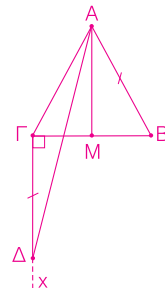
β. Τα τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle AZD$ έχουν:

- $AE = AZ$, αφού το τρίγωνο $\triangle AEZ$ είναι ισοσκελές
- AD κοινή
- $\hat{EAD} = \hat{AZD}$, αφού AD διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

74 Θέμα 2 - 1595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι:



α. Η γωνία $\hat{\Delta A\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\Gamma\Delta A}$.

β. Η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M A\Gamma}$.

Λύση

α. Είναι $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$, οπότε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

Άρα $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Gamma\Delta A}$.

β. • Επειδή το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος.

Είναι $\Gamma x \perp B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$, οπότε $\Gamma x \parallel AM$.

Επομένως $\hat{\Gamma\Delta A} = \hat{\Delta A M}$, ως εντός εναλλάξ.

• Από το **α.** ερώτημα έχουμε $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Gamma\Delta A}$.

Άρα $\hat{\Delta A M} = \hat{\Delta A\Gamma}$, οπότε η AD είναι η διχοτόμος της $\hat{M A\Gamma}$.

75 Θέμα 2 - 1597

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A E = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A\Delta E$ είναι ίσα.

β. $E\Delta \parallel B\Gamma$

Λύση

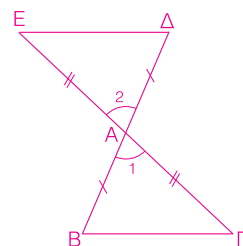
α. Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ έχουν:

- $AB = A\Delta$
- $A\Gamma = AE$
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

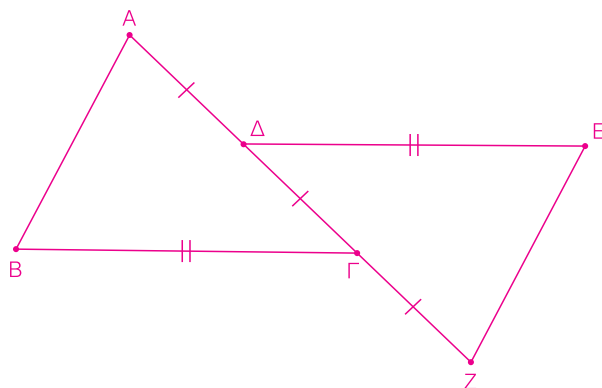
β. Επειδή τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta}$.

Αφού οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, προκύπτει $E\Delta \parallel B\Gamma$.



76 Θέμα 2 - 13748

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle ZE\Delta$ είναι ίσα.

β. $AB \parallel EZ$.

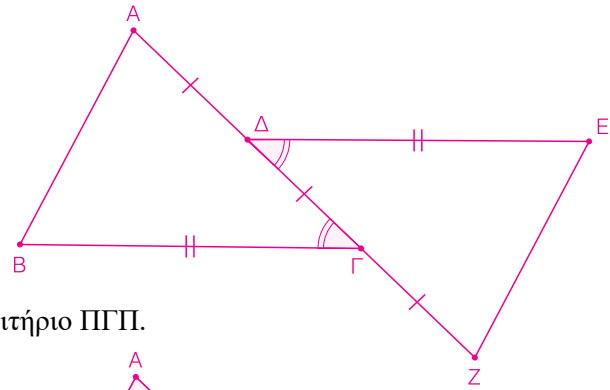
Λύση

α. Είναι $\Delta Z = \Delta \Gamma + \Gamma Z = 2\Delta \Gamma = \Delta \Gamma$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ έχουν:

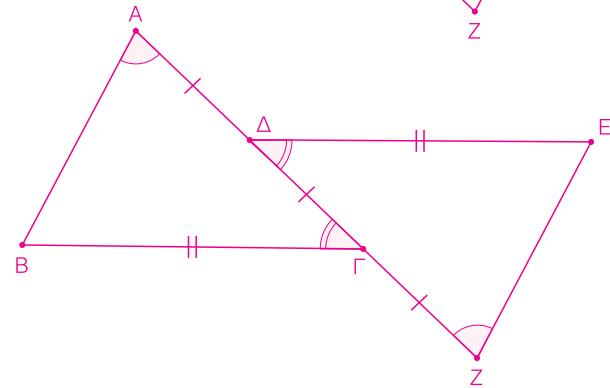
- $B\Gamma = \Delta E$,
- $A\Gamma = \Delta Z$,
- $\hat{A}\Gamma B = \hat{Z}\Delta E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.



β. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$, προκύπτει ότι $\hat{B}A\Gamma = \hat{E}Z\Delta$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των AB και EZ που τέμνονται από την AZ , άρα $AB \parallel EZ$.



77 Θέμα 2 - 12710

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- $BE \parallel A\Delta$.
- οι γωνίες EBA και $A\Delta B$ είναι ίσες.
- το τρίγωνο BAA είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος BE είναι και ύψος, οπότε $BE \perp A\Gamma$.

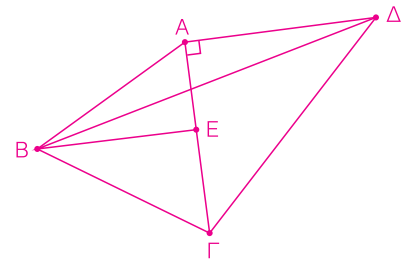
Το τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A , οπότε $A\Delta \perp A\Gamma$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $A\Delta$ είναι κάθετα στην $A\Gamma$, οπότε $BE \parallel A\Delta$.

β. Είναι $\hat{E}B\Delta = \hat{A}\Delta B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και $A\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

γ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma A\Delta$ έχουμε $A\Gamma = A\Delta$.

Οπότε $AB = A\Delta$, επομένως το τρίγωνο BAA είναι ισοσκελές.



78 Θέμα 2 - 13534

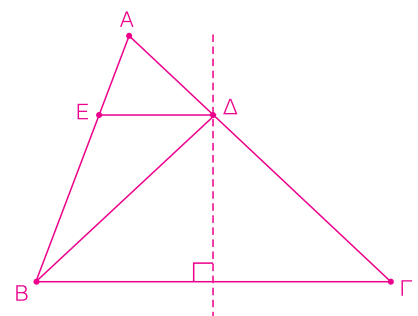
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
- η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta B$.

Λύση

α. Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $\Delta B = \Delta \Gamma$.

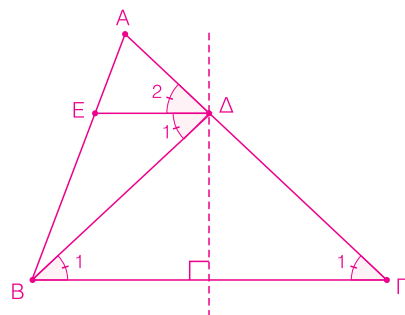
Επομένως το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



β. Είναι:

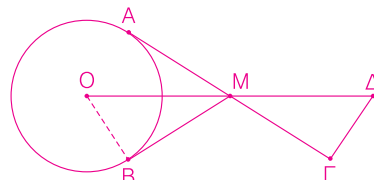
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1), ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.
- $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2), ως εντός εναλλάξ γωνίες
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$ (3), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Delta B$.



79 Θέμα 2 - 1620

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα ΜΓ = MA και την OM κατά τμήμα ΜΔ = OM.



α. Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και MΓΔ είναι ίσα.

Λύση

- α. Είναι:
- $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
 - $MA = M\Gamma$, από υπόθεση

Οπότε $MB = M\Gamma$.

β. • Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία $\hat{AMB}$, οπότε $\hat{AMO} = \hat{BMO}$.
Είναι $\hat{ΓM}\Delta = \hat{AMO}$, ως κατακορυφήν.

Άρα $\hat{ΓM}\Delta = \hat{BMO}$.

- Τα τρίγωνα OMB και MΓΔ έχουν:
 - $OM = M\Delta$
 - $MB = M\Gamma$
 - $\hat{BMO} = \hat{ΓM}\Delta$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

80 Θέμα 4 - 1793 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ

81 Θέμα 4 - 1744

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $BZ = GH$

β. τα τρίγωνα ZBΘ και HKΓ είναι ίσα.

γ. $ZK = H\Theta$

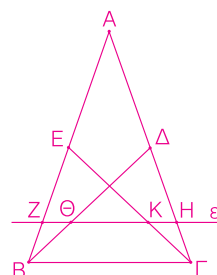
Λύση

- α. Είναι:
- $\hat{AZH} = \hat{B}$ και $\hat{AHZ} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ
 - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού $AB = AG$

Οπότε $\hat{AZH} = \hat{AHZ}$.

Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με $AZ = AH$.

Επομένως $BZ = GH$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.



β. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$
- $ΑΔ = ΑΕ$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{A}$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{ZB\Theta} = \hat{H\Gamma K}$.

Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ έχουν:

- $ZB = H\Gamma$
- $\hat{ZB\Theta} = \hat{H\Gamma K}$
- $\hat{BZ\Theta} = \hat{KH\Gamma}$, ως παραπληρωματική ίσων γωνιών

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα $ZB\Theta$, $HK\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $Z\Theta = KH$.

Οπότε $ZK = Z\Theta + \Theta K = KH + \Theta K = H\Theta$.

82 Θέμα 4 - 1818

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του $ΑΔ$ και η ευθεία ε παράλληλη από το $Β$ προς την $ΑΓ$. Από το μέσο $Μ$ της $ΒΓ$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $ΑΔ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ζ$, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της $ΒΑ$ στο σημείο $Ε$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $ΑΕΖ$ και $ΒΛΕ$ είναι ισοσκελή.

β. $ΒΛ = ΓΖ$

γ. $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$

Λύση

α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού $ΑΔ$ διχοτόμος.

Έχουμε:

- $\hat{A}_1 = \hat{E}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- $\hat{A}_2 = \hat{Z}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{E} = \hat{Z}_1$, άρα το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές.

Είναι:

- $\hat{E} = \hat{Z}_1$ και $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ άρα $\hat{E} = \hat{Z}_2$
- $\hat{Z}_2 = \hat{\Lambda}$, ως εντός εναλλάξ

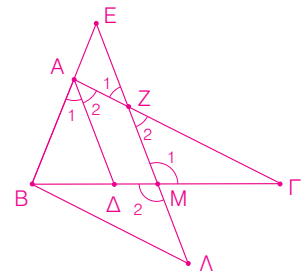
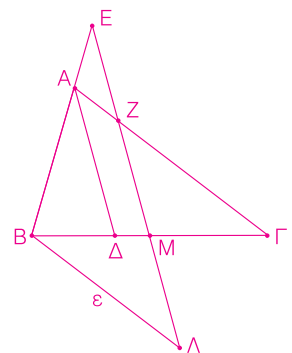
Οπότε $\hat{E} = \hat{\Lambda}$, άρα το τρίγωνο $ΒΛΕ$ είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $ΒΜΛ$, $ΜΓΖ$ έχουν:

- $ΜΒ = ΜΓ$
- $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
- $\hat{\Gamma} = \hat{M\hat{B}\Lambda}$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $ΒΛ = ΓΖ$.

γ. Είναι $ΑΕ \stackrel{\alpha}{=} ΑΖ = ΑΓ - ΓΖ \stackrel{\beta}{=} ΑΓ - ΒΛ$.



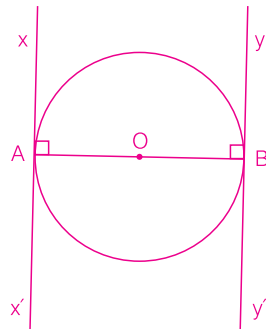
83 Θέμα 4 - 13843

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

- οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.
- οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}x$ και $A\hat{B}y$ τέμνονται σε σημείο M .
- το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .
- αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}x$ τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}y$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

Λύση

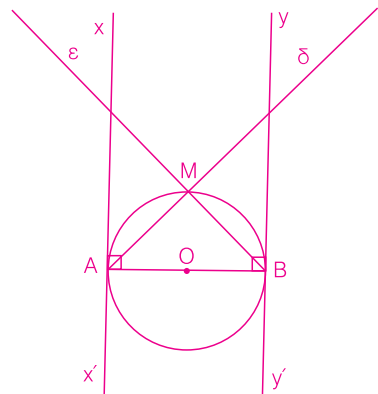
α. Οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O, R) στα άκρα της διαμέτρου του AB , επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



β. Έστω $A\delta$ και $B\epsilon$ οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}x$ και $A\hat{B}y$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο AB . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° .

$$\text{Είναι } B\hat{A}\delta + A\hat{B}\epsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ < 180^\circ.$$

Άρα, οι $A\delta$ και $B\epsilon$ τέμνονται σε σημείο M του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

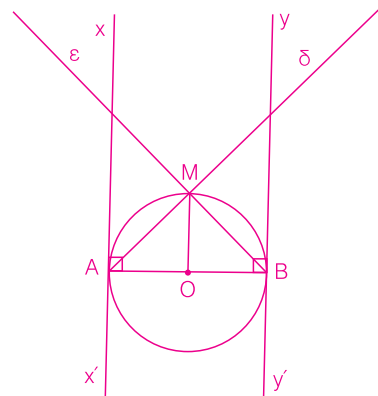


γ. Είναι $B\hat{A}M = 45^\circ$ και $A\hat{B}M = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$.

Άρα, το M ανήκει στη μεσοκάθετο της AB , οπότε $A\hat{O}M = 90^\circ$. Στο τρίγωνο AOM έχουμε $O\hat{A}M = 45^\circ$ επομένως, $O\hat{M}A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Άρα το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με $OM = OA = R$.

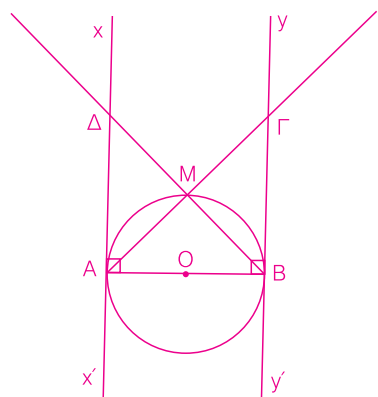
Επομένως, το M είναι σημείο του κύκλου (O, R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της AB έχουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .



δ. Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ έχουν:

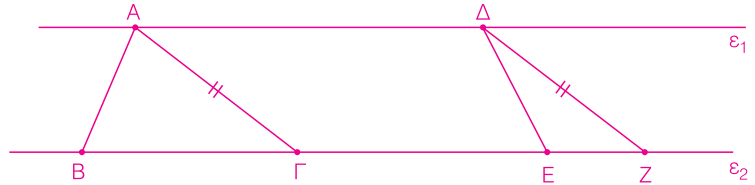
- $AM = BM$
- $A\hat{M}\Delta = B\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\hat{A}\Delta = M\hat{B}\Gamma = 45^\circ$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = M\Gamma$.



84 Θέμα 4 - 13751

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $AG = AZ$.



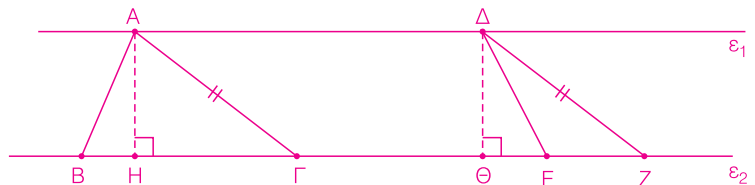
- α. i.** Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντάς τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα.
- ii.** Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.
- β.** Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

Λύση

α. i. Έστω AH το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $\Delta\Theta$ το ύψος του τριγώνου ΔEZ .

ii. Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$, έχουν:

- $AH = \Delta\Theta$, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- $AG = \Delta Z$,
- $\hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$.



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Οπότε $H\Gamma = \Theta Z$.

β. Το σημείο H είναι εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $H\Gamma < B\Gamma$.

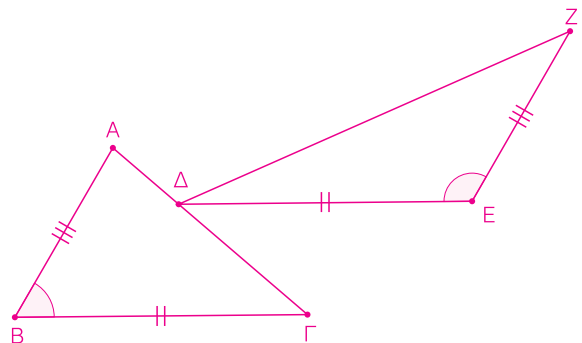
Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος EZ γιατί η γωνία $\hat{E}$ είναι αμβλεία, οπότε $EZ < \Theta Z$.

Από το **α. ii.** ερώτημα έχουμε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

Άρα $EZ < \Theta Z$, $\Theta Z = H\Gamma$ και $H\Gamma < B\Gamma$, επομένως $EZ < B\Gamma$.

85 Θέμα 4 - 13752

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
 2. Οπότε $\Delta EZ = AB\Gamma$.
 3. Τα τρίγωνα ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι ίσα.
 4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα AG .
- β.** Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.
- γ.** Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα AG και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\hat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

α. 1.Σ

2.Λ

3.Λ

4.Λ

β. Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την ZE και τη BG και έστω H το σημείο τομής τους. Τότε:

- $\hat{Z}\hat{E}\Delta = \hat{E}\hat{H}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.
- $\hat{E}\hat{H}\Gamma + \hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ$, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά.

Άρα $\hat{Z}\hat{E}\Delta + \hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ$ και αφού $\hat{B} < 90^\circ$, τότε $\hat{Z}\hat{E}\Delta > 90^\circ$. Άρα οι γωνίες δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, BG και τις ZE, AB, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές.

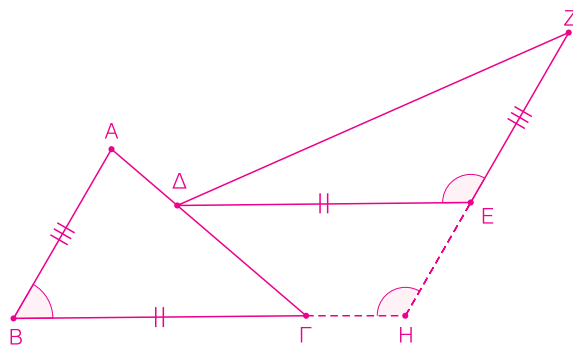
γ. Είναι $\hat{Z}\hat{E}\Delta + \hat{B} = 180^\circ$

- Αν $\hat{B} < 90^\circ$, τότε $\hat{Z}\hat{E}\Delta > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες.

Δηλαδή, αφού $\hat{B} < \hat{Z}\hat{E}\Delta$, τότε $A\Gamma < \Delta Z$.

- Αν $\hat{B} > 90^\circ$, τότε $\hat{Z}\hat{E}\Delta < 90^\circ$, οπότε $\hat{B} > \hat{Z}\hat{E}\Delta$, άρα $A\Gamma > \Delta Z$.
- Αν $\hat{B} = 90^\circ$, τότε και $\hat{Z}\hat{E}\Delta = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα, άρα $A\Gamma = \Delta Z$.

Επομένως, είναι $\Delta Z = A\Gamma$, όταν $\hat{Z}\hat{E}\Delta = \hat{A}\hat{B}\Gamma = 90^\circ$.



86 Θέμα 4 - 13822

Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

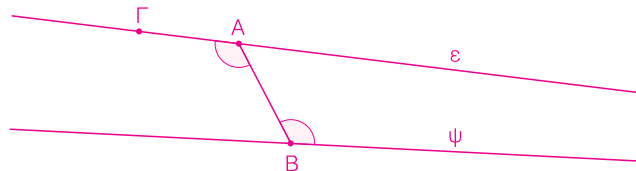
α. Αν η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$:

- Na αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi} < 180^\circ$.
 - Na αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;
- β. Na διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α. για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.
- γ. Αν ισχύει $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} < \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

Λύση

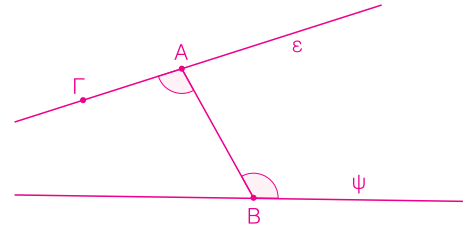
α. i. Είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi} < \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi} < \hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi} < 180^\circ$.

ii. Οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την AB και επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{\epsilon} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi} < 180^\circ$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος που βρίσκεται η $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$.



β. Στο **α.** αποδείξαμε ότι: αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

γ. Οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$ είναι εντός και εναλλάξ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} < \hat{A}\hat{B}\hat{\Psi}$.
Άρα οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος της $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



16. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

87 Θέμα 2 - 1700

Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

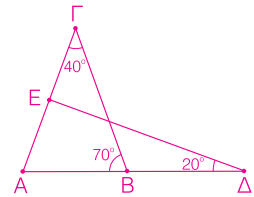
β. η γωνία $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ είναι ορθή.

Λύση

α. Είναι $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{A} = \hat{B}$, άρα το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές.

β. Από το τρίγωνο $A\hat{E}\hat{\Delta}$, έχουμε $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 180^\circ - 20^\circ - 70^\circ = 90^\circ$.



88 Θέμα 2 - 13535

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B .

Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

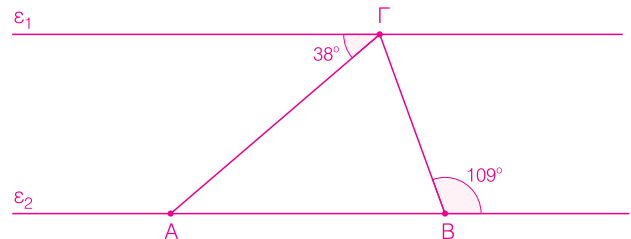
Λύση

α. Είναι: • $\hat{A} = 38^\circ$, ως εντός εναλλάξ γωνίες

• $\hat{B} + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 71^\circ$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 109^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 71^\circ$

β. Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 71^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι $A\Gamma$, AB , γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.



89 Θέμα 2 - 12704

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $A\Delta = AB$.

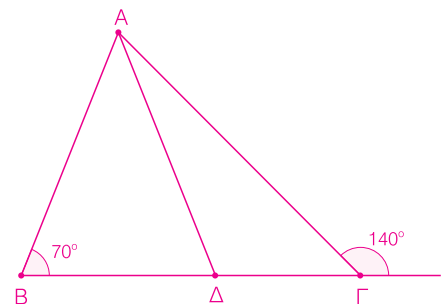
Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 40^\circ$.

β. $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 110^\circ$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση



α. Έχουμε $AD = AB$, οπότε το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με:

$$\hat{B} = \hat{ADB} \Leftrightarrow \hat{ADB} = 70^\circ$$

Στο τρίγωνο ABD είναι:

$$\hat{BAD} + \hat{ABD} + \hat{ADB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BAD} + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BAD} = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow \hat{BAD} = 40^\circ$$

β. Στο τρίγωνο ABD η $\hat{ADG}$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{ADG} = \hat{ABD} + \hat{BAD} = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

γ. Είναι $\hat{AGB} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta}$.

Στο τρίγωνο ABG είναι:

$$\hat{BAG} + \hat{ABG} + \hat{AGB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BAG} = 180^\circ - \hat{ABG} - \hat{AGB} \Leftrightarrow \hat{BAG} = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow \hat{BAG} = 70^\circ.$$

Άρα $\hat{BAG} = 70^\circ = \hat{ABG}$, δηλαδή το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

90 Θέμα 2 - 12707

Δίνεται το τρίγωνο ABG με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\hat{BZA} = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της BG . Η $Z\Delta$ τέμνει την AG στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

β. $\hat{ZAB} = 90^\circ$.

γ. το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Στο τρίγωνο ABG έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 55^\circ$.

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 55^\circ$, οπότε το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

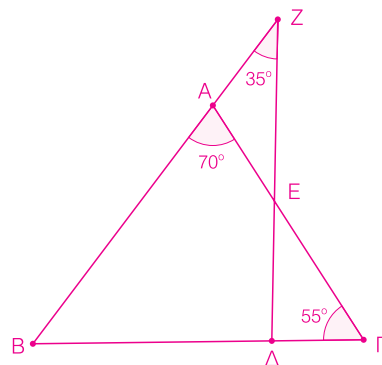
β. Στο τρίγωνο $BZ\Delta$ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{BZA} + \hat{Z\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + 35^\circ + \hat{Z\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z\Delta B} = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Z\Delta B} = 90^\circ$$

γ. Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ABG είναι εξωτερική του τριγώνου AZE . Επομένως,

$$\hat{A} = \hat{AEZ} + \hat{AZE} \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{AEZ} + 35^\circ \Leftrightarrow \hat{AEZ} = 35^\circ$$

Άρα $\hat{AEZ} = \hat{AZE}$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.



91 Θέμα 2 - 13741

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι

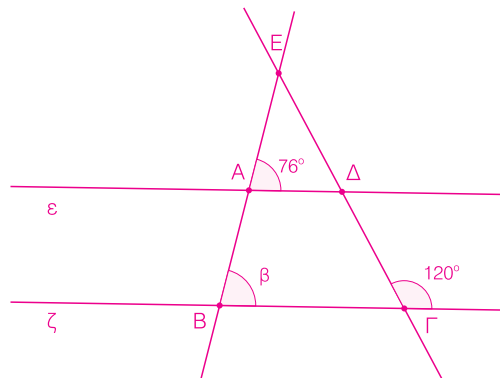
$\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία $\hat{\beta}$.

β. Τις γωνίες του τετράπλευρου $ABGD$.

γ. Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου EAD .

Λύση



α. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε

$$\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 120^\circ$$

Η γωνία $\hat{A}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha} = 76^\circ$, οπότε

$$\hat{A} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 76^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 104^\circ.$$

γ. Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε $\hat{\alpha} = 76^\circ$.

$$\text{Είναι: } \bullet \quad \hat{A\Delta E} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta E} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta E} = 60^\circ.$$

$$\bullet \quad \hat{A\Delta E} + \hat{\alpha} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 136^\circ + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 180^\circ - 136^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 44^\circ.$$

92 Θέμα 2 - 13442

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

Λύση

α. Έστω $\hat{\Delta}_1 = \hat{A\Delta\Gamma}$. Έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.

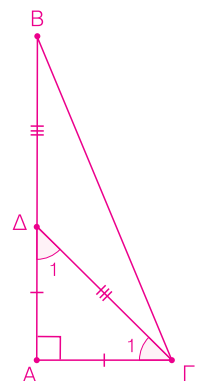
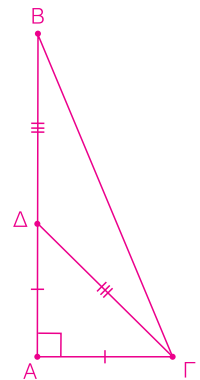
Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ είναι συμπληρωματικές, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 45^\circ$$

β. Έχουμε $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ άρα

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_2 \Leftrightarrow 45^\circ = \hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow 2\hat{B} = 45^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 22,5^\circ.$$



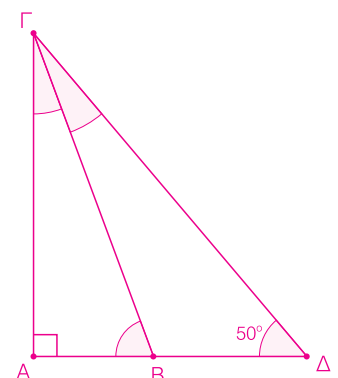
93 Θέμα 2 - 13654

Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ$.

α. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β. Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma\Delta}$.

Λύση



α. Για τις οξείες γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\bullet \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + 50^\circ + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 40^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 20^\circ$$

Επομένως $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$.

β. Είναι

$$\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 110^\circ.$$

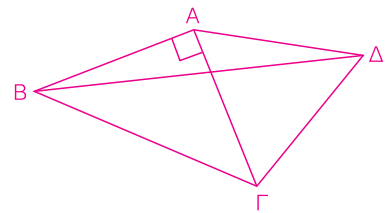
Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ ισχύει:

$$\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 110^\circ + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ - 50^\circ - 110^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 20^\circ$$

Αφού $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 20^\circ$, έχουμε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$.

94 Θέμα 2 - 12709

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 45^\circ$, οπότε και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.

β. Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο οπότε $A\Gamma = A\Delta = \Delta\Gamma$.

Έχουμε $AB = A\Gamma$ και $A\Gamma = A\Delta$, οπότε $AB = A\Delta$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο έχουμε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

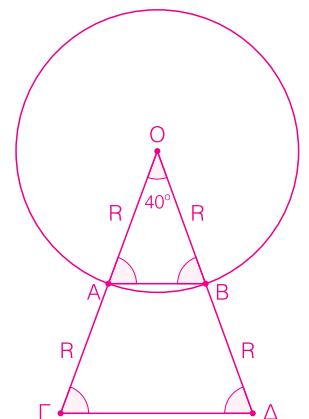
Οπότε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$ και

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 15^\circ.$$

95 Θέμα 2 13687

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $\hat{O}\hat{A}\hat{B} = \hat{O}\hat{B}\hat{A} = 70^\circ$.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και $\hat{O}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

Λύση

α. Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές $OA = OB = R$, οπότε

$$\hat{OAB} = \hat{OBA}$$

Στο τρίγωνο OAB ισχύει:

$$\hat{O} + \hat{OAB} + \hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{OAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OAB} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{OAB} = 70^\circ \text{ και } \hat{OBA} = 70^\circ.$$

β. Είναι $OG = OD$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $OG = OA + AG = 2R$ και $OD = OB + BD = 2R$.

Επομένως, το τρίγωνο OGD είναι ισοσκελές με βάση GD .

Στο τρίγωνο OGD ισχύει:

$$\hat{O} + \hat{OGD} + \hat{ODG} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{OGD} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OGD} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{OGD} = 70^\circ \text{ και } \hat{ODG} = 70^\circ.$$

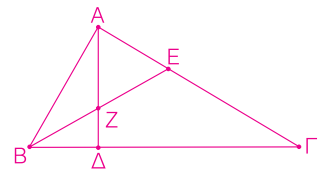
γ. Οι AB και GD τέμνονται από την AG και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\hat{OAB}$ και $\hat{OGD}$ ίσες. Επομένως, $AB \parallel GD$.

96 Θέμα 2 - 1645

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .

β. Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.



Λύση

α. Είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$, οπότε $3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.

Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 6\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

β. Είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{EBA} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$.

Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο ABE είναι $\hat{AEB} + \hat{A} + \hat{EBA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEB} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEB} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο AEZ είναι $\hat{AZE} + \hat{ZAE} + \hat{AEZ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AZE} + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AEZ} = 60^\circ$.

Άρα το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

97 Θέμα 2 - 13443

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά AG θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma B\Delta} = 20^\circ$.

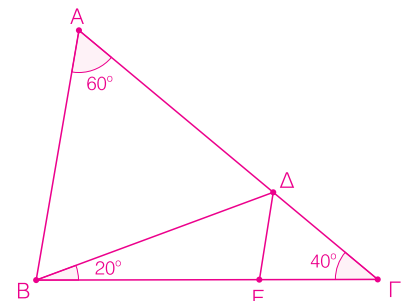
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{BAE} = 60^\circ$.

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\Delta\Gamma}$.

Λύση



α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma\Delta$, άρα

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma B\Delta} + \hat{\Gamma} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

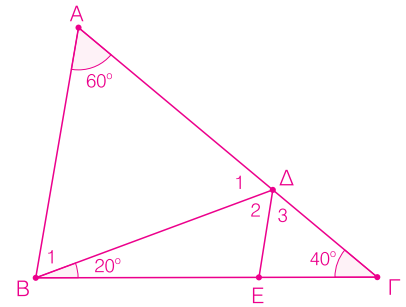
Οπότε οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{\Delta}_1$ του τριγώνου $AB\Delta$ είναι 60° .

Επομένως και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60° , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β. i. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ γωνίες και $\hat{B}_1 = 60^\circ$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B\Delta E} = 60^\circ$.

ii. Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και $\hat{A} = 60^\circ$, άρα $\hat{\Delta}_3 = 60^\circ$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^\circ$, η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\Delta\Gamma}$.



98 Θέμα 2 - 1623

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

β. Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A\Delta E}$, $\hat{E\Delta\Gamma}$.

Λύση

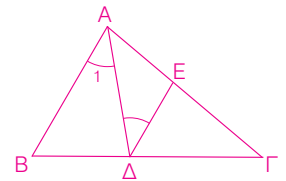
α. Είναι:

- $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$

Οπότε $\hat{B} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

β. Είναι:

- $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$
- $\hat{A\Delta E} = \hat{A}_1 = 40^\circ$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{E\Delta\Gamma} = \hat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη



99 Θέμα 2 - 1604

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε:

α. τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β. τη γωνία $\hat{\Delta A\Gamma}$

Λύση

α. Είναι:

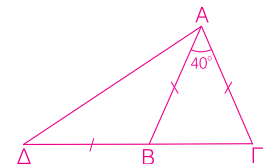
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$

Οπότε $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

β. Είναι:

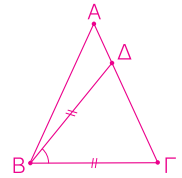
- $\hat{\Delta A B} = \hat{\Delta} = \hat{A}$, αφού $AB = B\Delta$
- $\hat{A B \Delta} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- $\hat{\Delta A B} + \hat{A} + \hat{A B \Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta A B} + \hat{\Delta A B} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta A B} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta A B} = 35^\circ$

Οπότε $\hat{\Delta A \Gamma} = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$.



100 Θέμα 2 - 1602

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $BA = B\Gamma$.



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
 β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta B\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.

Λύση

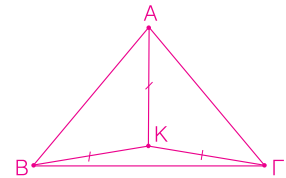
α. Είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$.
 Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι $B\Delta\Gamma = \hat{\Gamma} = 65^\circ$ και
 $\Delta B\Gamma + B\Delta\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 50^\circ$.

Άρα $\Delta B\Gamma = \hat{A}$.

101 Θέμα 2 - 1593

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB = KA = K\Gamma$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.
 β. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΔBK και $\Delta K\Gamma$.
 γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta BK\Gamma$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα BKA και ΓKA έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $KB = K\Gamma$
- AK κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΠΠ).

β. Είναι:

- AK διχοτόμος, άρα $\hat{BAK} = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$

- $KA = KB$, άρα $\hat{ABK} = \hat{BAK} = 40^\circ$

- $KA = K\Gamma$, άρα $\hat{AK\Gamma} = \hat{KAG} = 40^\circ$

γ. Στο τρίγωνο AKB είναι $\hat{AKB} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ είναι $\hat{AK\Gamma} = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Οπότε $\hat{BK\Gamma} = 360^\circ - \hat{AKB} - \hat{AK\Gamma} = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$.

102 Θέμα 2 - 1541

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $BE = AB$

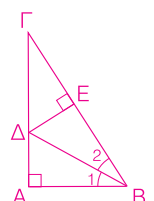
β. Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ έχουν:

- $B\Delta$ κοινή
- $\hat{B_1} = \hat{B_2}$, αφού $B\Delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα, άρα $BE = AB$.



β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$, $E\Delta B$ είναι ίσα, έχουμε $\widehat{B\Delta E} = \widehat{B\Delta A} \Rightarrow \widehat{B\Delta E} = 55^\circ$.

Οπότε: $\bullet \widehat{\Gamma\Delta E} = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$

$\bullet \widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma\Delta E} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

103 Θέμα 2 - 1693

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.

γ. Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\widehat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Λύση

α. Επειδή $\Delta E \parallel AB$ και $AB \perp A\Gamma$, είναι $\Delta E \perp A\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

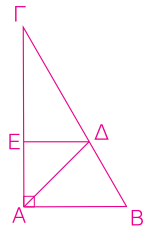
β. Είναι: $\bullet \widehat{\Delta A E} = \widehat{\Delta A B} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\bullet \widehat{A\Delta E} = \widehat{\Delta A B} = 45^\circ$, ως εντός εναλλάξ

γ. Έχουμε $\widehat{B} = 20^\circ + \widehat{\Gamma}$.

Είναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 35^\circ$.

Άρα $\widehat{E\Delta\Gamma} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.



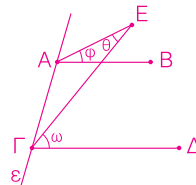
104 Θέμα 2 - 1590

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

Να αποδείξετε ότι:

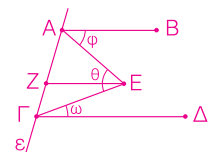
α. Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε:

$$\widehat{\omega} = \widehat{\phi} + \widehat{\theta}$$



β. Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\widehat{\theta} = \widehat{\omega} + \widehat{\phi}$$



Λύση

α. Έστω K το σημείο τομής της AB με την $E\Gamma$.

Είναι $\widehat{\omega} = \widehat{A\hat{K}\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ και $\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \widehat{\phi} + \widehat{\theta}$,

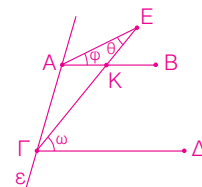
αφού η $A\hat{K}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AKE .

Οπότε $\widehat{\omega} = \widehat{\phi} + \widehat{\theta}$.

β. Είναι: $\bullet \widehat{\omega} = \widehat{Z\hat{E}\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ

$\bullet \widehat{\phi} = \widehat{A\hat{E}Z}$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\widehat{\theta} = \widehat{Z\hat{E}\Gamma} + \widehat{Z\hat{E}A} = \widehat{\omega} + \widehat{\phi}$.



105 Θέμα 2 - 12708

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και ΓA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και ΓB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $EH = \Delta Z$ και $\widehat{BHE} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$.
 β. τα τρίγωνα BEH και $\Gamma\Delta Z$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

Λύση

- α. Τα τρίγωνα BEH και $\Gamma\Delta Z$ έχουν:
- $BE = \Gamma Z$
 - $BH = \Gamma\Delta$
 - $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ) επομένως, $EH = \Delta Z$ και $BE = \Gamma Z$, οπότε $\widehat{BHE} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$.

- β. Επειδή τα τρίγωνα BEH και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα, έχουμε $\widehat{H} = \widehat{\Delta}$.

Τα τρίγωνα $KE\Delta$ και BEH έχουν τη γωνία $\widehat{E}$ κοινή και $\widehat{\Delta} = \widehat{H}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\widehat{\Delta KE} = \widehat{B}$.

106 Θέμα 2 - 1552

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $XO\Psi$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Λύση

Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές διότι $OA = OB$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Στο τρίγωνο OAB είναι

$$\widehat{O} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{O} \Leftrightarrow 2\widehat{B}_1 = 180^\circ - \widehat{O} \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{O}}{2}, \quad (1)$$

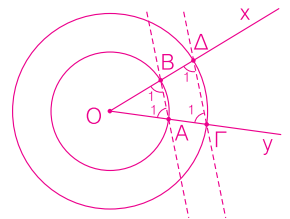
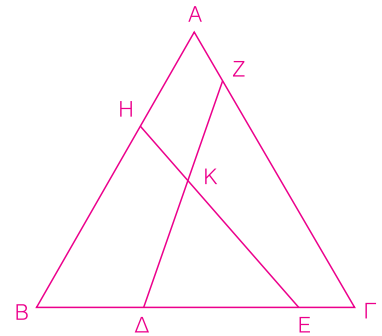
Το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές διότι $OG = OD$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$.

$$\text{Στο τρίγωνο } O\Gamma\Delta \text{ είναι } \widehat{O} + \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^\circ - \widehat{O} \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta}_1 = 180^\circ - \widehat{O} \Leftrightarrow \widehat{\Delta}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{O}}{2}, \quad (2).$$

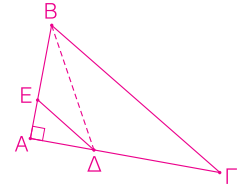
Από τις (1) και (2) έχουμε $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$.

Αφού επιπλέον είναι εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη, προκύπτει $AB \parallel \Gamma\Delta$.



107 Θέμα 2 - 1594

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς AG τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma}$ και $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Αν $\hat{A\Delta B} = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

Λύση

α. i. Επειδή $\Delta E \parallel B\Gamma$ έχουμε:

- $\hat{E\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{E\Delta A} = \hat{\Gamma}$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη

ii. Είναι $\hat{A\Delta E} = \hat{E\Delta B}$, αφού ΔE διχοτόμος της $\hat{A\Delta B}$, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta B\Gamma}$.

Άρα το $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

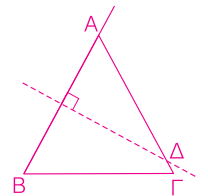
β. Η $\hat{A\Delta B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, άρα $\hat{A\Delta B} = \hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

108 Θέμα 2 - 1554

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{B}$.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο εσωτερικό της σημείο Δ . Αν η γωνία $\hat{A\Delta B}$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α. Είναι $\hat{A_{\text{ext}}} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β. Είναι:

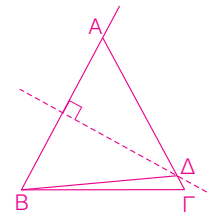
- $\hat{A\Delta B} = 80^\circ$
- $\Delta A = \Delta B$, αφού το Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB

Οπότε $\hat{A} = \hat{A\Delta B}$.

Στο $\Delta B\Delta$ είναι $\hat{A} + \hat{A\Delta B} + \hat{A\Delta B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 50^\circ$.

Στο $\Delta B\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 65^\circ$.



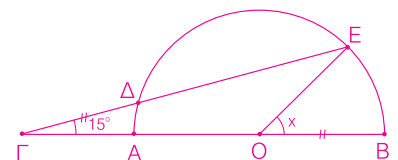
109 Θέμα 2 - 1576

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το OB και η γωνία $\hat{B\Gamma E} = 15^\circ$, τότε

α. να αποδείξετε ότι $\hat{O\Delta E} = 30^\circ$

β. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\hat{O}B} = x$.

Λύση



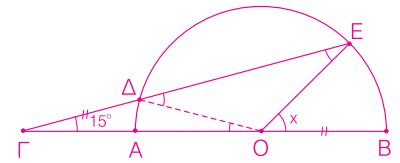
α. Είναι $\Gamma\Delta = \text{OB} = \text{O}\Delta = \text{OE} = \rho$.

• Το τρίγωνο $\Delta\Gamma\text{O}$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Delta}\text{O}\Gamma = \hat{\Delta}\Gamma\text{O} = 15^\circ$.

• Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma\text{O}$, η γωνία $\hat{\text{O}}\Delta\text{E}$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{\text{O}}\Delta\text{E} = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

β. • Το τρίγωνο $\text{O}\Delta\text{E}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\text{E}} = \hat{\text{O}}\Delta\text{E} = 30^\circ$.

• Στο τρίγωνο $\text{O}\text{E}\Gamma$ η $\hat{\text{B}}\text{O}\text{E}$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{\text{B}}\text{O}\text{E} = x = \hat{\Gamma} + \hat{\text{E}} = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$.



110 Θέμα 2 - 1607

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν

$\Delta\text{B} = \text{BA} = \text{A}\Gamma = \text{ΓE}$ και $\hat{\text{B}}\hat{\text{A}}\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι

α. $\hat{\text{A}}\hat{\text{B}}\hat{\Delta} = \hat{\text{A}}\hat{\Gamma}\hat{\text{E}} = 110^\circ$

β. τα τρίγωνα $\text{AB}\Delta$ και $\text{A}\Gamma\text{E}$ είναι ίσα.

γ. το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Το τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $\text{B}\Gamma$, οπότε $\hat{\text{B}} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\text{A}} + \hat{\text{B}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{\text{B}} + \hat{\text{B}} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\text{B}} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{B}} = 70^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Είναι: • $\hat{\text{A}}\hat{\text{B}}\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{\text{B}} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

• $\hat{\text{A}}\hat{\Gamma}\hat{\text{E}} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

β. Τα τρίγωνα $\text{AB}\Delta$ και $\text{A}\Gamma\text{E}$ έχουν:

• $\text{AB} = \text{A}\Gamma$

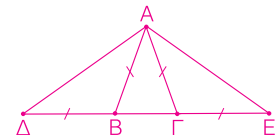
• $\text{B}\Delta = \Gamma\text{E}$

• $\hat{\text{A}}\hat{\text{B}}\hat{\Delta} = \hat{\text{A}}\hat{\Gamma}\hat{\text{E}}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Επειδή τα τρίγωνα $\text{AB}\Delta$ και $\text{A}\Gamma\text{E}$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta\text{A} = \text{AE}$.

Άρα το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.



111 Θέμα 2 - 1572

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ ($\text{AB} = \text{A}\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία

$\text{B}\Gamma$ τέτοια, ώστε $\text{B}\Delta = \Gamma\text{E}$.

Έστω ότι $\Delta\text{Z} \perp \text{AB}$ και $\text{EH} \perp \text{A}\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{BZ} = \text{GH}$

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές

β. Αν $\hat{\text{A}} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

Λύση

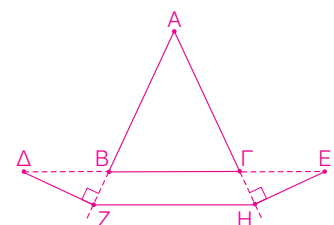
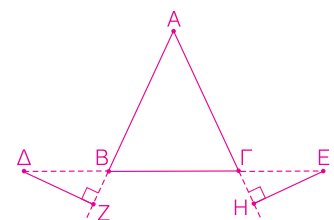
α. Το τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\text{B}} = \hat{\Gamma}$.

i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\text{ZB}\Delta$ και $\text{H}\Gamma\text{E}$ έχουν:

• $\text{B}\Delta = \Gamma\text{E}$

• $\hat{\Delta\text{BZ}} = \hat{\text{H}\Gamma\text{E}}$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{\text{B}}$ και $\hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\text{BZ} = \text{GH}$.



ii. Είναι $AZ = AB + BZ \stackrel{\text{α.ι.}}{=} AG + GH = AH$.

Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Z} = \hat{H}$.

Στο τρίγωνο AZH είναι $\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{Z} + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Z} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 65^\circ$.

Οπότε και $\hat{H} = 65^\circ$.

112 Θέμα 2 - 1699

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AG).

α. Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β. Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.

Λύση

α. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών AB, AG και $\Delta Z \perp B\Gamma$, $E\Gamma \perp B\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ZBΔ και HΓΕ έχουν:

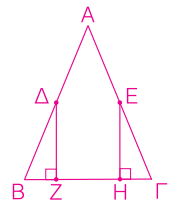
• $\Delta B = E\Gamma$

• $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta Z = E\Gamma$.

β. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + \hat{B} + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 105^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 35^\circ$.

Οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 35^\circ$ και $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B} = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ$.



113 Θέμα 2 - 1636

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β. Αν η γωνία APB είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία AOB.

Λύση

α. Η ΡΟ είναι διακεντρική ευθεία, οπότε είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{P}$.

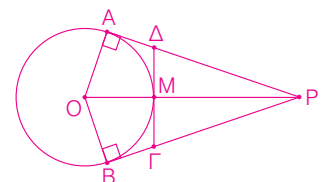
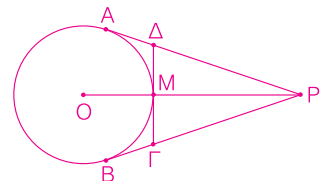
Η ακτίνα OM είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ΔΓ, οπότε $OM \perp \Delta\Gamma$.

Στο τρίγωνο ΡΔΓ η ΡΜ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $OA \perp AP$ και $OB \perp BP$, οπότε $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο OAPB είναι

$$\hat{O} + \hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} + 90^\circ + 40^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} + 220^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 140^\circ.$$



114 Θέμα 2 - 1639

Στα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου AEZΓ.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και EBZ είναι ισοσκελή.

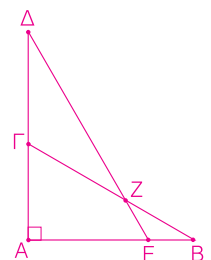
Λύση

α. • Στο τρίγωνο AΔΕ είναι $\hat{E} = 90^\circ - \hat{\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

• Στο τετράπλευρο AEZΓ είναι

$$\hat{A} + \hat{E} + \hat{Z} + \hat{\Gamma} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{Z} + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} + 210^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 360^\circ - 210^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 150^\circ.$$



β. • Είναι $\hat{\Delta} = 30^\circ$ και $\hat{E}\hat{Z}\Gamma + \hat{\Delta}\hat{Z}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 150^\circ + \hat{\Delta}\hat{Z}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{Z}\Gamma = 30^\circ$.

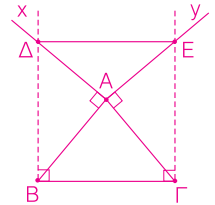
Άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{Z}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma\hat{Z}\Delta$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\hat{E}\hat{Z}B = \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 30^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$, οπότε $\hat{E}\hat{Z}B = \hat{B}$.

Άρα το τρίγωνο EBZ είναι ισοσκελές.

115 Θέμα 2 - 1556

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β. Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔAE .

Λύση

α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$
- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$

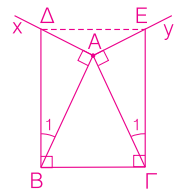
Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Delta = \Gamma E$.

β. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $A\Delta = AE$, οπότε $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{E}\hat{A}E$.

Είναι $\hat{\Delta}\hat{A}E = 360^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma - \hat{\Delta}\hat{A}B - \hat{E}\hat{A}\Gamma = 360^\circ - 80^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 100^\circ$.

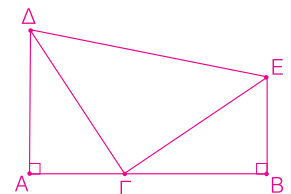
Στο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\hat{\Delta}\hat{A}E + \hat{A}\hat{\Delta}E + \hat{E}\hat{A}A = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \hat{A}\hat{\Delta}E + \hat{A}\hat{\Delta}E = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}\hat{\Delta}E = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}E = 40^\circ$.

Οπότε και $\hat{A}\hat{E}\Delta = 40^\circ$.



116 Θέμα 2 - 1641

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$. Να αποδείξετε ότι:



α. Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

β. Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma E$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $A\Gamma = BE$

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$, $B\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε:

- $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{E}\hat{\Gamma}B = 40^\circ$
- $\Gamma\Delta = \Gamma E$

Οπότε το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

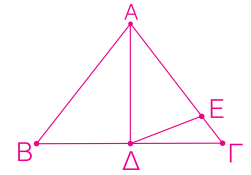
Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 50^\circ$.

Είναι $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}A + \hat{E}\hat{\Gamma}B + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 40^\circ + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

117 Θέμα 2 - 1661

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\widehat{B\Delta\Delta} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$.

Λύση

α. Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος $A\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{B\hat{A}\Delta} = 30^\circ$, οπότε $\hat{A} = 60^\circ$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Για το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο.

β. Επειδή $A\Delta = AE$ το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\hat{E}\Delta}$.

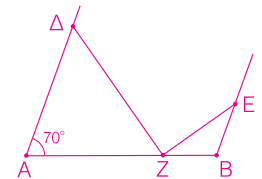
Στο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε:

$\widehat{\Delta\hat{A}E} + \widehat{A\hat{E}\Delta} + \widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\widehat{A\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Delta E} = 75^\circ$, οπότε και $\widehat{A\hat{E}\Delta} = 75^\circ$.

γ. Είναι $\widehat{E\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma} - \widehat{A\Delta E} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

118 Θέμα 2 - 1640

Στο διπλανό σχήμα, οι $A\Delta$ και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^\circ$.



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta Z$ και BZE .

β. Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta Z E} = 90^\circ$.

Λύση

α. • Επειδή $A\Delta = AZ$, έχουμε $\hat{\Delta} = \widehat{\Delta Z A}$.

Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, είναι: $\hat{A} + \hat{\Delta} + \widehat{\Delta Z A} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 55^\circ$.

Οπότε $\widehat{\Delta Z A} = \hat{\Delta} = 55^\circ$.

• Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta$, BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 110^\circ$.

• Επειδή $BE = BZ$, έχουμε $\widehat{E Z B} = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο BEZ , είναι $\hat{B} + \hat{E} + \widehat{E Z B} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2\hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 35^\circ$.

Οπότε $\widehat{E Z B} = \hat{E} = 35^\circ$.

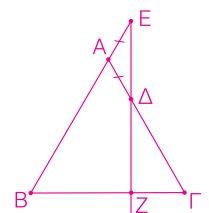
β. Είναι $\widehat{\Delta Z E} = 180^\circ - \widehat{\Delta Z A} - \widehat{E Z B} = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$.

119 Θέμα 2 - 1605 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ**120 Θέμα 2 - 1689**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

β. Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.



Λύση

α. Είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{\Delta A E} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $\hat{A \Delta E} = \hat{E}$.

Στο τρίγωνο $\Delta A E$ έχουμε $\hat{A \Delta E} + \hat{E} + \hat{\Delta A E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A \Delta E} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A \Delta E} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{A \Delta E} = 30^\circ$.

Οπότε και $\hat{E} = 30^\circ$.

β. Είναι $\hat{A \Delta E} = \hat{Z \Delta \Gamma} = 30^\circ$, ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $\Delta Z \Gamma$ έχουμε $\hat{Z \Delta \Gamma} + \hat{\Delta Z \Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \hat{\Delta Z \Gamma} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta Z \Gamma} = 90^\circ$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

121 Θέμα 2 - 1603

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

α. τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E \Gamma$

β. τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta E B$.

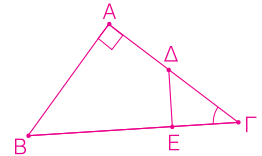
Λύση

α. Στο τρίγωνο $\Delta E \Gamma$ είναι $\hat{E} = 90^\circ$ και $\hat{E \Delta \Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 50^\circ$.

Είναι $\hat{A \Delta E} = 180^\circ - \hat{E \Delta \Gamma} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Οπότε στο $A\Delta E B$ έχουμε $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$, $\hat{B} = 50^\circ$ και $\hat{\Delta} = 130^\circ$.



122 Θέμα 2 - 1596

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A_{εξ}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A \hat{B} \Delta} = 60^\circ$

ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

iii. $A\Gamma - AB = \Delta\Gamma$

β. Αν η γωνία $\hat{B \hat{A} \Delta}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$.

Λύση

α. i. Είναι $\hat{A \hat{B} \Delta} = \hat{B \hat{A} x} = \frac{\hat{A_{εξ}}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, ως εντός εναλλάξ.

ii. Είναι $\hat{B \hat{A} \Delta} = 180^\circ - \hat{A_{εξ}} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$\hat{B \hat{A} \Delta} + \hat{A \hat{B} \Delta} + \hat{A \hat{\Delta} B} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + \hat{A \hat{\Delta} B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A \hat{\Delta} B} = 60^\circ$

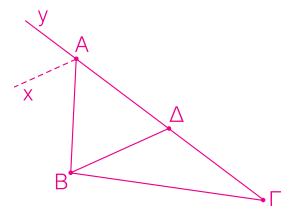
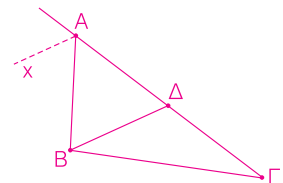
Άρα $\hat{A \hat{B} \Delta} = \hat{A \hat{\Delta} B}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι $A\Gamma - AB = A\Gamma - A\Delta = \Delta\Gamma$.

β. Είναι: • $\hat{B \hat{\Delta} A} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$

• $\hat{A \hat{\Delta} B} = 60^\circ$, οπότε $\hat{B \hat{\Delta} \Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

• $\hat{\Delta \hat{B} \Gamma} = 180^\circ - \hat{B \hat{\Delta} \Gamma} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$



123 Θέμα 2 - 1565

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

α. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $AB = A'B'$
- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}' = \hat{\Gamma}'$.

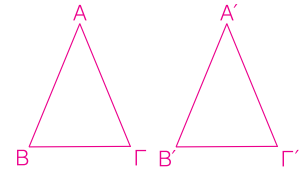
Επειδή $\hat{B} = \hat{B}'$, έχουμε $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{A}'$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $A\Gamma = A'\Gamma'$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- $\hat{A} = \hat{A}'$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

**124 Θέμα 2 - 14884**

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

β. Το τμήμα AZ είναι παράλληλο στο BE .

Λύση

α. Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ έχουν:

- $AE = AB$
- $AZ = A\Delta$
- $\hat{EAZ} = \hat{\Delta AB}$

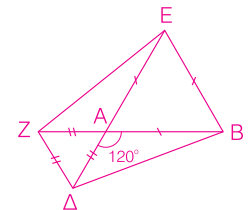
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Είναι:

• $\hat{\Delta AB} + \hat{BAE} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, οπότε τα Δ , A και E είναι συνευθειακά.

• $\hat{BEA} = 60^\circ$ και $\hat{Z\Delta A} = 60^\circ$, οπότε $\hat{BEA} = \hat{Z\Delta A}$.

Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{BED}$ και $\hat{Z\Delta E}$ είναι ίσες, έχουμε $EB \parallel Z\Delta$.

**125 Θέμα 2 - 1851**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$ τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{GEB}$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

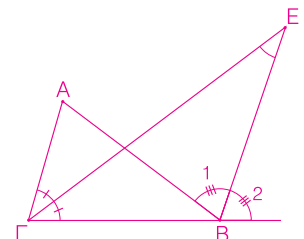
Λύση

α. Είναι $\hat{B}_1 = 70^\circ$ και $2\hat{GEB} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{GEB} = 35^\circ$.

Η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}_{\text{ext}}$ άρα $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 70^\circ$.

Η γωνία $\hat{B}_2$ είναι η εξωτερική του τριγώνου $EB\Gamma$, άρα $\hat{B}_2 = \hat{E\Gamma B} + \hat{GEB} \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{E\Gamma B} + 35^\circ \Leftrightarrow \hat{E\Gamma B} = 35^\circ$.

Δηλαδή $\hat{E\Gamma B} = \hat{GEB} = 35^\circ$, άρα το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.



- β. • Η ΒΕ είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\hat{B}_{εξ} = 2\hat{B}_1 = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$, οπότε $B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
- Η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} = 2\hat{E}\hat{\Gamma}B = 70^\circ$.
- Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ$.

126 Θέμα 2 - 12640

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

α. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.

β. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

Λύση

α. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι:

$$(2n - 4) \cdot 90^\circ = (2 \cdot 5 - 4) \cdot 90^\circ = 6 \cdot 90^\circ = 540^\circ$$

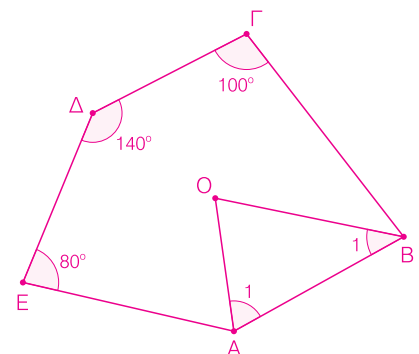
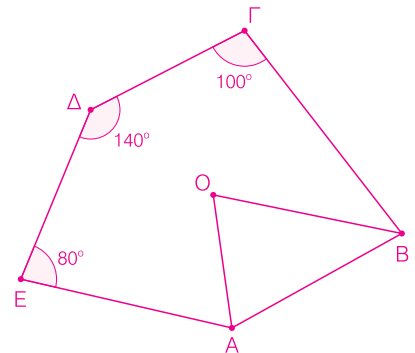
$$\text{Δηλαδή έχουμε: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 220^\circ$$

β. Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}. \text{ Έτσι } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \stackrel{a.}{=} \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow 110^\circ + \hat{O} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 70^\circ$, δηλαδή $\hat{AOB} = 70^\circ$.



127 Θέμα 2 - 12644

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α. τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

β. το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.

γ. το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

Λύση

α. Είναι: • $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{εξ.} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} + 130^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 50^\circ$

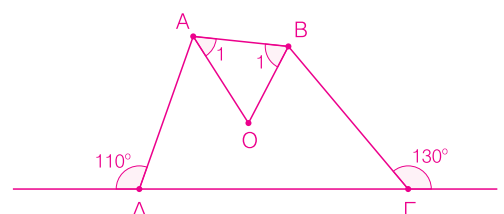
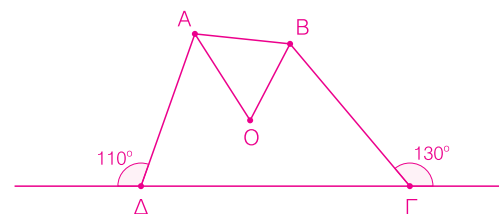
• $\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_{εξ.} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 70^\circ$

β. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 240^\circ$

γ. Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ (1).

Οι ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα,

$$\text{άρα: } \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} \text{ και } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}.$$



$$\text{Οπότε } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ.$$

$$\text{Άρα η } (1) \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{O} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O} = 60^\circ.$$

$$\text{Δηλαδή } \hat{AOB} = 60^\circ.$$

128 Θέμα 2 - 13619

Θεωρούμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $\hat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{BO\Gamma} = 70^\circ$.

Λύση

α. • Είναι: $\hat{A}_{εξ} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$

• Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει:

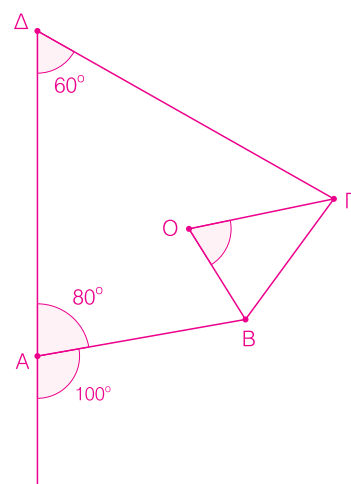
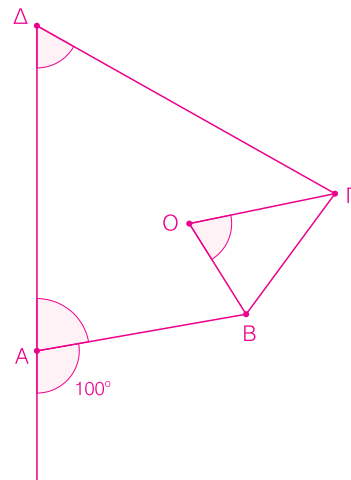
$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} &= 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \hat{\Delta} = 360^\circ \\ &\Leftrightarrow \hat{\Delta} = 360^\circ - 80^\circ - 220^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^\circ \end{aligned}$$

β. Στο τρίγωνο $B\Gamma O$ ισχύει:

$$\hat{OB\Gamma} + \hat{B\Gamma O} + \hat{BO\Gamma} = 180^\circ, (1)$$

$$\text{Είναι } \hat{OB\Gamma} + \hat{B\Gamma O} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ.$$

$$\text{Οπότε η } (1) \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{BO\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BO\Gamma} = 70^\circ.$$



129 Θέμα 2 - 13749

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta E$ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος AD είναι ίση με την πλευρά AE και η ημιευθεία Ax είναι προέκταση της BA προς το A . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α. Τη γωνία $\hat{a}$.

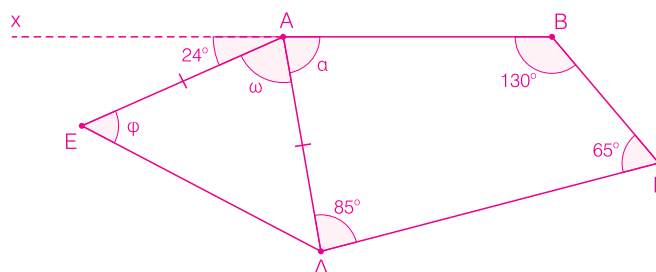
β. Τη γωνία $\hat{\omega}$.

γ. Τη γωνία $\hat{\phi}$.

Λύση

α. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{a} + 130^\circ + 65^\circ + 85^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{a} = 360^\circ - 280^\circ \Leftrightarrow \hat{a} = 80^\circ$.

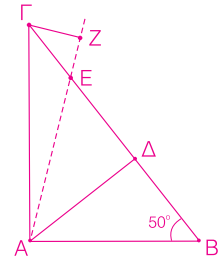
β. Είναι $24^\circ + \hat{\omega} + \hat{a} = 180^\circ \Leftrightarrow 24^\circ + \hat{\omega} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 76^\circ$



- γ. Είναι: • $AD = AE$ άρα το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ED , οπότε $\hat{\varphi} = \hat{ADE}$.
- $\varphi + \hat{ADE} + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + \varphi + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi = 180^\circ - 76^\circ \Leftrightarrow 2\varphi = 104^\circ \Leftrightarrow \varphi = 52^\circ$

130 Θέμα 4 - 1708

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AD και σημείο E στην AD ώστε $DE = BD$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- ii. $\hat{\Gamma AE} = 10^\circ$

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

Λύση

α. i. Στο τρίγωνο ABE , το AD είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

ii. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{AEB} = \hat{B} = 50^\circ$.

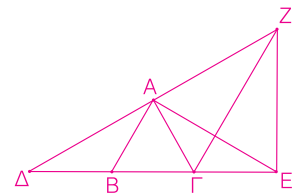
Είναι $\hat{EAB} + \hat{B} + \hat{AEB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{EAB} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{EAB} = 80^\circ$.

Οπότε $\hat{\Gamma AE} = \hat{\Gamma AB} - \hat{EAB} = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

- β. Είναι: • $\hat{Z} = 90^\circ$
- $\hat{ZEG} = \hat{AEB} = 50^\circ$
- $\hat{ZGE} + \hat{Z} + \hat{ZEG} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZGE} + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZGE} = 40^\circ$

131 Θέμα 4 - 1819

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $BA = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην EA στο σημείο Z , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓAE και $B\Delta A$.

β. Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του AE .

γ. Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.

Λύση

α. Είναι $AB = B\Gamma = \Gamma A = B\Delta = \Gamma E$.

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΓAE και $B\Delta A$ έχουμε αντίστοιχα:

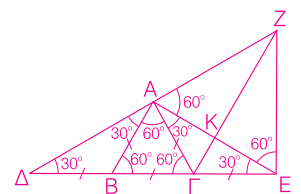
- $\hat{AGE} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\hat{\Gamma AE} = \hat{AEG} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$
- $\hat{AB\Delta} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- $\hat{B\Delta A} = \hat{B\Delta A} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

- β. Είναι: • $\hat{ZAE} = 180^\circ - \hat{\Gamma AE} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
- $\hat{AEZ} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Οπότε $\hat{ZAE} = \hat{AEZ}$, άρα $ZA = ZE$.

Επειδή $ZA = ZE$ και $\Gamma A = \Gamma E$ τα Γ, Z ανήκουν στη μεσοκάθετο του AE .

Άρα η ΓZ είναι η μεσοκάθετος του AE .



- γ. Είναι:
- $\Gamma Z \perp AE$, αφού η ΓZ μεσοκάθετη του AE
 - $\widehat{BAE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, άρα $BA \perp AE$

Επομένως $AB \parallel \Gamma Z$.

132 Θέμα 4 - 13537

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι:

- $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{A}$.
- $\widehat{A} = 36^\circ$.
- Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β. Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Έστω $\widehat{A} = \omega$ (1).

i. Είναι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB και $\widehat{B}_1 = \omega$ (2).

Η γωνία $\widehat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα είναι

$$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{A} = \omega + \omega = 2\omega \quad (3).$$

Είναι $B\Gamma = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$ και

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 2\omega \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 2\widehat{A}.$$

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{B} = 2\omega$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 36^\circ$.

Άρα $\widehat{A} = 36^\circ$.

iii. Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές θα αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$.

Είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$.

Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta = B\Delta$
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, αφού $\widehat{B}_1 = \omega = 36^\circ$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^\circ$

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $\Delta E = \Delta\Gamma$.

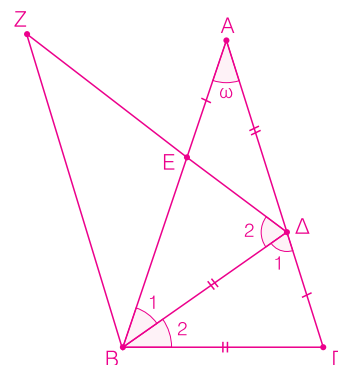
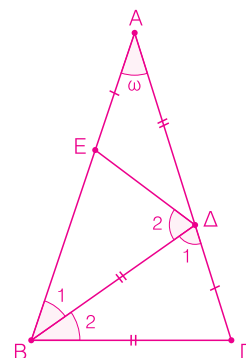
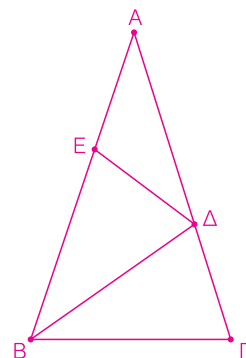
β. Είναι $B\Gamma = BE$, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.

Έχουμε ότι $\widehat{\Delta}_1 = 72^\circ$, άρα $\widehat{\Delta}_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZB\Delta$ έχουν:

- $B\Gamma = B\Delta$,
- $A\Gamma = Z\Delta$,
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}_2 = 72^\circ$,

Άρα είναι ίσα, (ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



133 Θέμα 4 - 1707

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AA' στο σημείο E .

Αν Θ , Z είναι οι προβολές του E στις AB , AG , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β. Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα.
- γ. $\widehat{A\Gamma E} + \widehat{A\beta E} = 180^\circ$

Λύση

α. Η ME είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, οπότε $EB = EG$, άρα το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

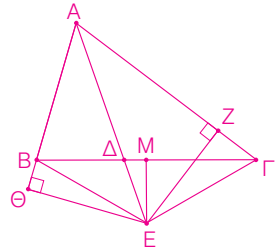
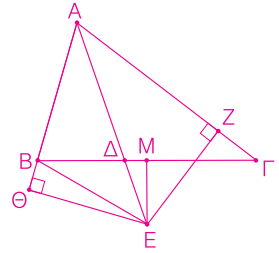
β. Επειδή το E ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, οπότε $E\Theta = EZ$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBE και ZGE έχουν:

- $EB = EG$
- $E\Theta = EZ$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα, έχουμε $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{\Theta\beta E}$.

Οπότε $\widehat{A\Gamma E} + \widehat{A\beta E} = \widehat{\Theta\beta E} + \widehat{A\beta E} = 180^\circ$.



134 Θέμα 4 - 1792

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AK και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και AG στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της GB στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

- α. $\widehat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$
- β. $ZK = K\Delta$
- γ. $\widehat{ZH\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$

Λύση

α. Η $\widehat{Z\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $AE\Delta$, οπότε $\widehat{Z\Delta\Gamma} = \widehat{\Delta EA} + \widehat{EA\Delta} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

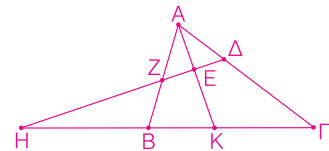
β. Στο τρίγωνο $AZ\Delta$ η AE είναι διχοτόμος και ύψος, άρα είναι και διάμεσος.

Οπότε η AE είναι μεσοκάθετος του $Z\Delta$.

Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $Z\Delta$, έχουμε $KZ = K\Delta$.

γ. Στο τρίγωνο $\Delta H\Gamma$ είναι $\widehat{ZH\Gamma} = 180^\circ - \widehat{Z\Delta\Gamma} - \widehat{\Gamma} = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}) - \widehat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{\Gamma}$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \widehat{A} - 2\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$$



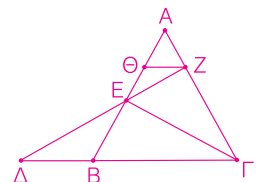
135 Θέμα 4 - 1828

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του GE . Στην προέκταση της GB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αν η ευθεία ΔE τέμνει την AG στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\beta\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.
- β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ .
- γ. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

Λύση



α. • Στο ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος GE είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι το μέσο της AB .

$$\text{Οπότε } B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow B\Delta = BE.$$

Άρα το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

- Είναι:
 - $\hat{A}\hat{\Theta}Z = \hat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
 - $\hat{A}\hat{Z}\Theta = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
 - $\hat{A} = 60^\circ$

Άρα το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισοπλευρο.

β. Το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}EB$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{B} = \hat{\Delta} + \hat{\Delta}EB \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2\hat{\Delta} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 30^\circ$.

Οπότε και $\hat{\Delta}EB = 30^\circ$.

- Είναι:
 - $\hat{E}\hat{\Theta}Z = 180^\circ - \hat{A}\hat{\Theta}Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 - $\hat{\Theta}\hat{E}Z = \hat{\Delta}EB = 30^\circ$
 - $\hat{\Theta}\hat{Z}E = \hat{\Delta} = 30^\circ$, ως εντός εναλλάξ

- γ.** Επειδή:
 - $\hat{\Theta}\hat{E}Z = \hat{\Theta}\hat{Z}E$ το τρίγωνο ΘEZ είναι ισοσκελές, οπότε $\Theta Z = \Theta E$
 - $A\Theta = \Theta Z$, αφού το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισοπλευρο έχουμε $A\Theta = \Theta E$

Άρα $AE = A\Theta + \Theta E = 2A\Theta = 2\Theta Z$.

- δ.** Είναι:
 - $AB = 2AE = 2 \cdot 2\Theta E = 4\Theta E$, άρα $3AB = 12\Theta E$
 - $\Theta B = E\Theta + EB = E\Theta + AE = 3\Theta E$, άρα $4\Theta B = 12\Theta E$

Οπότε $3AB = 4\Theta B$.

136 Θέμα 4 - 1888

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α. $AM \parallel \Gamma\Delta$

β. η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}$

γ. $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

δ. $A\Delta < 2AB$

Λύση

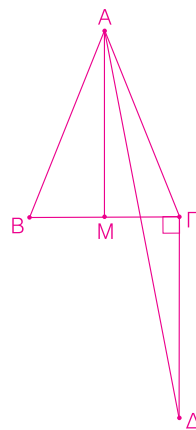
α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM είναι διάμεσος, θα είναι και ύψος. Αφού $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, προκύπτει $AM \parallel \Gamma\Delta$.

- β.** Είναι:
 - $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = A\Gamma$, οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma A$, άρα $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}A$
 - $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}A = \hat{\Delta}\hat{A}M$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}M$, οπότε η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

γ. Είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{90^\circ - \hat{\Gamma}}{2} = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$, αφού το τρίγωνο $MA\Gamma$ είναι ορθογώνιο και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

δ. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι: $A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$.



137 Θέμα 4 - 1874

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $ΚΛ$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $ΚΛ$. Φέρουμε τις χορδές $AB = AG = \rho$.

Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AG αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $ΚΛ$. Να αποδείξετε ότι:

- Η γωνία $\widehat{B\hat{A}G}$ είναι 120° .
- Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $ΑΔ$ και $ΑΕ$ αντίστοιχα.
- $ΚΓ = ΛΒ$

Λύση

α. Φέρουμε τις OB και OG . Τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ισόπλευρα, οπότε $\widehat{B\hat{A}G} = \widehat{B\hat{A}O} + \widehat{O\hat{A}G} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAO είναι $\hat{\Delta} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ και $\widehat{B\hat{O}\Delta} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\Delta} = \widehat{B\hat{O}\Delta}$, οπότε το τρίγωνο $BO\Delta$ είναι ισοσκελές με $B\Delta = BO$.
Επομένως $B\Delta = BA$, άρα το B είναι το μέσο του $ΑΔ$.
Όμοια το Γ είναι το μέσο του $ΑΕ$.

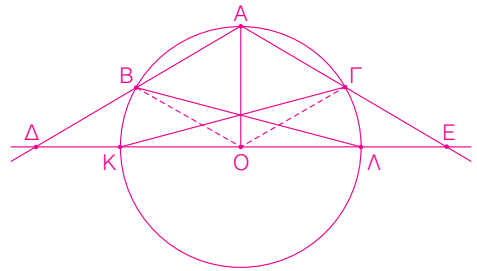
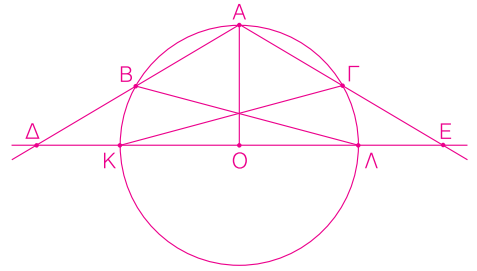
γ. Είναι $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$ και $\widehat{B\hat{O}A} = 60^\circ$ επειδή τα τρίγωνα $AO\Gamma$ και AOB είναι ισόπλευρα.

Οπότε: • $\widehat{K\hat{O}\Gamma} = \widehat{K\hat{O}A} + \widehat{A\hat{O}\Gamma} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

• $\widehat{B\hat{O}\Lambda} = \widehat{B\hat{O}A} + \widehat{A\hat{O}\Lambda} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{K\hat{O}\Gamma}$ και $\widehat{B\hat{O}\Lambda}$ είναι ίσες.

Οπότε τα τόξα $\widehat{K\hat{\Gamma}}$ και $\widehat{B\hat{\Lambda}}$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές $ΚΓ$ και $ΛΒ$ είναι ίσες, δηλαδή $ΚΓ = ΛΒ$.



138 Θέμα 4 - 1894

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $ΑΔ$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α. Να αποδείξετε ότι:

- $\hat{B} = \widehat{\Delta E\Gamma}$
- $\Delta E = \Delta B$

β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta\Gamma Z}$.

Λύση

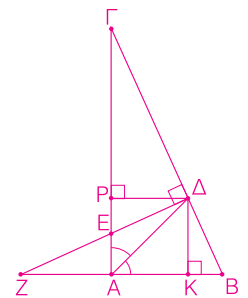
α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο: • $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ έχουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$
• $\widehat{\Delta E\Gamma}$ έχουμε $\widehat{\Delta E\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta E\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

Οπότε $\hat{B} = \widehat{\Delta E\Gamma}$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $P\Delta E$ και $K\Delta B$ έχουν:

- $\widehat{\Delta E\Gamma} = \hat{B}$
- $\Delta P = \Delta K$, αφού η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$

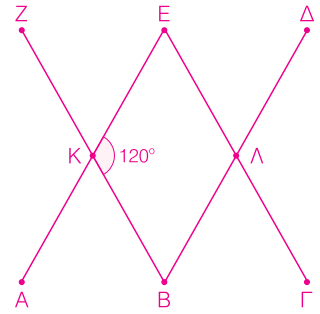
Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Delta B$.



140 Θέμα 4 - 13697

Στο διπλανό σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , BA και GE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel BA$ και $BZ \parallel GE$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE , BZ και Λ κοινό μέσο των BA , GE . Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία $\widehat{BKE}$, είναι ίση με 120° .



- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BLG} = 60^\circ$.
- β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και BLG είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Λύση

- α. Είναι: $\widehat{AKB} + \widehat{BKE} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AKB} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AKB} = 180^\circ - 120^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{AKB} = 60^\circ$$

- $\widehat{AKB} = \widehat{KBL}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\widehat{KBL} = 60^\circ$.
- $\widehat{KBL} = \widehat{BLG}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\widehat{BLG} = 60^\circ$.

Επομένως $\widehat{AKB} = \widehat{KBL} = \widehat{BLG} = 60^\circ$ (4).

- β. Τα τρίγωνα AKB και BLG έχουν:

- $AK = BL = 20\text{ cm}$, ως μισά των ίσων τμημάτων AE και BA .
- $KB = LG = 20\text{ cm}$, ως μισά των ίσων τμημάτων BZ και GE .
- $\widehat{AKB} = \widehat{BLG} = 60^\circ$

Επομένως είναι ίσα, (ΠΓΠ), οπότε $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ και $\widehat{B_2} = \widehat{G_2}$.

Είναι $AK = KB = 20\text{ cm}$, άρα το τρίγωνο AKB θα είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$.

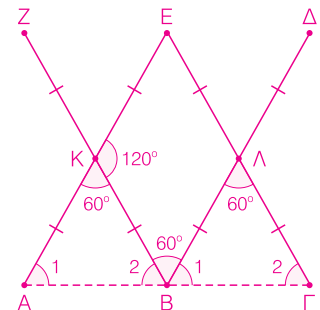
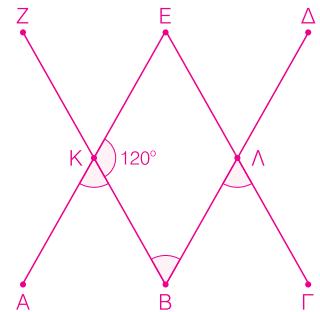
Για τις γωνίες του τριγώνου AKB ισχύει ότι

$$\widehat{A_1} + \widehat{AKB} + \widehat{B_2} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} = 180^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A_1} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_1} = 60^\circ$$

Άρα $\widehat{AKB} = \widehat{A_1} = \widehat{B_2} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο AKB θα είναι ισόπλευρο.

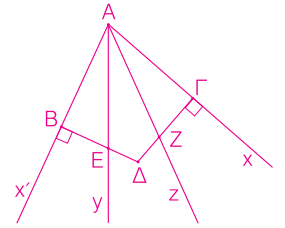
Επομένως και το ίσο του τρίγωνο BLG θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε $\widehat{BLG} = \widehat{G_2} = \widehat{B_1} = 60^\circ$.

- γ. Είναι $\widehat{ABG} = \widehat{B_2} + \widehat{KBL} + \widehat{B_1} = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $\widehat{B_2} = \widehat{B_1} = 60^\circ$, ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων AKB και BLG . Επομένως, τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.



141 Θέμα 4 - 1849

Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $\hat{x'Ax}$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $\hat{x'Ax}$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις BD και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- Το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
- Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{x'Ax}$.
- Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες.

Λύση

- Τα ορθογώνια τρίγωνα BAE και ΓAZ έχουν:
 - $AB = A\Gamma$
 - $\hat{BAE} = \hat{\Gamma AZ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AE = AZ$.

Επομένως το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

- Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
 - $AB = A\Gamma$
 - $A\Delta$ κοινή

Οπότε είναι ίσα, άρα $\hat{BA\Delta} = \hat{\Delta A\Gamma}$.

Επομένως η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\hat{x'Ax}$.

- Έστω K το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$.

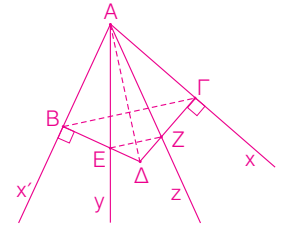
Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AK είναι διχοτόμος άρα και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma AK} + \hat{A\Gamma K} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma A\Delta} = 90^\circ - \hat{A\Gamma K}$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, οπότε $\hat{A\Gamma B} = \hat{AB\Gamma}$.

Είναι $\hat{\Gamma B\Delta} = 90^\circ - \hat{AB\Gamma} = 90^\circ - \hat{A\Gamma B} = 90^\circ - \hat{A\Gamma K}$.

Άρα $\hat{\Gamma A\Delta} = \hat{\Gamma B\Delta}$.



17. Παραλληλόγραμμο

142 Θέμα 2 - 1538

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
- Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

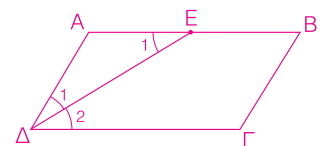
Λύση

- Είναι:
 - $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, αφού η BE διχοτόμος
 - $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

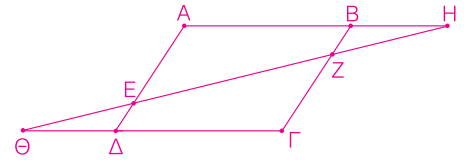
- Έχουμε:
 - $A\Delta = AE$, αφού το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές
 - $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow AB = 2AE$

Οπότε το E είναι το μέσο του AB .



143 Θέμα 2 - 1610

Στις πλευρές $ΑΔ$ και $ΒΓ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε σημεία $Ε$ και $Ζ$, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΓΖ$. Αν η ευθεία $ΖΕ$ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Η$ και $Θ$, να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{ΗΒΖ} = \hat{ΕΔΘ}$

β. $\hat{ΒΖΗ} = \hat{ΔΕΘ}$

γ. $ΒΗ = ΘΔ$

Λύση

α. Είναι $\hat{ΗΒΖ} = 180^\circ - \hat{Β} = 180^\circ - \hat{Δ} = \hat{ΕΔΘ}$.

β. Είναι:

- $\hat{ΓΖΕ} = \hat{ΑΕΖ}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{ΒΖΗ} = \hat{ΓΖΕ}$, ως κατακορυφήν
- $\hat{ΔΕΘ} = \hat{ΑΕΖ}$, ως κατακορυφήν

Οπότε $\hat{ΒΖΗ} = \hat{ΔΕΘ}$.

γ. Είναι $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΕ = ΓΖ$.

Οπότε $ΔΕ = ΑΔ - ΑΕ = ΒΓ - ΓΖ = ΒΖ$.

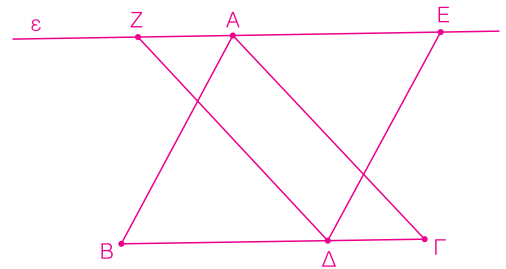
Τα τρίγωνα $ΔΕΘ$ και $ΒΖΗ$ έχουν:

- $ΔΕ = ΒΖ$
- $\hat{ΗΒΖ} = \hat{ΕΔΘ}$
- $\hat{ΒΖΗ} = \hat{ΔΕΘ}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ), άρα $ΒΗ = ΘΔ$.

144 Θέμα 2 - 13755

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $ΒΓ$. Από το τυχαίο σημείο $Δ$ της πλευράς $ΒΓ$ φέρουμε τις παράλληλες προς την $ΑΒ$ και $ΑΓ$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι :

α. τα τετράπλευρα $ΖΑΓΔ$ και $ΑΒΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμα.

β. τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα.

Λύση

α. Είναι $ΖΑ // ΔΓ$ και $ΖΔ // ΑΓ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΖΑΓΔ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

Είναι $ΑΕ // ΒΔ$ και $ΔΕ // ΒΑ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΒΔΕ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

β. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΔΕ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΒΔΕ$
- $ΑΓ = ΔΖ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΖΑΓΔ$
- $ΒΓ = ΖΕ$, διότι $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ$ και $ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ + ΔΓ + ΒΔ$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσα.

145 Θέμα 2 - 1637

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $\Delta E = B\Gamma$.

(A και E στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο.

Λύση

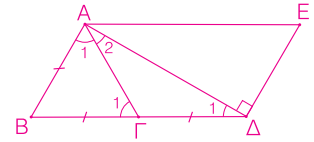
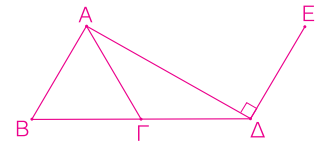
- α.** Είναι:
- $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$
 - $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 - $\Gamma A = \Gamma\Delta$, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$.

Οπότε $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Delta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

- β.** Είναι:
- $B\hat{A}\Delta = 90^\circ$, οπότε $BA \perp A\Delta$ και $E\Delta \perp A\Delta$, άρα $AB \parallel \Delta E$
 - $B\Gamma = \Delta E \Rightarrow AB = \Delta E$

Άρα το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.



146 Θέμα 2 - 13825

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα.

β. $\Delta A = AE$.

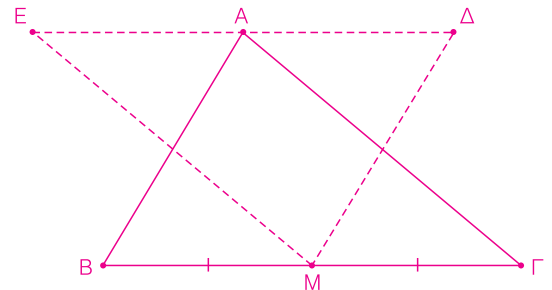
Λύση

α. Το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει $AB = \Delta M$ και $AB \parallel \Delta M$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο $A\Gamma ME$ έχει $A\Gamma = EM$ και $A\Gamma \parallel EM$ άρα είναι παραλληλόγραμμο.

- β.** Είναι:
- $\Delta A = BM$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Delta MB$
 - $AE = \Gamma M$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $A\Gamma ME$
 - το σημείο M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, επομένως $BM = \Gamma M$.

Άρα $\Delta A = AE$.



147 Θέμα 2 - 1654

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

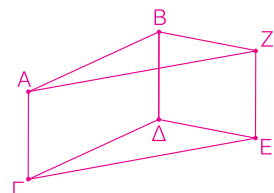
β. $\hat{ABZ} = \hat{\Gamma\Delta E}$

Λύση

α. Επειδή τα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμα έχουμε $A\Gamma \parallel B\Delta$ και $B\Delta \parallel ZE$ αντίστοιχα. Άρα $A\Gamma \parallel ZE$, οπότε το $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

- β.** Τα τρίγωνα ABZ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:
- $AB = \Gamma\Delta$, αφού το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
 - $BZ = \Delta E$, αφού το $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο
 - $AZ = \Gamma E$, αφού το $AZ\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{ABZ} = \hat{\Gamma\Delta E}$.



148 Θέμα 2 - 1687

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
β. Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

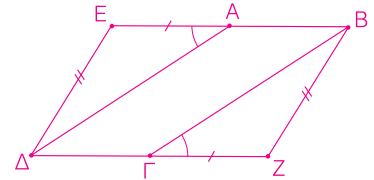
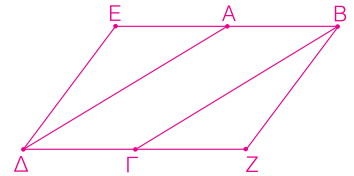
- $\Delta\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου.
- $AE = \Gamma Z$, αφού $AE = AB$, $\Gamma\Delta = \Gamma Z$ και $AB = \Gamma\Delta$, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.
- $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{E\Delta\Delta}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουμε $BZ = E\Delta$.

Είναι $EB = 2AB = 2\Gamma\Delta = \Delta Z$.

Οπότε το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

**149 Θέμα 2 - 1628**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ κάθετους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α.** $AE = \Gamma Z$
β. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

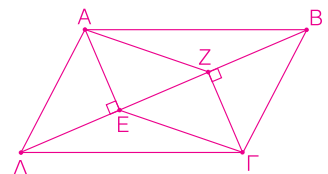
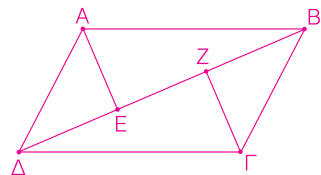
Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Delta$ και $Z\Gamma B$ έχουν:

- $\Delta\Delta = B\Gamma$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
 - $\widehat{\Delta\Delta E} = \widehat{\Gamma B Z}$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $\Delta\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$.
- Άρα είναι ίσα, οπότε $AE = \Gamma Z$.

β. Είναι: • $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, οπότε $AE \parallel \Gamma Z$
 • $AE = \Gamma Z$ (από το **α.** ερώτημα)

Άρα το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

**150 Θέμα 2 - 1678**

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.
β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.

Λύση

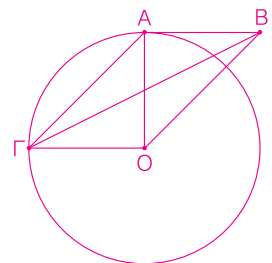
α. Είναι: • $GO \perp OA$ και $BA \perp OA$, οπότε $OG \parallel AB$
 • $OG = AB$

Άρα το $ABOG$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

β. Το ορθογώνιο τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές, αφού $OA = OG = \rho$, οπότε $\widehat{OAG} = \widehat{OGA} = 45^\circ$.

Το $ABOG$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

- $\widehat{ABO} = \widehat{OGA} = 45^\circ$
- $\widehat{GAB} = \widehat{GOB} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$



151 Θέμα 2 - 1559

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου MA του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $MA = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AMGE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

Λύση

α. Είναι $MA = AE$ και $ME = AM$.

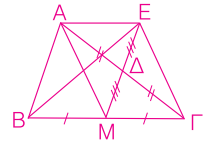
Οπότε το $AMGE$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $AE \parallel MG$, οπότε $AE \parallel BM$.

Άρα το $AEMB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε οι διαγώνιοί του BE και AM διχοτομούνται.

Άρα η BE διέρχεται από το μέσο της AM .

**152 Θέμα 2 - 1533**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και GN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $MA = BM$ και την GN (προς το N) κατά τμήμα $NE = GN$.

α. Να αποδείξετε ότι $AD \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.

β. Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Είναι $MA = MG$ και $MA = MB$, οπότε το $AD\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $AD \parallel B\Gamma$.

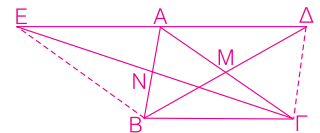
Είναι $NA = NB$ και $NE = GN$, οπότε το $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα $AE \parallel B\Gamma$.

β. Από το **α.** ερώτημα αποδείξαμε ότι από το σημείο A διέρχονται τα τμήματα AE και AD που είναι παράλληλα στη $B\Gamma$.

Όμως από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, οπότε τα τμήματα AD και AE έχουν τον ίδιο φορέα.

Άρα τα σημεία E , A και Δ είναι συνευθειακά.

**153 Θέμα 2 - 1600**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α. $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$

β. $AA' = \Gamma\Gamma'$

γ. Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Επειδή $AA' \perp B\Delta$ και $\Gamma\Gamma' \perp B\Delta$, έχουμε $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ έχουν:

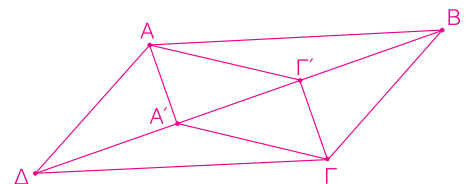
• $A\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου

• $\hat{A}\Delta A' = \hat{\Gamma}B\Gamma'$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AA' = \Gamma\Gamma'$.

γ. Από το **α.** και **β.** ερώτημα έχουμε

$AA' \parallel \Gamma\Gamma'$, οπότε το $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.



154 Θέμα 2 - 1535

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA .

Να αποδείξετε ότι:

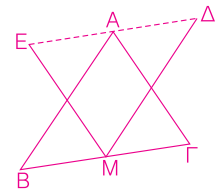
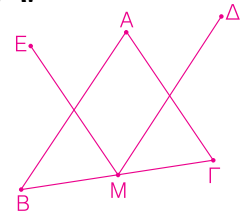
- α. $\Delta A = AE$
- β. Τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- γ. $\Delta E = B\Gamma$

Λύση

- α. • Επειδή $M\Delta \parallel AB$, το $A\Delta MB$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $\Delta A = MB$.
• Αφού $ME \parallel AG$, το $AEM\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $AE = M\Gamma$.
• Επειδή $MB = M\Gamma$, έχουμε $\Delta A = AE$.

- β. Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$, $AEM\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $\Delta A \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$. Επειδή από το A διέρχεται μοναδική παράλληλη της $B\Gamma$, τα τμήματα ΔA και AE βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Άρα τα Δ , A , E είναι συνευθειακά.

- γ. Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = BM + M\Gamma = B\Gamma$.



155 Θέμα 2 - 1534

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

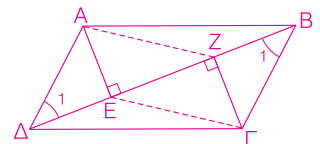
- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAE και ΓBZ είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAE και ΓBZ έχουν:
• $\Delta A = B\Gamma$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
• $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, ως εντός εναλλάξ των παράλληλων ΔA και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $B\Delta$
Άρα είναι ίσα.

- β. Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, έχουμε $AE \parallel \Gamma Z$.
Αφού τα τρίγωνα ΔAE , ΓBZ είναι ίσα, έχουμε $AE = \Gamma Z$.

Άρα $AE \parallel \Gamma Z$, οπότε το $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



156 Θέμα 2 - 1539

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta E = BZ$
- β. το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

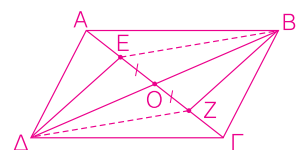
Λύση

- α. Τα τρίγωνα ΔOE και OBZ έχουν:
 - $OD = OB$
 - $OE = OZ$
 - $\hat{\Delta OE} = \hat{BOZ}$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\Delta E = BZ$.

- β. Είναι $OE = OZ$ και $OB = OD$.

Οπότε το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



157 Θέμα 2 - 13816

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $AA < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι :

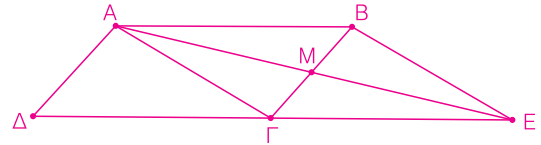
- το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

Λύση

α. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$ και του AE , οπότε στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma \parallel AB$ και από το παραλληλόγραμμο $ABE\Gamma$ έχουμε $AB \parallel \Gamma E$.

Άρα τα ευθύγραμμα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΓE είναι παράλληλα στην AB και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ , τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.



158 Θέμα 2 - 13829

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και GO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = GZ$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

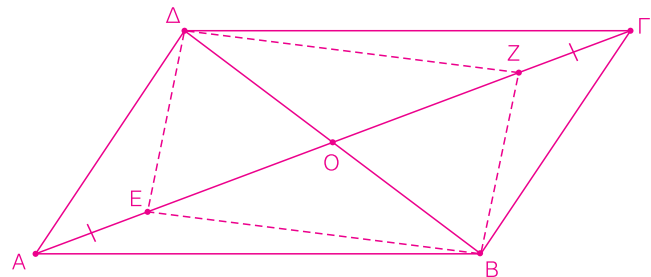
α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB έχουν:

- $AE = \Gamma Z$
- $AD = B\Gamma$, απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\hat{EAD} = \hat{ZGB}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (ΠΓΠ).

β. Είναι $OE = OA - AE$ και $OZ = OG - GZ$. Επειδή $OA = OG$, αφού το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$ έχουμε $OE = OZ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Επιπλέον $BO = OD$ αφού το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔEBZ διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.



159 Θέμα 2 - 1618

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A , B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

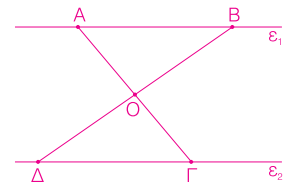
- τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

- α.** Τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ έχουν:
- $OB = OD$, αφού O μέσο του $B\Delta$
 - $\hat{AOB} = \hat{\Gamma O\Delta}$, ως κατακορυφήν
 - $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ) και έχουν: $AB = \Gamma\Delta$, $OA = O\Gamma$, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

β. Επειδή τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $AB = \Gamma\Delta$. Οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$, επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



160 Θέμα 2 - 1701

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $MA = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο

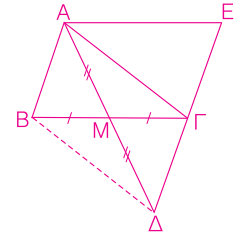
β. $BM = \frac{AE}{2}$

Λύση

α. Είναι $MB = M\Gamma$ και $MA = M\Delta$, οπότε το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AE \parallel B\Gamma$, οπότε το $AE\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $B\Gamma = AE$, οπότε $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AE}{2}$.

**161 Θέμα 2 - 1642**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

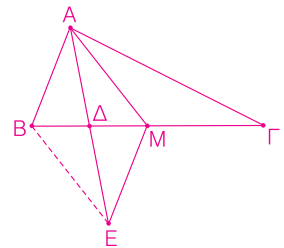
β. $ME = M\Gamma$

Λύση

α. Επειδή $\Delta B = \Delta M$ και $\Delta A = \Delta E$, το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

β. Επειδή το $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $ME = AB$.

Είναι $B\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = M\Gamma \Leftrightarrow ME = M\Gamma$.

**162 Θέμα 2 - 1557**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

Λύση

α. Είναι E το μέσο του AB και $AB = 2B\Gamma \Leftrightarrow 2AE = 2B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

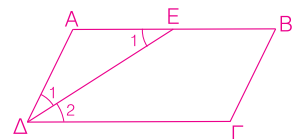
Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $B\Gamma = A\Delta$.

Άρα $AE = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι: • $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$, αφού το τρίγωνο $EA\Delta$ είναι ισοσκελές με $AE = A\Delta$.

• $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$, ως εντός εναλλάξ

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

**163 Θέμα 2 - 1531**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές

β. το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο

γ. η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου.

Λύση

α. Είναι $AB = 2BG \Leftrightarrow AB = 2AD \Leftrightarrow AB = AE$.

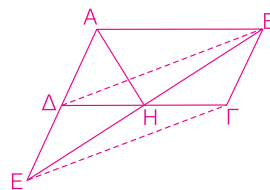
Άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές με $AB = AE$.

β. Είναι $DE = AD$ και $AD \parallel BG$.

Οπότε $DE \parallel BG$, άρα το $DEGB$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή το $DEGB$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $EH = HB$.

Οπότε η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .



164 Θέμα 2 - 1609

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

β. Το τετράπλευρο $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

• $AD = B\Gamma$

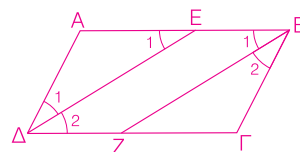
• $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{A}$

• $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, αφού τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, έχουμε $BE = \Delta Z$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

Αφού $BE \parallel \Delta Z$ το $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



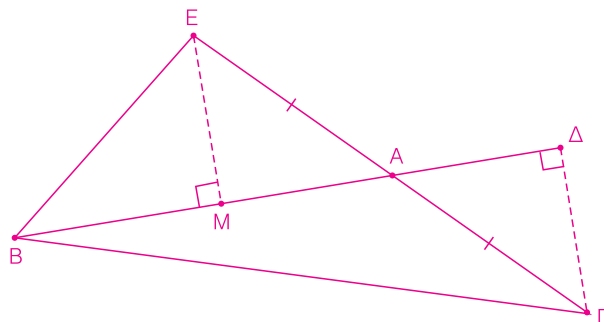
165 Θέμα 2 - 13833

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι $AH = A\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH έχουν:

i. $\hat{H} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ (γιατί $\Gamma\Delta$ και EH ύψη)

ii. $A\Gamma = AE$ (γιατί BA διάμεσος από υπόθεση)

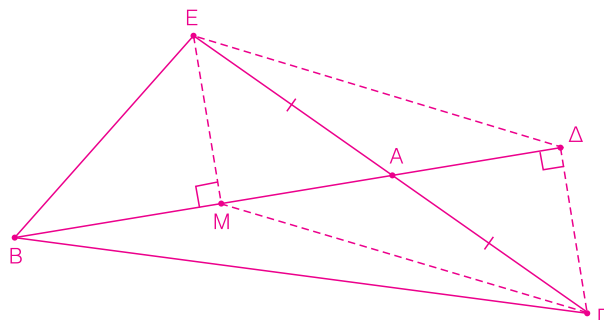
iii. $\hat{\Delta\Gamma} = \hat{EAH}$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Από την ισότητα των τριγώνων $A\Gamma\Delta$ και AEH προκύπτει ότι $A\hat{E}H = A\hat{\Gamma}\Delta$ άρα και $AH = A\Delta$ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

γ. Η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $EB\Gamma$ άρα $EA = A\Gamma$ και από το β. ερώτημα έχουμε ότι $AH = A\Delta$.

Άρα το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του $E\Gamma$ και ΔH διχοτομούνται.



166 Θέμα 2 - 13834

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Τα τρίγωνα AMZ και EMH έχουν:

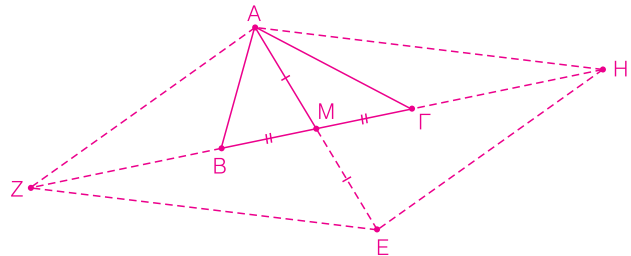
i. $AM = ME$

ii. $MZ = MH$, άθροισμα ίσων τμημάτων $MB + BZ$ και $M\Gamma + \Gamma H$

iii. $\widehat{AMZ} = \widehat{EMH}$, ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β. Έχουμε $AM = ME$ και $MZ = MH$. Επομένως στο τετράπλευρο $AHEZ$ οι διαγώνιοι AE και ZH διχοτομούνται στο σημείο M , άρα το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



167 Θέμα 4 - 13742

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

α. Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$.

β. Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

γ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

δ. Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα AM είναι διάμεσος προς τη βάση του $B\Gamma$, οπότε είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας A . Δηλαδή $AM \perp B\Gamma$ και $\widehat{BAM} = \widehat{GAM}$.

Είναι: • $KB \perp B\Gamma$ και $AM \perp B\Gamma$, οπότε $AM \parallel KB$.

• $BK = A\Gamma$ και $AB = A\Gamma$, οπότε $AB = BK$.

β. Έχουμε: • $AB = BK$ άρα το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{BAK} = \widehat{BKA}$.

• $\widehat{KAM} = \widehat{BKA}$, ως εντός εναλλάξ. Άρα $\widehat{BAK} = \widehat{BKA} = \widehat{KAM}$ (1), οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

γ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABK είναι

$$\widehat{BAK} + \widehat{KBA} + \widehat{BKA} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BKA} + \widehat{B} + 90^\circ + \widehat{BKA} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} + \widehat{B} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

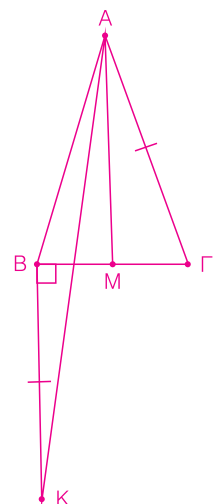
$$2\widehat{BKA} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{BKA} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$$

δ. Το τετράπλευρο $ABKM$ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του AM και BK παράλληλες.

Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι AM και BK θα ήταν και ίσες. Αν $AM = BK$ τότε θα ισχύει ότι $AM = AB$.

Όμως τα τμήματα AM και AB είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη $B\Gamma$, οπότε ισχύει ότι $AM < AB$.

Επομένως $AM < KB$ και το τετράπλευρο $ABKM$ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

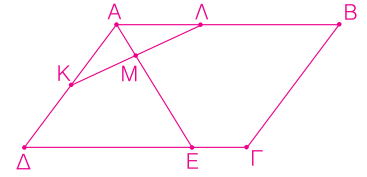


168 Θέμα 4 - 1785

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία K, Λ , των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α. $AD = DE$ β. $B\Gamma + \Gamma E = AB$ γ. $\hat{B} = 2\hat{A\Lambda K}$



Λύση

α. Επειδή $AK = A\Lambda$ το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος AM είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$, οπότε $\hat{\Delta\Lambda E} = \hat{\Lambda\Lambda M}$.

Είναι $\hat{\Lambda\Lambda M} = \hat{\Delta\Lambda E}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\hat{A\Lambda E} = \hat{\Delta\Lambda E}$.

Άρα $AD = DE$.

β. Είναι $B\Gamma + \Gamma E = AD + \Gamma E = DE + \Gamma E = \Delta\Gamma = AB$.

γ. Είναι: • $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη
• $\hat{A} + \hat{A\Lambda K} + \hat{A\Lambda K} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Lambda K} + \hat{A\Lambda K} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow 2\hat{A\Lambda K} = \hat{B}$

Άρα $\hat{B} = 2\hat{A\Lambda K}$.

169 Θέμα 4 - 1839

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.
β. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ. Τα τμήματα AG, BA, EH και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

α. Επειδή $AE \parallel \Gamma H$ το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα τρίγωνα $\Delta H\Theta$ και BEZ έχουν:

- $\Delta H = BE$, αφού $\Delta H = \Delta\Gamma - H\Gamma = AB - AE = BE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $\Delta\Theta = BZ$, από υπόθεση

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta H = EZ$, (1).

Τα τρίγωνα $A\Theta E$ και ΓHZ έχουν:

- $AE = \Gamma H$, από υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- $A\Theta = \Gamma Z$, αφού $A\Theta = AD - \Delta\Theta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$

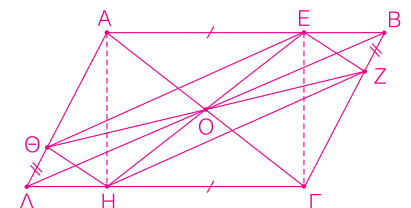
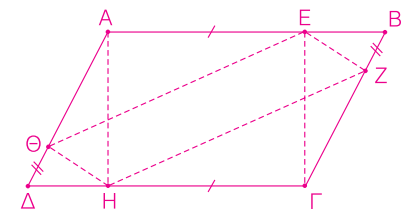
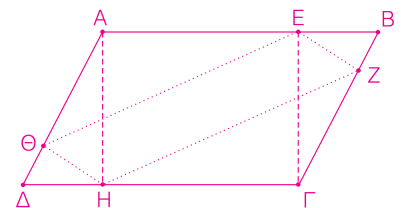
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta E = HZ$.

Επομένως το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Έστω O το μέσον της AG .

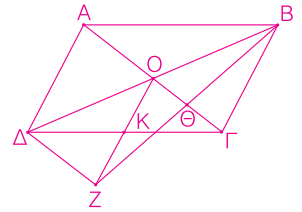
- Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η BD διέρχεται από το O .
- Επειδή το $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η EH διέρχεται από το O που είναι το μέσον της AG .
- Επειδή το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΘZ διέρχεται από το μέσον της EH που είναι το O .

Άρα οι AG, BA, EH και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



170 Θέμα 4 - 1877

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:



α. Τα τμήματα $ΟΓ$ και BZ διχοτομούνται.

β. $AO = \Delta Z$

γ. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A}OB$ και $\overset{\Delta}{A}Z\Gamma$ είναι ίσα.

Λύση

α. Επειδή $KO = KZ$ και $K\Delta = K\Gamma$, το $ΟΓΖ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma Z \parallel O\Delta$.

Οπότε $\Gamma Z \parallel OB$, επομένως το $OB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα τα $ΟΓ$ και BZ διχοτομούνται.

β. Επειδή το $ΟΔΖ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta Z = ΟΓ$ και αφού $ΟΓ = AO$, έχουμε $AO = \Delta Z$.

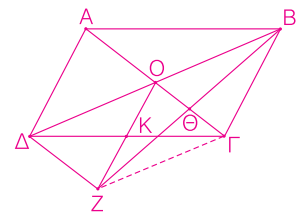
γ. Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:

- $OA = \Delta Z$

- $OB = \Gamma Z$

- $AB = \Gamma\Delta$

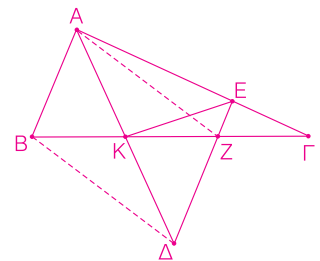
Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).



171 Θέμα 4 - 1857

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$.

Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Η EK είναι μεσοκάθετος της $A\Delta$.

γ. Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.

δ. Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Είναι: • $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$, αφού $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$

• $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$, οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AE\Delta$ η EK είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος.

Άρα η EK είναι η μεσοκάθετος του $A\Delta$.

γ. Τα τρίγωνα AKB , $K\Delta Z$ έχουν:

- $KA = K\Delta$

- $\hat{A}\hat{K}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{K}\hat{Z}$

- $\hat{B}\hat{A}\hat{K} = \hat{K}\hat{\Delta}\hat{Z}$, ως εντός εναλλάξ

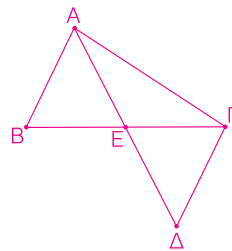
Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

δ. Επειδή τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα, έχουμε $KB = KZ$.

Επειδή $KA = K\Delta$ και $KB = KZ$, το $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

172 Θέμα 4 - 1890

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .
- ii. αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
- iii. τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.

β. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ .

Λύση

α. i. Έχουμε $EB = E\Gamma$ και $EA = E\Delta$, οπότε το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $AB = \Gamma\Delta$. Άρα η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ .

ii. Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ όσο και να προεκταθούν αποκλείεται να συναντηθούν.

iii. Φέρουμε $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp A\Delta$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα BKE και $\Gamma\Lambda E$ έχουν:

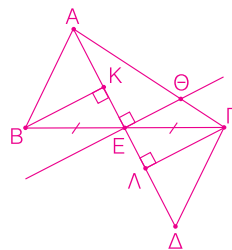
- $EB = E\Gamma$
- $\hat{B}EK = \hat{E}\Lambda\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BK = \Gamma\Lambda$.

Δηλαδή τα χωριά B, Γ ισαπέχουν από το δρόμο $A\Delta$.

β. Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα A και Δ , θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Delta$.

Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο δρόμο $A\Gamma$, θα είναι το σημείο τομής Θ της $A\Gamma$ με τη μεσοκάθετο του $A\Delta$.



173 Θέμα 4 - 1882

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και M το μέσον της AB . H κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E .

H παράλληλη από το B στην $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της EM στο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

β. Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Στο τρίγωνο AEM η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε είναι ισοσκελές.

Είναι:

- $\hat{A}\hat{E}M = \hat{A}\hat{M}E$, αφού $AE = AM$
- $\hat{A}\hat{E}M = \hat{M}\hat{\Lambda}B$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{A}\hat{M}E = \hat{B}\hat{M}\Lambda$, ως κατακορυφήν.

Άρα $\hat{B}\hat{M}\Lambda = \hat{M}\hat{\Lambda}B$, οπότε το τρίγωνο $B\Lambda M$ είναι ισοσκελές.

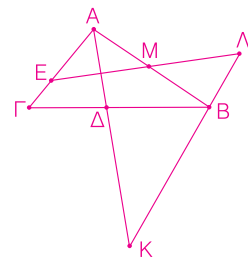
Είναι:

- $\hat{K} = \hat{\Gamma}\hat{\Lambda}\Delta$, ως εντός εναλλάξ.
- $\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}\Delta = \hat{\Delta}\hat{A}B$, γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

Άρα $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{K}$, οπότε το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

β. Από τα ισοσκελή τρίγωνα AEM και $MB\Lambda$ και επειδή το M είναι μέσο του AB , έχουμε $AE = AM = MB = B\Lambda$.

Οπότε $AE \parallel B\Lambda$, άρα το $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.



174 Θέμα 4 - 13845

Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{KBA} = \hat{\Lambda GA}$.

β. $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

γ. Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές με $KB = KA$, άρα $\hat{KBA} = \hat{KAB}$ (1).

Το τρίγωνο $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Lambda A = \Lambda\Gamma$, άρα $\hat{\Lambda\Lambda\Gamma} = \hat{\Lambda\Gamma A}$ (2).

Είναι $\hat{KAB} = \hat{\Lambda\Lambda\Gamma}$, ως κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες, άρα $\hat{KBA} = \hat{\Lambda\Gamma A}$.

β. Έστω ω και ϕ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα, οπότε $\hat{\omega} = 90^\circ + \hat{KBA}$ και $\hat{\phi} = 90^\circ + \hat{\Lambda\Gamma A}$. Επειδή $\hat{KBA} = \hat{\Lambda\Gamma A}$ έχουμε $\omega = \phi$.

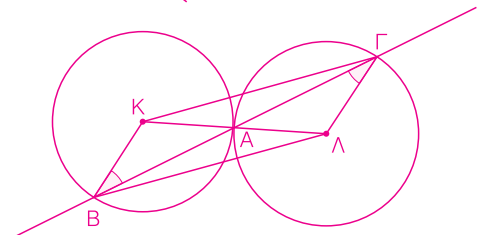
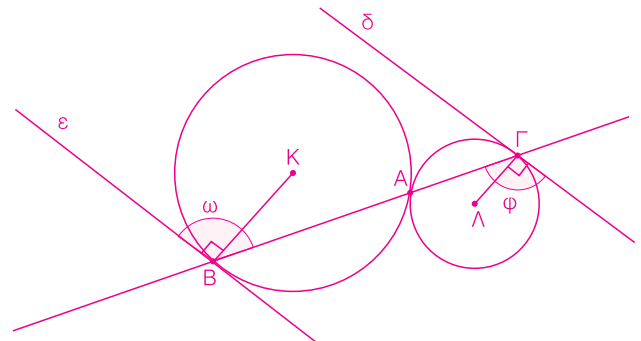
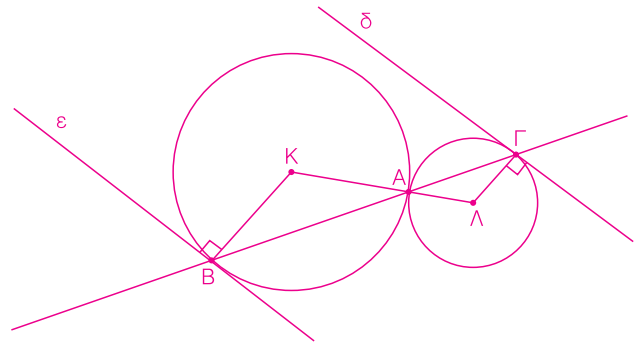
Οι ίσες γωνίες ω και ϕ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ϵ) και (δ) που τέμνονται από τη $B\Gamma$, άρα $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

γ. Για να είναι το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του KB και $\Gamma\Lambda$ να είναι ίσες και παράλληλες.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{KBA}$ και $\hat{\Lambda\Gamma A}$ των KB και $\Gamma\Lambda$ που τέμνονται από τη $B\Gamma$ είναι ίσες, άρα $KB \parallel \Gamma\Lambda$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα KB και $\Gamma\Lambda$ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ παραλληλόγραμμο θα πρέπει $R = \rho$.



175 Θέμα 4 - 1746

Στο κυρτό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta E Z$ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.

β. Αν οι πλευρές AZ και ΔE προεκτεινόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

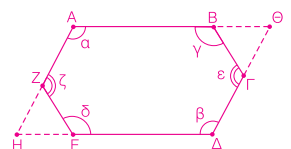
i. Οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές.

ii. Το τετράπλευρο $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ$, δηλαδή $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$.

Οπότε $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} + \hat{\beta} + \hat{\delta} + \hat{\zeta} = 720^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} + \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 720^\circ \Rightarrow 2(\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}) = 720^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 360^\circ$.



$$\begin{aligned} \beta. i. \text{ Είμαι } \hat{A} + \hat{H} &= \hat{\alpha} + 180^\circ - \hat{HZE} - \hat{HEZ} = \hat{\alpha} + 180^\circ - (180^\circ - \hat{\zeta}) - (180^\circ - \hat{\delta}) = \hat{\alpha} + 180^\circ - 180^\circ + \hat{\zeta} - 180^\circ + \hat{\delta} \\ &= \hat{\alpha} + \hat{\zeta} + \hat{\delta} - 180^\circ = \hat{\alpha} + \hat{\varepsilon} + \hat{\gamma} - 180^\circ = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

ii. Επειδή οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{H}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη και παραπληρωματικές, προκύπτει $A\Theta \parallel H\Delta$.

Όμοια έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Theta} = 180^\circ$, οπότε $AH \parallel \Theta\Delta$. Άρα το $A\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο.

176 Θέμα 4 - 1730

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. • Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε

$$AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EB \parallel \Delta Z, \text{ άρα το } \Delta EBZ \text{ είναι παραλληλόγραμμο.}$$

Οπότε ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

- Είναι: • $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ
- $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Επομένως $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Gamma}$. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

- Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής.

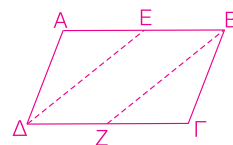
β. Ο ισχυρισμός 3 είναι αληθής, αν και μόνο αν $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{Z} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma}$.

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$, δηλαδή $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$.

$$\text{Οπότε το τρίγωνο } \Delta AE \text{ είναι ισοσκελές με } AE = A\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = A\Delta \Leftrightarrow AB = 2A\Delta.$$

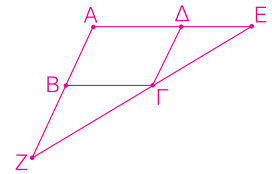
Στην περίπτωση αυτή και η BZ είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.

Άρα η ζητούμενη σχέση είναι $AB = 2A\Delta$.



177 Θέμα 4 - 1805

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β. Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Έχουμε: $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$$

Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.».

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Λύση

α. i. • Το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{B}\hat{Z}\Gamma$ και η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $B\Gamma Z$, οπότε $\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}Z + \hat{B}\hat{Z}\Gamma = 2\hat{B}\hat{\Gamma}Z$.

• Το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = \hat{\Delta}\hat{E}\Gamma$ και η $\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Delta}\hat{E}\Gamma = 2\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$.

Έχουμε $\hat{B} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow 2\hat{B}\hat{\Gamma}Z = 2\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$.

ii. Είναι $\hat{B}\hat{\Gamma}Z + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E = \hat{B}\hat{Z}\Gamma + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{Z}\Gamma = 2\hat{B}\hat{Z}\Gamma + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}\hat{B}\Gamma + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ$.

Άρα τα Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β. Το λάθος είναι ότι θεώρησε ως δεδομένο ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά, ώστε να αποδείξει ότι $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$.

178 Θέμα 4 - 1731

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύουν $AB > A\Delta$ και γωνία A αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.

α. Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β. Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. • Είναι $EB \parallel \Delta Z$ και $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EB = \Delta Z$.

Οπότε το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

- Τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:
- $\Delta\Delta = B\Gamma$
 - $\Delta E = \Gamma Z$, ως μισά ίσων τμημάτων
 - $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

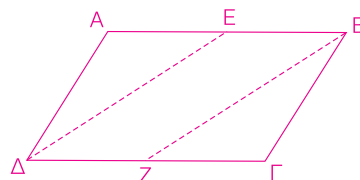
Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β. Έστω ότι τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή.

Τότε θα ισχύει $\Delta\Delta = \Delta E \Leftrightarrow \Delta\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2\Delta\Delta$.

Και αντιστρόφως, αν $AB = 2\Delta\Delta$, τότε $\Delta\Delta = \Delta E$, οπότε τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ θα είναι ισοσκελή.

Άρα τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.



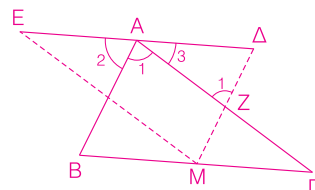
179 Θέμα 4 - 1810

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α. Τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

β. Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ. Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:



$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB \parallel M\Delta$ που τέμνονται από AZ)

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB \parallel M\Delta$ που τέμνονται από ΔE)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta\Delta Z$).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$.

Οπότε Δ , E , A συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

Λύση

α. Επειδή: • $M\Delta \parallel AB$, το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Delta\Delta \parallel B\Gamma$, (1)

• $ME \parallel \Gamma\Gamma$, το $\Gamma\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma$, (2)

Από το A διέρχεται μόνο μία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

β. Επειδή τα $ABM\Delta$ και $\Gamma\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα, έχουμε $\Delta A = MB$ και $\Delta E = M\Gamma$.

Είναι $\Delta E = \Delta A + \Delta E = MB + M\Gamma = B\Gamma$.

Άρα $\Pi_{M\Delta E} = M\Delta + ME + \Delta E = AB + \Gamma\Gamma + B\Gamma = \Pi_{AB\Gamma}$.

γ. Το λάθος του μαθητή βρίσκεται στον ισχυρισμό του ότι $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$, θεωρώντας ότι η ευθεία ΔE διέρχεται από το A . Δηλαδή θεώρησε δεδομένο ότι τα σημεία Δ , A , E είναι συνευθειακά.

180 Θέμα 4 - 1709

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β. Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Άρα η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

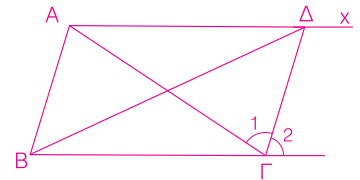
β. Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $\hat{\Gamma}_{εξ} = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma}_2 = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_2 = \hat{A}$.

Άρα η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

γ. Είναι $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}$, οπότε $\hat{\Gamma}_{εξ} = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 2\hat{A} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{A}$.

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



18. Ορθογώνιο

181 Θέμα 2 - 1599

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. $M\Delta = M\Gamma$

β. Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

Λύση

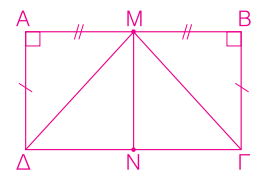
α. Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- $AM = MB$, διότι το M είναι μέσο του AB

Άρα είναι ίσα, οπότε $M\Delta = M\Gamma$.

β. Στο ισοσκελές $M\Gamma\Delta$ η MN είναι διάμεσος, οπότε και ύψος.

Άρα η ευθεία MN είναι η μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$.



182 Θέμα 2 - 1692

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα

β. το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $A\Delta = B\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AN = K\Gamma$

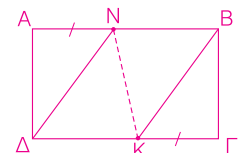
Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $AB \parallel \Gamma\Delta$.

Είναι $AN = K\Gamma$, οπότε $BN = AB - AN = \Gamma\Delta - K\Gamma = K\Delta$

Επομένως $NB \parallel K\Delta$.

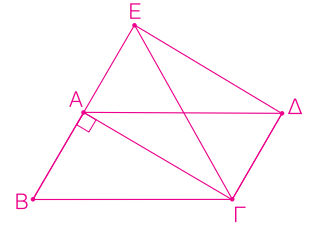
Άρα το $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



183 Θέμα 2 - 1653

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και το $ΑΓΔΕ$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

- α. Το σημείο A είναι μέσο του BE .
- β. Το τρίγωνο $BEΓ$ είναι ισοσκελές.
- γ. $\hat{BΓA} = \hat{AΔE}$



Λύση

- α. Είναι:
 - $AB = ΓΔ$, (1) και $AB // ΓΔ$, (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$.
 - $AE = ΓΔ$, (3) και $AE // ΓΔ$, (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ΑΓΔΕ$.

Από τις (2), (4) έχουμε $AB // AE$, οπότε τα B , A και E είναι συνευθειακά.

Επειδή $AB = AE$, από τις (1), (3) έχουμε ότι A είναι μέσο του BE .

- β. Στο τρίγωνο $BEΓ$ το $ΓA$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

- γ. Είναι:
 - $\hat{BΓA} = \hat{ΓAΔ}$, ως εντός εναλλάξ
 - $\hat{ΓAΔ} = \hat{AΔE}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα $\hat{BΓA} = \hat{AΔE}$.

184 Θέμα 2 - 1668

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AΓ$ και M το μέσο της πλευράς $BΓ$. Στα σημεία B και $Γ$ φέρουμε κάθετες στη $BΓ$ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία $Δ$ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $MΔ = ME$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Τα τμήματα $BΔ$ και $ΓE$ είναι ίσα.
- β. Το τετράπλευρο $BΔEΓ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

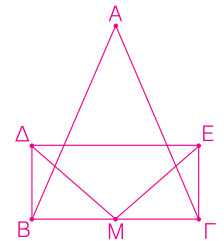
Λύση

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BΔM$ και $ΓEM$ έχουν:
 - $MΔ = ME$
 - $MB = MΓ$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BΔ = ΓE$.

- β. Είναι $BΔ \perp BΓ$ και $ΓE \perp BΓ$, οπότε $BΔ // ΓE$.

Επειδή $BΔ // ΓE$, το $BΔEΓ$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\hat{ΔBΓ} = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.



185 Θέμα 2 - 1683

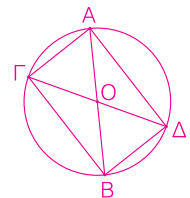
Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:

- α. Οι χορδές $AΓ$ και BA του κύκλου είναι ίσες.
- β. Το τετράπλευρο $AΓBA$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

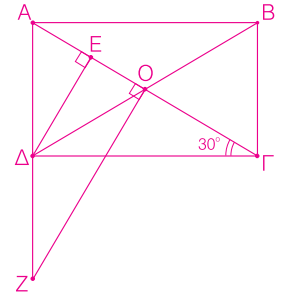
- α. Είναι $\hat{AOG} = \hat{BOΔ}$, οπότε $\widehat{AΓ} = \widehat{BA}$, άρα $AΓ = BA$.

- β. Στο τετράπλευρο $AΓBA$ οι διαγώνιοι AB και $ΓΔ$ διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα το $AΓBA$ είναι ορθογώνιο.



186 Θέμα 4 - 1729

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.



- α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ χωρίζεται από τη $ΔΕ$ και τη διαγώνιο $ΔΒ$ σε τρεις ίσες γωνίες.
- β. Φέρουμε κάθετη στην $ΑΓ$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα.

Λύση

- α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:
- $\bullet$ $\Delta A\Gamma$ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$
 - $\bullet$ $\Delta A E$ είναι $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$, οπότε $\hat{A\hat{D}E} = 30^\circ$

Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $ΟΓ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = ΟΔ$.

Επομένως το τρίγωνο $ΟΓΔ$ είναι ισοσκελές με βάση $ΔΓ$, οπότε $\hat{ΟΔ\Gamma} = \hat{ΟΓΔ} = 30^\circ$.

Είναι: $\hat{A\hat{D}E} + \hat{E\hat{D}O} + \hat{O\hat{D}\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \hat{E\hat{D}O} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E\hat{D}O} = 30^\circ$.

Επομένως $\hat{A\hat{D}E} = \hat{E\hat{D}O} = \hat{O\hat{D}\Gamma} = 30^\circ$.

Άρα η γωνία $\hat{A\hat{D}\Gamma}$ χωρίζεται από τις $ΔΕ$ και $ΔΒ$ σε τρεις ίσες γωνίες.

- β. Το τρίγωνο $ΟΑΔ$ είναι ισοσκελές με $ΟΑ = ΟΔ$ και είναι $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 60^\circ$ οπότε $\hat{\Delta\hat{A}E} = 60^\circ$.

Άρα το ισοσκελές τρίγωνο $ΟΑΔ$ είναι ισόπλευρο με $ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ$.

Όμως $ΑΔ = ΒΓ$, οπότε $ΟΑ = ΒΓ$.

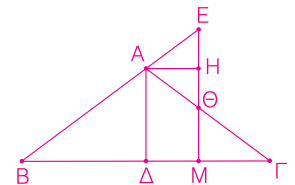
Τα ορθογώνια τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ έχουν:

- $\bullet$ $ΟΑ = ΒΓ$
- $\bullet$ $\hat{A\hat{G}B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \hat{Z\hat{A}O}$

Άρα είναι ίσα.

187 Θέμα 4 - 14887

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $ΒΓ$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $ΒΓ$ που τέμνει τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $ΑΔ$ και $ΑΗ$ τα ύψη των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΘΕ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- α. $\hat{\Delta\hat{A}H} = 90^\circ$

- β. Το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές.

- γ. $M\Theta + ME = 2ΑΔ$

Λύση

- α. Το $ΑΗΜΔ$ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{\Delta} = \hat{M} = \hat{H} = 90^\circ$.

Άρα $\hat{\Delta\hat{A}H} = 90^\circ$.

- β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΜΒ$ έχουμε $\hat{E} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{E} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Είναι $\hat{A\hat{\Theta}E} = \hat{M\hat{\Theta}\Gamma}$, ως κατακορυφήν και $\hat{M\hat{\Theta}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΜΘΓ$,

οπότε $\hat{A\hat{\Theta}E} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$.

Επομένως $\hat{E} = \hat{A\hat{\Theta}E}$, άρα το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές.

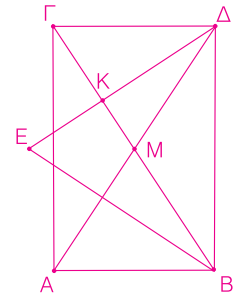
- γ. Το $ΑΔΜΗ$ είναι ορθογώνιο, οπότε $MH = ΑΔ$.

Το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε το ύψος $ΑΗ$ είναι και διάμεσος, άρα $\Theta H = H E$.

Είναι $M\Theta + ME = MH - H\Theta + MH + HE = 2MH - H\Theta + H\Theta = 2ΑΔ$.

188 Θέμα 4 - 1833

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσό του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $MA = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E . Να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. $\hat{KEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

γ. $\Delta E = B\Delta$

Λύση

α. Επειδή $MA = M\Delta$ και $M\Gamma = MB$, το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή επιπλέον έχει $\hat{A} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

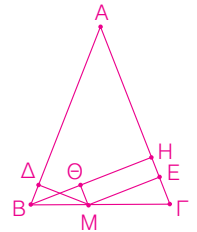
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KEB έχουμε $\hat{KEB} = 90^\circ - \hat{KBE} \Leftrightarrow \hat{KEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

γ. Είναι $\hat{\Delta BE} = 90^\circ - \hat{EBA} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

Οπότε $\hat{\Delta BE} = \hat{KEB}$. Άρα $\Delta E = B\Delta$.

189 Θέμα 4 - 1800

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

β. $B\Theta = M\Delta$

γ. Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$.

Λύση

α. Στο τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι $\hat{E} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $M\Theta \perp BH$ και $\Gamma H \perp BH$, άρα $M\Theta \parallel A\Gamma$.

Οπότε $\hat{BM\Theta} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη και αφού $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ έχουμε $\hat{BM\Theta} = \hat{B}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBM και ΔBM έχουν:

- MB κοινή
- $\hat{BM\Theta} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Theta = M\Delta$.

γ. Είναι $M\Delta + ME = B\Theta + \Theta H = BH$.

190 Θέμα 4 - 13746

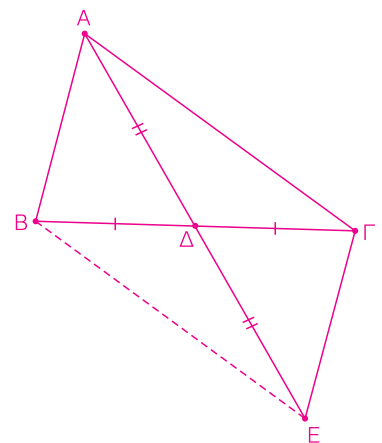
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = \Delta E$.

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν.

β. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α. i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $A\Delta = \Delta E$,
- $B\Delta = \Delta\Gamma$,
- $\hat{A}\Delta B = \hat{E}\Delta\Gamma$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AB = \Gamma E$ (1)

i. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ έχουμε:

$$AE < A\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow AE < A\Gamma + AB \Leftrightarrow 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

Άρα η διάμεσος $A\Delta$ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που την περιέχουν.

β. • Έχουμε $2A\Delta = B\Gamma \Leftrightarrow AE = B\Gamma$, άρα στο τετράπλευρο $ABE\Gamma$ οι διαγωνίες του είναι ίσες.

• Είναι $A\Delta = \Delta E$ και $B\Delta = \Delta\Gamma$, δηλαδή οι διαγωνίες του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

Επομένως στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 90^\circ$, αφού το $ABE\Gamma$ ορθογώνιο, άρα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

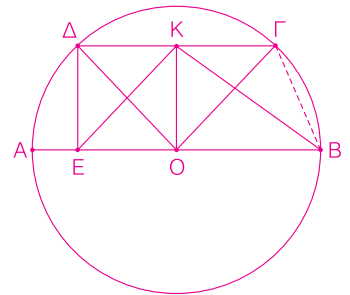
191 Θέμα 4 - 1879

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $K\Gamma O E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $\hat{\Delta E K} = \frac{\hat{\Delta O \Gamma}}{2}$

γ. $KE < KB$



Λύση

α. Επειδή το σημείο K είναι το μέσο της χορδής $\Gamma\Delta$, έχουμε $OK \perp \Gamma\Delta$.

Είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $\Delta E \perp AB$, άρα $\Delta E \perp \Delta\Gamma$.

Στο $\Delta K O E$ είναι $\hat{\Delta} = \hat{E} = \hat{K} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $EO = \Delta K$ και αφού $\Delta K = K\Gamma$ έχουμε $EO = K\Gamma$.

Επομένως $EO \parallel K\Gamma$, άρα το $K\Gamma O E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ ($O\Gamma = O\Delta$) , η OK είναι διάμεσος, οπότε είναι και διχοτόμος, άρα $\hat{K O \Gamma} = \frac{\hat{\Delta O \Gamma}}{2}$.

Οι γωνίες $\hat{\Delta E K}$ και $\hat{K O \Gamma}$ είναι ίσες, ως οξείες με πλευρές παράλληλες, άρα $\hat{\Delta E K} = \hat{K O \Gamma}$.

Επομένως $\hat{\Delta E K} = \frac{\hat{\Delta O \Gamma}}{2}$.

γ. Είναι $KE = O\Delta$, ως διαγωνίοι του ορθογώνιου $\Delta E O K$ και $O\Delta = O B$, ως ακτίνες του κύκλου.

Άρα $KE = O B$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O B K$, η KB είναι υποτείνουσά του, οπότε $O B < KB$.

Άρα $KE < KB$

2^{ος} τρόπος

Είναι $KO \perp AB$ και $EO < AO = O B$, άρα για τα πλάγια τμήματα KE και KB έχουμε $KE < KB$.

192 Θέμα 4 - 1733

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α. Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$

ii. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β. Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. i. Η ευθεία ε_1 είναι η μεσοκάθετος του MM_1 , οπότε $OM = OM_1$.

ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο OMM_1 η διάμεσος OK είναι και διχοτόμος, άρα $\widehat{MOM_1} = 2\widehat{O_2}$.

Επειδή στο τρίγωνο M_1OM_2 η OL είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα η OL είναι και διχοτόμος και ισχύει $M_1\widehat{OM_2} = 2\widehat{O_3}$.

Τότε $M\widehat{OM_2} = M\widehat{OM_1} + M_1\widehat{OM_2} = 2\widehat{O_2} + 2\widehat{O_3} = 2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

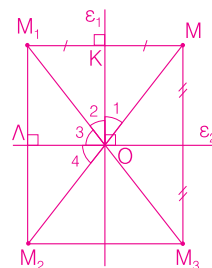
Αφού η γωνία $M\widehat{OM_2}$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το KM_1LO είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\widehat{K} = \widehat{L} = \widehat{O} = 90^\circ$.

Επειδή το KM_1LO είναι ορθογώνιο έχουμε $\widehat{M_1} = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β. Τα M_1 και M_3 είναι τα συμμετρικά του M ως προς τις ε_1 και ε_2 . Από το **α.ii.** ερώτημα έχουμε ότι τα M_1, O και M_3 είναι συνευθειακά. Είναι

$OM_1 = OM = OM_2 = OM_3$, οπότε στο $MM_1M_2M_3$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.



193 Θέμα 4 - 1891

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του $AP, BE, \Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

β. το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

γ. $\Lambda N \parallel AB$

δ. $\Lambda N = AB - A\Delta$

Λύση

α. Είναι:

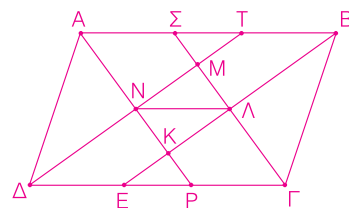
• $\widehat{A\Delta T} = \widehat{T\Delta E}$ και $\widehat{T\Delta E} = \widehat{A\hat{T}\Delta}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\widehat{A\Delta T} = \widehat{A\hat{T}\Delta}$, άρα το τρίγωνο $\Delta\Delta T$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AT$.

• $\widehat{\Gamma BE} = \widehat{E\hat{B}T}$ και $\widehat{E\hat{B}T} = \widehat{B\hat{E}\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\widehat{\Gamma BE} = \widehat{B\hat{E}\Gamma}$.

Άρα το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές με $\Gamma B = \Gamma E$.

Είναι $BT = AB - AT = AB - A\Delta = \Gamma\Delta - B\Gamma = \Gamma\Delta - \Gamma E = \Delta E$

Επειδή $BT \parallel \Delta E$, το ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.



β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔDT η διχοτόμος του AN είναι και ύψος, οπότε $AN \perp DT$, άρα $\widehat{M\hat{N}K} = 90^\circ$, και $DT \parallel BE$, οπότε είναι $AN \perp BE$, άρα $\widehat{N\hat{K}L} = 90^\circ$.

• Στο ισοσκελές τρίγωνο BGE η διχοτόμος της GL είναι και ύψος, οπότε $GL \perp BE$, άρα $\widehat{M\hat{L}K} = 90^\circ$. Επειδή το $KLMN$ έχει τρεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο.

γ. Το ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο και τα N, Λ είναι τα μέσα των τμημάτων DT, BE που είναι ίσα. Άρα $NT \parallel BL$, οπότε το $TBAN$ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως $NL \parallel AB$.

δ. Είναι $NL = BT = AB - AT = AB - AD$.

194 Θέμα 4 - 13699

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο M .

α. Να αποδείξετε ότι:

- οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ .
- το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

β. Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Οι ακτίνες των δυο κύκλων στα σημεία επαφής B και Γ είναι κάθετες στην (ε) , οπότε θα είναι $KB \parallel \Lambda\Gamma$.

Η ΛM δεν είναι κάθετη στην (ε) , γιατί αν η ΛM ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε) , η ΛM και η $\Lambda\Gamma$ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, ρ_2) με την ευθεία (ε) , που είναι άτοπο, και αφού η ΛM τέμνει την $\Lambda\Gamma$ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την KB έστω σε σημείο Δ .

β. • Είναι $K\Delta \parallel \Lambda\Gamma$, οπότε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Lambda_2}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

• Η $\Delta\Lambda$ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου M στον κύκλο (Λ, ρ_2) , οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\hat{\Lambda}A$ δηλαδή $\widehat{\Lambda_2} = \widehat{\Lambda_1}$ (2).

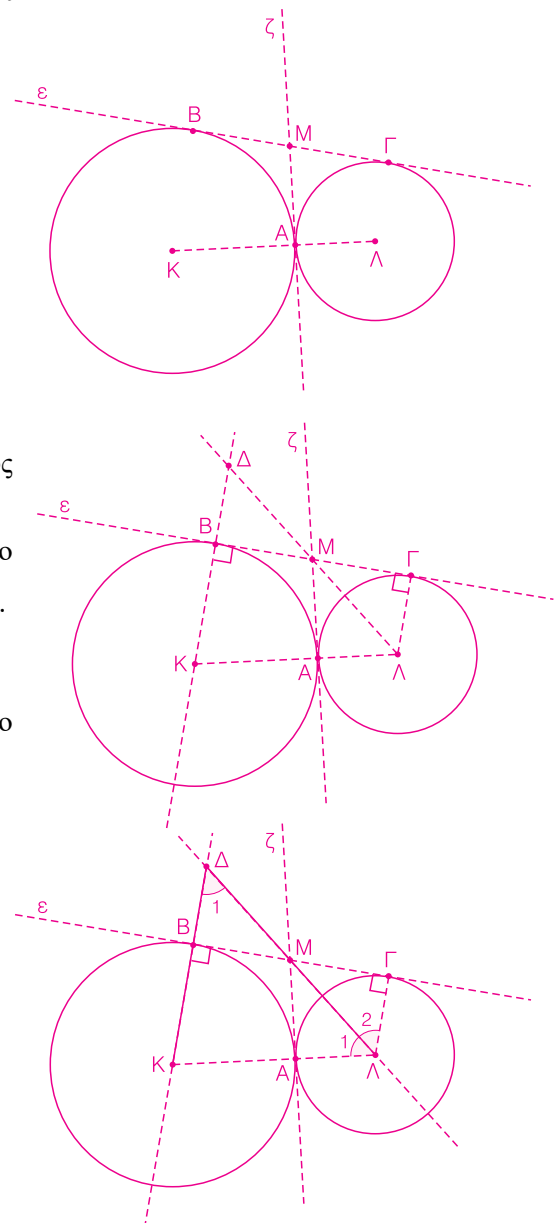
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Lambda_1}$, οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

γ. Το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ με ίσες πλευρές τις $K\Lambda, KB$ θα είναι ορθογώνιο όταν $\widehat{\Delta K\Lambda} = 90^\circ$.

Αν $\widehat{\Delta K\Lambda} = 90^\circ$ τότε $K\Lambda \perp K\Delta$, οπότε $K\Lambda \parallel (\varepsilon)$, άρα το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma B$ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίες, τις $\widehat{\Delta K\Lambda}$, $\widehat{K\hat{B}\Gamma}$ και $\widehat{\Lambda\hat{\Gamma}B}$.

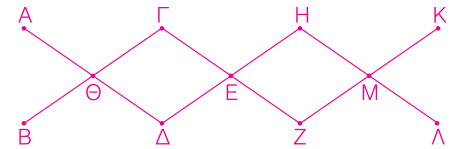
Αν το $K\Lambda\Gamma B$ είναι ορθογώνιο τότε $KB = \Lambda\Gamma \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ θα είναι ορθογώνιο.



195 Θέμα 4 - 1714

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου
($ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΓΖ$, $ΔΗ$, $ΖΚ$, $ΗΛ$)



που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά

($Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, $Θ$, $Ε$, $Μ$, $Η$, $Κ$, $Λ$, $Ζ$)

Αν το σημείο $Θ$, είναι μέσο των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ενώ το σημείο $Ε$ είναι μέσο των τμημάτων $ΓΖ$ και $ΔΗ$, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $ΓΗΖΔ$ είναι ορθογώνιο.
- β. Τα σημεία $Β$, $Δ$, $Ζ$ είναι συνευθειακά.
- γ. Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Επειδή στο $ΓΗΖΔ$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

β. Όμοια το $ΑΓΔΒ$ είναι ορθογώνιο.

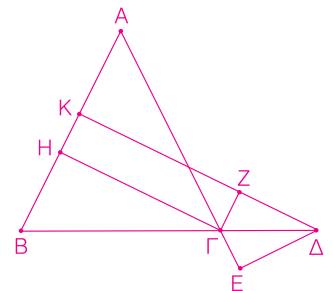
Είναι $\hat{ΒΔΖ} = \hat{ΒΔΓ} + \hat{ΓΔΖ} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε τα $Β$, $Δ$, $Ζ$ είναι συνευθειακά.

γ. Το $ΓΘΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές ίσες.

Οπότε $ΘΔ // ΓΕ \Rightarrow 2\Theta\Delta // 2\Gamma E \Rightarrow A\Delta // \Gamma Z$, άρα το $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

196 Θέμα 4 - 1816

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο $Δ$ στην προέκταση της $ΒΓ$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΚ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και $ΔΕ$ κάθετη στην προέκταση της $ΑΓ$. Από το σημείο $Γ$ φέρουμε $ΓΗ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και $ΓΖ$ κάθετη στην $ΚΔ$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Η γωνία $ΖΓΔ$ είναι ίση με τη γωνία $Β$.
- β. Η $ΓΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΖΓΕ$.
- γ. Το τρίγωνο $ΔΖΕ$ είναι ισοσκελές.
- δ. $ΔΚ - ΔΕ = ΗΓ$

Λύση

α. Επειδή $ΓΖ \perp ΚΔ$ και $ΑΒ \perp ΚΔ$, έχουμε $ΓΖ // ΑΒ$, οπότε $\hat{Β} = \hat{ΖΓΔ}$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $\hat{ΔΓΕ} = \hat{Γ} = \hat{Β} = \hat{ΖΓΔ}$, οπότε η $ΓΔ$ είναι η διχοτόμος της $ΖΓΕ$.

γ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΔΓ$ και $ΕΔΓ$ έχουν:

- $ΓΔ$ κοινή
- $\hat{ΖΓΔ} = \hat{ΔΓΕ}$

Οπότε είναι ίσα, άρα το $\triangle ΔΖΕ$ είναι ισοσκελές.

δ. Το $ΚΖΓΗ$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει $\hat{Κ} = \hat{Η} = \hat{Ζ} = 90^\circ$, οπότε $ΗΓ = ΚΖ$.

Είναι $ΔΚ - ΔΕ = ΔΚ - ΔΖ = ΚΖ = ΗΓ$.

197 Θέμα 4 - 13523

Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α. Να αποδείξετε ότι $AE = BD$.

β. Να αποδείξετε ότι $AE \perp ED$.

γ. i. Αν οι AD και BE τέμνονται στο O , τότε να αποδείξετε ότι $2BO = AD$.

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την AD που διέρχεται από το B . Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

α. Στο εξάγωνο $ABΓΔEZ$ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

Τα τρίγωνα AZE και $BΓΔ$ έχουν:

- $AZ = BΓ = \lambda$
- $ZE = ΓΔ = \lambda$
- $\hat{AZE} = \hat{BΓΔ} = \varphi$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AE = BD$.

β. Το άθροισμα των γωνιών του εξαγώνου είναι $(2n - 4)$ ορθές, δηλαδή $(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^\circ = 720^\circ$.

Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο AZE ($AZ = ZE$) οι γωνίες της βάσης $\hat{ZAE}$ και $\hat{ZEA}$ θα είναι ίσες και ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{Z} + \hat{ZAE} + \hat{ZEA} &= 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZAE} + \hat{ZEA} = 180^\circ - \hat{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\hat{ZEA} &= 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ZEA} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{ZEA} = 30^\circ \end{aligned}$$

Άρα $\hat{AED} = \hat{ZED} - \hat{ZEA} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, οπότε $AE \perp ED$.

γ. i. Επειδή: • $AB = ED$ και $AE = BD$, το $AEDB$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

• $AE \perp ED$ το $AEDB$ έχει μία γωνία ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

Οι διαγώνιες του AD και BE είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως

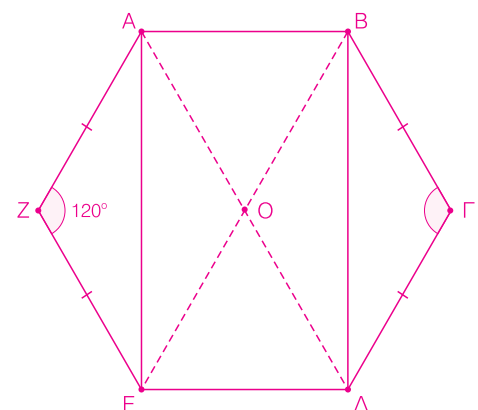
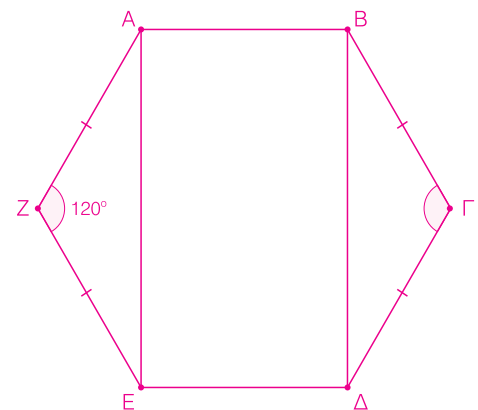
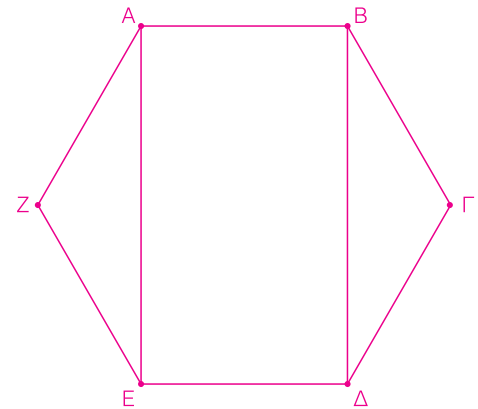
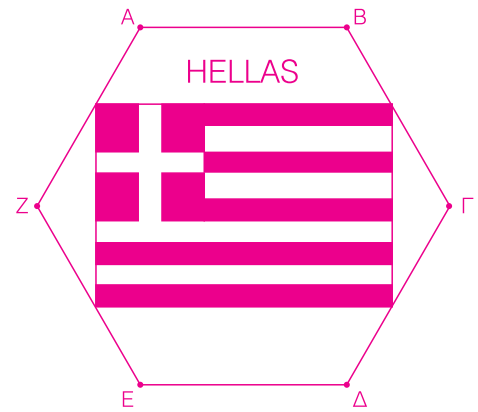
$$BO = \frac{BE}{2} = \frac{AD}{2}.$$

Άρα $2BO = AD$.

ii. Από το i. έχουμε $BO = AO = OD$, επομένως, τα A, B, Δ ισαπέχουν από το O .

Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα OB .

Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



19. Ρόμβος

198 Θέμα 2 - 1681

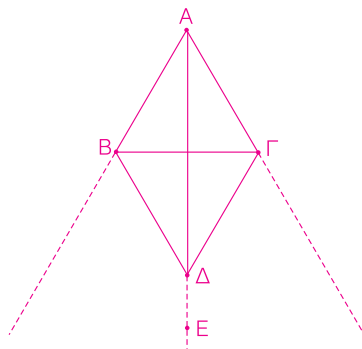
Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).
- Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ .

Λύση

α. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε η EA είναι η διχοτόμος της $\hat{A}$, επομένως το E ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ της $\hat{A}$.

β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα EA είναι η μεσοκάθετος του $B\Gamma$, οπότε το E ισαπέχει από τα B και Γ .



199 Θέμα 2 - 1570

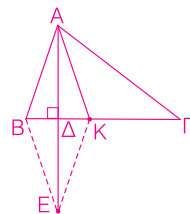
Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος.

Λύση

α. Στο τρίγωνο ABK το $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Είναι $\Delta A = \Delta E$ και $\Delta B = \Delta K$, οπότε το $AKEB$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει $AB = AK$ είναι ρόμβος.



200 Θέμα 2 - 1679

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M .

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma OB$ είναι ρόμβος.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Gamma OB$.

Λύση

α. Το OM είναι απόστημα της χορδής $B\Gamma$, οπότε το M είναι μέσο της $B\Gamma$.

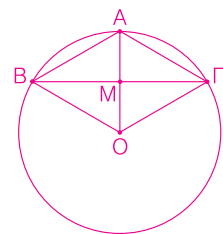
Στο τετράπλευρο $A\Gamma OB$ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.

Άρα το $A\Gamma OB$ είναι ρόμβος.

β. Είναι $OA = OB = OG = \rho$, $OG = A\Gamma$ και $OB = AB$.

Οπότε τα τρίγωνα OAG και OAB είναι ισόπλευρα.

Άρα στο $A\Gamma OB$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{O} = \hat{A} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

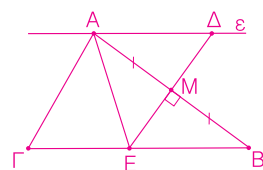


201 Θέμα 1630

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$. Φέρουμε από τη κορυφή A ευθεία ε παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την ε στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

- Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $E A = E B$.
- Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ρόμβος.

Λύση



α. Επειδή η ΔΕ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ έχουμε $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:

- $MA = MB$
- $\hat{\Delta AM} = \hat{MBE}$ ως εντός εναλλάξ

Οπότε είναι ίσα.

γ. Από το β. ερώτημα προκύπτει $\Delta A = EB$, οπότε το ΑΔΒΕ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

202 Θέμα 2 - 1584

Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο.

β. Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

Λύση

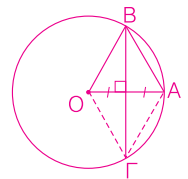
- α. Είναι:
- $OA = OB = \rho$
 - $BO = BA$, αφού η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΟΑ

Άρα $OA = OB = BA$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

β. Το Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΟΑ, οπότε $\Gamma A = \Gamma O = \rho$

Επομένως $OB = BA = AG = \Gamma O = \rho$.

Άρα το ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.



203 Θέμα 2 - 1575

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp BG$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

β. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

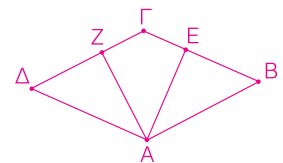
Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:

- $\Delta A = AB$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ έχουν:

- $AZ = AE$
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta A = AB$. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.



204 Θέμα 2 - 13767

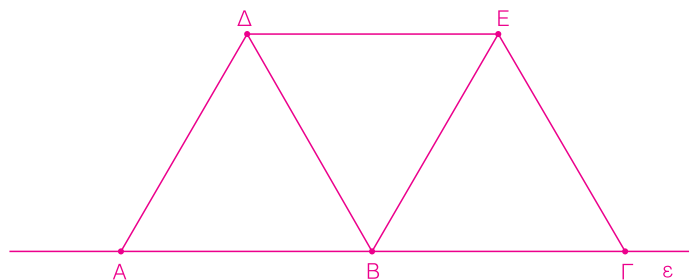
Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε $AB = BG$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta BE}$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

Λύση



α. Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων $\triangle A\Delta$ και $\triangle B\Gamma E$ είναι 60° καθεμιά.

Είναι

$$\begin{aligned}\widehat{A\Delta} + \widehat{\Delta B E} + \widehat{E B \Gamma} &= 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \widehat{\Delta B E} + 60^\circ = 180^\circ \\ &\Leftrightarrow \widehat{\Delta B E} = 60^\circ\end{aligned}$$

β. Έχουμε

$$AB = A\Delta = B\Delta, \quad B\Gamma = BE = \Gamma E \quad \text{και} \quad AB = B\Gamma$$

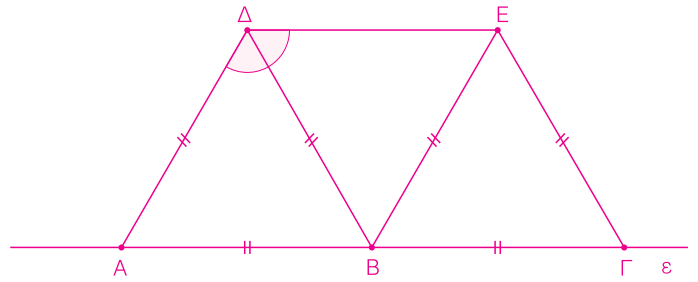
Οπότε $B\Delta = BE$, άρα το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση ΔE , οπότε $\widehat{B\Delta E} = \widehat{B E \Delta}$.

Στο τρίγωνο $B\Delta E$ ισχύει:

$$\widehat{B\Delta E} + \widehat{B E \Delta} + \widehat{\Delta B E} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta E} + \widehat{B\Delta E} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B\Delta E} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta E} = 60^\circ \quad \text{άρα και} \quad \widehat{B E \Delta} = 60^\circ$$

Αφού οι γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$ είναι ίσες με 60° το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι $\Delta E = BE = B\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $A\Delta E B$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $A\Delta = AB = \Delta E$ άρα είναι ρόμβος.



205 Θέμα 2 - 13832

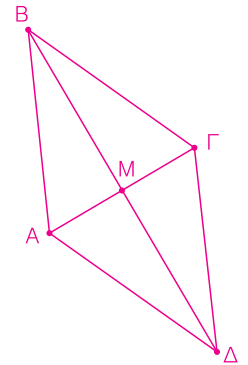
Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης $\widehat{A M B} = \widehat{G M B}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.

ii. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



Λύση

α. i. Είναι: • $\widehat{A M B} = \widehat{G M B}$

• $\widehat{A M B} + \widehat{G M B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A M B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A M B} = 90^\circ$. Άρα $\widehat{A M B} = \widehat{G M B} = 90^\circ$. Επομένως οι $B\Delta$ και $A\Gamma$ είναι κάθετες.

ii. Το M είναι μέσο των διαγωνίων του $AB\Gamma\Delta$, άρα οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

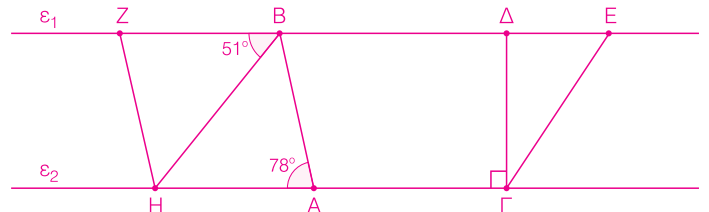
Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες.

β. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, επομένως κάθε πλευρά έχει μήκος $30 : 4 = 7,5$ μέτρα. Επομένως, αν αφήσουμε την πλευρά AB χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε $30 - 7,5 = 22,5$ μέτρα φράχτη.

206 Θέμα 2 - 13842

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ABZH$ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{BAH} = 78^\circ$, $\widehat{ZBH} = 51^\circ$ και η $A\Gamma\Delta$ είναι ορθή.



α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$.

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ. Αν η γωνία $\widehat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Λύση

- α. Το $ABZH$ είναι ρόμβος, οπότε η διαγώνιος του BH διχοτομεί τη γωνία του $\widehat{ABZ}$, άρα $\widehat{ABH} = \widehat{ZBH} = 51^\circ$.
- β. Είναι $\widehat{ABZ} = \widehat{ABH} + \widehat{ZBH} = 102^\circ$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $\widehat{ABZ} = 102^\circ$ και $\widehat{BAH} = 78^\circ$, των ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την AB είναι παραπληρωματικές. Επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
- γ. Η $\Gamma\Delta$ τέμνει κάθετα την ε_2 , άρα τέμνει κάθετα και την ε_1 που είναι παράλληλη της ε_2 .
- Επομένως το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο, άρα $\widehat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{E} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

207 Θέμα 4 - 1840

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του BA , τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.
- γ. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο.

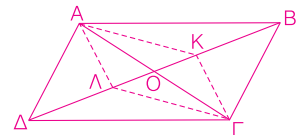
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

- α. Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ του $AB\Gamma\Delta$. Επειδή $OB = OD$ και $BK = \Lambda\Delta$ είναι

$$OB - BK = OD - \Lambda\Delta \Leftrightarrow OK = O\Lambda.$$

Αφού $OK = O\Lambda$ και $OA = OG$, το $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγωνιοί του διχοτομούνται.



- β. Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $A\Gamma \perp B\Delta$, οπότε και στο παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ είναι $A\Gamma \perp K\Lambda$. Άρα το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

- γ. Το παραλληλόγραμμο $AK\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο, όταν $A\Gamma = K\Lambda \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{1}{3}B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 3A\Gamma$.

208 Θέμα 4 - 1740

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

- α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
- β. Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

Λύση

- α. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $AE \perp B\Gamma$, $AZ \perp \Delta\Gamma$

Απόδειξη πρότασης Π1:

- Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

- $A\Delta = AB$
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

Απόδειξη πρότασης Π2:

- Έστω ότι $AE = AZ$.

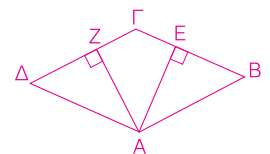
Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

- $AZ = AE$
- $\widehat{\Delta} = \widehat{B}$ αφού το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

Οπότε είναι ίσα, άρα $A\Delta = AB$.

Επομένως το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

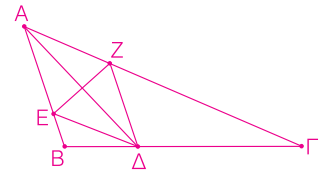
- β. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.



209 Θέμα 4 - 1844

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = DG$.

Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η DZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:



α. Τα τμήματα ED και AG είναι παράλληλα.

β. Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

γ. Τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται.

Λύση

- α. Είναι:
- $\Delta A = \Delta \Gamma$, οπότε $\hat{\Delta A \Gamma} = \hat{\Gamma} = \hat{\phi}$
 - $\hat{A \Delta B}$ εξωτερική στο $\hat{A \Delta \Gamma}$, οπότε $\hat{A \Delta B} = \hat{\Delta A \Gamma} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\phi}$

Επειδή η DE είναι η διχοτόμος της $\hat{A \Delta B}$, έχουμε $\hat{E \Delta A} = \frac{\hat{A \Delta B}}{2} = \frac{2\hat{\phi}}{2} = \hat{\phi}$.

Επομένως $\hat{E \Delta A} = \hat{\Delta A \Gamma}$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $ED \parallel AG$.

β. Είναι $\hat{E \Delta A} = \hat{\Delta A Z} = \hat{\phi}$, αφού η AD διχοτόμος της $\hat{A}$.

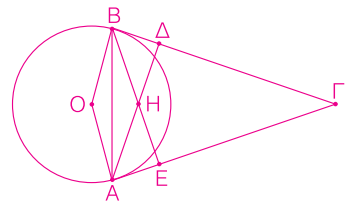
Οπότε $\hat{E \Delta A} = \hat{E \Delta A} = \hat{\phi}$, άρα το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή $DE \parallel AZ$ και $ZD \parallel AE$, το $AZDE$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιοι του AD και EZ διχοτομούνται.

210 Θέμα 4 - 1823

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B .

Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.

γ. Τα σημεία O , H , Γ είναι συνευθειακά.

Λύση

α. Είναι $AG = BG$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ .

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB .

Τα ορθογώνια τα τρίγωνα ABE και ABD έχουν:

- AB κοινή
- $\hat{A \Delta B} = \hat{B \Delta A}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση AB του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

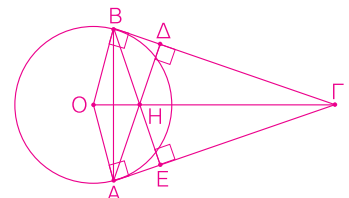
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $\hat{A \Delta E} = \hat{B \Delta A}$.

Επομένως το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές με βάση την AB .

- β. Είναι:
- $OA = OB = \rho$
 - $OA \perp AG$ και $BE \perp AG$, οπότε $OA \parallel BE$
 - $OB \perp BG$ και $AD \perp BG$, οπότε $OB \parallel AD$

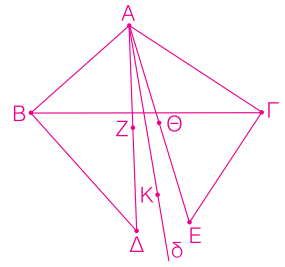
Επειδή $OA \parallel BH$ και $OB \parallel AH$, το $OBHA$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $OA = OB$ είναι ρόμβος.

γ. Αφού $OA = OB$, $HA = HB$ και $GA = GB$, τα O , H και Γ ανήκουν στη μεσοκάθετο του BA , οπότε είναι συνευθειακά.



211 Θέμα 4 - 1869

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα BD κάθετο στην AB και με $BD = A\Gamma$ και τμήμα GE κάθετο στην $A\Gamma$ με $GE = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των AD και AE καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\angle DAE$.



- Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.
- Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι το K ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .
- Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

Λύση

- Τα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Delta$ ($\hat{B} = 90^\circ$) και $\Gamma A E$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) έχουν:
 - $AB = \Gamma E$
 - $BD = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα, άρα $AD = AE$.

- Τα τρίγωνα AKZ και $A\Theta K$ έχουν:
 - $AZ = A\Theta$ ως μισά ίσων τμημάτων
 - AK κοινή
 - $\angle ZAK = \angle K A \Theta$, αφού η $A\delta$ διχοτόμος

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $KZ = K\Theta$.

- $K\Theta = KZ$, από το β. ερώτημα
 - $KZ = AZ$, από υπόθεση
 - $AZ = A\Theta$, ως μισά ίσων τμημάτων.

Άρα $K\Theta = KZ = AZ = A\Theta$, οπότε το $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

212 Θέμα 4 - 13745

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της βάσης $B\Gamma$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

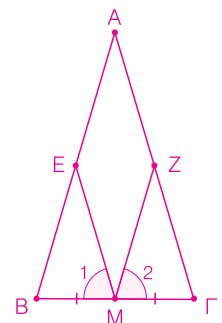
- Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
 - $ME = MZ$.
 - Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$.
- Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:
 - Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Lambda\Delta$;
 - Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου $AK\Lambda\Delta$ με την περίμετρο του ρόμβου $AEMZ$ του ερωτήματος α. ii. και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

Λύση

- Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε:

- $ME \parallel A\Gamma$, οπότε το E θα είναι μέσο της AB και $ME = \frac{A\Gamma}{2}$ (1)
- $MZ \parallel AB$, θα είναι Z το μέσο της $A\Gamma$ και $MZ = \frac{AB}{2}$ (2)

Είναι $AB = A\Gamma$, οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ME = MZ$.



ii. Είναι $ME \parallel AG$ ή $ME \parallel AZ$ και $MZ \parallel AB$ ή $MZ \parallel AE$, οπότε το τετράπλευρο $AEMZ$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ME και MZ είναι ίσες, οπότε το $AEMZ$ είναι ρόμβος.

Η περίμετρος του ρόμβου είναι $AE + EM + MZ + AZ = 4AE = 4 \frac{AB}{2} = 2AB$.

β. i. Οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ είναι παράλληλες, άρα το $AK\Delta\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

Θα αποδείξουμε ότι το $AK\Delta\Lambda$, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του $B\Gamma$ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

• Είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$.

Οπότε το $BK\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $K\Delta = KB$, (1).

• Είναι $\hat{B} = \hat{\Delta}_2$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$.

Άρα το τρίγωνο $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma$ (2).

Επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $\hat{BK\Delta}$ και $\hat{\Gamma\Lambda\Delta}$, θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο M της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{BK\Delta}$ και $\hat{\Gamma\Lambda\Delta}$ αντίστοιχα, να είναι ίσες).

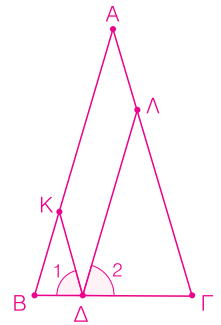
Οι πλευρές ΔK και $\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΠΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα.

Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες, επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ είναι

$$AK + K\Delta + \Delta\Lambda + \Lambda A = AK + KB + \Gamma\Lambda + \Lambda A = AB + AG = AB + AB = 2AB$$

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερή και ίση με $2AB$.



213 Θέμα 4 - 13857

α. Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AG και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

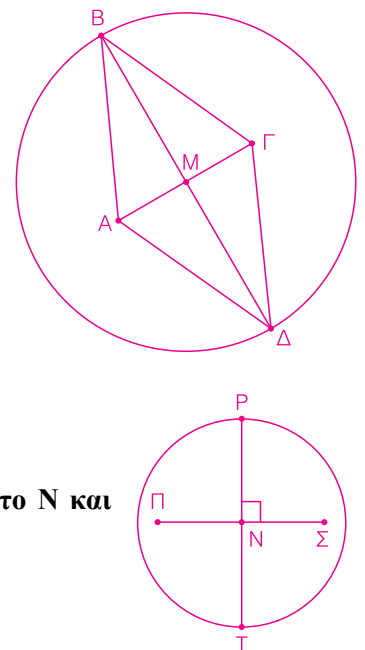
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

γ. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $\Pi\Sigma$ τέμνονται κάθετα στο N και $\Pi N = N\Sigma$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .

Να αποδείξετε ότι $\Pi P = P\Sigma = \Sigma T = T\Pi$.

Λύση



α. Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ, άρα $AM = MG$.

Επιπλέον $BM = MD$, οπότε οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι οι $BD \perp AG$, οπότε οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, άρα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β. Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα **α.**, άρα είναι αληθής.

Η Πρόταση 2 είναι ψευδής.

Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.

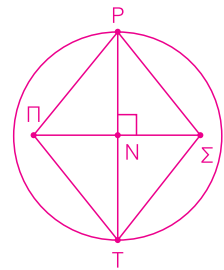
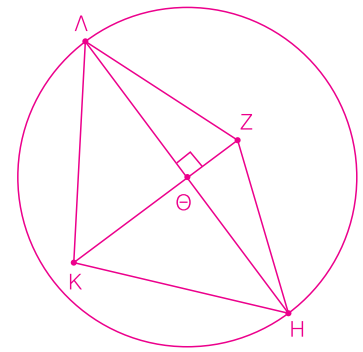
Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος. Πράγματι ισχύει $K\Theta > \Theta Z$, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, επομένως δεν είναι και ρόμβος.

γ. Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ.

Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και $ΠΝ = ΝΣ$, από την υπόθεση.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος **β.**) που αποδείχθηκε στο **α.** το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος. Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Δηλαδή $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$.



20. Τετράγωνο

214 Θέμα 2 - 1651

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες:

- $\hat{A}BE$
- $\hat{B}EA$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $\hat{A}B\Gamma = 60^\circ$.

Οπότε $\hat{A}BE = \hat{A}B\Gamma + \hat{E}B\Gamma = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{B}EA = \hat{B}AE$

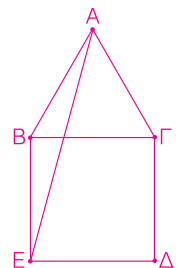
Στο τρίγωνο ΒΕΑ έχουμε $\hat{B}EA + \hat{B}AE + \hat{A}BE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B}EA + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B}EA = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{B}EA = 15^\circ$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- $AB = A\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- $BE = \Gamma\Delta$, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\Gamma B + \hat{B}\Gamma\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \hat{A}BE$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ) οπότε $AE = A\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.



215 Θέμα 2 - 1652

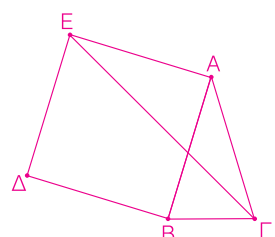
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.

β. $2 \cdot \hat{E}GA = 90^\circ - \hat{B}AG$

Λύση



α. Είναι $AB = AE$ ως πλευρές τετραγώνου και $AB = AG$ από υπόθεση. Άρα $AE = AG$, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές.

β. Επειδή το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές έχουμε $\widehat{AEG} = \widehat{EAG}$.

Στο τρίγωνο AEG είναι $\widehat{EAG} + \widehat{AEG} + \widehat{EGA} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{EAG} + \widehat{EAB} + \widehat{BAG} = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{EAG} + 90^\circ + \widehat{BAG} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{EAG} = 90^\circ - \widehat{BAG}$$

216 Θέμα 2 - 1643

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ABZ και AED είναι ίσα.

β. Οι γωνίες $\widehat{EAG}$ και $\widehat{AZB}$ είναι ίσες.

Λύση

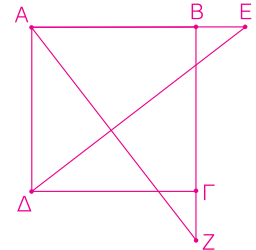
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και AED έχουν:

- $AB = AD$
- $BZ = AE$, ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Οπότε είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ABZ και AED , είναι ίσα έχουμε $\widehat{AED} = \widehat{AZB}$.

Είναι $\widehat{AED} = \widehat{EAG}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\widehat{EAG} = \widehat{AZB}$.



217 Θέμα 2 - 13536

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α. Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

β. Να αποδείξετε ότι $\widehat{EZH} = 90^\circ$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα BEZ και ΓZH έχουν:

- $\widehat{EBZ} = \widehat{Z\Gamma H} = 90^\circ$
- $BE = \Gamma Z$
- $BE = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και BE , ΓZ .

Οπότε είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα $ZE = ZH$.

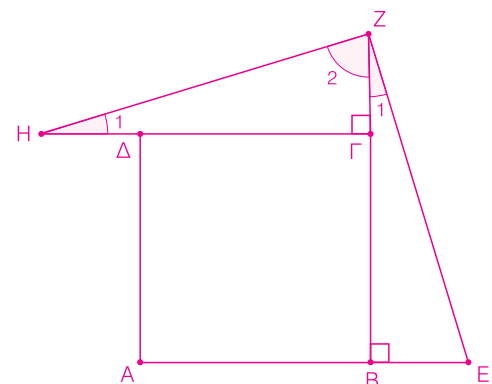
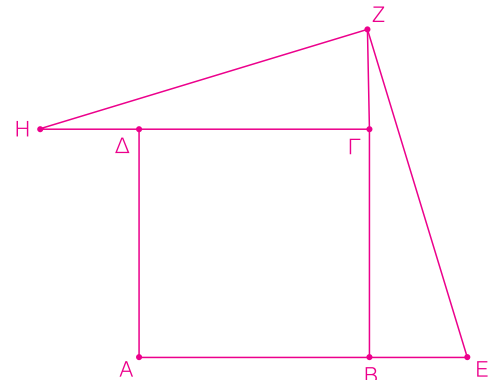
β. Από την ισότητα των τριγώνων BEZ και ΓZH έχουμε ότι

$$\widehat{Z_1} = \widehat{H_1} \quad (1),$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓZH έχουμε $\widehat{H_1} + \widehat{Z_2} = 90^\circ \quad (2).$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\widehat{Z_1} + \widehat{Z_2} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EZH} = 90^\circ.$$



218 Θέμα 2 - 14883

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

β. Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να είναι τετράγωνο;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

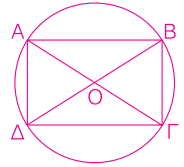
Λύση

α. Είναι $OA = OG = OB = OD = \rho$.

Στο $ΑΒΓΔ$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι ίσες αφού $ΑΓ = ΒΔ = 2\rho$.

Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

β. Για να είναι το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ τετράγωνο, πρέπει να είναι και ρόμβος, οπότε πρέπει οι διαγώνιοι του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ να είναι και κάθετες.



219 Θέμα 4 - 13744

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΒΓ$ προς το $Β$ και προς το $Γ$ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Αν P είναι το σημείο τομής των $ΑΖ$ και $ΔΕ$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{B}\hat{Z}\hat{A}$ είναι ίσες.

ii. Τα τμήματα $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετα.

β. Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος $ΑΒ$.

Λύση

α. i. Είναι $AB = BG$ και $BE = GZ$, οπότε $AE = BZ$ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Τα τρίγωνα $ΔΑΕ$ και $ΑΒΖ$ έχουν:

- $\hat{\Delta A E} = \hat{A B Z} = 90^\circ$,
- $AD = AB$,
- $AE = BZ$,

Άρα είναι ίσα, οπότε $\hat{A E \Delta} = \hat{B Z A}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι $\hat{A_1} = \hat{B Z A} = 90^\circ$, αλλά $\hat{B Z A} = \hat{A E \Delta}$, οπότε

$$\hat{A_1} + \hat{A E \Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A_1} + \hat{A E P} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο $ΑΕΡ$ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90° , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90° .

Δηλαδή $\hat{A P E} = 90^\circ$, άρα τα τμήματα $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετα.

β. Είναι: • $PB = AB$, άρα το τρίγωνο $ΒΑΡ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A_1} = \hat{P_1}$.

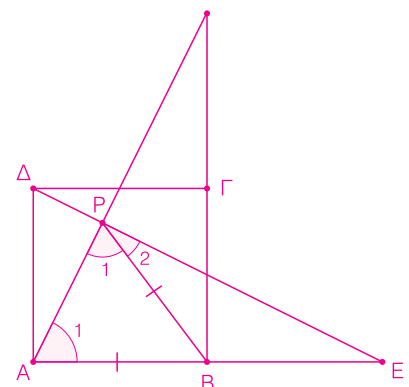
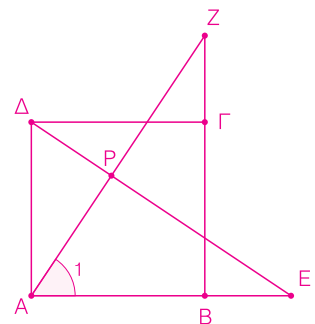
$$\hat{A_1} + \hat{A E P} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{P_1} + \hat{A E P} = 90^\circ \quad (1)$$

$$\hat{P_1} + \hat{P_2} = 90^\circ \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{A E P} = \hat{P_2} \Leftrightarrow \hat{B E P} = \hat{P_2}$, άρα το τρίγωνο $ΒΕΡ$ είναι ισοσκελές με

$$EB = PB \Leftrightarrow BE = AB.$$

Άρα η θέση του σημείου E προσδιορίζεται στην προέκταση του $ΑΒ$ ώστε $BE = AB$.



220 Θέμα 4 - 1814

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει την $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Delta A E} = 15^\circ$

β. Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα.

γ. Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta \Gamma M}$.

Λύση

α. Το τρίγωνο $B\Gamma M$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{M B \Gamma} = 60^\circ$

Έχουμε $\hat{A B M} + \hat{M B \Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A B M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A B M} = 30^\circ$.

- Είναι:
- $BM = B\Gamma$, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $MB\Gamma$
 - $BA = B\Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

Επομένως $BA = BM$, οπότε το τρίγωνο BAM είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B A M} = \hat{B M A}$.

Στο τρίγωνο ABM έχουμε $\hat{A B M} + \hat{B A M} + \hat{B M A} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\hat{B A M} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B A M} = 75^\circ$.

Οπότε $\hat{\Delta A E} = 90^\circ - \hat{B A M} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

- β. Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ έχουν:
- ΔE κοινή
 - $\Delta A = \Delta \Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
 - $\hat{\Delta A E} = \hat{\Delta \Gamma E}$ αφού η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

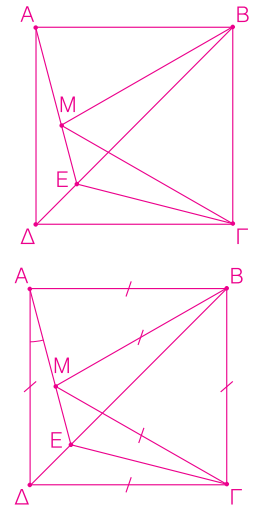
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε $\hat{\Delta A E} = \hat{\Delta \Gamma E} \Leftrightarrow \hat{\Delta \Gamma E} = 15^\circ$ (1).

Επειδή το $B\Gamma M$ είναι ισόπλευρο είναι $\hat{B \Gamma M} = 60^\circ$.

Έχουμε $\hat{\Delta \Gamma B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta \Gamma E} + \hat{E \Gamma M} + \hat{B \Gamma M} = 90^\circ \Leftrightarrow 15^\circ + \hat{E \Gamma M} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E \Gamma M} = 15^\circ$, (2).

Από (1) και (2) έχουμε $\hat{\Delta \Gamma E} = \hat{E \Gamma M}$, άρα η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta \Gamma M}$.

**221 Θέμα 4 - 1788**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{E A H} = \hat{A B \Gamma} + \hat{A \Gamma B}$

β. $E\Gamma = BH$

γ. Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .

Λύση

α. Είναι $\hat{E A H} = 360^\circ - \hat{E A B} - \hat{H A \Gamma} - \hat{B A \Gamma} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \hat{A B \Gamma} - \hat{A \Gamma B}) = \hat{A B \Gamma} + \hat{A \Gamma B}$

- β. Τα τρίγωνα $E A \Gamma$ και $B A H$ έχουν:
- $EA = AB$
 - $A\Gamma = AH$
 - $\hat{E A \Gamma} = \hat{B A H} = 90^\circ + \hat{B A \Gamma}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $E\Gamma = BH$

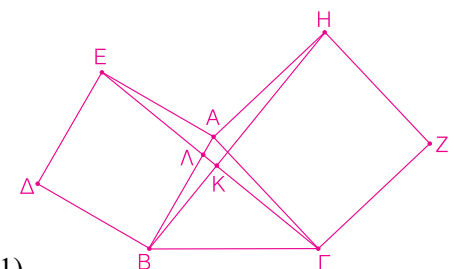
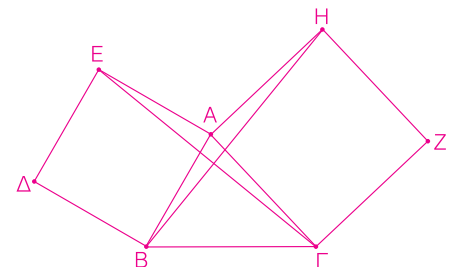
γ. Έστω K το σημείο τομής των $E\Gamma$, BH και Λ το σημείο τομής των AB , $E\Gamma$ αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{B K \Lambda} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A B K} + \hat{B \Lambda K} = 90^\circ$, (1)

Επειδή τα τρίγωνα $E A \Gamma$ και $B A H$ είναι ίσα έχουμε $\hat{A B K} = \hat{A E \Gamma}$.

Είναι $\hat{B \Lambda K} = \hat{A \Lambda E}$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A E \Lambda$ είναι $\hat{A E \Lambda} + \hat{A \Lambda E} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A B K} + \hat{B \Lambda K} = 90^\circ$.

Οπότε η (1) ισχύει.



222 Θέμα 4 - 1795

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.
Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση του AM τέτοιο
ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

- $\Gamma\Lambda = AE$
- Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και $E\Lambda H$ είναι ίσες.
- Η προέκταση του MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .

Λύση

α. Επειδή $MA = M\Lambda$ και $MB = M\Gamma$, το $A\Gamma\Lambda B$ είναι
παραλληλόγραμμο, οπότε $\Gamma\Lambda = AB$.
Είναι $AB = AE$, ως πλευρές τετραγώνου, οπότε $\Gamma\Lambda = AE$.

β. Είναι: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma} + \hat{B}$, αφού $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{B}$, ως εντός εναλλάξ

$$\bullet \hat{E}\hat{A}\hat{H} = 360^\circ - \hat{E}\hat{A}\hat{B} - \hat{H}\hat{A}\hat{\Gamma} - \hat{A} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{A} = 180^\circ - \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$$

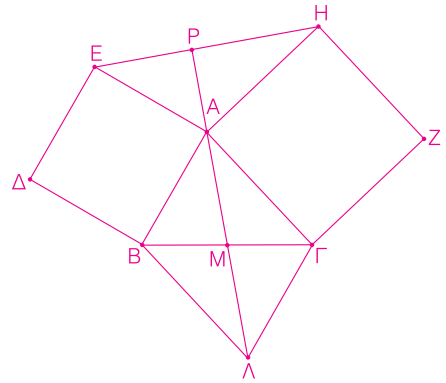
Οπότε $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{E}\hat{A}\hat{H}$.

- γ. Τα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}$ και $\hat{E}\hat{A}\hat{H}$ έχουν:
- $\bullet \Gamma\Lambda = AE$, από το α. ερώτημα
 - $\bullet \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{E}\hat{A}\hat{H}$, από το β. ερώτημα

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{H}\hat{E}$, (1).

Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}\hat{P}\hat{H} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{P}\hat{A}\hat{H} + \hat{P}\hat{H}\hat{A} = 90^\circ$.

$$\text{Είναι } \hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{H} + \hat{P}\hat{A}\hat{H} = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{A}\hat{H}\hat{E} + 90^\circ + \hat{P}\hat{A}\hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{P}\hat{H}\hat{A} + \hat{P}\hat{A}\hat{H} = 90^\circ.$$



223 Θέμα 4 - 13850

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ
διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Φέρουμε ΓO κάθετη στη BZ και την
προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος.
- Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο;

Λύση

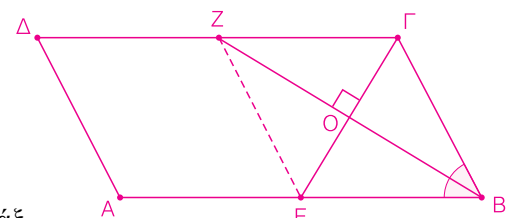
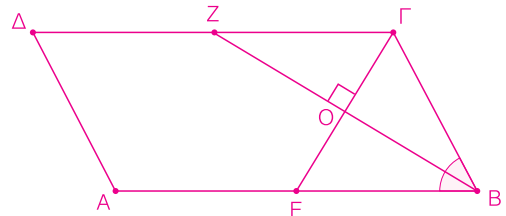
α. Η BZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $BO \perp \Gamma E$.
Επομένως, η BO στο τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το
τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά EB .

- β. Τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE έχουν:
- $\bullet \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{Z} = \hat{E}\hat{O}\hat{B} = 90^\circ$
 - $\bullet O\Gamma = OE$
 - $\bullet \hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{O} = \hat{B}\hat{E}\hat{O}$, ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες
μία προς μία.

γ. Από τη σύγκριση στο ερώτημα β. έχουμε $OZ = OB$ και είναι $O\Gamma = OE$. Το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι
παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓE και BZ διχοτομούνται στο σημείο O και επειδή είναι και κάθετες είναι ρόμβος.

δ. Για να είναι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ.) και ορθογώνιο
άρα θα πρέπει $\hat{B} = 90^\circ$.



224 Θέμα 4 - 1750

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $GM = AN$. Να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta N = \Delta M$
 β. $\Delta N \perp \Delta M$

Λύση

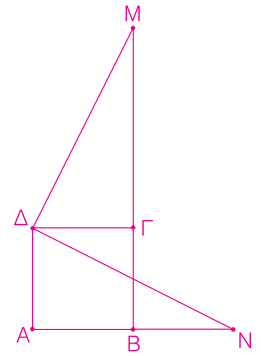
- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Gamma\Delta M$ έχουν:
- $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$
 - $AN = GM$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta N = \Delta M$.

- β. Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα, έχουμε $\widehat{M\Delta\Gamma} = \widehat{A\Delta N}$.

Είναι $\widehat{\Gamma\Delta N} = \widehat{\Delta\hat{N}A}$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\widehat{M\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta N} = \widehat{A\Delta N} + \widehat{\Delta\hat{N}A} = 90^\circ$, άρα $\Delta N \perp \Delta M$.

**225 Θέμα 4 - 13841**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι $BE = E\Delta$.
 β. Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$.
 γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.
 δ. Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

- α. Είναι: • $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{E\Delta B}$ ως εντός εναλλάξ
 • $B\Delta$ διχοτόμος της $\hat{B}$, άρα $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{\Delta BE}$

Οπότε $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Delta BE}$, άρα το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ισοσκελές με $BE = E\Delta$.

- β. Τα τρίγωνα BMZ και ΔME έχουν:

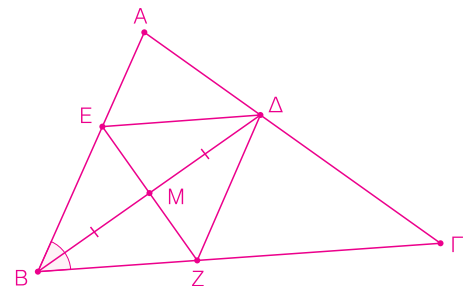
- $BM = M\Delta$
- $\widehat{\Delta BZ} = \widehat{E\Delta B}$, ως εντός εναλλάξ
- $\widehat{BMZ} = \widehat{\Delta ME}$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $BZ = \Delta E$.

Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο αφού $BZ \parallel \Delta E$, άρα και $BE \parallel Z\Delta$.

- γ. Έχουμε $BE = E\Delta$, άρα το παραλληλόγραμμο ΔEBZ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

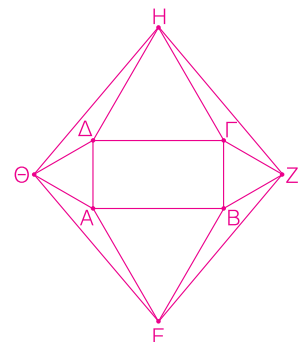
- δ. Για να είναι το τετράπλευρο ΔEBZ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\hat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\hat{B}$ είναι ορθή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο B .

**226 Θέμα 4 - 1734**

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta\Theta A$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.
 β. Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση



α. Τα τρίγωνα $\triangle H\Delta\Theta$, $\triangle \Theta A E$, $\triangle E B Z$ και $\triangle H \Gamma Z$ έχουν:

- $H\Delta = AE = BE = \Gamma H$, ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $\triangle H\Delta\Gamma$ και $\triangle EAB$ (τα τρίγωνα $\triangle H\Delta\Gamma$ και $\triangle EAB$ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές $\Gamma\Delta$ και AB του ορθογωνίου $\triangle AB\Gamma\Delta$)
- $\Theta\Delta = \Theta A = BZ = \Gamma Z$ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $\triangle \Theta\Delta A$ και $\triangle B\Gamma Z$ (όπως πριν, τα $\triangle \Theta\Delta A$ και $\triangle B\Gamma Z$ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ του $\triangle AB\Gamma\Delta$)
- $\widehat{H\Delta\Theta} = \widehat{\Theta A E} = \widehat{E B Z} = \widehat{Z\Gamma H} = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\Theta H = HZ = ZE = E\Theta$.

Επομένως το $\triangle EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

β. Αν το $\triangle AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε $AB = A\Delta$.

Στα ισόπλευρα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Theta$ και $\triangle AEB$ είναι $A\Theta = A\Delta$ και $AE = AB$, οπότε $A\Theta = AE$.

Δηλαδή, το τρίγωνο $\triangle A\Theta E$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{A\Theta E} = \widehat{A E \Theta}$ και είναι

$$\widehat{A\Theta E} + \widehat{A E \Theta} + \widehat{\Theta A E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A\Theta E} + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\Theta E} = 15^\circ.$$

Όμοια, στο τρίγωνο $\triangle \Theta H \Delta$, είναι $\widehat{H\Theta\Delta} = 15^\circ$.

$$\text{Τότε } \widehat{E\Theta H} = \widehat{\Delta\Theta H} + \widehat{E\Theta A} + \widehat{A\Theta\Delta} = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ.$$

Επομένως ο ρόμβος έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.

227 Θέμα 4 - 1825

Δίνεται τετράγωνο $\triangle AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N . Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta N$ και $\triangle ABZ$ είναι ίσα.

β. $AM = AN$ και $\Delta E = EM$

γ. $AE = \Delta E + BZ$

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\bullet \text{ } \triangle ABZ (\widehat{B} = 90^\circ), \text{ είναι } \widehat{AZB} + \widehat{ZAB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AZB} = 90^\circ - \widehat{ZAB}$$

$$\bullet \text{ } \triangle AHN (\widehat{A\hat{H}N} = 90^\circ), \text{ είναι } \widehat{A\hat{N}H} + \widehat{H\hat{A}N} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{N}H} = 90^\circ - \widehat{H\hat{A}N} \Leftrightarrow \widehat{A\hat{N}H} = 90^\circ - \widehat{ZAB}$$

Επομένως, $\widehat{AZB} = \widehat{A\hat{N}H}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta N$ και $\triangle ABZ$ έχουν:

- $A\Delta = AB$
- $\widehat{AZB} = \widehat{A\hat{N}H}$

Οπότε είναι ίσα.

β. Στο τρίγωνο $\triangle AMN$ η AH είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $AM = AN$.

Είναι: $\bullet \widehat{E\Delta N} = \widehat{A\hat{N}H}$, ως εντός εναλλάξ

$$\bullet \widehat{A\hat{N}H} = \widehat{A\hat{M}N}, \text{ αφού το τρίγωνο } \triangle AMN \text{ είναι ισοσκελές}$$

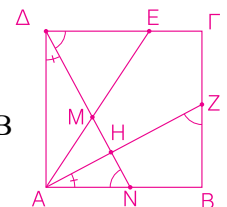
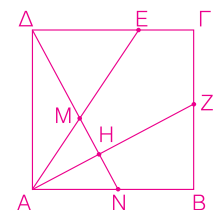
$$\bullet \widehat{A\hat{M}N} = \widehat{\Delta\hat{M}E}, \text{ ως κατακορυφήν}$$

Άρα $\widehat{E\Delta N} = \widehat{\Delta\hat{M}E}$, οπότε $\Delta E = EM$.

γ. Είναι: $\bullet AE = EM + AM = \Delta E + AN$.

$$\bullet AN = BZ, \text{ αφού τα τρίγωνα } \triangle A\Delta N \text{ και } \triangle ABZ \text{ είναι ίσα.}$$

Άρα $AE = \Delta E + BZ$.



228 Θέμα 4 - 13848

Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.

α. Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

- να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.
- να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

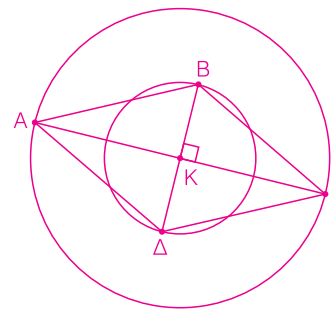
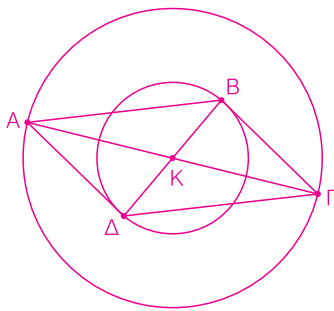
β. Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. i. Είναι $BK = ΚΔ$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (Κ, ΚΒ) και $AK = ΚΓ$ στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΑΓ. Άρα οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

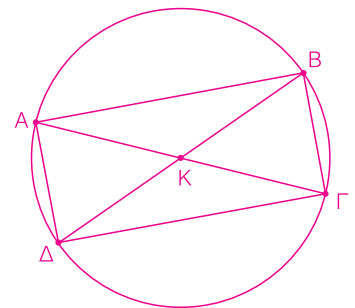


ii. Αν οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους.

Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες».

β. Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε $ΑΓ = ΒΔ$. Οπότε οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες, επομένως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β..

Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής αφού το ΑΒΓΔ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.



21. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

229 Θέμα 2 - 1589

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ \parallel ΑΓ$ και $ΖΕ \parallel ΑΒ$.

γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

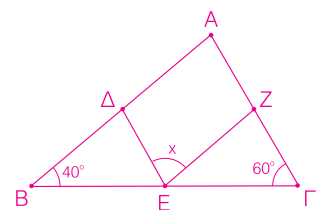
Λύση

α. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$.

β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

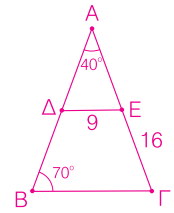
- Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, οπότε $ΔΕ \parallel ΑΓ$
- Ε, Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ οπότε $ΕΖ \parallel ΑΒ$

γ. Είναι $\hat{BΔΕ} = \hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{ΒΕΔ} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.



230 Θέμα 2 - 1608

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $DE = 9$ και $EG = 16$.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

β. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ μέσο AB , E μέσο $A\Gamma$, οπότε $DE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$

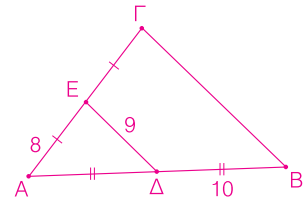
γ. Είναι: • $A\Gamma = 2EG = 2 \cdot 16 = 32$ και

• $AB = A\Gamma = 32$

Η περίμετρος είναι $\Pi = 32 + 32 + 18 = 82$.

231 Θέμα 2 - 14877

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE = 8$, $ED = 9$ και $\Delta B = 10$.



α. Να αποδείξετε ότι οι $B\Gamma$ και DE είναι παράλληλες.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

γ. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $B\Gamma \parallel DE$.

β. Επειδή τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ έχουμε $DE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$.

γ. Είναι $\Delta\Delta = \Delta B = 10$, $E\Gamma = AE = 8$, οπότε $AB = 20$ και $A\Gamma = 16$ άρα:

• $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 18 + 16 = 54$

• $\Pi_{\Delta E\Gamma B} = \Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$

Επομένως $\Pi_{AB\Gamma} > \Pi_{\Delta E\Gamma B}$.

232 Θέμα 2 - 1611

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

α. Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.

β. Να υπολογίσετε

i. τη γωνία $\hat{x}$

ii. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

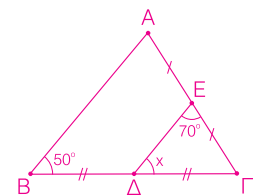
Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι Δ μέσο $B\Gamma$, E μέσο $A\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel AB$.

β.i. Έχουμε $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

ii. Επειδή $\Delta E \parallel AB$, είναι $\hat{A} = \hat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$.



233 Θέμα 2 - 1583

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OA, OB, OG και OD αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$.

Λύση

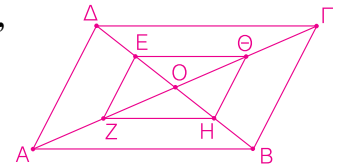
α. Έχουμε:

- Στο τρίγωνο OAB είναι Z μέσο OA , H μέσο OB , οπότε $ZH = \frac{AB}{2}$
- Στο τρίγωνο OGD είναι E μέσο OD , Θ μέσο OG , οπότε $E\Theta = \frac{GD}{2}$
- Στο τρίγωνο $O\Gamma B$ είναι H μέσο OB , Θ μέσο OG , οπότε $H\Theta = \frac{BG}{2}$
- Στο τρίγωνο $O\Delta A$ είναι E μέσο OD , Z μέσο OA , οπότε $EZ = \frac{AD}{2}$.

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $AB = \Gamma\Delta$, άρα $ZH = E\Theta$ και $AD = BG$, άρα $H\Theta = EZ$.
Επομένως το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Έχουμε $AB + BG + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$.

$$\text{Είναι } EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = \frac{AD}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AD + AB + BG + \Gamma\Delta}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

**234 Θέμα 2 - 1566**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

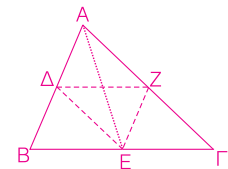
Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E, Z είναι τα μέσα των $\Gamma B, \Gamma A$, οπότε $EZ \parallel \frac{AB}{2}$ (1).

Επομένως $EZ \parallel BD$, άρα το ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από την (1) έχουμε $EZ \parallel \Delta\Gamma$, οπότε το $Z\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του AE και ΔZ διχοτομούνται.

Οπότε η ΔZ διχοτομεί το AE .

**235 Θέμα 2 - 1564**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = \Gamma\Gamma$), το ύψος του AA και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $\Gamma\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.

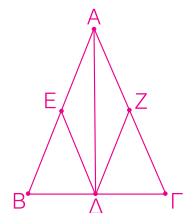
β. το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ έχουν:

- $BE = \Gamma Z$, ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών AB και $\Gamma\Gamma$.
- $B\Delta = \Gamma\Delta$, διότι το $\Delta\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).



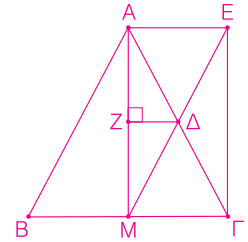
β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των $B\Gamma$, AB , οπότε $\Delta E \parallel \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E \parallel AZ$. Άρα το $AEDZ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\Delta E = AZ = AE$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

236 Θέμα 2 - 1560

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Αν το σημείο Z είναι το ίχνος του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

β. $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$



Λύση

α. Επειδή $\Delta A = \Delta \Gamma$ και $\Delta E = \Delta M$ το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, επομένως $\hat{AM}\Gamma = 90^\circ$. Άρα το $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $\Delta Z \perp AM$ και $\Gamma M \perp AM$ οπότε $\Delta Z \parallel \Gamma M$.

Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ το Δ είναι μέσο του $A\Gamma$ και $\Delta Z \parallel M\Gamma$, οπότε το Z είναι μέσο της AM και

$$\Delta Z = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}.$$

237 Θέμα 2 - 1542

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

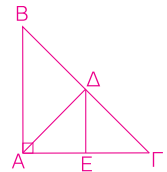
α. Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$

Λύση

α. Επειδή $\Delta E \parallel AB$ και $AB \perp A\Gamma$, είναι $\Delta E \perp A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $\Delta E \parallel AB$, οπότε το E είναι μέσο της $A\Gamma$ και $\Delta E = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$.



238 Θέμα 2 - 12639

Από το μέσο M της διαμέσου $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$, φέρουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Αν η παράλληλη από το Δ στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α. το Z είναι μέσο της $A\Gamma$.

β. το AE ισούται με το $\frac{1}{4}$ του $A\Gamma$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι το Δ μέσο $B\Gamma$ και $\Delta Z \parallel AB$.

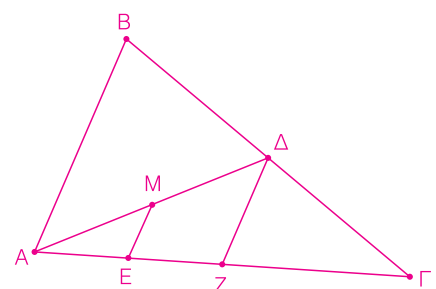
Επομένως το Z είναι το μέσον της πλευράς $A\Gamma$.

β. • Το Z είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, οπότε $AZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).

• Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το M είναι μέσο της πλευράς του $A\Delta$ και η $ME \parallel \Delta Z$.

Επομένως το E είναι μέσο της AZ , άρα

$$AE = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{A\Gamma}{4}.$$



239 Θέμα 2 - 13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z και H των $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $ZH = \frac{AB}{2}$.

β. Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

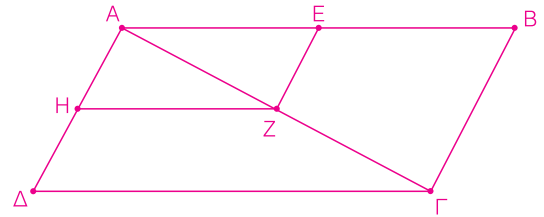
α. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ το τμήμα ZH ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $A\Delta$, άρα $ZH \parallel \Gamma\Delta$ (1) και

$$ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow ZH = \frac{AB}{2}.$$

β. Το E είναι το μέσο της AB , οπότε $AE = \frac{AB}{2}$ και αφού $ZH = \frac{AB}{2}$, έχουμε $AE = ZH$.

Είναι $AE \parallel \Gamma\Delta$ (2), γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $AE \parallel ZH$.

Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του AE, ZH είναι ίσες και παράλληλες.

**240 Θέμα 4 - 1803**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$

β. $M\Lambda = MK$

γ. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Lambda}\hat{M}\hat{K}$.

Λύση

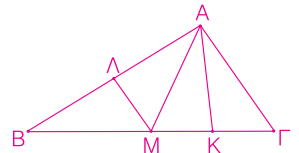
α. Είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΓAM είναι ισοσκελές, άρα $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Λ, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$, οπότε $M\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\Gamma M}{2} = MK$.

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Λ, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$, οπότε $\Lambda M \parallel A\Gamma$, άρα $\hat{\Lambda}\hat{M}\hat{A} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ.

Έχουμε $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$, οπότε $\hat{\Lambda}\hat{M}\hat{A} = \hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$

Άρα η AM είναι η διχοτόμος της $\hat{\Lambda}\hat{M}\hat{K}$.

**241 Θέμα 4 - 13743**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

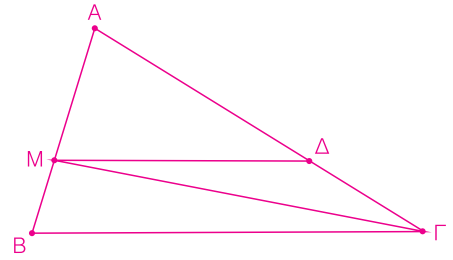
α. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}\hat{M}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{M}$.

β. Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.

γ. Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Είναι $\hat{\Delta M \Gamma} = \hat{B \Gamma M}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$.



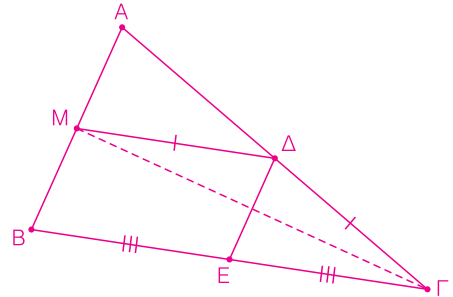
β. Αν το $\Delta M \Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta \Gamma$, τότε $\hat{\Delta M \Gamma} = \hat{\Delta \Gamma M}$.

Στο ερώτημα **α.** αποδείξαμε ότι $\hat{\Delta M \Gamma} = \hat{B \Gamma M}$, οπότε $\hat{\Delta \Gamma M} = \hat{B \Gamma M}$, άρα η ΓM θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ . Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο $\Gamma A B$ είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο M είναι το μέσο της AB .

γ. Το M είναι το μέσο της AB και $M\Delta \parallel B\Gamma$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της AG .

Το σημείο E είναι μέσο της $B\Gamma$ άρα το τμήμα ΔE ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel MB$.

Το τετράπλευρο $M\Delta E B$ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



242 Θέμα 4 - 1726

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

β. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και Δ, E, Z τα μέσα των $AB, AG, B\Gamma$ αντίστοιχα.

$$\text{Είναι } \Delta Z = \frac{AG}{2} \quad (1) \text{ και } ZE = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Άρα $\Delta Z = ZE$, οπότε το ΔZE είναι ισοσκελές.

β.i. • Διατύπωση

Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο.

• Απόδειξη

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι μέσα των AB, AG , οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \quad (3)$.

Επειδή $AB = B\Gamma = AG$ από τις (1), (2) και (3) έχουμε $\Delta Z = ZE = \Delta E$.

Άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

β.ii. • Διατύπωση

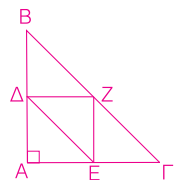
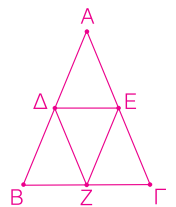
Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

• Απόδειξη

Έστω ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

Από το **α.** ερώτημα είναι $\Delta Z = ZE$, άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

Επειδή $\Delta Z \parallel AG$, $ZE \parallel AB$ και $AB \perp AG$, προκύπτει ότι $\Delta Z \perp ZE$. Άρα $\hat{\Delta ZE} = 90^\circ$, επομένως το ΔZE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



243 Θέμα 4 - 1798

α. Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

β. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα K, Λ είναι μέσα των $AB, B\Gamma$, οπότε $K\Lambda \parallel A\Gamma$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ τα K, N είναι μέσα των $AB, A\Delta$, οπότε $KN \parallel B\Delta$.

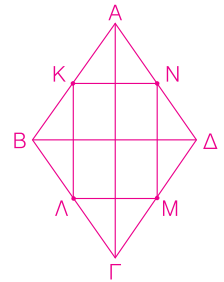
Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα Λ, M είναι μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta$, οπότε $\Lambda M \parallel B\Delta$.

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα M, N είναι μέσα των $\Gamma\Delta, A\Delta$, οπότε $MN \parallel A\Gamma$.

Άρα $K\Lambda \parallel MN$ και $KN \parallel \Lambda M$ και συνεπώς το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $KN \parallel B\Delta$, $K\Lambda \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma \perp B\Delta$, αφού είναι διαγώνιοι του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$.

Οπότε $KN \perp K\Lambda$. Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

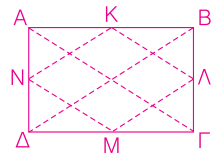


β. Το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στα τρίγωνα $AB\Delta$, $AB\Gamma$ τα N, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, AB και $B\Gamma$,

άρα $KN = \frac{B\Delta}{2}$, $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$ το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα $A\Gamma = B\Delta$, οπότε $KN = K\Lambda$.

Άρα το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

**244 Θέμα 4 - 1728**

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{B\zeta\Gamma}$

γ. Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε

$$AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \frac{AB}{2} \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow BE \parallel \Delta Z.$$

Άρα το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $\Delta E \parallel BZ$, οπότε $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{E\beta Z}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά

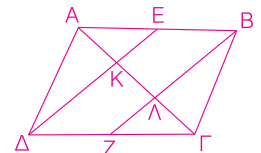
• $AB \parallel \Gamma\Delta$ οπότε $\hat{E\beta Z} = \hat{B\zeta\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ

Άρα $\hat{A\epsilon\Delta} = \hat{B\zeta\Gamma}$.

γ. • Στο τρίγωνο $AB\Lambda$ το E είναι το μέσο του AB και $E\Lambda \parallel B\Lambda$, οπότε το K είναι μέσο του $A\Lambda$, άρα $KA = K\Lambda$.

• Στο τρίγωνο $\Delta K\Gamma$ το Z είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$ και $Z\Lambda \parallel \Delta K$, οπότε το Λ είναι μέσο του $K\Gamma$, άρα $K\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Επομένως $KA = K\Lambda = \Lambda\Gamma$ δηλαδή οι ΔE και BZ τριχοτομούν την $A\Gamma$.

**245 Θέμα 4 - 1802**

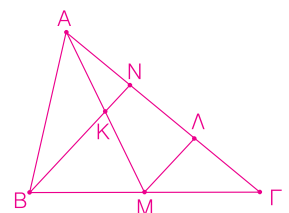
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α. Το σημείο N είναι μέσο του $A\Gamma$.

β. $\hat{KM\Gamma} = \hat{MBK} + \hat{AKN}$

γ. $BK = 3KN$

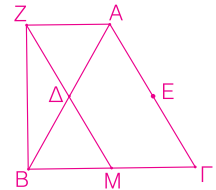
Λύση



- α.** • Στο τρίγωνο ΓBN έχουμε τα M, Λ τα μέσα των $\Gamma B, \Gamma N$, οπότε $M\Lambda \parallel BN$.
 • Στο τρίγωνο $AM\Lambda$, το K είναι το μέσο του AM και $KN \parallel M\Lambda$, οπότε το N είναι το μέσο του AL .
- β.** Είναι $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{GM\Lambda} + \widehat{LM\Lambda} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$, αφού:
- $M\Lambda \parallel BK$, άρα $\widehat{GM\Lambda} = \widehat{MBK}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
 - $M\Lambda \parallel KN$, άρα $\widehat{LM\Lambda} = \widehat{AKN}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
- γ.** Από το **α.** έχουμε $KN = \frac{M\Lambda}{2} = \frac{\frac{BN}{2}}{2} = \frac{BN}{4}$.
- Οπότε $BN = 4KN \Leftrightarrow BK + KN = 4KN \Leftrightarrow BK = 3KN$.

246 Θέμα 4 - 1868

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και M των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



- α.** Τα τρίγωνα $\triangle AZ\Delta$ και $\triangle BM\Delta$ είναι ίσα.
- β.** Το τετράπλευρο $ZAGM$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ.** Τα τμήματα ZE και AA τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
- δ.** Η BZ είναι κάθετη στη ZA .

Λύση

- α.** Τα τρίγωνα $\triangle AZ\Delta$ και $\triangle BM\Delta$ έχουν:
- $\Delta A = \Delta B$
 - $\Delta Z = \Delta M$
 - $\widehat{AZ\Delta} = \widehat{BM\Delta}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $\Delta A = \Delta B$ και $\Delta Z = \Delta M$, το $ZAMB$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Οπότε $ZA \parallel BM \Rightarrow ZA \parallel M\Gamma$, άρα το $ZAGM$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta E \parallel M\Gamma \Rightarrow \Delta E \parallel ZA$.
 Άρα το $ZAE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε τα ZE και AA διχοτομούνται.

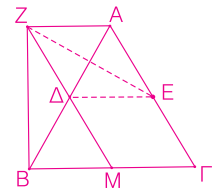
Είναι:

- $\Delta E = ZA$ και $ZA = M\Gamma$, άρα $\Delta E = M\Gamma$
- $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE$

Οπότε $\Delta E = AE$, άρα το $ZAE\Delta$ είναι ρόμβος, επομένως $ZE \perp AA$.

δ. Στο τρίγωνο ZAB η $Z\Delta$ είναι διάμεσος $Z\Delta = \Delta M = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$.

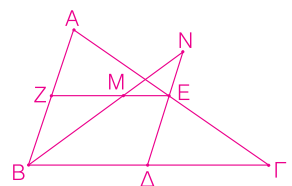
Οπότε $\widehat{BZA} = 90^\circ$, άρα $BZ \perp ZA$.



247 Θέμα 4 - 1801

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της ΔE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.
- γ.** $BZ + NE = \Delta\Gamma$



Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ , E , Z είναι τα μέσα των $B\Gamma$, AG , AB , οπότε $\Delta E \parallel BZ$ και $ZE \parallel B\Delta$.

Άρα το $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι: • $\widehat{ZBM} = \widehat{MB\Delta}$ και $\widehat{MB\Delta} = \widehat{ZMB}$, ως εντός εναλλάξ, άρα $\widehat{ZBM} = \widehat{ZMB}$, οπότε το τρίγωνο BZM είναι ισοσκελές.

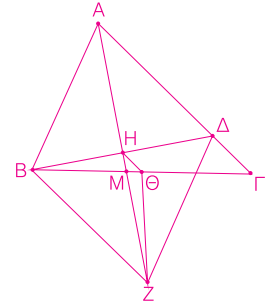
• $\widehat{ENM} = \widehat{ZBM}$, ως εντός εναλλάξ και $\widehat{ZBM} = \widehat{ZMB} = \widehat{NME}$, άρα $\widehat{ENM} = \widehat{NME}$.

Οπότε το $\triangle MEN$ είναι ισοσκελές

γ. Είναι $BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$.

248 Θέμα 4 - 1889

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την AG στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. $H\Theta \parallel BZ$

γ. $H\Theta = \frac{AG - AB}{2}$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Delta$ και το AH είναι διάμεσος.

Επειδή $HB = H\Delta$ και $HA = HZ$, το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

Επειδή επιπλέον είναι $AB = A\Delta$, το $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι H , Θ τα μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$, οπότε $H\Theta \parallel \Gamma\Delta$.

Είναι $A\Delta \parallel BZ$ οπότε $\Gamma\Delta \parallel BZ$.

Επομένως $H\Theta \parallel BZ$.

γ. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ τα H , Θ είναι μέσα των $B\Delta$, $B\Gamma$ οπότε

$$H\Theta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AG - A\Delta}{2} = \frac{AG - AB}{2}, \text{ αφού } A\Delta = AB.$$

249 Θέμα 4 - 1898

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AD . Έστω E , Z και H είναι τα μέσα των BA , AD και AG αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

β. Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.

γ. Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH .

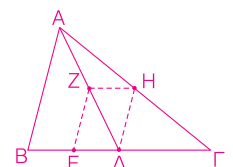
Λύση

α. Στο τρίγωνο $AD\Gamma$, τα Z , H είναι τα μέσα των AD , AG , οπότε

$$ZH \parallel \frac{AG}{2} \Rightarrow ZH \parallel \frac{B\Delta}{2} \Rightarrow ZH \parallel \Delta E, \text{ άρα το } \Delta EZH \text{ είναι παραλληλόγραμμο.}$$

β. Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΔEZH ρόμβος, αρκεί να είναι $ZH = ZE$ (1).

Στο $\triangle ADB$ τα E , Z είναι τα μέσα των BA , AD , οπότε $ZE = \frac{AB}{2}$.



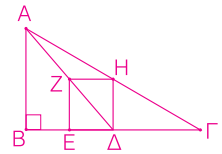
$$H \quad (1) \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AB \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{2} = AB \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB.$$

Οπότε το ΔEZH είναι ρόμβος, όταν $B\Gamma = 2AB$.

γ. Αν $\hat{B} = 90^\circ$, τότε $AB \perp B\Gamma$.

Επειδή $ZE \parallel AB$, έχουμε $ZE \perp B\Gamma$, δηλαδή $\hat{ZEG} = 90^\circ$.

Άρα το παραλληλόγραμμο ΔEZH είναι ορθογώνιο.



250 Θέμα 4 - 1741

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β. Στην περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

Λύση

α. Τα K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών:

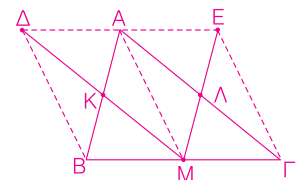
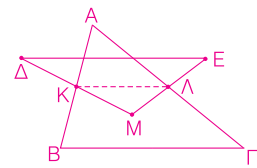
- $AB, A\Gamma$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οπότε $K\Lambda \parallel B\Gamma$
- $M\Delta, ME$ στο τρίγωνο $M\Delta E$, οπότε $K\Lambda \parallel \Delta E$

Άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β. • Επειδή $KA = KB$ και $KM = K\Delta$ το ΔAMB είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\Delta\Delta \parallel B\Gamma$.

• Επειδή $M\Lambda = \Lambda E$ και $\Lambda\Gamma = \Lambda A$ το $A\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AE \parallel B\Gamma$.

Από ο A διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη $B\Gamma$, άρα τα Δ, A, E είναι συνευθειακά.



251 Θέμα 4 - 1873

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM = AB$.

Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

- $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$
- Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $ABAM$ είναι ρόμβος.
- Η προέκταση της ΔM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

Λύση

α. Στο τρίγωνο $\Delta\Delta E$, τα K, M είναι τα μέσα των $\Delta\Delta, \Delta E$, οπότε

$$KM \parallel \Delta E \text{ και } KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM.$$

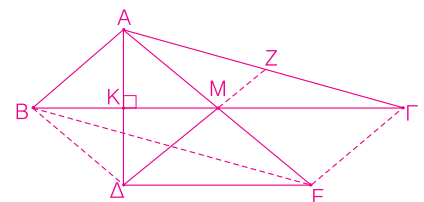
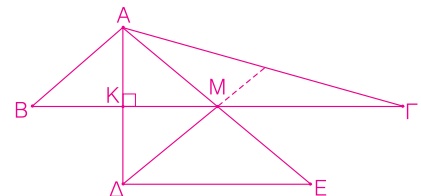
Είναι $KM \parallel \Delta E$ και $KM \perp A\Delta$, άρα $\Delta E \perp A\Delta$.

β. Επειδή $MA = ME$ και $MB = M\Gamma$, το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Είναι $AB = AM$, οπότε το ΔABM είναι ισοσκελές και επειδή το AK είναι ύψος θα είναι και διάμεσος.

Επειδή $KB = KM$ και $KA = K\Delta$, το $\Delta AM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\Delta\Delta \perp BM$ είναι ρόμβος.

δ. Στο $\Delta AB\Gamma$ το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η $\Delta M \parallel AB$, οπότε τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσο της Z .



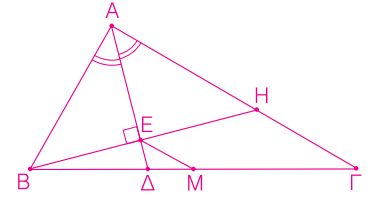
252 Θέμα 4 - 1723

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < B\Gamma$) και η διχοτόμος του $\angle A$. Φέρουμε από το B κάθετη στην AD που τέμνει την AD στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

β. $EM \parallel HG$

γ. $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

**Λύση**

α. Το $\triangle ABH$ είναι ισοσκελές, αφού η AE είναι διχοτόμος και ύψος.

β. Επειδή το $\triangle ABH$ είναι ισοσκελές και η AE είναι διχοτόμος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι μέσο του BH . Στο $\triangle BH\Gamma$ τα E, M είναι τα μέσα των $BH, B\Gamma$, επομένως $EM \parallel HG$.

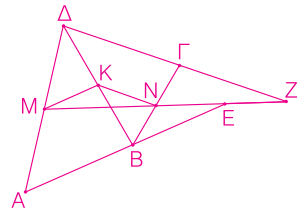
γ. Στο $\triangle BH\Gamma$ τα E, M είναι τα μέσα των $BH, B\Gamma$, οπότε $EM = \frac{HG}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.

253 Θέμα 4 - 1804

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $A\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α. $MK = KN$

β. $\hat{M}EA = \hat{M}Z\Delta$

**Λύση**

α. • Στο τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ τα M, K είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Delta$, οπότε $MK = \frac{AB}{2}$.

• Στο τρίγωνο $\triangle B\Delta\Gamma$ τα K, N είναι τα μέσα των $B\Delta, B\Gamma$, οπότε και $KN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $MK = KN$, αφού $AB = \Gamma\Delta$.

β. Από το α. ερώτημα είναι $MK \parallel AB$ και $KN \parallel \Delta Z$.

Επειδή $KM = KN$ έχουμε $\hat{K}MN = \hat{K}NM$.

Είναι: • $\hat{M}EA = \hat{K}MN$ ως εντός εναλλάξ

• $\hat{M}Z\Delta = \hat{K}NM$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Άρα $\hat{M}EA = \hat{M}Z\Delta$.

254 Θέμα 4 - 1775

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε το μέσο M της πλευράς $A\Delta$ και ΓE κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία MB ($\Gamma E \perp MB$).

Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία MB ($\Delta x \parallel MB$) τέμνει τις $B\Gamma$ και ΓE στα σημεία N, Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓE .

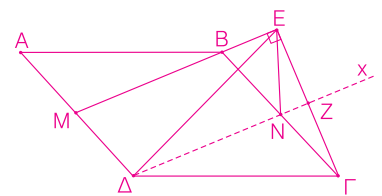
γ. $\Delta E = \Delta\Gamma$

Λύση

α. Είναι $\Delta N \parallel MB$ και $M\Delta \parallel BN$, οπότε το $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Είναι $BN = M\Delta = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε το N είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Στο τρίγωνο $BE\Gamma$ το N είναι μέσο της $B\Gamma$ και $NZ \parallel BE$, οπότε το Z είναι το μέσο του ΓE .

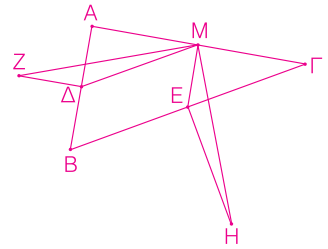


γ. Είναι $\Delta Z // ME$ και $ME \perp EG$, άρα $\Delta Z \perp EG$.

Στο τρίγωνο ΔEG το ΔZ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΔEG είναι ισοσκελές με $\Delta E = \Delta G$.

255 Θέμα 4 - 1832

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ , M και E τα μέσα των πλευρών του AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

β. Αν τα σημεία Z , Δ , E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$.

Λύση

α. i. Στο $\Delta AB\Gamma$ τα Δ , M είναι τα μέσα των AB , AG , οπότε $\Delta M // \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta M // BE$.

Άρα το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο, προκύπτει $\Delta B = ME$, $\Delta M = BE$.

Είναι $\hat{\Delta\Delta M} = \hat{B} = \hat{\Gamma\hat{E}M}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Έχουμε: • $Z\Delta = \frac{AB}{2} = \Delta B = ME$

• $EH = \frac{B\Gamma}{2} = BE = \Delta M$.

Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH έχουν: • $Z\Delta = ME$
• $\Delta M = EH$
• $\hat{Z\Delta M} = \hat{MEH} = 90^\circ + \hat{B}$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

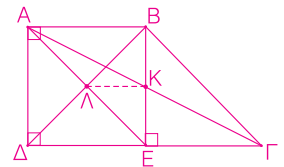
β. Αν τα σημεία Z , Δ , E είναι συνευθειακά, τότε $\Delta E \perp AB$.

Στο $\Delta AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $B\Gamma$, οπότε $\Delta E // AG$.

Άρα $GA \perp AB$, οπότε $\hat{A} = 90^\circ$.

256 Θέμα 4 - 1727

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την AG στο σημείο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη BA στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ β. $BA = AE$ γ. $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$

Λύση

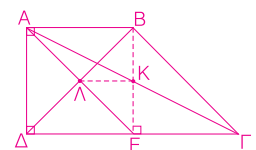
α. Οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

β. Το $ABE\Delta$ έχει τρεις γωνίες ορθές $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $BA = AE$.

γ. Το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta E = AB$.

Έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta E$, άρα το E είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$, οπότε $AB = \Delta E = EG$.



Αφού $AB \parallel EG$, το $ABGE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το K είναι το μέσο της διαγωνίου του AG .
Επειδή το $ABED$ είναι ορθογώνιο, το Δ είναι το μέσο της διαγωνίου του AE .

Στο $\triangle AEG$ τα K, Δ είναι μέσα των AG, AE οπότε $K\Delta = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}GA = \frac{1}{4}GA$.

257 Θέμα 4 - 1766

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E το συμμετρικό σημείο του B ως προς το Δ και Z είναι το μέσο της $A\Delta$. Η προέκταση της $\Gamma\Delta$ τέμνει την AE στο H . Να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta H = \frac{AB}{2}$

β. Τα τρίγωνα $\Delta\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

γ. Η ΓZ είναι κάθετη στην AE .

Λύση

α. Στο τρίγωνο EAB το Δ είναι το μέσο του BE και $\Delta H \parallel AB$, οπότε το H είναι μέσο του AE , άρα $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta H$ και $Z\Delta\Gamma$ έχουν:

- $\Delta\Delta = \Gamma\Delta$
- $H\Delta = Z\Delta$, ως μισά ίσων τμημάτων

Οπότε είναι ίσα.

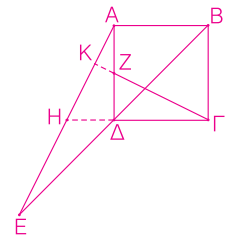
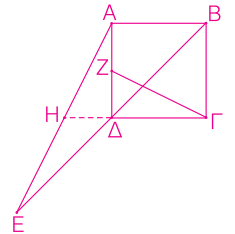
γ. Αν η ΓZ τέμνει την AE στο K , αρκεί να δείξουμε ότι

$$\widehat{AKZ} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AZK} + \widehat{ZAK} = 90^\circ.$$

Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta H, Z\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $\widehat{ZAK} = \widehat{Z\Gamma\Delta}$.

Είναι $\widehat{AZK} = \widehat{\Delta Z\Gamma}$, ως κατακορυφήν.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ είναι $\widehat{\Delta Z\Gamma} + \widehat{Z\Gamma\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{AZK} + \widehat{ZAK} = 90^\circ$.



258 Θέμα 4 - 1743

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{\Gamma} = 120^\circ$.

Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

ii. $AG \perp EZ$

β. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. i. Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι

$$\widehat{E\Gamma A} = \widehat{A\Gamma Z} = 60^\circ.$$

Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή και έχουν μία γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρα.

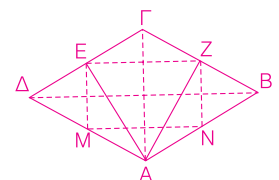
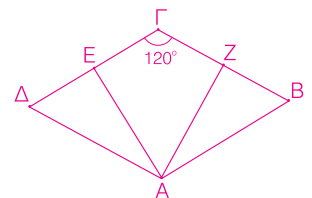
Τα ύψη AE, AZ στα ισόπλευρα τρίγωνα είναι και διάμεσοί του, οπότε τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

ii. Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ τα E, Z είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta, \Gamma B$, οπότε $EZ \parallel B\Delta$.

Είναι $B\Delta \perp AG$, άρα $AG \perp EZ$.

β. Επειδή τα E, Z, M, N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το $EMNZ$ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma A$ τα E, M είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma, \Delta A$ οπότε $EM \parallel \Gamma A$.

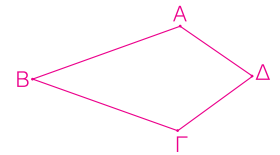
Αφού $\Gamma A \perp EZ$ έχουμε $EM \perp EZ$, επομένως $\widehat{MEZ} = 90^\circ$, οπότε το $EMNZ$ είναι ορθογώνιο.



259 Θέμα 4 - 1745

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Οι διαγώνιοι του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.
- Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α. Επειδή $BA = B\Gamma$ έχουμε $\hat{BAG} = \hat{BGA}$.
Είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ οπότε $\hat{\Delta AG} = \hat{\Delta GA}$ ως διαφορές ίσων γωνιών.

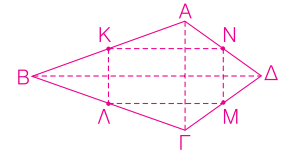
Άρα το $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, αφού το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.
Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $A\Gamma$, άρα $A\Gamma \perp B\Delta$.

γ. Αν K, Λ, M, N τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, τότε το $K\Lambda M N$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $K\Lambda \parallel A\Gamma$, οπότε $KN \parallel B\Delta$ και $A\Gamma \perp B\Delta$ είναι $K\Lambda \perp KN$, οπότε $\hat{K\Lambda N} = 90^\circ$.

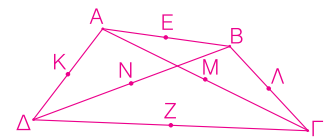
Άρα το $K\Lambda M N$ είναι ορθογώνιο.



260 Θέμα 4 - 1773

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = B\Gamma$. Αν E, Λ, Z, K, N, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $EMZN$ ρόμβος.
- Η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN .
- $KE = Z\Lambda$
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από ίδιο σημείο.



Λύση

α. Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$, τα E, M και N, Z είναι τα μέσα πλευρών τους αντίστοιχα.

Οπότε $EM \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ και $NZ \parallel \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $EM \parallel NZ$.

Επομένως το $EMZN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο $\Delta B\Delta$ τα E, N είναι μέσα των $AB, B\Delta$ άρα $EN = \frac{A\Delta}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = NZ$.

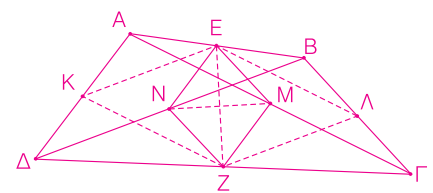
Επομένως το $EMZN$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, οπότε η EZ είναι η μεσοκάθετος του MN .

γ. Επειδή τα K, E, Λ, Z είναι τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$, το $KE\Lambda Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε έχουμε $KE = Z\Lambda$.

δ. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $K\Lambda, EZ$ του παραλληλογράμμου $KE\Lambda Z$.

Επειδή το $EMZN$ είναι ρόμβος η διαγώνιος MN θα διέρχεται από το μέσο O του EZ , που διέρχεται και η $K\Lambda$.
Άρα τα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



261 Θέμα 4 - 1794

- α.** Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.
- β.** Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

Λύση

- α.** Αφού K, Λ, M, N είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ έχουμε:

$$K\Lambda // = \frac{A\Gamma}{2}, \quad \Lambda M // = \frac{B\Delta}{2} \quad \text{και} \quad M N // = \frac{A\Gamma}{2}.$$

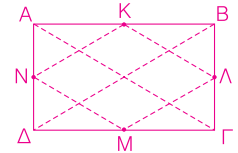
Οπότε $K\Lambda // = M N$, άρα το $K\Lambda M N$ είναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{Είναι} \quad A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \Lambda M.$$

Άρα το παραλληλόγραμμο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

- β.** Για να είναι το $K\Lambda M N$ ρόμβος, αρκεί $K\Lambda = \Lambda M \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$.

Άρα αρκεί το τετράπλευρο να έχει ίσες διαγώνιες

**262 Θέμα 4 - 1781**

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία I, O, H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν E, Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma, AB$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

β. $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$

- γ.** Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$.

Λύση

- α.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα O, Z είναι τα μέσα των $A\Gamma, B\Gamma$, οπότε $OZ // AB$, άρα $OZ \perp B\Gamma$.

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ τα O, E είναι τα μέσα των $A\Gamma, \Gamma\Delta$, οπότε $OE // \Delta\Delta$, άρα $OE \perp \Gamma\Delta$.

Επειδή το $OZ\Gamma E$ έχει τρεις γωνίες ορθές είναι ορθογώνιο. Επιπλέον είναι $\Gamma Z = \Gamma E$, ως μισά ίσων τμημάτων, οπότε το $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο.

- β.** Στο τετράγωνο $OZ\Gamma E$ το H είναι το κέντρο του, οπότε

$$ZH = \frac{1}{2}EZ = \frac{1}{2}OG = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}A\Gamma = \frac{A\Gamma}{4}.$$

- γ.** Στο $\triangle AB\Gamma$ τα Θ, Z είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$, οπότε $\Theta Z // = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Theta Z // = IH$.

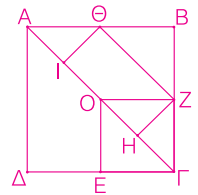
Άρα το $I\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο

Στο ισοσκελές τρίγωνο ZOG , η ZH είναι διάμεσος οπότε είναι και ύψος, άρα $\widehat{ZHO} = 90^\circ$.

Επομένως το $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο.

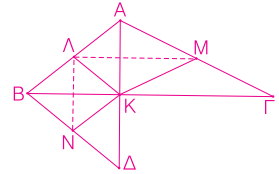
$$\text{Στο τετράγωνο } OZ\Gamma E \text{ έχουμε } ZH = \frac{OG}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{IH}{2} \Rightarrow \Theta I = \frac{\Theta Z}{2} \Rightarrow \Theta Z = 2\Theta I.$$

$$\text{Έχουμε } ZH = \frac{OG}{2} = \frac{A\Gamma}{4}.$$



263 Θέμα 4 - 1858

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ , M , N τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος.
- γ. $\Lambda M \perp \Lambda N$

Λύση

- α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το BK είναι ύψος και διάμεσος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $BA = B\Delta$.
- β. Στο τρίγωνο $AB\Delta$, τα Λ , K , N είναι τα μέσα των AB , $A\Delta$, $B\Delta$.

$$\text{Οπότε } \Lambda K = \frac{B\Delta}{2} = BN \text{ και } KN = \frac{AB}{2} = \Lambda B.$$

$$\text{Είναι } BA = B\Delta \Leftrightarrow \frac{BA}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Lambda = BN.$$

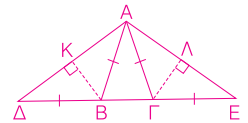
Άρα $BN = B\Lambda = \Lambda K = KN$, οπότε το $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος.

- γ. • Στο $\triangle AB\Delta$, τα Λ , N είναι τα μέσα των AB , $B\Delta$, οπότε $\Lambda N \parallel A\Delta$.
- Στο $\triangle AB\Gamma$, τα Λ , M είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Lambda M \parallel B\Gamma$.

Επειδή $A\Delta \perp B\Gamma$, είναι $\Lambda M \perp \Lambda N$.

264 Θέμα 4 - 1616

Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , B , Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
- γ. Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

Λύση

- α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma = 5$
- $B\Delta = \Gamma E = 5$
- $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

- β. Επειδή τα τρίγωνα $BA\Delta$, $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή και τα BK , $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη τους αντίστοιχα θα είναι και διάμεσοι, οπότε τα K , Λ είναι μέσα των $A\Delta$, $A\Gamma$.

- γ. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K , Λ είναι μέσα των $A\Delta$, $A\Gamma$, άρα έχουμε

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{2} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

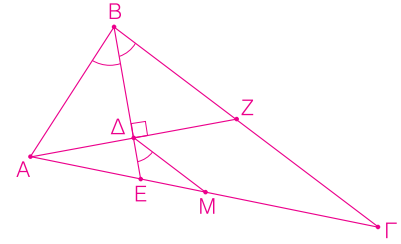
265 Θέμα 4 - 1837

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας $\hat{B}$. Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β. $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$

γ. $\hat{E\Delta M} = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α. Στο τρίγωνο ABZ το $B\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το ΔABZ είναι ισοσκελές με $BA = BZ$.

β. • Στο ισοσκελές τρίγωνο ABZ η διχοτόμος του $B\Delta$ είναι και διάμεσος, οπότε το Δ είναι μέσο του AZ .

• Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ τα Δ , M είναι τα μέσα των AZ , $A\Gamma$, οπότε:

• $\Delta M \parallel B\Gamma$

$$\bullet \Delta M = \frac{\Gamma Z}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} = \frac{B\Gamma - AB}{2}$$

γ. Επειδή $\Delta M \parallel B\Gamma$, έχουμε $\hat{E\Delta M} = \hat{EB\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

266 Θέμα 4 - 13856

Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε τη διάμεσο ΔM και στην προέκτασή της προς το μέρος του M παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $AM = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAM και $\Theta M\Gamma$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $A\Delta = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη;

Λύση

α. Είναι $ME = MZ$, και $EA = EZ = Z\Gamma$ άρα:
 $ME + EA = MZ + Z\Gamma \Leftrightarrow MA = M\Gamma$.

Τα τρίγωνα ΔAM και $\Theta M\Gamma$ έχουν:

i. $\Delta M = M\Theta$

ii. $MA = M\Gamma$, ως άθροισμα ίσων τμημάτων $ME + EA$ και $MZ + Z\Gamma$

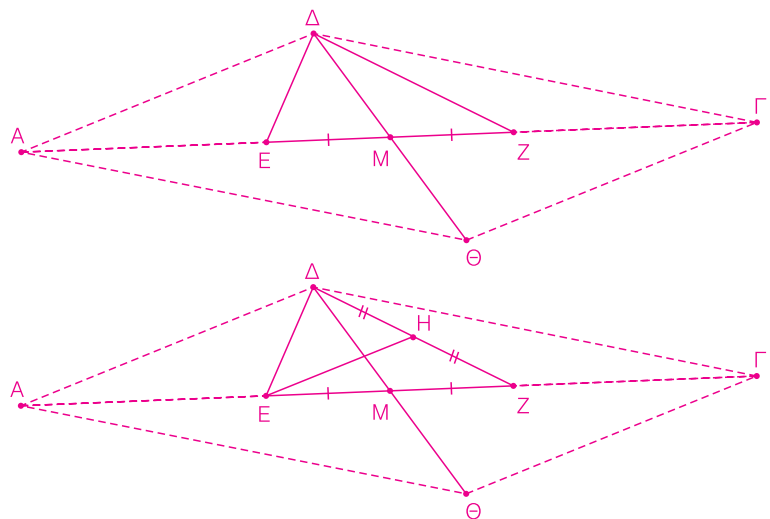
iii. $\hat{\Delta MA} = \hat{\Theta M\Gamma}$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Το M είναι το μέσο του $\Delta\Theta$ και του τμήματος $A\Gamma$ οπότε στο τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ οι διαγώνιοι $\Delta\Theta$ και $A\Gamma$ διχοτομούνται στο σημείο M .

Άρα το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το H είναι το μέσο της ΔZ , αφού η EH είναι διάμεσος. Έχουμε $EA = EZ$, άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AZ . Στο τρίγωνο $A\Delta Z$ τα σημεία E και H είναι μέσα πλευρών άρα $EH = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow EH = \frac{12}{2} \Leftrightarrow EH = 6$. Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος EH του τριγώνου ΔEZ θα έχει μήκος 6.



22. Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο τριγώνου

267 Θέμα 4 - 1878

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ .

Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. $AH = \Theta\Gamma$

γ. $AH = 2Z\Theta$

Λύση

α. Επειδή το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, η BK είναι διάμεσός του.

Στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ τα Z, K είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε $ZK \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow ZK \parallel EG$.

Άρα το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

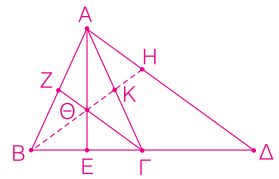
β. Στο τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ τα Γ, Z είναι τα μέσα των $B\Delta, AB$, οπότε $\Gamma Z \parallel A\Delta \Rightarrow \Gamma\Theta \parallel AH$.

Στο τρίγωνο $\triangle ABH$ το Z είναι το μέσο του AB και $Z\Theta \parallel AH$, οπότε Θ το μέσο του BH .

Στο τρίγωνο $\triangle BH\Gamma$ τα Θ, E είναι μέσα των $BH, B\Gamma$ οπότε $\Theta E \parallel H\Gamma \Rightarrow A\Theta \parallel H\Gamma$.

Επομένως το $A\Theta\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $AH = \Theta\Gamma$.

γ. Στο τρίγωνο $\triangle ABH$ τα Z, Θ είναι μέσα των AB, BH οπότε $Z\Theta = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2Z\Theta$.



268 Θέμα 4 - 1820

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του $A\Delta, BE$ και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Η περίμετρος του τριγώνου $\triangle A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

γ. Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ τα Z, E είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε $ZE \parallel \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow EH \parallel B\Delta$.

Άρα το $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή το $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $\Delta H = BE$.

Είναι $EH = ZE$ και $AE = E\Gamma$, άρα οι διαγώνιες $A\Gamma$ και ZH του $\triangle AH\Gamma Z$ διχοτομούνται.

Επομένως το $\triangle AH\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Gamma Z = AH$.

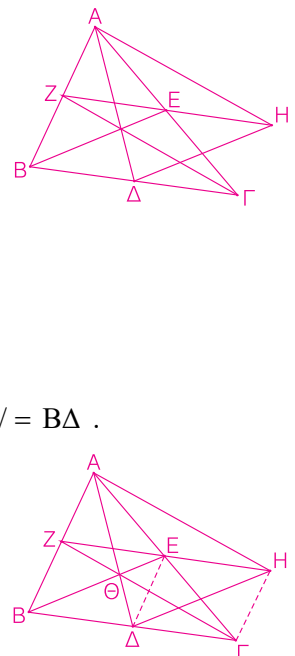
Είναι $\Pi_{\triangle A\Delta H} = A\Delta + \Delta H + AH = A\Delta + BE + \Gamma Z$.

γ. Αν Θ το κοινό σημείο των διαμέσων στο $\triangle AB\Gamma$, και K το σημείο τομής των $\Delta H, \Gamma Z$, τότε στο τρίγωνο:

• ZKH , το E είναι το μέσο του ZH και $EO \parallel KH$, οπότε $Z\Theta = \Theta K$

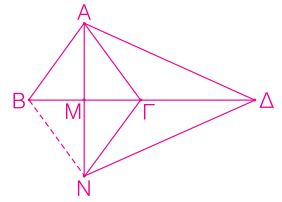
• $B\Theta\Gamma$, το Δ είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $\Delta K \parallel B\Theta$, οπότε $\Theta K = K\Gamma$

Άρα $Z\Theta = \Theta K = K\Gamma$.



269 Θέμα 4 - 1760

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.
- β. Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.
- γ. Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.

Λύση

- α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος AM είναι και διάμεσος. Επειδή $MA = MN$ και $MB = M\Gamma$, το $ABN\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον $AB = A\Gamma$, το $ABN\Gamma$ είναι ρόμβος.
- β. Επειδή το $ABN\Gamma$ είναι ρόμβος, η GM είναι η μεσοκάθετος του AN , οπότε $\Delta A = \Delta N$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.
- γ. Στο τρίγωνο $A\Delta N$ η ΔM είναι διάμεσος και $\Gamma\Delta = B\Gamma = 2\Gamma M$.

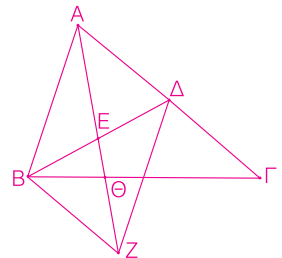
Είναι: • $\Gamma M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$

• $\Gamma\Delta + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 2\Gamma M + \Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow 3\Gamma M = \Delta M \Leftrightarrow \Gamma M = \frac{1}{3}\Delta M$

Οπότε $\Gamma\Delta = \frac{2}{3}\Delta M$, άρα το Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.

270 Θέμα 4 - 1827

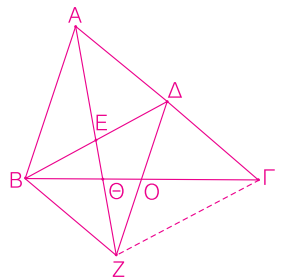
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BA . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = AE$. Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

Λύση

- α. Είναι $AE = EZ$ και $EB = E\Delta$, οπότε το $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Είναι $BZ \parallel \Delta A$, οπότε $BZ \parallel \Gamma\Delta$. Άρα το $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων $B\Gamma$ και ΔZ του παραλληλογράμμου $B\Delta\Gamma Z$, τότε το O είναι μέσο της ΔZ . Οι BO , ZE είναι διάμεσοι του τριγώνου $B\Delta Z$, οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρό του.

**271 Θέμα 4 - 1706**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

- α. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- γ. Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

Λύση

Έστω BD , GE οι διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α. Τα τρίγωνα ABD και AGE έχουν:
- $AB = AG$
 - $AD = AE$
 - $\hat{A}$ κοινή

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $BD = GE$, δηλαδή $\mu_\beta = \mu_\gamma$.

Άρα η Π ισχύει.

β. Διατύπωση

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, τότε $\beta = \gamma$.

Απόδειξη

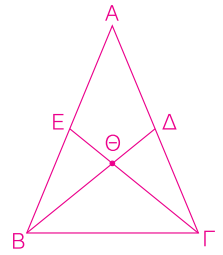
$$\text{Έχουμε } \mu_\beta = \mu_\gamma \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \\ \frac{1}{3}\mu_\beta = \frac{1}{3}\mu_\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\Theta = \Gamma\Theta \\ \Theta D = \Theta E \end{cases}$$

Τα τρίγωνα ΘBE και $\Theta \Gamma D$ έχουν:

- $B\Theta = \Gamma\Theta$
- $\Theta E = \Theta D$
- $\hat{B\Theta E} = \hat{\Gamma\Theta D}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $BE = \Gamma D \Rightarrow 2BE = 2\Gamma D \Rightarrow AB = AG$, δηλαδή $\beta = \gamma$.

γ. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ αν και μόνο αν $\mu_\beta = \mu_\gamma$.



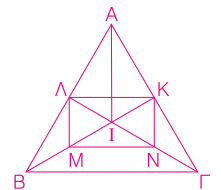
272 Θέμα 4 - 1719

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I .

Αν τα σημεία M και N είναι τα μέσα των IB και IG αντίστοιχα, να αποδείξετε:

α. Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

β. Το τετράπλευρο $MLKN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Λύση

α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$ είναι διάμεσοί του, οπότε το I είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα η AI θα διέρχεται από το μέσο της $B\Gamma$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα L , K είναι μέσα των AB , AG , οπότε $LK \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο $IB\Gamma$ τα M , N είναι μέσα των IB , IG οπότε $MN \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε $LK \parallel MN$, άρα το $MLKN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ABI το LM ενώνει τα μέσα των AB και BI οπότε $LM \parallel AI$.

Τα AI βρίσκεται στο φορέα του ύψους, άρα $AI \perp B\Gamma$ και επειδή $B\Gamma \parallel LK$, θα είναι $AI \perp LK$.

Επομένως $LM \perp LK$, οπότε $\hat{MLK} = 90^\circ$.

Άρα το $MLKN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

273 Θέμα 4 - 1843

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$

β. $MZ \parallel B\Delta$

γ. Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

Λύση

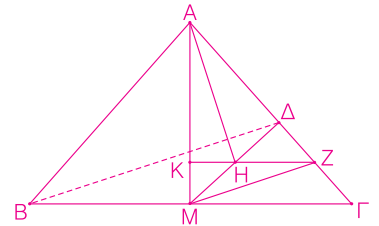
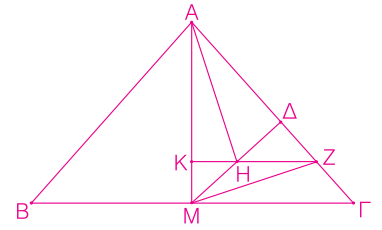
α. Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$, το H είναι το μέσο του $M\Delta$ και $HZ \parallel M\Gamma$, οπότε το

$$Z \text{ είναι μέσο του } \Gamma\Delta, \text{ άρα } HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

β. Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$, τα M , Z είναι τα μέσα των $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$, οπότε $MZ \parallel B\Delta$.

γ. Επειδή $ZK \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, είναι $ZK \perp AM$.

Στο $\triangle AMZ$ το H είναι το ορθόκέντρό του, οπότε $AH \perp MZ$. Επειδή $AH \perp MZ$ και $MZ \parallel B\Delta$, έχουμε $AH \perp B\Delta$.



274 Θέμα 4 - 1887

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β. η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .

γ. αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

Λύση

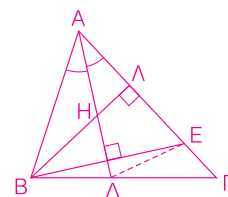
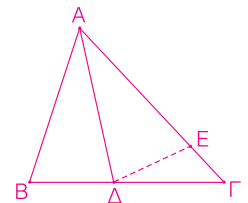
α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = AE$
- $A\Delta$ κοινή
- $\hat{B}\Delta A = \hat{E}\Delta A$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Επειδή $AB = AE$ και $\Delta B = \Delta E$, η $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του BE .

γ. Στο τρίγωνο ABE , το H είναι το ορθόκέντρό του, οπότε $EH \perp AB$.



275 Θέμα 4 - 1748

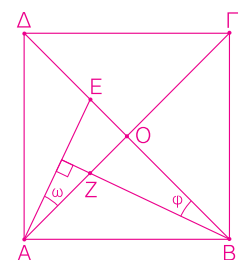
Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OA . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. Οι γωνίες ω και φ του παραπάνω σχήματος είναι ίσες.

β. $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$

γ. Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

Λύση



α. Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε:

- στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΕ είναι $\hat{\omega} = 90^\circ - \hat{\theta}$.
 - στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\hat{\phi} = 90^\circ - \hat{\theta}$.
- Άρα $\hat{\omega} = \hat{\phi}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΖ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ
- $\omega = \phi$

Οπότε είναι ίσα, άρα $BZ = AE$ και $OZ = OE$.

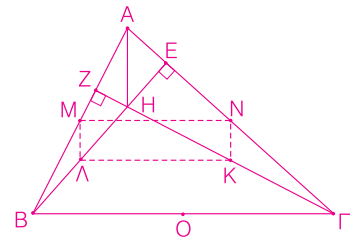
Επειδή $OG = OB$ και $OZ = OE$ έχουμε $OZ + OG = OE + OB \Rightarrow GZ = BE$.

γ. Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΖ και ΑΟ είναι τα ύψη του, άρα το Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΕΑΒ .
Οπότε το ΕΖ είναι στο φορέα του τρίτου ύψους του τριγώνου, άρα $EZ \perp AB$.

276 Θέμα 4 - 1777

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = AK$

ii. $NK = ML = \frac{AH}{2}$

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$.

Λύση

α. i. • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, οπότε $MN = \frac{BG}{2}$.

• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Λ, Κ είναι τα μέσα των ΗΒ, ΗΓ οπότε $AK = \frac{BG}{2}$. Άρα $MN = AK$.

ii. Στα τρίγωνα ΒΑΗ και ΓΑΗ τα Μ, Λ και Ν, Κ είναι τα μέσα των πλευρών τους.

Οπότε $ML \parallel \frac{AH}{2}$ και $NK \parallel \frac{AH}{2}$. Άρα $ML = NK = \frac{AH}{2}$.

iii. Επειδή $ML \parallel \frac{AH}{2}$ και $NK \parallel \frac{AH}{2}$, έχουμε $ML \parallel NK$, οπότε το ΜΝΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε $AH \perp BG$.

Επειδή $ML \parallel AH$ και $AH \perp BG$ είναι $ML \perp BG$.

Αφού $AK \parallel BG$, έχουμε $ML \perp MN$, άρα $\hat{NML} = 90^\circ$. Επομένως το ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β. • Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ, Ο είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $MO \parallel AG$.

• Στο τρίγωνο ΗΒΓ τα Ο, Κ είναι τα μέσα πλευρών του, οπότε $OK \parallel BH$.

Επειδή $BH \perp AG$, είναι και $OK \perp MO$, οπότε $\hat{MOK} = 90^\circ$.

277 Θέμα 4 - 1764

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$.

Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τρίγωνο EBA είναι ισόπλευρο.
- Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

Λύση

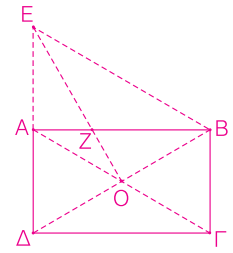
α. Είναι $\Delta\Delta // = B\Gamma$ και $\Delta A = AE$, οπότε $AE // = B\Gamma$, άρα το $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $BA \perp \Delta E$ και $\Delta A = AE$ η BA είναι η μεσοκάθετος του $E\Delta$, οπότε $B\Delta = BE$.

Είναι $A\Gamma = 2B\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = 2\Delta\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \Delta E$.

Οπότε $B\Delta = \Delta E = EB$, άρα το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ισόπλευρο.

γ. Στο $\triangle EBA$, τα EO και BA είναι ύψη, οπότε το Z είναι το ορθόκεντρό του. Άρα $\Delta Z \perp EB$.

**278 Θέμα 4 - 1754**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $\Delta\Delta$. Στο $\Delta\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA = HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.
- $\Delta\Theta = \Theta Z$
- Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

β. Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA έχουν:

- $HB = HA$
- $\hat{B}\hat{H}\Delta = \hat{A}\hat{H}Z$.

Άρα είναι ίσα.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $H\Delta\Theta$ και $HZ\Theta$ έχουν:

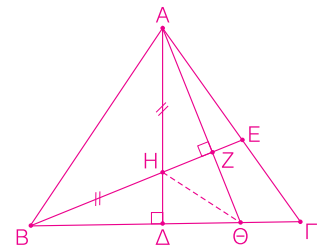
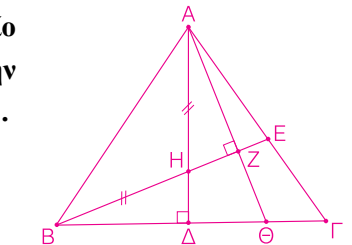
- $H\Theta$ κοινή
- $H\Delta = HZ$ από το i. ερώτημα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $\Delta\Theta = \Theta Z$.

iii. Στο τρίγωνο $AB\Theta$ το H είναι το ορθόκεντρό του, οπότε $\Theta H \perp AB$ και επειδή $HA = HB$ η ΘH είναι η μεσοκάθετος του AB .

β. Τα AZ και $B\Delta$ είναι ύψη του τριγώνου AHB που τέμνονται στο Θ .

Άρα το Θ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB .

**279 Θέμα 4 - 1780**

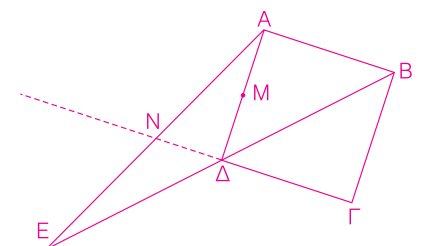
Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $\Delta\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι: i. $MN \perp A\Gamma$ ii. $\Gamma M \perp AN$

Λύση



α. Στο τρίγωνο EAB το Δ είναι μέσο του BE και $\Delta N \parallel AB$.

Επομένως το N είναι μέσο του AE , οπότε $\Delta N = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = \Delta M$.

β. Το τρίγωνο ΔNM είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{\Delta NM} = \hat{NM\Delta} = 45^\circ$.

γ. i. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα N, M είναι μέσα των $AE, A\Delta$, οπότε $MN \parallel \Delta E \Rightarrow MN \parallel B\Delta$.

Επειδή $AG \perp B\Delta$, έχουμε $MN \perp AG$.

ii. Στο τρίγωνο $AN\Gamma$ τα $A\Delta$ και NM είναι ύψη του, άρα το M είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε $GM \perp AN$.

280 Θέμα 4 - 1865

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

iii. Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .

β. Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .

Λύση

α. i. Επειδή η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}$ έχουμε $\hat{EBH} = \hat{EBK}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα EHA και EKG έχουν:

• $\hat{HEA} = \hat{KEZ}$

Οπότε είναι ίσα.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα HBE και KBE έχουν:

• BE κοινή

• $\hat{HBE} = \hat{KBE}$

Επομένως είναι ίσα, οπότε $BH = BK$.

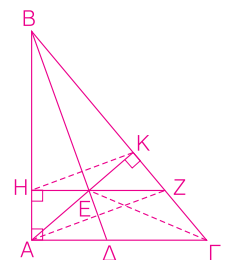
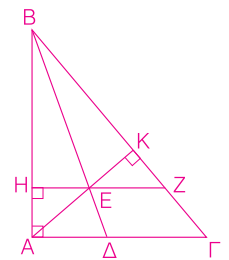
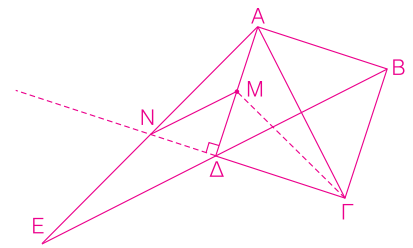
Άρα το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

iii. Στο τρίγωνο ABZ τα AK και ZH είναι ύψη του, άρα το E είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Οπότε $B\Delta \perp AZ$.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, το ύψος του AK είναι και διχοτόμος του.

Επομένως το E είναι το έγγεντρο του τριγώνου. Άρα η ΓE είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.



23. Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου

281 Θέμα 2 - 1647

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

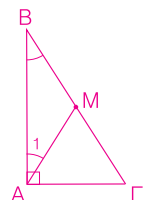
Λύση

α. Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 55^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

$AM = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow AM = MB$. Είναι $AM = MB$ οπότε $\hat{A_1} = \hat{B} = 35^\circ$ και

$\hat{A_1} + \hat{B} + \hat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + 35^\circ + \hat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AMB} = 110^\circ$.



282 Θέμα 2 - 1690

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του AA και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma\Delta A}$ είναι ίσες **β.** $\hat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$.

Λύση

α. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει ότι:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$$

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ ισχύει ότι:

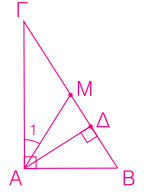
$$\hat{\Gamma\Delta A} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta A} = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

$$\text{Οπότε } \hat{B} = \hat{\Gamma\Delta A}$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

$$\text{Οπότε } AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma, \text{ άρα } \hat{\Gamma} = \hat{A_1}.$$

Η γωνία $\hat{AM\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, οπότε $\hat{AM\Delta} = \hat{\Gamma} + \hat{A_1} = 2\hat{\Gamma}$.

**283 Θέμα 2 - 1586**

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , $A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

$$\text{β. } \hat{BMA} = 2 \cdot x\hat{O}A$$

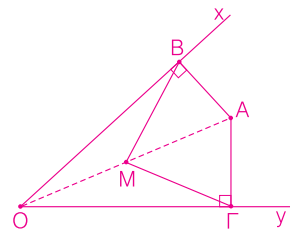
Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA η BM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

$$\text{Άρα } BM = \frac{OA}{2} = MA. \text{ Άρα το τρίγωνο } BMA \text{ είναι ισοσκελές.}$$

β. Επειδή $BM = MO$ έχουμε $\hat{OBM} = \hat{BOM}$.

Η γωνία $\hat{BMA}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο OBM , οπότε $\hat{BMA} = \hat{OBM} + \hat{BOM} = x\hat{OA} + x\hat{OA} = 2 \cdot x\hat{OA}$.

**284 Θέμα 2 - 1633**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AA της γωνίας $\hat{A}$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{AMB}$, $\hat{HAB}$, $\hat{A\Delta B}$.

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{MA\Delta} = \hat{\Delta AH} = 20^\circ$.

Λύση

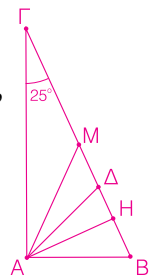
α. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma, \text{ άρα } \hat{MAG} = \hat{\Gamma} = 25^\circ.$$

Η γωνία $\hat{AMB}$ είναι εξωτερική στο $\hat{AM\Gamma}$, οπότε $\hat{AMB} = \hat{\Gamma} + \hat{MAG} = 2\hat{\Gamma} = 50^\circ$.

• Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 65^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο HAB είναι $\hat{HAB} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{HAB} + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{HAB} = 25^\circ$.



• Η γωνία $\hat{A}\hat{D}\hat{B}$ είναι εξωτερική του $\hat{A}\hat{D}\hat{G}$, οπότε $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = \hat{G} + \hat{D}\hat{A}\hat{G} = \hat{G} + \frac{\hat{A}}{2} = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ$.

β. Είναι: • $\hat{M}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{A}\hat{G} - \hat{M}\hat{A}\hat{G} = \frac{\hat{A}}{2} - \hat{M}\hat{A}\hat{G} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$
 • $\hat{D}\hat{A}\hat{H} = \hat{D}\hat{A}\hat{B} - \hat{H}\hat{A}\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} - \hat{H}\hat{A}\hat{B} = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$

285 Θέμα 2 - 1702

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A\Gamma \perp E\Gamma$

β. η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

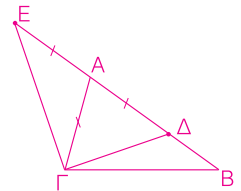
Λύση

α. Στο τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ είναι $A\Gamma = \frac{\Delta E}{2}$, οπότε η διάμεσος $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Γ , άρα $A\Gamma \perp E\Gamma$.

β. Επειδή $A\Gamma = A\Delta$ το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{D}\hat{G} = \hat{A}\hat{G}\hat{D}$.

Η $\hat{E}\hat{A}\hat{G}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, οπότε $\hat{E}\hat{A}\hat{G} = \hat{A}\hat{D}\hat{G} + \hat{A}\hat{G}\hat{D} = 2\hat{A}\hat{D}\hat{G}$.



286 Θέμα 2 - 1537

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH = \Delta A$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.

Λύση

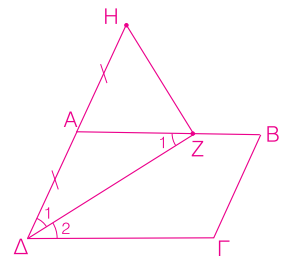
α. Είναι:

• $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, αφού ΔZ διχοτόμος

• $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ. Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β. Στο $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{H}$ είναι $\hat{Z}\hat{A} = \frac{\hat{H}}{2}$, οπότε η ZA είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα το $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{H}$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$.



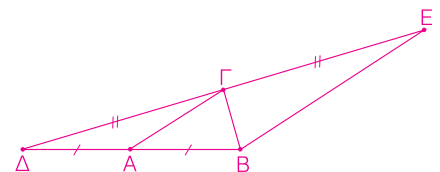
287 Θέμα 2 - 1551

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο.

β. Να δείξετε ότι $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

Λύση



- α. Στο $\triangle \Gamma \hat{A} B$ είναι $\Gamma A = \frac{B\Delta}{2}$, οπότε η ΓA είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
- β. Στο $\triangle B\hat{A}E$ τα A, Γ είναι τα μέσα των $B\Delta, \Delta E$, οπότε $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

288 Θέμα 2 - 1555

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$, όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β. Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.

Λύση

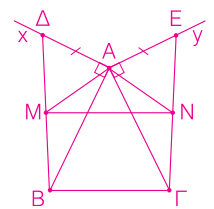
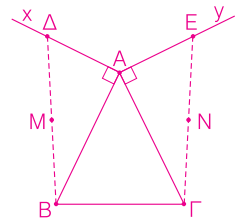
- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
 - $AB = A\Gamma$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

- β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\triangle AB\Delta$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{B\Delta}{2}$ (1).
- $\triangle A\Gamma E$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AN είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AN = \frac{\Gamma E}{2}$ (2).

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$ από τις (1) και (2) προκύπτει $AM = AN$, οπότε το $\triangle AMN$ είναι ισοσκελές.



289 Θέμα 2 - 1680

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
- β. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε:
- i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι η AM διχοτομεί τη γωνία $\angle \Delta ME$.

Λύση

- α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
 - $\angle \hat{A} B \Delta = \angle \hat{A} \Gamma E$

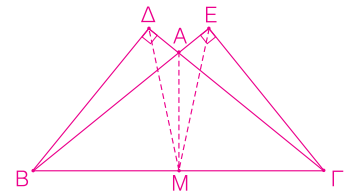
Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Delta = \Gamma E$.

- β.i. Στα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Gamma\Delta$ και $\triangle B\Gamma E$ οι $M\Delta$ και ME είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $M\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και $ME = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $M\Delta = ME$.

- ii. Τα $\triangle M\hat{A}\Delta$ και $\triangle M\hat{A}E$ έχουν:
- $A\Delta = AE$
 - $M\Delta = ME$
 - MA κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\angle \hat{M} A \Delta = \angle \hat{M} A E$.

Επομένως η AM διχοτομεί τη γωνία $\angle \Delta ME$.



290 Θέμα 2 - 1675

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Τα τρίγωνα KEB και $\Lambda Z\Gamma$ είναι ίσα.
β. $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $KB, \Lambda\Gamma$ αντίστοιχα.

Λύση

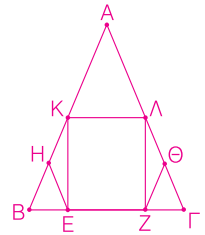
- α.** Τα ορθογώνια τρίγωνα KEB και $\Lambda Z\Gamma$ έχουν:
- $KB = \Lambda\Gamma$
 - $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα είναι ίσα.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο:

- $\triangle EKB$ ($\hat{E} = 90^\circ$) η EH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $EH = \frac{KB}{2}$ (1).
- $\triangle Z\Lambda\Gamma$ ($\hat{Z} = 90^\circ$) η $Z\Theta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $Z\Theta = \frac{\Lambda\Gamma}{2}$ (2).

Επειδή $KB = \Lambda\Gamma$ από τις (1) και (2) προκύπτει $EH = Z\Theta$.

**291 Θέμα 2 - 1655**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

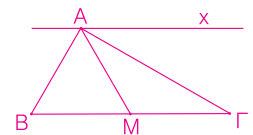
- α.** $\hat{MAG} = \hat{MGA}$
β. η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .

Λύση

- α.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG$. Άρα το $\triangle MAG$ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{MAG} = \hat{MGA}$ (1).

- β.** Επειδή $Ax \parallel B\Gamma$, είναι $\hat{xAG} = \hat{MGA}$ (2), ως εντός εναλλάξ.

Από τις (1), (2) προκύπτει $\hat{MAG} = \hat{xAG}$, άρα η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $\hat{MAx}$.

**292 Θέμα 2 - 1685**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.
β. Αν $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{BA\Delta}$ και $\hat{B\Gamma\Delta}$.

Λύση

- α.** Στα ορθογώνια τρίγωνα $BA\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) και $\Delta A\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$), οι $BZ, \Delta Z$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

Επομένως $BZ = \Delta Z$.

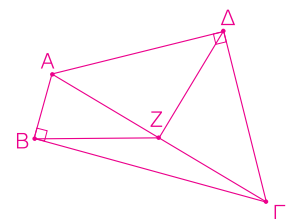
- β.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{BA\Gamma} + \hat{A\Gamma B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{BA\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{BA\Gamma} = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{A\Gamma\Delta} = 45^\circ$.

Είναι:

- $\hat{BA\Delta} = \hat{BA\Gamma} + \hat{\Gamma A\Delta} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$

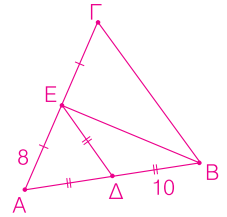
- $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{A\Gamma B} + \hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$



293 Θέμα 2 - 1615

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

**Λύση**

α. Στο $\triangle AEB$ είναι $E\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσός του $E\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $\angle AEB = 90^\circ$, επομένως το $\triangle AEB$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\triangle AB\Gamma$ η BE είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

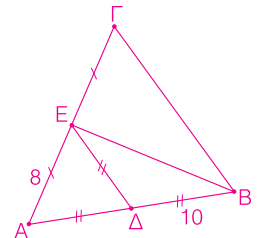
γ. Στο $\triangle AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20$.

Η περίμετρος Π του $\triangle AB\Gamma$ είναι: $\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 20 + 16 = 56$.

294 Θέμα 2 - 1614

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$.
- Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

**Λύση**

α. Στο $\triangle AEB$ είναι $E\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσός του $E\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Άρα $\angle AEB = 90^\circ$, επομένως το $\triangle AEB$ είναι ορθογώνιο.

β. Στο $\triangle AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 10 = 20$.

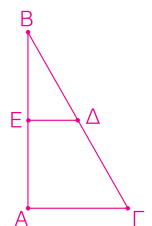
γ. Είναι $\Pi_{AB\Gamma} = AB + A\Gamma + B\Gamma = 20 + 16 + 20 = 56$.

295 Θέμα 2 - 1671

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

- $A\Gamma$
- $B\Gamma$
- $A\Delta$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**Λύση**

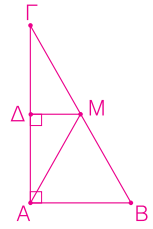
α. Στο $\triangle AB\Gamma$ τα Δ , E είναι μέσα των $B\Gamma$, AB , οπότε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow A\Gamma = 2\Delta E = 2 \cdot 1 = 2$.

β. Επειδή το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow B\Gamma = 2 \cdot 2 = 4$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η $A\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.

296 Θέμα 2 - 1548

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8\text{ cm}$. Έστω AM είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\hat{AM}\Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:



α. Να δείξετε ότι $AB = 4\text{ cm}$.

β. Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Άρα $\hat{MAG} = \hat{\Gamma}$.

Στο $\triangle M\Delta\Gamma$ είναι $\hat{AM}\Gamma + \hat{\Gamma} + \hat{MAG} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, επομένως $AB = \frac{B\Gamma}{2} = 4\text{ cm}$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AM\Gamma$ το $M\Delta$ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος. Οπότε το Δ είναι μέσο του $A\Gamma$. Στο $\triangle AB\Gamma$ τα M, Δ είναι μέσα των $B\Gamma$ και $A\Gamma$, οπότε $M\Delta = \frac{AB}{2} = 2\text{ cm}$.

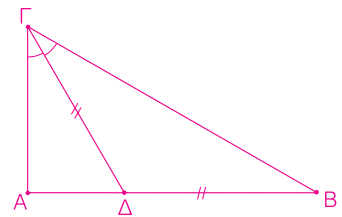
297 Θέμα 2 - 1638

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B} = 30^\circ$

β. $AB = 3\text{ cm}$



Λύση

α. Επειδή $\Delta B = \Delta\Gamma$ είναι $\hat{B} = \hat{\Delta\Gamma B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$.

Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A\Gamma\Delta} = 30^\circ$, οπότε $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = 1\text{ cm}$.

Άρα $AB = A\Delta + \Delta B = 1 + 2 = 3\text{ cm}$.

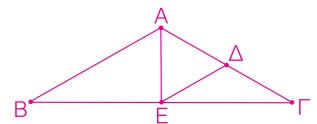
298 Θέμα 2 - 1686

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30° .

Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α. • Επειδή το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το $A\Gamma$ είναι διάμεσος θα είναι και ύψος, οπότε $\hat{A\Gamma E} = 90^\circ$.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma E$ ($\hat{E} = 90^\circ$) η $E\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $E\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta\Gamma$,

επομένως το $\triangle E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

• Είναι $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 30^\circ$, $\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Στο $\triangle E\Delta\Gamma$ είναι $\hat{E\Delta\Gamma} + \hat{\Delta E\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E\Delta\Gamma} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E\Delta\Gamma} = 120^\circ$.

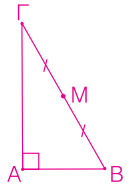
β. Είναι:

- $\widehat{E\Delta\Delta} = 90^\circ - \widehat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
 - $E\Delta = \Delta A$, οπότε $\widehat{A\Delta E} = \widehat{E\Delta\Delta} = 60^\circ$.
- Επομένως $\widehat{A\Delta E} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Άρα το $\triangle A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

299 Θέμα 2 - 1606

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ και σημείο M μέσο της $B\Gamma$.



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ. Να βρείτε τη γωνία $\widehat{AM\Gamma}$.

Λύση

α. Είναι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ$.

Οπότε $\widehat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

β. Επειδή στο $\triangle AB\Gamma$ είναι $\widehat{A} = 90^\circ$ και AM διάμεσος προς την υποτείνουσα, προκύπτει $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG$.

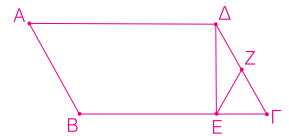
Οπότε το $\triangle AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ. Είναι $MA = MG$ άρα $\widehat{MAG} = \widehat{\Gamma} = 30^\circ$

Στο $\triangle AM\Gamma$ είναι $\widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma} + \widehat{MAG} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AM\Gamma} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AM\Gamma} = 120^\circ$

300 Θέμα 2 - 1704

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\widehat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου.

β. Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{EZ\Gamma}$.

Λύση

α. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ$.

Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 60^\circ$. Άρα $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ η EZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB}{2} = AK$.

γ. Επειδή $EZ = Z\Gamma$, είναι $\widehat{Z\Gamma E} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$.

Άρα $\widehat{EZ\Gamma} = 60^\circ$.

301 Θέμα 2 - 1691

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$,

β. το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$,

γ. το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

α. Είναι $BZ \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$ οπότε $AB \perp BZ$.

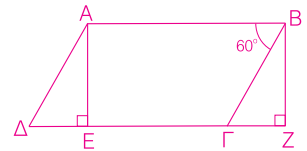
Άρα $\hat{ZB\Gamma} = \hat{ABZ} - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AE = BZ$, ως αποστάσεις παραλλήλων

Άρα είναι ίσα.

γ. Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, γιατί έχει $\hat{B} = \hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$.



302 Θέμα 2 - 1631

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

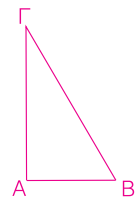
β. Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{cm}$ να βρείτε το μήκος της AB .

Λύση

- α. Είναι:
- $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$
 - $\hat{A} = 3\hat{\Gamma} = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$
 - $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$

Άρα $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

β. Επειδή το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, προκύπτει $AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{ cm}$.



303 Θέμα 2 - 1649

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α. Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να υπολογιστεί η γωνία $B\Delta\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.

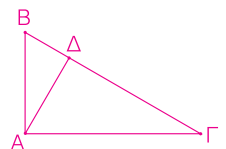
Λύση

α. Είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{B\Delta A} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B\Delta A} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B\Delta A} = 30^\circ$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Delta$ είναι $\hat{B\Delta A} = 30^\circ$, οπότε $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



304 Θέμα 2 - 13653

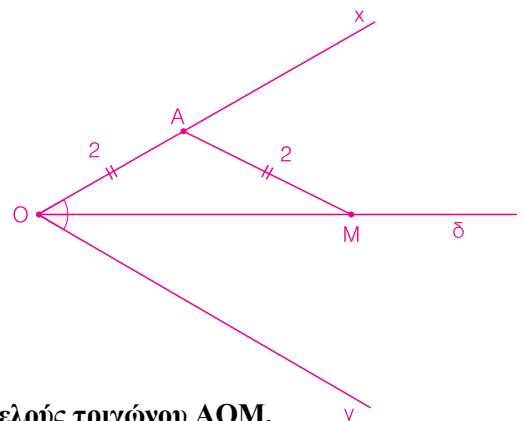
Σχεδιάζουμε γωνία $\hat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας $\hat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο M στην $O\delta$, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία $\hat{\delta Oy}$.

β. Τις γωνίες του τριγώνου AOM .

γ. Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .

Λύση



α. Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$, οπότε $\widehat{xO\delta} = \widehat{\delta Oy} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

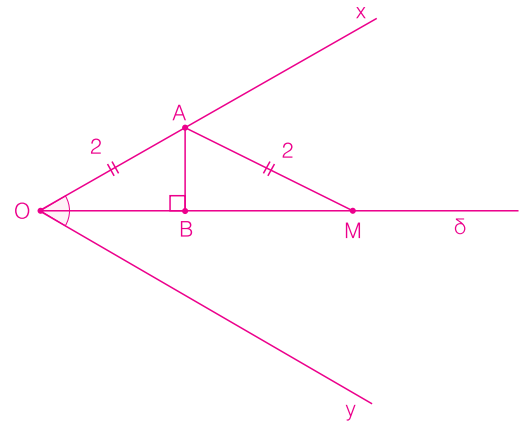
β. Είναι: • $\widehat{AOM} = \widehat{xO\delta} = 30^\circ$

• $AO = AM$, άρα $\widehat{AOM} = \widehat{AMO} = 30^\circ$

• $\widehat{AOM} + \widehat{AMO} + \widehat{MAO} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \widehat{MAO} = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow \widehat{MAO} = 120^\circ$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB είναι $\widehat{AOB} = 30^\circ$, οπότε,

$$AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

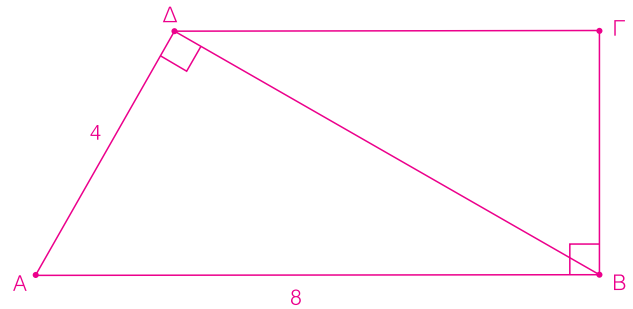


305 Θέμα 2 - 13828

Σε τραπέζιο ABΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν $AD = 4$ και $AB = 8$ τότε:

α. Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{DAB}$.

β. Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραpezίου ABΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.



Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η υποτείνουσα AB είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς AD άρα $\widehat{DBA} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD έχουμε $\widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{DAB} = 60^\circ$.

β. Οι βάσεις AB και ΔΓ του τραpezίου ABΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ.

Είναι $\widehat{ABD} = \widehat{BDG} = 30^\circ$, ως εντός εναλλάξ άρα $\widehat{ABD} = \widehat{BDG} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $\widehat{BDG} = 30^\circ$, άρα $BG = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow BD = 2BG$.

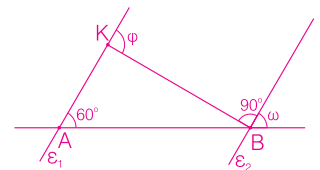
306 Θέμα 2 - 1619

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.

β. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Λύση

α. Επειδή $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ είναι:

- $\omega = \widehat{BAK} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.
- $\phi = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, ως εντός και επί τα αυτά μέρη.

β. Είναι $\widehat{AKB} = 180^\circ - \widehat{\phi} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Άρα το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.

γ. Το $\widehat{ABK}$ είναι ορθογώνιο ($\widehat{K} = 90^\circ$) και $\widehat{KBA} + \widehat{KAB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{KBA} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{KBA} = 30^\circ$.

Επομένως $KA = \frac{AB}{2} = 3$.

307 Θέμα 2 - 1625

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β. το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

Λύση

α. Είναι $\hat{\Delta AZ} = \frac{\hat{A}_{εξ}}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

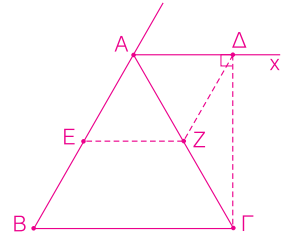
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) η ΔZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$.

Άρα το ΔAZ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta AZ} = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β. Στο $\Delta B\Gamma$ τα E, Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = AE$.

Είναι $AE = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta Z$ και $\Delta Z = A\Delta$, οπότε $EZ = AE = \Delta Z = A\Delta$.

Άρα το $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



308 Θέμα 2 - 13837

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.

Λύση

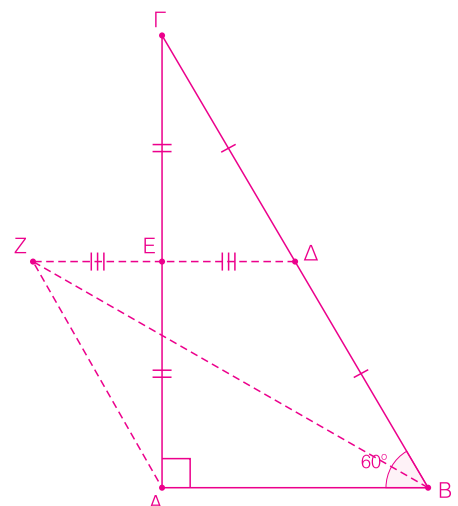
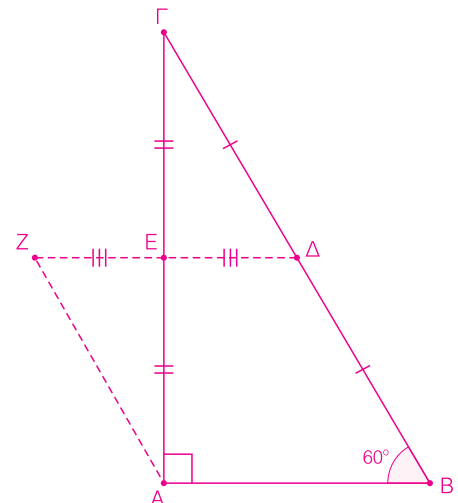
α. Τα τρίγωνα AEZ και $\Gamma E\Delta$ έχουν:

- $AE = E\Gamma$
- $EZ = E\Delta$
- $\hat{AEZ} = \hat{\Gamma E\Delta}$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AZ = \Gamma\Delta$.

β. Είναι $AZ = \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = \Delta B$, άρα $AZ = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $AZ = AB$ και το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.



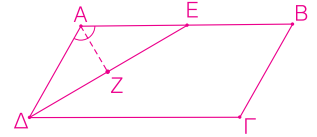
309 Θέμα 2 - 14876

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$ **β.** $AZ = \frac{AB}{4}$



Λύση

α. Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ είναι εντός και επί τα αυτά, οπότε $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^\circ$.

Η DE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$, οπότε $\hat{A\Delta E} = \frac{\hat{\Delta}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ ($\hat{Z} = 90^\circ$) είναι $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$, οπότε $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

310 Θέμα 2 - 1567

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

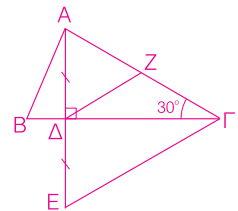
Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) η ΔZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β. Στο $\Delta A\Gamma$ η $\Gamma\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές και η $\Gamma\Delta$ διχοτόμος του.

Επομένως $\hat{A\Gamma E} = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Άρα το $\Delta A\Gamma E$ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.



311 Θέμα 2 - 13831

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α. Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

β. Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο **α.** ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

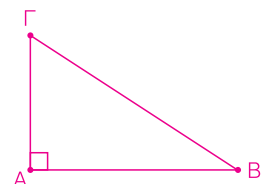
ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

Λύση

α. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, οπότε η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η $B\Gamma$.

Έχουμε $AB > A\Gamma \Leftrightarrow \gamma > \beta$, άρα $\hat{\Gamma} > \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{\Gamma}$.

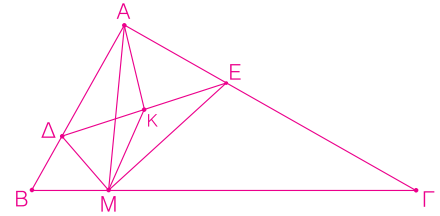
Οπότε, η γωνία $\hat{B}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.



- β. i.** Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 30° η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60° . Αφού η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{B}$. Έχουμε $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
- ii.** Η $B\Gamma$ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Εφόσον $\hat{B} = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά AG είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

312 Θέμα 4 - 1812

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{BMA}$ και $\hat{AM\Gamma}$ οι οποίες τέμνουν τις AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



- α.** Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔME είναι ορθή.
- β.** Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Λύση

- α.** Επειδή οι $M\Delta$, ME είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{BMA}$, $\hat{AM\Gamma}$ έχουμε

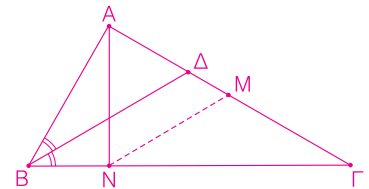
$$\Delta\hat{MA} = \frac{B\hat{MA}}{2} \text{ και } A\hat{ME} = \frac{A\hat{M\Gamma}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \Delta\hat{ME} = \Delta\hat{MA} + A\hat{ME} = \frac{B\hat{MA}}{2} + \frac{A\hat{M\Gamma}}{2} = \frac{B\hat{MA} + A\hat{M\Gamma}}{2} = \frac{B\hat{M\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

- β.** Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔME ($\hat{M} = 90^\circ$) και ΔAE ($\hat{A} = 90^\circ$), οι MK , KA είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $MK = \frac{\Delta E}{2}$, $KA = \frac{\Delta E}{2}$. Άρα $MK = KA$.

313 Θέμα 4 - 1738

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος $B\Delta$ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της AG φέρουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:



- α.** Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β.** Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ.** $AN \perp B\Gamma$

Λύση

- α.** Επειδή $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ έχουμε $\Delta\hat{B\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$, οπότε το $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- β.** Είναι $MN\hat{\Gamma} = \Delta\hat{B\Gamma}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $MN\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, επομένως το $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.

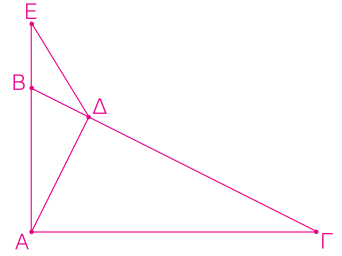
- γ.** Στο ισοσκελές τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι $MN = M\Gamma = \frac{AG}{2}$.

Στο $AN\Gamma$, η NM είναι διάμεσος και ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{N} = 90^\circ$. Άρα $AN \perp B\Gamma$.

314 Θέμα 4 - 1831

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με την γωνία A ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του AD και παίρνουμε σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = BD$.



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

ii. $AE = \Gamma\Delta$

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

- $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $\hat{B} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$
- $\widehat{EB\Delta} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Το $B\hat{E}\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Delta} = \hat{E}$ και $\widehat{EB\Delta} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{E} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 30^\circ$.

Άρα $\hat{\Delta} = \hat{E} = 30^\circ$ και $\widehat{EB\Delta} = 120^\circ$.

β.i. Το $A\hat{\Delta}B$ είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) με $B\hat{A}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Οπότε $BD = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BE = \frac{AB}{2}$.

ii. Είναι $AE = AB + BE = AB + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$.

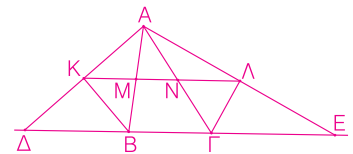
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB$.

Είναι $\Delta\Gamma = B\Gamma - BD = 2AB - BE = 2AB - \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{2}$. Άρα $AE = \Gamma\Delta$.

315 Θέμα 4 - 1824

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α. Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

β. Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

γ. $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

Λύση

α. Στα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ οι διχοτόμοι BK , $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη και διαμέσοι, οπότε τα K , Λ είναι μέσα των $A\Delta$, AE .

β. Στο τρίγωνο $\triangle ADE$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AD, AE , οπότε $K\Lambda \parallel DE$.

Στο $\triangle ADB$ το K είναι μέσο της AD και $KM \parallel DB$, οπότε το M είναι μέσο της AB .

Στο $\triangle AGE$ το Λ είναι μέσο της AE και $\Lambda N \parallel GE$, οπότε το N είναι μέσο της AG .

Στα ορθογώνια τρίγωνα KAB και ΛAG οι $MK, \Lambda\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

$$KM = \frac{AB}{2} = MA \quad \text{και} \quad \Lambda N = \frac{AG}{2} = NA.$$

Άρα τα $\triangle KMA, \triangle \Lambda NA$ είναι ισοσκελή.

γ. Τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB, AG του τριγώνου ABG , οπότε $MN = \frac{BG}{2}$.

$$\text{Είναι} \quad K\Lambda = KM + MN + \Lambda\Lambda = \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} + \frac{AG}{2} = \frac{AB + AG + BG}{2}$$

316 Θέμα 4 - 1808

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα. Στην προέκταση της AE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K = \Delta\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α. $K\Delta = \Lambda E$

β. Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια.

γ. Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.

Λύση

α. Είναι $K\Delta = \Delta\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = AE = \Lambda E$.

β. Στο $\triangle AKB$ είναι $K\Delta = \frac{AB}{2}$, οπότε η διάμεσος $K\Delta$ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{K} = 90^\circ$.

• Στο τρίγωνο $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι $\Lambda E = \frac{AG}{2}$, οπότε η διάμεσος είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Οπότε το τρίγωνο $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Lambda} = 90^\circ$.

γ. Τα $\triangle A\Delta K$ και $\triangle A\Delta\Lambda$ έχουν:

- $\Delta\Delta = AE$

- $\Delta K = E\Lambda$

- $\angle A\Delta K = \angle A\Delta\Lambda$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle A\Delta E$ και $\angle A\Delta\Lambda$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $AK = \Lambda\Lambda$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $AK = \Lambda\Lambda$

- $AB = AG$

Οπότε είναι ίσα.

317 Θέμα 4 - 1771

Δύο κύκλοι $(O, \rho_1), (K, \rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ε στο M .

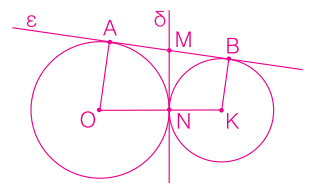
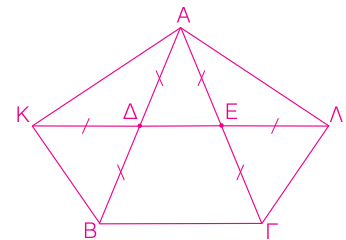
Να αποδείξετε ότι:

α. Το M είναι μέσον του AB .

β. $\widehat{OMK} = 90^\circ$

γ. $\widehat{ANB} = 90^\circ$

Λύση



α. Είναι:

- $MA = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (O, ρ_1)
- $MB = MN$, ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (K, ρ_2)

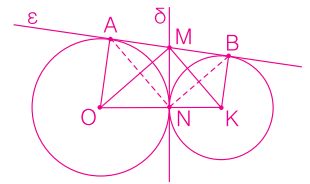
Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB .

β. Οι MO και MK είναι διακεντρικές ευθείες οπότε είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AMN}$ και $\widehat{BMN}$. Οπότε:

- $\widehat{OMN} = \frac{\widehat{AMN}}{2}$, $\widehat{NMK} = \frac{\widehat{NMB}}{2}$
- $\widehat{OMK} = \widehat{OMN} + \widehat{NMK} = \frac{\widehat{AMN} + \widehat{NMB}}{2} = \frac{\widehat{AMB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

γ. Η NM είναι διάμεσος στο τρίγωνο ANB και $NM = MA = \frac{AB}{2}$.

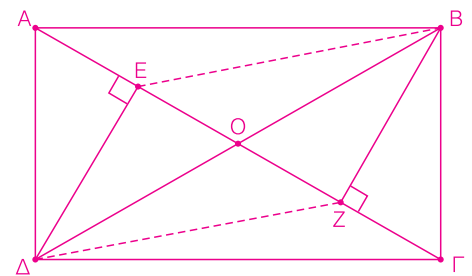
Άρα το τρίγωνο ANB είναι ορθογώνιο με $\widehat{ANB} = 90^\circ$.



318 Θέμα 4 - 13852

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο $A\Gamma$, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα.
- β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Αν $\widehat{\Delta AE} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$.



Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔEO και BZO έχουν:

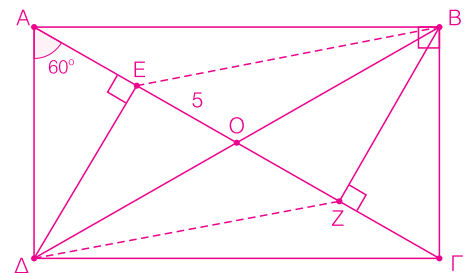
- $\widehat{\Delta EO} = \widehat{BZO} = 90^\circ$
- $\widehat{EOD} = \widehat{ZOB}$ (ως κατακορυφήν)
- $DO = OB$ (O μέσο της διαγωνίου $B\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β. Στα τρίγωνα ΔEO και BZO οι γωνίες $\widehat{ODE}$ και $\widehat{OBZ}$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{EOD}$ και $\widehat{ZOB}$.

Από τη σύγκριση του α. ερωτήματος έχουμε $EO = ZO$.

Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του EZ και $B\Delta$ διχοτομούνται στο O .



γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε $\widehat{\Delta\Gamma A} = 60^\circ$, άρα $\widehat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma O = \Delta O$.

Επομένως το τρίγωνο $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$ και $\widehat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$, άρα $\widehat{\Delta O\Gamma} = 120^\circ$ και $\widehat{\Delta O A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Οπότε το τρίγωνο $A\Delta O$ είναι ισόπλευρο και η ΔE είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο E είναι το μέσο του τμήματος AO με $AE = EO = 5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε $\widehat{\Delta AE} = 60^\circ$, οπότε $\widehat{A\Delta E} = 30^\circ$, άρα η $AE = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2AE \Leftrightarrow A\Delta = 10$.

319 Θέμα 4 - 13851

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ. Αν $\hat{\Delta BE} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $BD = 2AD$.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι $AB = \Gamma\Delta$, ενώ έχουμε ότι $\Gamma\Delta = \Gamma E$, άρα $AB = \Gamma E$. Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ άρα και $AB \parallel \Gamma E$. Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

β. Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε $AG = BE$ και στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε $AG = BD$.

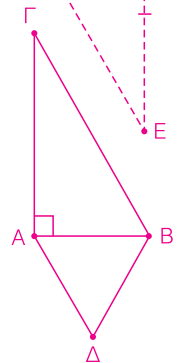
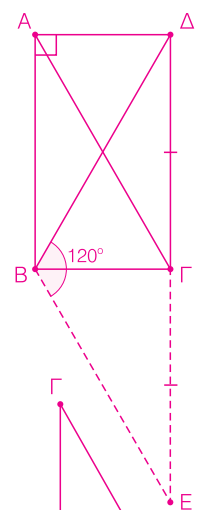
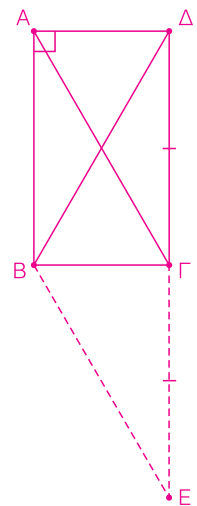
Άρα $BE = BD$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ. • Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, οπότε $BD = BE$ και $\hat{BDE} = \hat{BED} = 30^\circ$ αφού $\hat{EBD} = 120^\circ$.

• Το ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα $AG \parallel BE$ συνεπώς $\hat{BEG} = \hat{AGD} = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\hat{AGD} = 30^\circ$ άρα

$$AD = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow AD = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow BD = 2AD.$$



320 Θέμα 4 - 13853

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.

γ. Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

α. Είναι $\hat{\Delta AB} = \hat{ABG}$, ως εντός και εναλλάξ.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως $\hat{\Delta AB} = 60^\circ$ άρα $\hat{ABG} = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{AGB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

β. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $AB = AD = BD = \frac{12}{3} = 4$.

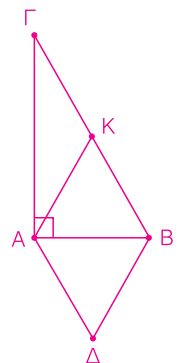
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{\Gamma} = \hat{AGB} = 30^\circ$, επομένως $AB = \frac{BG}{2}$ άρα

$$BG = 2AB = 2 \cdot 4 = 8.$$

γ. Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του. Άρα $BK = AD$.

$$\text{Είναι } AD = AB \text{ και } AB = \frac{BG}{2}.$$

Οπότε $BK = AD = AB = \frac{BG}{2}$, δηλαδή το Κ είναι το μέσο της ΒΓ.



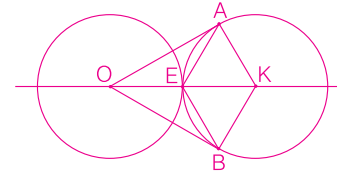
Η ΑΚ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AK = \frac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $BD = AB$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $BD = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε $BD = AK$.

Άρα, αν Κ μέσο της ΒΓ τότε ότι $AD = BK$ και $BD = AK$, δηλαδή το ΑΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον, εφόσον $AD = BD$ το παραλληλόγραμμο ΑΔΒΚ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

321 Θέμα 4 - 1796

Δυο ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ, ρ) να αποδείξετε ότι:



- α. $AE = BE$ β. $\hat{AOK} = 30^\circ$

γ. Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

Λύση

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, άρα $KA \perp OA$ και $KB \perp OB$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΚ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΒΟΚ ($\hat{B} = 90^\circ$) οι ΑΕ, ΒΕ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $AE = \frac{OK}{2}$ και $BE = \frac{OK}{2}$.

Άρα $AE = BE$.

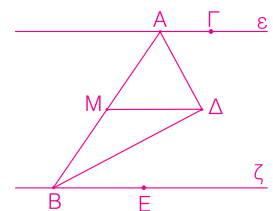
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι $AK = \rho = EK = \frac{OK}{2}$, οπότε $\hat{AOK} = 30^\circ$.

γ. Είναι $AE = \frac{OK}{2}$ και $AK = \frac{OK}{2}$ άρα $AE = AK$.

Οπότε $AE = AK = KB = BE$, άρα το ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

322 Θέμα 4 - 1811

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες ε και ζ, και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:



α. Η γωνία $\hat{BDA}$ είναι ορθή.

β. $\hat{BMD} = 2 \cdot \hat{MAD}$

γ. $MD \parallel \varepsilon$

Λύση

α. Οι ΒΔ, ΑΔ είναι οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών $\hat{BAG}$ και $\hat{ABE}$, οπότε $\hat{BAD} + \hat{ABD} = \frac{\hat{BAG}}{2} + \frac{\hat{ABE}}{2} = \frac{\hat{BAG} + \hat{ABE}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{BAD} + \hat{ABD} + \hat{BDA} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{BDA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BDA} = 90^\circ$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ ($\hat{D} = 90^\circ$) η ΔΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $DM = \frac{AB}{2} = AM$.

Άρα $\hat{MDA} = \hat{MAD}$ (1). Στο τρίγωνο ΜΑΔ η γωνία $\hat{BMD}$ είναι εξωτερική, οπότε

$\hat{BMD} = \hat{MDA} + \hat{MAD} \stackrel{(1)}{=} 2\hat{MDA}$.

γ. Έχουμε $\hat{GAD} = \hat{MAD} \stackrel{(1)}{=} \hat{MDA}$, οπότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, άρα $MD \parallel \varepsilon$.

323 Θέμα 4 - 1716

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του BA και GE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $MA = ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

Λύση

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E B\Gamma$ τα ΔM , EM είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε

$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} \text{ και } EM = \frac{B\Gamma}{2} . \text{ Άρα } MA = ME .$$

ii. Επειδή το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε $AH \perp B\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AH\Delta$ είναι $\widehat{A\hat{H}\Delta} + \widehat{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{H}\Delta} = 90^\circ - \widehat{H\hat{A}\Delta}$, (1).

Έστω Z το σημείο τομής της AH με τη $B\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Gamma$ είναι

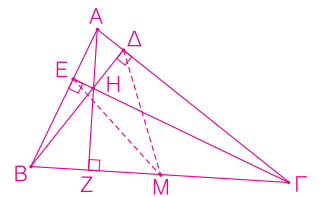
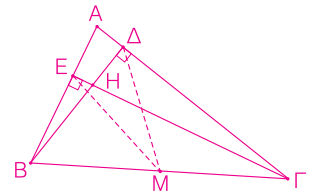
$$\hat{\Gamma} + \widehat{Z\hat{A}\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{A}\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \widehat{H\hat{A}\Delta} \quad (2) .$$

Από τις (1), (2) έχουμε $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$.

2^{ος} τρόπος

Οι γωνίες $\widehat{A\hat{H}\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές κάθετες, άρα $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$.

β. Στο τρίγωνο ABH το ύψος στην AB είναι το HE και το ύψος στην BH είναι το $\Delta\Delta$, οι φορείς των οποίων τέμνονται στο Γ . Άρα το ορθόκεντρο του ΔABH είναι το Γ .

**324 Θέμα 4 - 1759**

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2\Delta\Delta$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β. Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.

γ. Η HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Z\hat{H}\Gamma}$.

Λύση

α. Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε $\frac{AE}{2} \parallel \frac{\Delta\Gamma}{2}$, άρα $AE \parallel \Delta Z$, επομένως το $AEZ\Delta$.

Είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού επιπλέον $\Delta\Delta = \frac{AB}{2} = AE$, το $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.

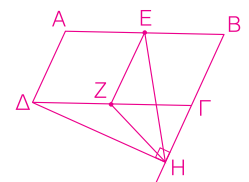
β. Επειδή το $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος, έχουμε $EZ = \Delta\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta H\Gamma$ ($\hat{H} = 90^\circ$), η HZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $HZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $EZ = HZ$, οπότε το ΔEZH είναι ισοσκελές.

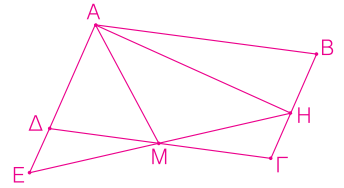
γ. Επειδή $EZ = HZ$, έχουμε $\widehat{Z\hat{H}E} = \widehat{Z\hat{E}H}$. Αφού $EZ \parallel B\Gamma$, είναι $\widehat{Z\hat{E}H} = \widehat{E\hat{H}B}$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα $\widehat{Z\hat{H}E} = \widehat{E\hat{H}B}$, οπότε η HE είναι η διχοτόμος της $\widehat{Z\hat{H}\Gamma}$.



325 Θέμα 4 - 1787

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:



α. Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB .

β. Τα τμήματα EH , $\Delta\Gamma$ διχοτομούνται.

γ. $\hat{E} = \hat{\Delta MA}$

Λύση

α. Είναι $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = B\Gamma = A\Delta$, οπότε $\hat{\Delta AM} = \hat{\Delta MA}$.

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι $\hat{\Delta MA} = \hat{MAB}$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα $\hat{\Delta AM} = \hat{MAB}$, οπότε η AM είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta AB}$.

β. Τα $\hat{M\Delta E}$ και $\hat{M\Gamma H}$ έχουν:

• $M\Delta = M\Gamma$

• $\hat{\Delta ME} = \hat{HMG}$

• $\hat{E\Delta M} = \hat{M\Gamma H}$, ως εντός εναλλάξ.

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ), οπότε $ME = MH$.

Επομένως το M είναι το κοινό μέσο των $\Gamma\Delta$ και EH .

γ. Το $\hat{EAH}$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{HE}{2} = ME$.

Άρα $\hat{E} = \hat{EAM}$. και αφού $\hat{EAM} = \hat{\Delta MA}$ έχουμε $\hat{E} = \hat{\Delta MA}$.

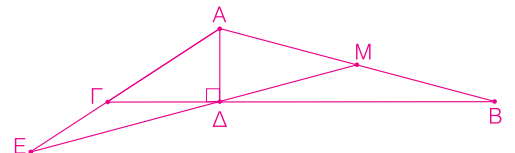
326 Θέμα 4 - 1881

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > A\Gamma$, $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{B} = \hat{E}$

β. $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \hat{AM\Delta}$

γ. $\Gamma E < A\Gamma$



Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $\Delta M = \frac{AB}{2} = MB$.

Επομένως το ΔMB είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{M\Delta B}$.

Είναι $\hat{M\Delta B} = \hat{\Gamma\Delta E}$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma\Delta E} = \hat{E}$, αφού $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Άρα $\hat{B} = \hat{E}$.

β. • Η γωνία $\hat{A\Gamma B}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $\Gamma E\Delta$, οπότε $\hat{A\Gamma B} = \hat{E} + \hat{\Gamma\Delta E} = 2\hat{E} \stackrel{\alpha.}{=} 2\hat{B}$

• Η γωνία $\hat{AM\Delta}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $M\Delta B$, οπότε $\hat{AM\Delta} = \hat{B} + \hat{M\Delta B} = 2\hat{B}$.

Άρα $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \hat{AM\Delta}$

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta < A\Gamma$ είναι $\Gamma\Delta = \Gamma E$, οπότε $\Gamma E < A\Gamma$.

327 Θέμα 4 - 1862

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ στο κέντρο του O , αυτή τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ σε σημείο E τέτοιο ώστε $ΔΕ = ΔΑ$.

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ. Το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Το O είναι μέσο της $ΑΓ$, οπότε στο $\triangle AEG$ η EO είναι διάμεσος και ύψος. Επομένως το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.

β. Είναι $ΒΓ \parallel ΔΑ$, οπότε $ΒΓ \parallel ΔΕ$.

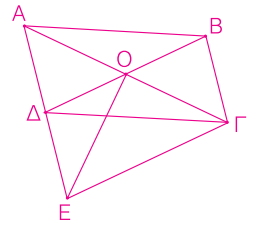
Επομένως το $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΕ$ ($\hat{O} = 90^\circ$), η $ΟΔ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$ΟΔ = \frac{ΑΕ}{2} = ΔΑ, (1).$$

Επειδή $ΟΔ = ΟΒ$ και $ΔΑ = ΒΓ$, από την (1) έχουμε $ΟΒ = ΒΓ$.

Οπότε το $\triangle ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

**328 Θέμα 4 - 14881**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία A ορθή και $ΑΜ$ η διάμεσός του. Από το M φέρουμε $ΜΚ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και $ΜΛ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Αν N , P είναι τα μέσα των $ΒΜ$ και $ΓΜ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. $\hat{NKM} = \hat{NMK}$
- β. Η $ΜΚ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{NMA}$.
- γ. $ΑΜ = ΚΝ + ΑΡ$

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΒΜ$, η $ΚΝ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2} = ΝΜ.$$

Άρα $\hat{NKM} = \hat{NMK}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η $ΑΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα,

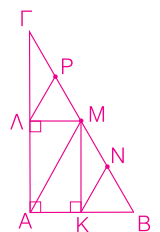
$$\text{οπότε } ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΒ.$$

Άρα το $ΜΑΒ$ είναι ισοσκελές και επειδή το $ΜΚ$ είναι ύψος θα είναι και η διχοτόμος της $\hat{NMA}$.

γ. Έχουμε $ΚΝ = \frac{ΜΒ}{2}$.

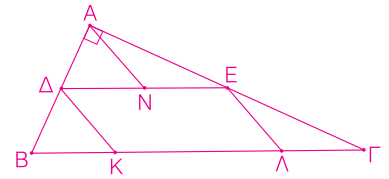
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΛΜΓ$, η $ΛΡ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $ΛΡ = \frac{ΜΓ}{2}$.

$$\text{Οπότε } ΚΝ + ΛΡ = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΑΜ.$$



329 Θέμα 4 - 1880

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ , E και N τα μέσα των AB , AG και AE αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{\Delta K\Lambda} = 2\hat{B}$ και $\hat{E\Lambda K} = 2\hat{\Gamma}$

β. Το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. $\Delta E = 2\Delta K$

Λύση

α. • Στο τρίγωνο $B\Delta K$ είναι $\Delta K = KB$, οπότε $\hat{B} = \hat{B\Delta K}$ και η γωνία $\hat{\Delta K\Lambda}$ είναι εξωτερική, άρα $\hat{\Delta K\Lambda} = \hat{B} + \hat{B\Delta K} = 2\hat{B}$.

• Στο τρίγωνο $E\Lambda\Gamma$ είναι $E\Lambda = \Lambda\Gamma$, οπότε $\hat{\Lambda E\Gamma} = \hat{\Gamma}$ και η γωνία $\hat{E\Lambda K}$ είναι εξωτερική, άρα $\hat{E\Lambda K} = \hat{\Gamma} + \hat{\Lambda E\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$.

β. Στο $\hat{A}B\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , AG , οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma$, άρα $\Delta E \parallel K\Lambda$ (1) και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Είναι $\hat{\Delta K\Lambda} + \hat{E\Lambda K} = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Επειδή οι $\hat{\Delta K\Lambda}$, $\hat{E\Lambda K}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των $K\Delta$, $E\Lambda$ που τέμνονται από την $K\Lambda$ και είναι παραπληρωματικές, έχουμε $\Delta K \parallel E\Lambda$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι το $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

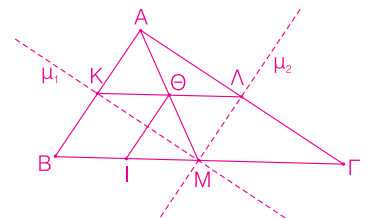
Είναι: • $KB = K\Delta = E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

• $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} = \frac{\Delta K + \Delta E + \Delta K}{2}$

Οπότε $2\Delta E = 2\Delta K + \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K$.

330 Θέμα 4 - 1859

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους μ_1 , μ_2 των πλευρών του AB και AG , οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$

ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$.

β. Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. i. Επειδή $M \in \mu_1$, έχουμε $MA = MB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AM είναι το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

ii. Στο $A\Lambda M K$ είναι $\hat{K} = \hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι $K\Lambda = AM$.

Οπότε $\Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

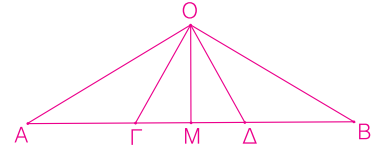
β. Στο $\triangle AB\Gamma$ τα K, Λ είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε $K\Lambda \parallel B\Gamma$, άρα $K\Theta \parallel BI$.

Στο ορθογώνιο $\triangle AMK$ είναι $K\Theta = \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4} = BI$.

Οπότε $K\Theta \parallel BI$, άρα το $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.

331 Θέμα 4 - 1710

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\widehat{GO\Delta}$ είναι 60°

ii. οι γωνίες $\widehat{OAG}, \widehat{OBD}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30° .

β. Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

Λύση

α. i. Επειδή $O\Gamma = \Gamma\Delta = O\Delta$, το $\triangle O\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα $\widehat{GO\Delta} = 60^\circ$.

ii. Επειδή το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο είναι $\widehat{O\Gamma\Delta} = \widehat{O\Delta\Gamma} = 60^\circ$

• Στο τρίγωνο GOA είναι $O\Gamma = A\Gamma$, οπότε $\widehat{GOA} = \widehat{A}$ και η γωνία $\widehat{O\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική, άρα $\widehat{O\Gamma\Delta} = \widehat{A} + \widehat{GOA} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\widehat{A} \Leftrightarrow \widehat{A} = 30^\circ$

• Στο τρίγωνο $BO\Delta$ είναι $O\Delta = \Delta B$, οπότε $\widehat{DOB} = \widehat{B}$ και η γωνία $\widehat{O\Delta\Gamma}$ είναι εξωτερική, άρα $\widehat{O\Delta\Gamma} = \widehat{B} + \widehat{DOB} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\widehat{B} \Leftrightarrow \widehat{B} = 30^\circ$.

Άρα $\widehat{OAG} = \widehat{OBD} = 30^\circ$.

β. Επειδή $\widehat{A} = \widehat{B}$ το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $OA = OB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο OAB η διάμεσος OM είναι και ύψος, άρα $OM \perp AB$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο MOA ($\widehat{M} = 90^\circ$) είναι $\widehat{A} = 30^\circ$, οπότε

$$OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA.$$

332 Θέμα 4 - 1806

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α. $\widehat{B} = \widehat{BAM}$

β. $\widehat{A\Delta H} = \widehat{\Delta AH}$

γ. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$, άρα $\widehat{B} = \widehat{BAM}$.

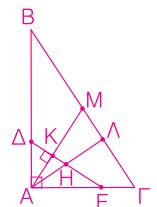
β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ ($\widehat{A} = 90^\circ$), η AH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $AH = \frac{\Delta E}{2} = H\Delta$, άρα $\widehat{A\Delta H} = \widehat{\Delta AH}$.

γ. Έστω ότι η AH τέμνει την $B\Gamma$ στο Λ .

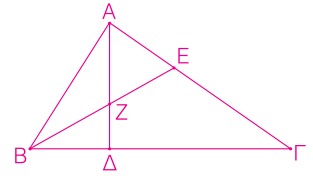
Στο τρίγωνο $AB\Lambda$ είναι $\widehat{B\Lambda A} + \widehat{B} = \widehat{\Delta AH} + \widehat{BAM} = \widehat{A\Delta K} + \widehat{\Delta AK} = 90^\circ$, αφού το τρίγωνο $K\Delta\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Άρα $\widehat{B\Lambda A} = 90^\circ$, οπότε $AH \perp B\Gamma$.



333 Θέμα 4 - 1713

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$

ii. $AD = \frac{3}{2}BZ$

β. Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α. i. Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.

Οπότε $\hat{ABZ} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD είναι $\hat{B} + \hat{BAD} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{BAZ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{BAZ} = 30^\circ$.

Επειδή $\hat{ABZ} = \hat{BAZ}$, το $\triangle ZAB$ είναι ισοσκελές με $AZ = BZ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle BZD$ ($\hat{D} = 90^\circ$) είναι $\hat{ZBD} = 30^\circ$,

οπότε $ZD = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow AD - AZ = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow AD - BZ = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow 2AD - 2BZ = BZ \Leftrightarrow 2AD = 3BZ \Leftrightarrow AD = \frac{3}{2}BZ$

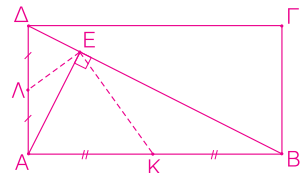
β. Επειδή το $\triangle AZE$ είναι ισόπλευρο, έχουμε $\hat{ZAE} = 60^\circ$, οπότε:

• $\hat{A} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$

334 Θέμα 4 - 14879

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε $AE \perp BD$. Έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και AD αντιστοίχως, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{KEL} = 90^\circ$

ii. $KL = \frac{AG}{2}$

β. Αν $\hat{BAG} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $KL = BG$.

Λύση

α. i. Στα ορθογώνια τρίγωνα EAB και EAD ($\hat{E} = 90^\circ$), οι EK και EL είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα.

Οπότε $EK = \frac{AB}{2} = AK$ και $EL = \frac{AD}{2} = AL$.

Άρα τα τρίγωνα KEA και LEA είναι ισοσκελή, οπότε $\hat{AEK} = \hat{EAK}$ και $\hat{LEA} = \hat{EAL}$.

Είναι $\hat{KEL} = \hat{KEA} + \hat{LEA} = \hat{EAK} + \hat{EAL} = \hat{KAL} = 90^\circ$.

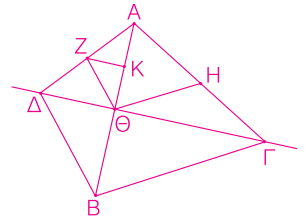
ii. Στο $\triangle ABD$ τα K, Λ είναι τα μέσα των AB, AD , οπότε $KL = \frac{BD}{2}$. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο έχουμε

$BD = AG$, οπότε $KL = \frac{AG}{2}$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BAG ($\hat{B} = 90^\circ$) έχουμε $\hat{BAG} = 30^\circ$, οπότε $BG = \frac{AG}{2} \stackrel{\text{a.ii.}}{=} KL$.

335 Θέμα 4 - 1866

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΔAB , εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .

β. Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.

γ. Αν η ZK είναι η κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

Λύση

- α. Είναι:
- $\Delta A = \Delta B$, αφού το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές
 - $\Gamma A = \Gamma B$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

Άρα η $\Delta\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του AB .

β. Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB , θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A\Delta\Theta} = \hat{\Theta\Delta B} = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta\Delta$ η ΘZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = ZA$.

Οπότε $\hat{Z\Theta\Delta} = \hat{A\Delta\Theta} = 60^\circ$.

Στο $A\Theta\Gamma$, είναι: $\hat{A\Gamma\Theta} + \hat{\Theta\Delta\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Gamma\Theta} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Gamma\Theta} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta\Gamma$ η ΘH είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma$.

Οπότε $\hat{H\Theta\Gamma} = \hat{A\Gamma\Theta} = 30^\circ$.

Είναι $\hat{Z\Theta\Delta} + \hat{Z\Theta H} + \hat{H\Theta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{Z\Theta H} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z\Theta H} = 90^\circ$.

2^{ος} τρόπος

• Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔAB έχουμε $\hat{\Delta} = 120^\circ$, οπότε $\hat{\Delta B A} = 30^\circ$, άρα $\hat{\Delta B \Gamma} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

• Στο ΔAB , τα Z , Θ είναι τα μέσα των $A\Delta$, AB , οπότε $Z\Theta \parallel B\Delta$

• Στο $AB\Gamma$, τα Θ , H είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Theta H \parallel B\Gamma$

Επειδή $\Delta B \perp B\Gamma$ είναι και $Z\Theta \perp \Theta H$, οπότε $\hat{Z\Theta H} = 90^\circ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta\Delta$ είναι $\hat{\Theta\Delta A} + \hat{\Delta\Theta A} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Delta\Theta A} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta\Theta A} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο KAZ ($\hat{K} = 90^\circ$), είναι $\hat{A} = 30^\circ$, οπότε $ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{A\Delta}{4}$.

336 Θέμα 4 - 1871

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

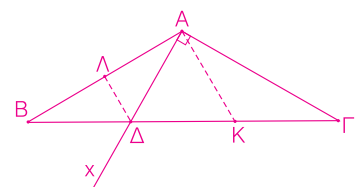
α. Το τρίγωνο $\Lambda\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β. $\Delta\Gamma = 2\Delta B$

γ. $\Lambda\Delta \parallel AK$

δ. $AK = 2\Lambda\Delta$

Λύση



α. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 120^\circ$, έχουμε:

- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$
- $\hat{BA\Delta} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

Άρα $\hat{B} = \hat{BA\Delta}$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ($\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$), έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \stackrel{a.}{\Leftrightarrow} B\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2B\Delta$.

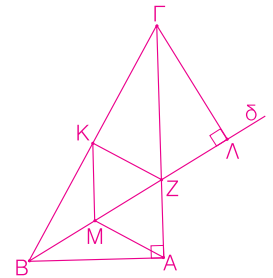
γ. Είναι $\Delta\Gamma = 2\Delta B \Leftrightarrow 2\Delta K = 2\Delta B \Leftrightarrow \Delta K = \Delta B$.

Στο $\triangle ABK$ τα Λ, Δ είναι τα μέσα των AB, BK , οπότε $\Lambda\Delta \parallel AK$.

δ. Από το γ. ερώτημα είναι και $\Lambda\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Lambda\Delta$.

337 Θέμα 4 - 1872

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:



α. Το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος.

γ. $\Gamma Z = 2ZA$

δ. $B\Lambda = A\Gamma$

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Είναι $\hat{\Gamma BZ} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma BZ} = \hat{\Gamma}$, άρα το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{ZBA} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$ και AM η διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AZ = \frac{BZ}{2}$ και $AM = \frac{BZ}{2}$.

Άρα $AM = AZ$.

• Στο $\triangle B\Gamma Z$ τα K, M είναι τα μέσα των $B\Gamma, BZ$, οπότε $KM \parallel \Gamma Z$ και $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \stackrel{a.}{=} \frac{BZ}{2} = AZ$.

Άρα $KM \parallel AZ$, οπότε το $AMKZ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $AM = AZ$, είναι ρόμβος.

γ. Στο β. ερώτημα έχουμε $KM = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow ZA = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2ZA$.

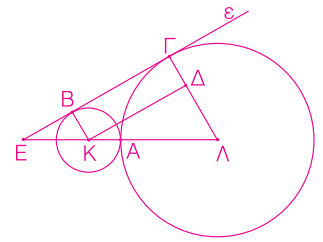
δ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Lambda B\Gamma$ ($\hat{\Lambda} = 90^\circ$) έχουν:

- $B\Gamma$ κοινή
- $\hat{B\Gamma A} = \hat{B\Gamma \Lambda}$ ($= 30^\circ$)

Οπότε είναι ίσα, άρα $B\Lambda = A\Gamma$.

338 Θέμα 4 - 1721

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .



α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{\Delta K\Lambda}$ είναι 30° .

γ. Να αποδείξετε ότι το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

Λύση

α. Οι ακτίνες στα σημεία επαφής είναι κάθετες στην εφαπτόμενη, άρα $KB \perp \varepsilon$ και $\Lambda\Gamma \perp \varepsilon$. Είναι $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$ και $K\Delta \parallel B\Gamma$, οπότε $K\Delta \perp \Gamma\Delta$.

Άρα στο $B\Gamma\Delta K$ είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Gamma\Delta = BK = \rho$.

Είναι: • $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$.

• $K\Lambda = KA + \Lambda\Lambda = \rho + 3\rho = 4\rho$.

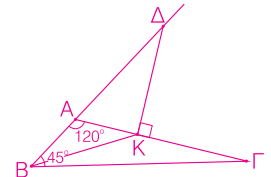
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) είναι $\Lambda\Delta = 2\rho = \frac{4\rho}{2} = \frac{K\Lambda}{2}$, οπότε $\hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$.

γ. Επειδή $K\Delta \parallel B\Gamma$, έχουμε $\hat{E} = \hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma E\Lambda$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$) είναι $\hat{E} = 30^\circ$, οπότε $\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow 3\rho = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow E\Lambda = 6\rho$.

339 Θέμα 4 - 1761

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $\Lambda\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην AG που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:



α. Η γωνία $\hat{\Delta K\Lambda}$ είναι ίση με 30° .

β. Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

γ. Αν Z το μέσο της $\Lambda\Delta$, τότε $\hat{ZKB} = 90^\circ$.

δ. Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Lambda$.

Λύση

α. Είναι $\hat{\Delta K\Lambda} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\Lambda\Delta$ είναι $\hat{\Delta K\Lambda} + \hat{\Delta\Lambda K} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta K\Lambda} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\Lambda\Delta$ ($\hat{K} = 90^\circ$), είναι $\hat{\Delta} = 30^\circ$, οπότε $AK = \frac{\Lambda\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$.

Άρα το $K\Lambda\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ. Το Z είναι το μέσο της $\Lambda\Delta$, οπότε $AZ = \frac{\Lambda\Delta}{2} = AB$.

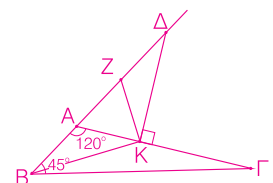
Οπότε στο ZKB η KA είναι διάμεσος και $KA = AB = \frac{BZ}{2}$, άρα $\hat{ZKB} = 90^\circ$.

δ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\Lambda\Delta$, η KZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $KZ = \frac{\Lambda\Delta}{2} = AK$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $K\Lambda\Delta$ και KZB έχουν: • $\Lambda\Delta = BZ$

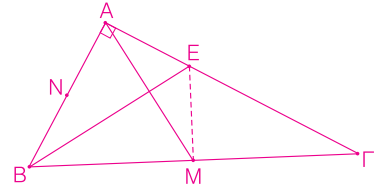
• $AK = KZ$

Άρα είναι ίσα, οπότε $KB = K\Delta$. Επομένως το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $B\Lambda$.



340 Θέμα 4 - 1835

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την AG στο σημείο E .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ ii. $AE = \frac{\Gamma E}{2}$
 iii. η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

β. Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά.

Λύση

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BM$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE , MBE έχουν:

- $AB = MB$
- BE κοινή

Οπότε είναι ίσα, επομένως $\hat{ABE} = \hat{EBM}$. Άρα η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$.

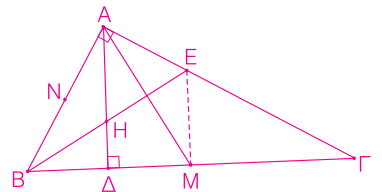
ii. Επειδή η BE είναι η διχοτόμος της $\hat{B}$, έχουμε $AE = EM$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ ($\hat{M} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $EM = \frac{\Gamma E}{2} \Leftrightarrow AE = \frac{\Gamma E}{2}$.

iii. Επειδή $BA = BM$ και $EA = EM$, η BE είναι η μεσοκάθετος του AM .

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$.

Επομένως το $\triangle MAB$ είναι ισοσκελές με κορυφή M , άρα η διάμεσος MN είναι και ύψος.

Αφού επιπλέον το H είναι το ορθόκентρο του $\triangle ABM$ το ύψος MN διέρχεται από το H , άρα τα M , H και N είναι συνευθειακά.

**341 Θέμα 4 - 1782 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ****342 Θέμα 4 - 1895**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle A\Gamma B$ ($A\Gamma = B\Gamma$). Φέρουμε τα ύψη του AK και $\Gamma\Lambda$. Αν E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.
β. Η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .

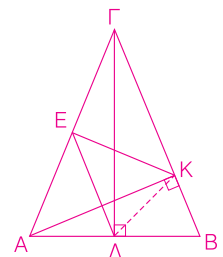
Λύση

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα KAG ($\hat{K} = 90^\circ$) και ΛGA ($\hat{\Lambda} = 90^\circ$), οι KE , ΛE είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $KE = \frac{AG}{2}$ (2) και $\Lambda E = \frac{AG}{2}$.

Άρα $KE = \Lambda E$, οπότε το τρίγωνο $KE\Lambda$ είναι ισοσκελές.

- β.** Είναι:
- $\hat{K\Lambda E} = \hat{K\Lambda B}$, αφού $KE = \Lambda E$
 - Λ , E μέσα AB , $A\Gamma$ οπότε $E\Lambda \parallel B\Gamma$, άρα $\hat{K\Lambda E} = \hat{K\Lambda B}$, ως εντός εναλλάξ.

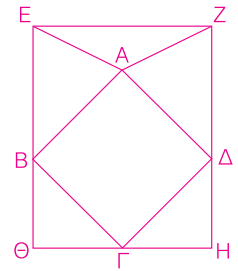
Επομένως $\hat{K\Lambda E} = \hat{K\Lambda B}$. Άρα η $K\Lambda$ είναι διχοτόμος της γωνίας BKE .



343 Θέμα 4 - 1850

Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου.

Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκάθετου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B , Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\angle ABE$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\angle \Theta B \Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle AZ\Delta$ είναι ίσα.
- ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

β. Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AEZ$.

Λύση

α. i. Επειδή το σημείο A βρίσκεται στη μεσοκάθετο του EZ , έχουμε $AE = AZ$, οπότε $\widehat{AEZ} = \widehat{AZE}$.

Επομένως $\widehat{AEB} = \widehat{AZ\Delta}$, ως διαφορές ίσων γωνιών.

Τα τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle AZ\Delta$ έχουν $\widehat{AEB} = \widehat{AZ\Delta}$ και $\widehat{EBA} = \widehat{Z\Delta A} = 45^\circ$, οπότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\widehat{EAB} = \widehat{Z\Delta\Delta}$.

Τα τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle AZ\Delta$ έχουν:

- $AE = AZ$
- $\widehat{AEB} = \widehat{AZ\Delta}$
- $\widehat{EAB} = \widehat{Z\Delta\Delta}$

Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

ii. Επειδή τα τρίγωνα $\triangle EAB$ και $\triangle Z\Delta\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $AB = \Delta\Delta$.

Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45° , οπότε

$$\widehat{ABE} = \widehat{\Theta B \Gamma} = \widehat{B \Gamma \Theta} = \widehat{\Delta \Gamma H} = \widehat{H \Delta \Gamma} = \widehat{\Delta \Delta Z} = 45^\circ$$

Άρα $\widehat{AB \Gamma} = \widehat{B \Gamma \Delta} = \widehat{\Gamma \Delta A} = 90^\circ$.

Επομένως το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

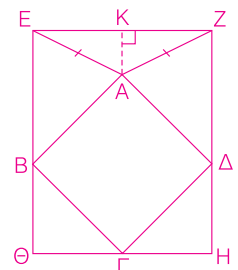
Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

β. Έστω AK η απόσταση του A από την πλευρά EZ . Είναι $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AKZ$ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως $\widehat{AZK} = 30^\circ$.

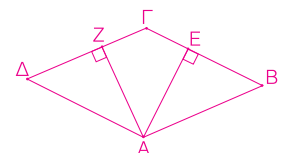
Επειδή $AE = AZ$ έχουμε $\widehat{AZK} = \widehat{AEZ} = 30^\circ$.

Στο τρίγωνο $\triangle AEZ$, είναι $\widehat{E\hat{A}Z} + \widehat{AEZ} + \widehat{AZK} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{A}Z} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\hat{A}Z} = 120^\circ$



344 Θέμα 4 - 1742

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $\triangle ZAE$ είναι ισοσκελές.

β. Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .

γ. Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN \parallel ZE$ και $ZM = EN$.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

- $AB = A\Delta$, ως πλευρές ρόμβου
- $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες ρόμβου

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$, επομένως το τρίγωνο $ZA\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή τα $\triangle Z\Delta\Delta$ και $\triangle EAB$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta Z = BE$.

Οπότε και $\Gamma Z = \Gamma E$, αφού $\Gamma\Delta = \Gamma B$.

Επειδή $AZ = AE$ και $\Gamma Z = \Gamma E$, η $A\Gamma$ είναι η μεσοκάθετος του ZE .

γ. Στο $\triangle A\Delta\Delta$, τα M , N είναι τα μέσα των $A\Delta$, AB , οπότε $MN \parallel B\Delta$.

Είναι: • $ZE \perp A\Gamma$, αφού η $A\Gamma$ μεσοκάθετος του ZE

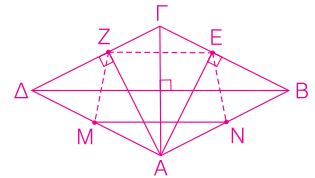
- $B\Delta \perp A\Gamma$, ως διαγώνιοι του ρόμβου

Άρα έχουμε $ZE \parallel B\Delta$, οπότε $ZE \parallel MN$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $ZA\Delta$ ($\hat{Z} = 90^\circ$) , EAB ($\hat{E} = 90^\circ$) , οι ZM , EN είναι

διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $ZM = \frac{A\Delta}{2}$ και $EN = \frac{AB}{2}$.

Είναι $A\Delta = AB$, οπότε $ZM = EN$.



345 Θέμα 4 - 1737

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N το σημείο τομής του HE με την πλευρά $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. $AH = A\Delta = AE$

β. Η γωνία $E\Delta H$ είναι ορθή.

γ. Τα σημεία A , E και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

Λύση

α. Στο $\triangle A\Delta H$ το AM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση τη ΔH , άρα $AH = A\Delta$.

Όμοια το $\triangle AEH$ είναι ισοσκελές, οπότε $AH = AE$. Άρα $AH = A\Delta = AE$.

β. Το $\triangle AMHN$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, οπότε $\hat{MHN} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $E\Delta H$ είναι ορθογώνιο.

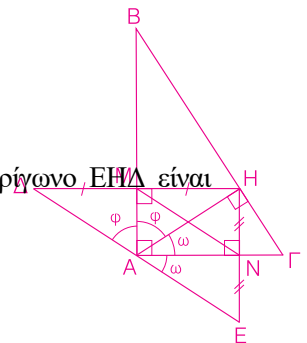
γ. Στα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta H$ και AHE οι AM , AN είναι ύψη άρα και διχοτόμοι τους.

Οπότε $\hat{\Delta AM} = \hat{MAH} = \varphi$ και $\hat{EAN} = \hat{HAN} = \omega$.

Είναι $\hat{\Delta AE} = 2\varphi + 2\omega = 2(\varphi + \omega) = 2\hat{BAG} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Άρα τα E , A , Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΔHE τα M , N είναι μέσα των $H\Delta$ και HE οπότε $MN = \frac{\Delta E}{2}$.



346 Θέμα 4 - 13522

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

γ. Αν η γωνία $A = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

Λύση

α. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ έχουν:

- $A\Delta$ κοινή
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, επειδή $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .
- $\hat{AZ\Delta} = \hat{AH\Delta} = 90^\circ$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β. Φέρνουμε τις ΔB , $\Delta \Gamma$. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της $B\Gamma$ θα ισαπέχει από τα B και Γ ,

άρα $B\Gamma = \Gamma\Delta$, (1).

Τα τρίγωνα $BZ\Delta$ και $\Gamma H\Delta$ έχουν:

- $\hat{AZ\Delta} = \hat{AH\Delta} = 90^\circ$
- $B\Delta = \Gamma\Delta$
- $\Delta Z = H\Delta$, (2) επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων $AZ\Delta$ και $AH\Delta$, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ αντίστοιχα.

Άρα είναι ίσα, οπότε $ZB = H\Gamma$.

γ. Είναι $A = 60^\circ$, οπότε $A_2 = 30^\circ$.

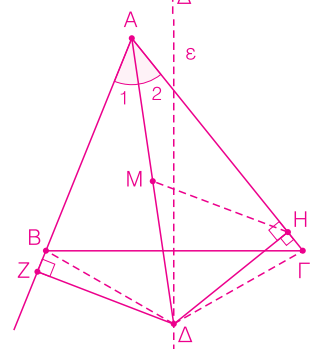
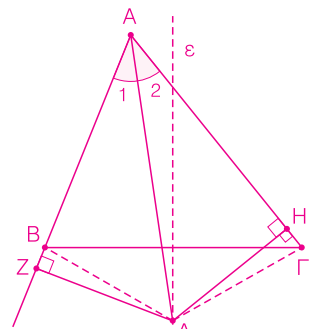
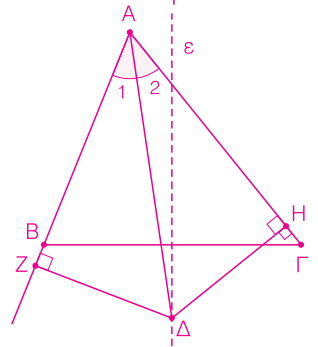
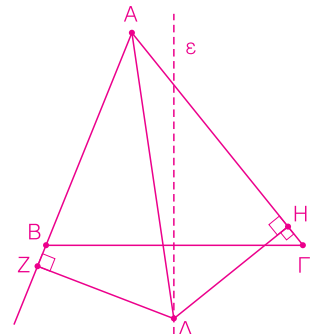
Στο ορθογώνιο $A\Delta H$, η γωνία $A_2 = 30^\circ$, οπότε $H\Delta = \frac{A\Delta}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο $AH\Delta$, η HM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$HM = \frac{A\Delta}{2} \quad (4).$$

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $HM = H\Delta$ (5).

Από (5) και (2) έχουμε ότι $HM = \Delta Z$.



347 Θέμα 4 - 13672

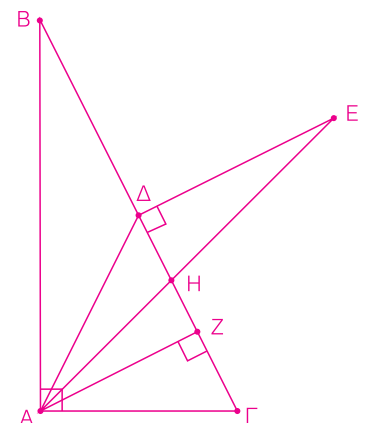
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma AZ} = \hat{\Delta AB}$.

β. $A\Delta = \Delta E$.

γ. $\hat{ZAA} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

Λύση



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η AD είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, οπότε $AD = DB = \Delta\Gamma$, και είναι $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZA\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma A Z} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Gamma A Z} = \hat{B}$.

Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $AD = DB$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta AB} = \hat{B}$.

Επομένως $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta AB}$ (3).

β. Η AH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε $\hat{\Gamma AH} = \hat{HAB}$ (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma AH} - \hat{\Gamma A Z} = \hat{HAB} - \hat{\Delta AB} \Leftrightarrow \hat{ZAH} = \hat{HAD} \quad (5).$$

Είναι, $AZ \parallel \Delta E$ αφού είναι κάθετες στη $B\Gamma$, άρα, $\hat{ZAH} = \hat{E}$ (6), ως εντός εναλλάξ.

Από τις (5) και (6) προκύπτει ότι $\hat{HAD} = \hat{E}$, οπότε στο τρίγωνο $A\Delta E$, είναι $\Delta E = AD$.

γ. Είναι $\hat{\Gamma A Z} + \hat{ZAD} + \hat{\Delta AB} = \hat{A}$, οπότε:

$$\hat{ZAD} = \hat{A} - \hat{\Gamma A Z} - \hat{\Delta AB} = 90^\circ - \hat{B} - \hat{B} = \hat{\Gamma} - \hat{B} \text{ αφού είναι}$$

$$\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta AB} = \hat{B} \text{ και } \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}.$$

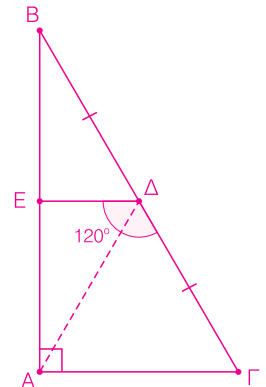
348 Θέμα 4 - 13855

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E\Delta\Gamma} = 120^\circ$, τότε:

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta\Gamma A}$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Gamma$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{AHZ} = 90^\circ$.



Λύση

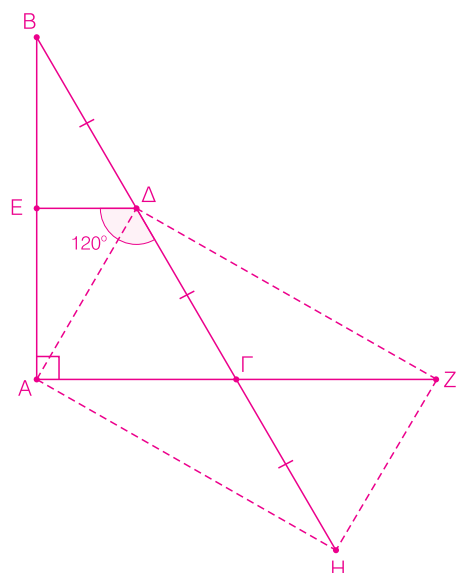
α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $DE \parallel A\Gamma$ άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB . Οι γωνίες $\hat{E\Delta\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά άρα

$$\hat{E\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AD = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AD = \Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

$$\text{Οπότε } A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = AD.$$

Επομένως το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο αφού $AD = A\Gamma = \Delta\Gamma$.



γ. • Στο τετράπλευρο ΑΗΖΔ οι διαγώνιοι ΔΗ και ΑΖ διχοτομούνται στο Γ αφού $\Delta\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma\text{H}$ και $A\Gamma = \Gamma Z$.

Άρα ΑΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

• Είναι $A\Gamma = \Gamma\Delta \Leftrightarrow 2A\Gamma = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow AZ = \Delta H$, άρα το παραλληλόγραμμο ΑΗΖΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγωνίους, οπότε $\widehat{AHZ} = 90^\circ$.

349 Θέμα 4 - 13540

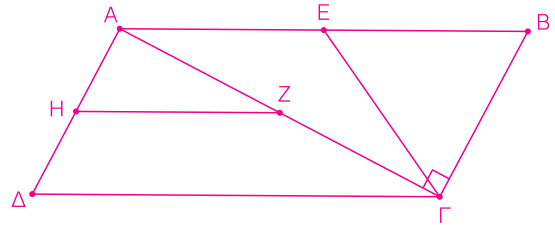
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιος του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\text{E} = \text{ZH}$.

ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta\Gamma\text{E}}$.

β. Αν $\Delta\text{H} = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΓΕ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΑΒ, οπότε $\Gamma\text{E} = \frac{AB}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι

$$\text{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \text{ZH} = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\text{E} = \text{ZH}$.

ii. Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με $\text{AE} = \Gamma\text{E} = \frac{AB}{2}$, άρα είναι $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$ (3).

Είναι $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (4), ως εντός εναλλάξ γωνίες, οπότε $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$.

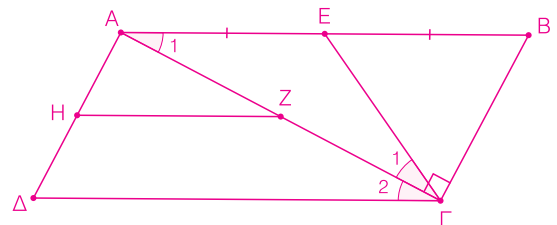
Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta\Gamma\text{E}}$.

β. Έχουμε $\Delta\text{H} = \frac{AB}{4} \Leftrightarrow 2\Delta\text{H} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η κάθετη πλευρά ΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, οπότε $\widehat{A_1} = 30^\circ$, άρα $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

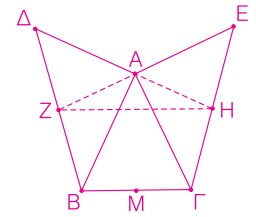
Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $\Gamma\text{E} = \text{EB} = \frac{AB}{2}$, άρα $\widehat{\text{EGB}} = \widehat{B} = 60^\circ$ και $\widehat{\text{BEG}} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες.



350 Θέμα 4 - 1870

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα AD κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $AD = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z , H και M τα μέσα των AB , $E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα.
- ii. Το τρίγωνο $\triangle ZAH$ είναι ισοσκελές.
- iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .

β. Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle A\Gamma E$ έγραψε τα εξής:

- « 1. $AD = AE$ από υπόθεση
 2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
 3. $\hat{\Delta AB} = \hat{E A\Gamma}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση ».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

Λύση

α. i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle A\Gamma E$ έχουν:

- $AD = AE$
- $AB = A\Gamma$

Οπότε είναι ίσα.

ii. Στα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADB$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\triangle A\Gamma E$ ($\hat{A} = 90^\circ$), οι AZ , AH είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, οπότε $AZ = \frac{BD}{2}$ και $AH = \frac{E\Gamma}{2}$.

Επειδή τα $\triangle ADB$, $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα έχουμε $BD = E\Gamma$.

Οπότε $AZ = AH$, επομένως το $\triangle ZAH$ είναι ισοσκελές.

iii. Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα έχουν $BD = E\Gamma$ και $\hat{ABD} = \hat{A\Gamma E}$.

Τα τρίγωνα $\triangle MBZ$ και $\triangle MHM$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$
- $BZ = H\Gamma$, ως μισά των ίσων πλευρών BD και $E\Gamma$
- $\hat{ZBM} = \hat{M\Gamma H}$, ως αθροίσματα ίσων γωνιών αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{ABD} = \hat{A\Gamma E}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $MZ = MH$.

Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$ η AM είναι η μεσοκάθετος του ZH .

β. Το λάθος είναι ότι οι γωνίες $\hat{\Delta AB}$ και $\hat{E A\Gamma}$ δεν είναι κατακορυφήν, αφού το $\triangle AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο οπότε οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

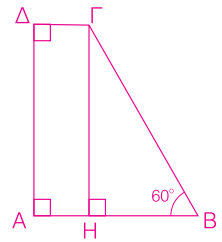
24. Τραπεζίο

351 Θέμα 2 - 1549

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$ και $\hat{B} = 60^\circ$.
Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$. Να δείξετε ότι:

α. $HB = 2\Delta\Gamma$

β. Το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$.



Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $H\Gamma B$ είναι $\hat{B} + \hat{H}\Gamma B = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{H}\Gamma B = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{H}\Gamma B = 30^\circ$.

Οπότε $HB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\Delta\Gamma}{2} = 2\Delta\Gamma$.

β. Το $\Delta\Gamma H A$ έχει $\hat{\Delta} = \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\Gamma\Delta = AH$.

Είναι $HB = 2\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{1}{2}HB \Leftrightarrow AH = \frac{1}{2}HB$.

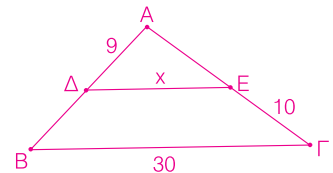
352 Θέμα 2 - 1612

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.

α. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔE .



Λύση

α. Είναι $\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + \Gamma A = 2 \cdot 9 + 30 + 2 \cdot 10 = 68$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma$, άρα το $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

γ. Από το β. ερώτημα είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} \Leftrightarrow x = 15$.

353 Θέμα 2 - 1697

Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και M το

μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α. η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$

β. η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Λύση

α. Επειδή $AB = A\Delta$, είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$. Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ.

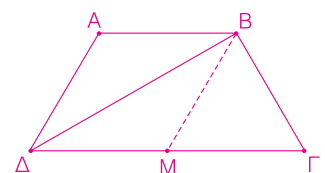
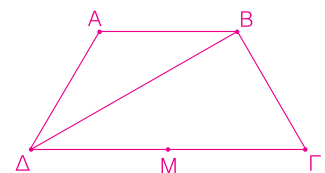
Άρα $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, οπότε η ΔB είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

β. Επειδή $AB \parallel \Delta M$, το $ABM\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού επιπλέον είναι $AB = A\Delta$, έχουμε ότι το $ABM\Delta$ είναι ρόμβος.

Είναι: • $BM \parallel A\Delta$, οπότε $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

• $BM = M\Delta \Leftrightarrow BM = M\Gamma$

Οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



354 Θέμα 2 - 1694

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραpezίου,

α. να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$

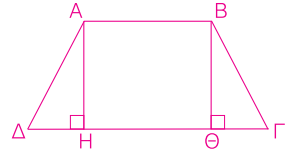
β. να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $HA\Delta$ και $\Theta B\Gamma$ έχουν:

- $\Delta\Delta = B\Gamma$
 - $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραpezίου
- Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta H = \Theta\Gamma$.

β. Η διάμεσος του τραpezίου EZ είναι: $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{8 + 12}{2} = 10$

**355 Θέμα 2 - 1629**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$.

Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.

β. Να αποδείξετε ότι $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.

Λύση

- α.** Είναι:
- $\hat{A} = \hat{B} = 135^\circ$
 - $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$
 - $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$

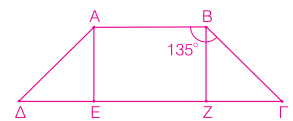
β. Είναι $AE = BZ$, ως αποστάσεις των παράλληλων AB και $\Gamma\Delta$.

Στα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι:

- $\hat{\Delta} + \Delta\hat{A}E = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \Delta\hat{A}E = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = 45^\circ$, άρα $\hat{\Delta} = \Delta\hat{A}E$
- $\hat{\Gamma} + \Gamma\hat{B}Z = 90^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \Gamma\hat{B}Z = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{B}Z = 45^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}Z$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Delta$ και $ZB\Gamma$ είναι ισοσκελή, οπότε $\Delta E = AE$ και $\Gamma Z = BZ$.

Άρα $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$.

**356 Θέμα 2 - 1644**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραpezίου $EB\Gamma\Delta$.

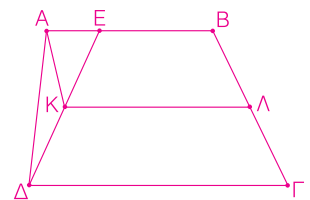
β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Είναι: • $EB = AB - AE = 3 - 1 = 2$

$$\bullet K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta + EB}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

β. Είναι $K\Lambda \parallel EB$, οπότε $K\Lambda \parallel AB$ και $K\Lambda = AB = 3$, οπότε το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.



357 Θέμα 2 - 13497

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AD \parallel BG$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι η DE είναι διχοτόμος της $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

β. Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Λύση

α. Είναι: • $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (1), ως εντός εναλλάξ.

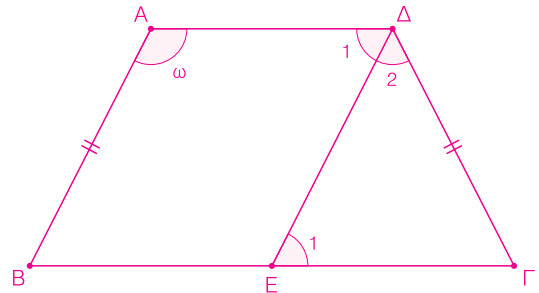
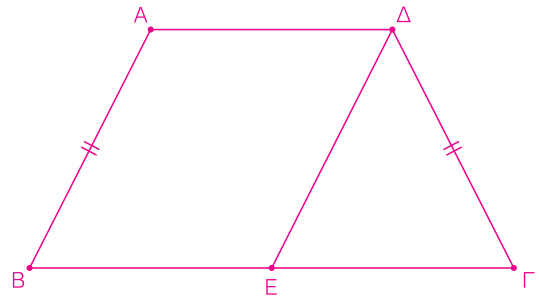
• $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (2), ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔE του ισοσκελούς τριγώνου $\Delta\Gamma E$.

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, άρα η DE είναι διχοτόμος της $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$.

β. Αν $\hat{A} = 120^\circ$, τότε, επειδή το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, θα είναι $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

Επειδή η DE είναι διχοτόμος της $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, θα είναι $\hat{\Delta}_2 = 60^\circ$ οπότε η (2) $\Leftrightarrow \hat{E}_1 = 60^\circ$.

Επομένως, το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες 60° , οπότε και η τρίτη γωνία $\hat{\Gamma}$ θα είναι 60° .

**358 Θέμα 2 - 13824**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

β. $E\Gamma = \Theta B$.

γ. Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ΓEZ και ΘZB έχουν:

i. $EZ = ZB$,

ii. $\hat{Z}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Theta}$, ως εντός αναλλάξ

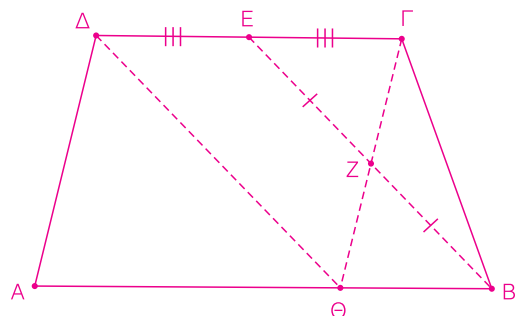
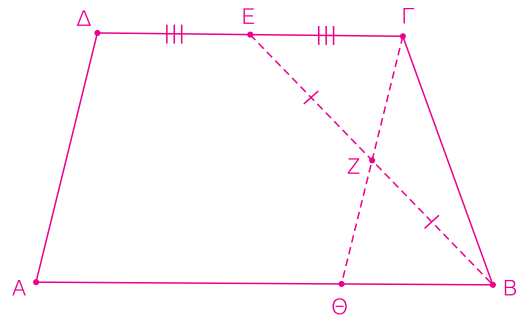
iii. $\hat{E}\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{\Theta}\hat{Z}\hat{B}$, ως κατακορυφήν
Άρα είναι ίσα (ΓΠΓ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων ΓEZ και ΘZB έχουμε ότι $E\Gamma = \Theta B$.

γ. Είναι: • $DE \parallel B\Theta$ ως τμήματα των βάσεων $\Gamma\Delta$ και AB του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

• $E\Gamma = B\Theta$ και $E\Gamma = \Delta E$, άρα $B\Theta = \Delta E$.

Επομένως το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔE και ΘB , παράλληλες και ίσες.



359 Θέμα 2 - 1669

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.

β. Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

Λύση

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε ότι $A\Delta = B\Gamma$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Τα τρίγωνα $MK\Delta$ και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:

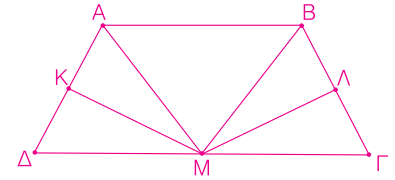
- $M\Delta = M\Gamma$
- $\Delta K = \Gamma\Lambda$, ως μισά ίσων τμημάτων
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $KM = \Lambda M$.

β. Τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $M\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $M\Delta = M\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$
- $A\Delta = B\Gamma$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $AM = BM$.

**360 Θέμα 2 - 1634**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α. Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

Λύση

α. Είναι:

- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$
- $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ$
- $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα.

γ. Το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $EZ = AB = 6$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}BZ = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Οπότε $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.

Επειδή τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta E = Z\Gamma = 2$.

Οπότε $\Gamma\Delta = \Delta E + EZ + Z\Gamma = 2 + 6 + 2 = 10$.

Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Pi_{AB\Gamma\Delta} = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24$.



361 Θέμα 2 - 1579

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta Z = \Gamma E$

β. Τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή.

Λύση

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{B}$.

Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ έχουν:

- $A\Delta = B\Gamma$
- $AZ = BE$
- $\hat{A} = \hat{B}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), επομένως $\Delta Z = \Gamma E$.

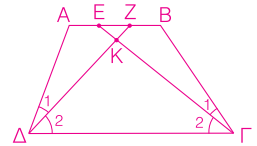
β. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, οπότε $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2$.

Άρα το τρίγωνο $K\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $K\Delta = K\Gamma$.

Επειδή $\Delta Z = \Gamma E$ και $K\Delta = K\Gamma$ είναι και $KZ = KE$.

Οπότε το τρίγωνο KZE είναι ισοσκελές.

**362 Θέμα 2 - 1563**

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

Να αποδείξετε ότι:

α. $\Delta E = \Gamma Z$

β. $AB = EZ$

Λύση

α. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $A\Delta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Delta$ και $ZB\Gamma$ έχουν:

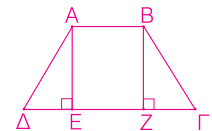
- $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Οπότε είναι ίσα, άρα $\Delta E = \Gamma Z$.

β. Είναι $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε $AE \perp AB$, άρα $\hat{EAB} = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο $ABZE$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Άρα $AB = EZ$.

**363 Θέμα 2 - 1666**

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

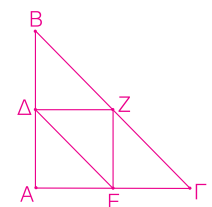
Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , Z είναι τα μέσα των BA , $B\Gamma$, οπότε $\Delta Z \parallel \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow \Delta Z \parallel AE$.

Επομένως το $AEZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\hat{A} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

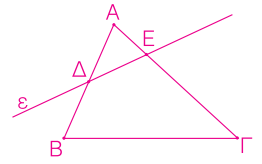
β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Άρα το $E\Delta B\Gamma$ είναι τραπέζιο και επειδή $B\Delta = E\Gamma$, ως μισά ίσων τμημάτων, είναι ισοσκελές τραπέζιο.



364 Θέμα 2 - 1536

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία ε που τέμνει την πλευρά AG σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία ε χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.



- α.** Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος **α.** να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

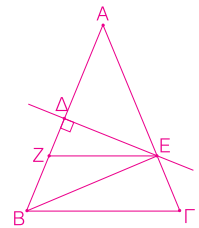
α. Για να είναι τραπέζιο το $B\Delta E\Gamma$, αρκεί $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Επειδή το Δ είναι μέσο της AB , θα είναι το E το μέσο του AG .

β. Για να είναι το $B\Delta E\Gamma$ ισοσκελές τραπέζιο, αρκεί $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές.

365 Θέμα 2 - 1529

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) με $\hat{A} < 90^\circ$. Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την AG στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .



- α.** Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.
- β.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Επειδή η $E\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AB , έχουμε $AE = BE$.

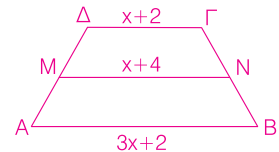
β. Επειδή $ZE \parallel B\Gamma$, το $B\Gamma EZ$ είναι τραπέζιο.

Αφού επιπλέον το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

366 Θέμα 2 - 1550

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

- α.** Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραpezίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.
- β.** Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.



Λύση

α. Είναι $MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{(3x + 2) + (x + 2)}{2} \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$.

β. Έχουμε $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ$.

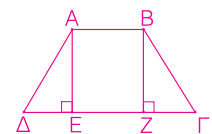
Οπότε $\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$.

367 Θέμα 2 - 1562

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη του AE και BZ . Να αποδείξετε ότι:

- α.** $\Delta E = \Gamma Z$
- β.** Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle EAD$ και $\triangle ZBG$ έχουν: $AD = BG$ και $\hat{A} = \hat{G}$. Οπότε είναι ίσα, άρα $DE = GZ$.

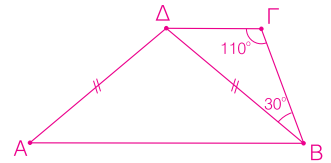
β. Είναι $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε $AE \perp AB$, άρα $\hat{EAB} = 90^\circ$.

Στο τετράπλευρο $ABZE$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$.

Οπότε είναι ορθογώνιο.

368 Θέμα 4 - 1577

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο η διαγώνιος BA είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta B}$.



Λύση

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι $\hat{AB\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Οπότε $\hat{A\Delta B} = \hat{AB\Gamma} - \hat{\Delta B\Gamma} = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$. Αφού $AD = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A} = \hat{AB\Delta} = 40^\circ$.

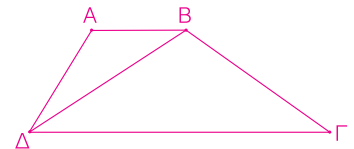
Στο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\hat{A\Delta B} + \hat{A} + \hat{AB\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta B} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta B} = 100^\circ$.

369 Θέμα 4 - 1650

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $BA = B\Gamma$. Αν $\hat{\Delta B\Gamma} = 110^\circ$ και $\hat{A\Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

β. Τη γωνία $\hat{A}$.



Λύση

α. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με $BA = B\Gamma$, άρα $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε $\hat{B\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$.

β. Είναι $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma} = 35^\circ$ οπότε $\hat{A\Delta\Gamma} = \hat{A\Delta B} + \hat{B\Delta\Gamma} = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$ και είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{A} + \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ$

370 Θέμα 4 - 13539

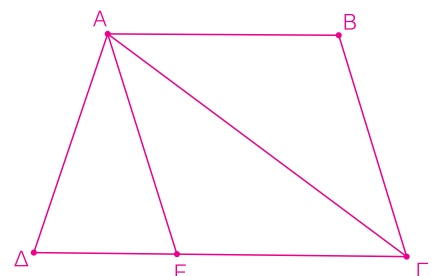
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma, AE$ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ρόμβος.

ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος.



Λύση

α. Αφού τα τμήματα $ΑΓ$, $ΑΕ$ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A} = 108^\circ$, θα είναι

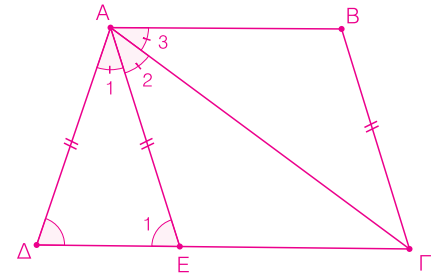
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{\hat{A}}{3} = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τραpezίου είναι παραπληρωματικές, άρα

$$\hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Είναι $\hat{E}_1 = \hat{BAE}$, ως εντός εναλλάξ, άρα

$$\hat{E}_1 = \hat{BAE} = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ.$$



β. i. Από το ερώτημα **α.** έχουμε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}_1 = 72^\circ$ (1), οπότε το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΑΕ$ (2).

ii. Το τραpezίο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{BΓΔ} = \hat{\Delta}$ (3).

Από τις ισότητες (1), (3) προκύπτει $\hat{BΓΔ} = \hat{E}_1$, οπότε $ΑΕ \parallel ΒΓ$, γιατί σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι $ΑΔ = ΒΓ$ (4) και $ΑΔ = ΑΕ$, οπότε $ΑΕ = ΒΓ$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του $ΑΕ$, $ΒΓ$ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η $ΑΓ$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{BAE}$, αφού $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 36^\circ$, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι ρόμβος.

371 Θέμα 4 - 1635

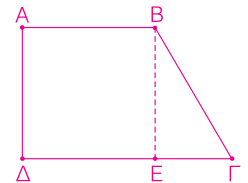
Δίνεται τραpezίο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$), με $ΑΒ = ΒΓ = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Δίνεται επίσης το ύψος $ΒΕ$ από τη κορυφή $Β$.

α. Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου $ΑΒΓΔ$.

β. Να αποδείξετε $2ΕΓ = ΒΓ$.

γ. Αν $Μ$, $Ν$ τα μέσα των πλευρών $ΑΔ$, $ΒΓ$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $ΜΝ$.



Λύση

α. Είναι: • $\hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, αφού $ΑΒ \parallel ΓΔ$.

• $ΑΔ \perp ΑΒ$ και $ΑΒ \parallel ΓΔ$, οπότε $ΑΔ \perp ΓΔ$, άρα $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι $\hat{EBΓ} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{EBΓ} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{EBΓ} = 30^\circ$

$$\text{Οπότε } ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 2ΕΓ = ΒΓ.$$

γ. Η $ΜΝ$ είναι η διάμεσος του τραpezίου $ΑΒΓΔ$.

$$\text{Οπότε } ΜΝ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}.$$

Είναι: • $ΔΕ = ΑΒ = 4$, αφού το $ΑΒΕΔ$ είναι ορθογώνιο

• $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$

• $ΓΔ = ΔΕ + ΕΓ = 4 + 2 = 6$.

$$\text{Οπότε } ΜΝ = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

372 Θέμα 4 - 1747

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α. Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

β. Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Λύση

α i. Είναι $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, οπότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Επειδή το E δεν είναι μέσο του $\widehat{AB}$, έχουμε $\widehat{BOE} \neq 90^\circ$ και αφού $\widehat{E} = 90^\circ$ προκύπτει $\Gamma\Delta \nparallel AB$.

Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

ii. Είναι $\Delta E = \Delta A$ και $\Gamma E = \Gamma B$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E = \Gamma B + \Delta A = A\Delta + B\Gamma$

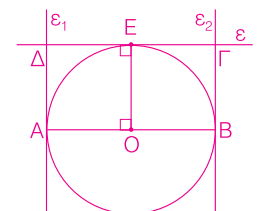
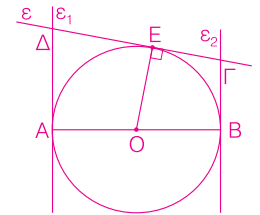
β. Αν το E είναι το μέσο του $\widehat{AB}$, τότε $EO \perp AB$.

Επειδή $EO \perp \Gamma\Delta$ έχουμε $EO \parallel A\Delta$ και $EO \parallel B\Gamma$.

Το $OB\Gamma E$ είναι τετράγωνο αφού $\widehat{B} = \widehat{O} = \widehat{E} = 90^\circ$ και $OB = OE = R$

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, αφού $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $\widehat{A} = 90^\circ$

Άρα $\Pi_{A\Delta\Gamma B} = 2(AB + A\Delta) = 2(2R + R) = 6R$.

**373 Θέμα 4 - 1758**

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαιτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ. Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .

Λύση

α. Είναι $\Gamma E = \Gamma B$ και $\Delta E = \Delta A$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε $\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E = \Gamma B + \Delta A = A\Delta + B\Gamma$.

β. Οι OG, OD είναι διακεντρικές ευθείες, οπότε είναι οι διχοτόμοι των $\widehat{BOE}, \widehat{EOA}$.

Άρα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ και $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$

Είναι $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{O}_2 + 2\widehat{O}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{GO\Delta} = 90^\circ$.

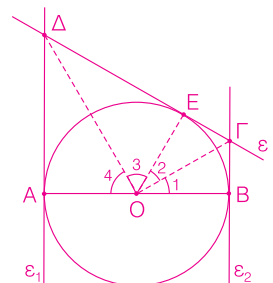
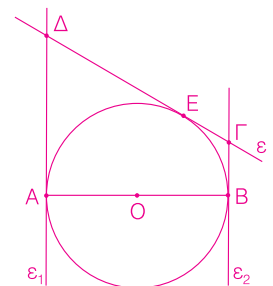
Άρα $OG \perp OD$, οπότε το $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

γ. Οι $A\Delta, B\Gamma$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, οπότε $A\Delta \perp AB$ και $B\Gamma \perp AB$.

Άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.

• Αν το σημείο E δεν είναι μέσο του ημικυκλίου AB τότε οι $\Gamma\Delta$ και AB δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

• Αν το E είναι μέσο του ημικυκλίου AB , τότε $\widehat{BOE} = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $EG \perp OE$, άρα $EG \parallel AB$. Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

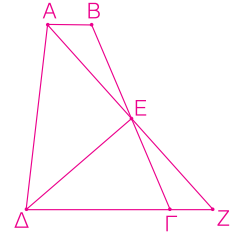


374 Θέμα 4 - 1783

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$.

Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.
- β. Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.
- γ. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.

**Λύση**

- α. Είναι:
 - $\hat{\Delta AZ} = \hat{ZAB}$, αφού ΔE διχοτόμος
 - $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα $\hat{ZAB} = \hat{AZ\Delta}$, ως εντός εναλλάξ.

Οπότε $\hat{\Delta AZ} = \hat{\Delta ZA}$, επομένως το ΔAZ είναι ισοσκελές.

- β. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔAZ έχουμε $A\Delta = \Delta Z \Rightarrow AB + \Gamma\Delta = \Gamma\Delta + \Gamma Z \Rightarrow AB = \Gamma Z$.

Επειδή επιπλέον $AB \parallel \Gamma Z$ το $ABZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Οπότε το E είναι το μέσο της διαγωνίου του $B\Gamma$.

- γ. Το E είναι το μέσο και της διαγωνίου AZ , του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔAZ , το ΔE είναι διάμεσος, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

375 Θέμα 4 - 1885

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α. το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο
- β. οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες
- γ. οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

Λύση

- α. • Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ , E είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel B\Gamma$.
Άρα το ΔEZH είναι τραπέζιο.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο HAB ($\hat{H} = 90^\circ$), η $H\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (1).

- Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα E , Z είναι τα μέσα των $A\Gamma$, $B\Gamma$, οπότε $EZ = \frac{AB}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε $H\Delta = EZ$.

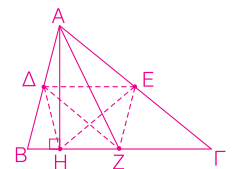
Άρα το τραπέζιο ΔEZH είναι ισοσκελές.

- β. Τα τρίγωνα $H\Delta Z$ και HEZ έχουν:
 - $EZ = H\Delta$
 - HZ κοινή
 - $\hat{\Delta HZ} = \hat{EZH}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραpezίου.

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{H\Delta Z} = \hat{HEZ}$.

- γ. Είναι:
 - $\hat{E\Delta Z} = \hat{\Delta ZH}$, ως εντός εναλλάξ
 - $\hat{\Delta ZH} = \hat{EHZ}$, από την ισότητα των τριγώνων ΔHZ και EHZ .

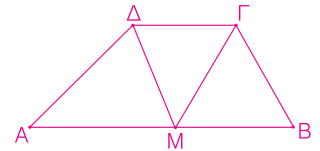
Άρα $\hat{E\Delta Z} = \hat{EHZ}$



376 Θέμα 4 - 1815

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές.
- β. Το τρίγωνο $M\beta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ. Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραpezίου.



Λύση

α. Είναι:

- $\hat{A}\Delta M = \hat{M}\Delta\Gamma$ αφού ΔM διχοτόμος
- $\hat{A}M\Delta = \hat{M}\Delta\Gamma$, ως εντός εναλλάξ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$.

Άρα $\hat{A}\Delta M = \hat{A}M\Delta$, οπότε το $\Delta\Delta M$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AM$.

β. Έχουμε $AB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow AM + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow A\Delta + MB = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow MB = B\Gamma$.

Άρα το $M\beta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ. Επειδή:

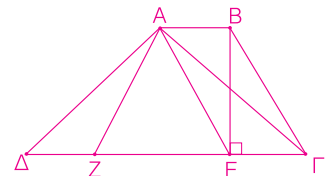
- $\Delta\Gamma \parallel AB$, είναι $\hat{\Delta}\Gamma M = \hat{\Gamma}M\beta$, ως εντός εναλλάξ
- το $M\beta\Gamma$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\hat{\Gamma}M\beta = \hat{\beta}\Gamma\beta$

Άρα $\hat{\Delta}\Gamma M = \hat{\beta}\Gamma\beta$, οπότε η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραpezίου.

377 Θέμα 4 - 1860

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο.
- γ. Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα.



Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\beta\Gamma$ ($\hat{E} = 90^\circ$) είναι $\hat{E}\beta\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E}\beta\Gamma + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E}\beta\Gamma = 30^\circ$,

Οπότε $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$.

Επειδή $AB \parallel \Gamma E$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma E$ έχουμε $AE = B\Gamma = 2AB$. Είναι $ZE = \Gamma\Delta - E\Gamma - \Delta Z = 4AB - AB - AB = 2AB$. Άρα $AE = ZE$ και $\hat{A}EZ = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, αφού $AE \parallel B\Gamma$.

Επομένως το ΔZAE είναι ισόπλευρο.

γ. Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE έχουν:

- $AZ = AE$, αφού το ΔZAE είναι ισόπλευρο
- $\Delta Z = E\Gamma$, αφού $\Delta Z = AB$ και $AB = E\Gamma$
- $\hat{A}Z\Delta = \hat{A}E\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}ZE = 60^\circ$ και $\hat{A}EZ = 60^\circ$.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

378 Θέμα 4 - 13519

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της DE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

α. Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.

β. Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$.

γ. Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z .

Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$.

Λύση

α. Το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές, γιατί $A\Delta = AE$.

Επομένως, η διάμεσος AM που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, $AM \perp \Delta E$.

β. Το $EB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο γιατί $EB \parallel \Delta\Gamma$ και η ΔE δεν είναι παράλληλη με την $B\Gamma$.

Από το μέσο M της DE φέραμε $MK \parallel \Delta\Gamma$, άρα το K είναι το μέσο πλευράς $B\Gamma$.

Η MK είναι διάμεσος του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$, οπότε

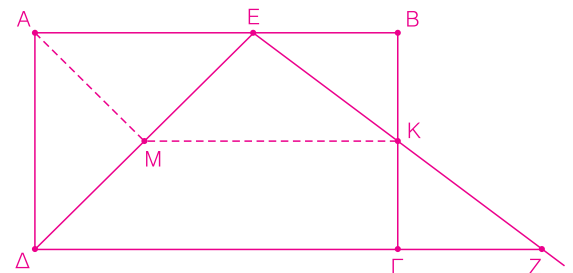
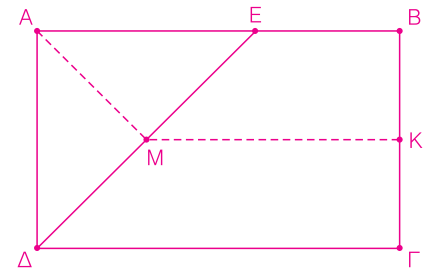
$$MK = \frac{\Delta\Gamma + EB}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta\Gamma + EB \Leftrightarrow 2MK = AB + AB - AE$$

$$\Leftrightarrow 2MK = 2AB - A\Delta, (5).$$

γ. Στο τρίγωνο ΔEZ το M είναι μέσο της DE και $MK \parallel \Delta Z$, άρα η MK διέρχεται από το μέσο K της EZ . Επομένως:

$$MK = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta Z \stackrel{\beta.}{\Leftrightarrow} 2AB - A\Delta = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2AB - A\Delta = AB + \Gamma Z \Leftrightarrow \Gamma Z = AB - A\Delta$$



379 Θέμα 4 - 1711

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.

Επίσης τα Z , H , E είναι τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE , BE στα σημεία Θ , I αντίστοιχα.

α. Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ , I είναι μέσα των AE , BE αντίστοιχα.

γ. Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

Λύση

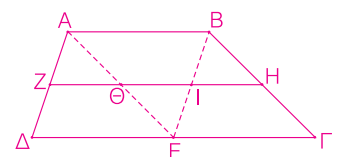
α. Είναι $E\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$ και $E\Gamma \parallel AB$, οπότε το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. • Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η ZH είναι διάμεσος, οπότε $ZH \parallel \Gamma\Delta \parallel AB$.

• Στο $\triangle A\Delta E$, το Z είναι το μέσο του $A\Delta$ και $Z\Theta \parallel \Delta E$, οπότε το Θ μέσο του AE .

• Στο $\triangle B\Gamma E$, το H είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $HI \parallel E\Gamma$, οπότε το I είναι το μέσο του BE .

γ. Είναι $ZH = \frac{\Gamma\Delta + AB}{2} = \frac{2AB + AB}{2} = \frac{3}{2}AB$.



380 Θέμα 4 - 1757

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
γ. Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος BK .

Λύση

α. Στο τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι $\hat{A} = \hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\Delta E = AB$ και $BE = A\Delta$.

Είναι:

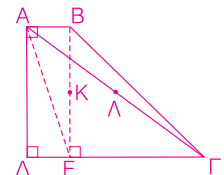
- $E\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta E = 4AB - AB = 3AB$
- $BE = A\Delta = 3AB$

Άρα $E\Gamma = BE$, οπότε το $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ. Στο τραπέζιο $AB\Gamma E$, τα K, Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε

$$K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB \text{ και } K\Lambda \parallel AB.$$

Άρα το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του BK .

**381 Θέμα 4 - 1767**

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$.

Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο BA στο N . Να αποδείξετε ότι:

- α.** $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
β. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ. $AE \perp BA$

Λύση

α. Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

β. Το $ABE\Delta$ έχει $\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta E = AB$.

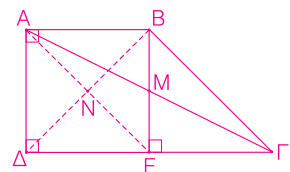
Έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB \Leftrightarrow \Delta E + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB + E\Gamma = 2AB \Leftrightarrow E\Gamma = AB$.

Επειδή επιπλέον $AB \parallel E\Gamma$, το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Οπότε το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές με $BE = E\Gamma$, άρα $BE = E\Delta$.

Επομένως το ορθογώνιο $ABE\Delta$ είναι τετράγωνο, άρα οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $AE \perp BA$.

**382 Θέμα 4 - 1842**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της πλευράς AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τετράπλευρα $B\Delta\Gamma E$ και $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα.
- Τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

β. Αν K και Λ είναι τα μέσα των BE και ΔZ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$.

Λύση

α. i. Επειδή το $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε:

- $AB // ΓΔ \Leftrightarrow BE // ΓΔ$
- $AD // ΒΓ \Leftrightarrow ΔΖ // ΒΓ$

Άρα τα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμα.

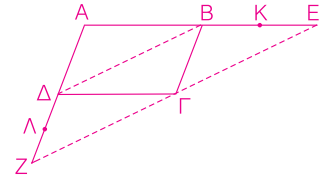
ii. Από τα παραλληλόγραμμα $ΒΔΓΕ$ και $ΒΔΖΓ$, έχουμε $ΓΖ // ΔΒ$ και $ΓΕ // ΔΒ$, άρα τα $Ε, Γ, Ζ$ είναι συνευθειακά.

β. Στο τρίγωνο $ΑΖΕ$ τα $Δ, Β$ είναι μέσα των $ΑΖ, ΑΕ$, οπότε $ΔΒ // ΖΕ$.

Επειδή $ΔΒ // ΖΕ$, το τετράπλευρο $ΔΒΕΖ$ είναι τραπέζιο.

Η $ΚΛ$ είναι η διάμεσος του τραpezίου $ΔΒΕΖ$, οπότε:

- $ΚΛ // ΔΒ$
- $ΚΛ = \frac{ΔΒ + ΖΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΖΓ + ΓΕ}{2} = \frac{ΔΒ + ΔΒ + ΔΒ}{2} = \frac{3}{2}ΔΒ$.



383 Θέμα 4 - 1838

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, η διχοτόμος Bx της γωνίας B του τριγώνου $ABΓ$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας B . Αν $Δ$ και $Ε$ είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $ABΓ$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ είναι ορθογώνιο.

β. Η ευθεία $ΕΔ$ είναι παράλληλη προς τη $ΒΓ$ και διέρχεται από το μέσο M της $ΑΓ$.

γ. Το τετράπλευρο $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3a}{4}$, όπου $a = ΒΓ$.

Λύση

α. Οι Bx, By είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{B}_{εξ}$, οπότε είναι $\hat{ΓΒΔ} = \hat{ΔΒΑ}$ και $\hat{ΑΒΕ} = \hat{ΕΒΖ}$. Είναι $\hat{ΓΒΔ} + \hat{ΔΒΑ} + \hat{ΑΒΕ} + \hat{ΕΒΖ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ΔΒΑ} + 2\hat{ΑΒΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΔΒΑ} + \hat{ΑΒΕ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{ΔΒΕ} = 90^\circ$.

Το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ έχει $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

β. Επειδή το $ΑΔΒΕ$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $AB = E\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{E\Delta}{2} \Leftrightarrow KB = K\Delta$.

Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές, επομένως $\hat{ΚΔΒ} = \hat{ΚΒΔ}$.

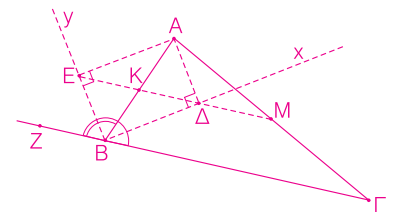
Είναι $\hat{ΚΒΔ} = \hat{ΔΒΓ}$, οπότε $\hat{ΚΔΒ} = \hat{ΔΒΓ}$.

Επομένως οι $ΕΔ$ και $ΒΓ$ που τέμνονται από τη $ΒΔ$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα $ΕΔ // ΒΓ$.

Στο τρίγωνο $ABΓ$ το K είναι το μέσο της AB και $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το M είναι το μέσο της $ΑΓ$.

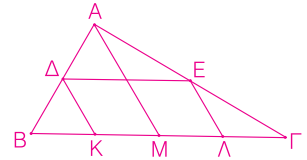
γ. Από το **β.** ερώτημα έχουμε $ΚΜ // ΒΓ$, οπότε το $ΚΜΓΒ$ είναι τραπέζιο και $ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{a}{2}$. Η διάμεσος του τραpezίου $ΚΜΓΒ$ είναι ίση με

$$\frac{ΒΓ + ΚΜ}{2} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3a}{4}.$$



384 Θέμα 4 - 14888

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $K \Delta A M$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα Δ, E είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$, οπότε:

- $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2K\Lambda}{2} = K\Lambda$
- $\Delta E \parallel B\Gamma$, οπότε $\Delta E \parallel K\Lambda$

Οπότε το $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Στο τρίγωνο ABM , τα Δ, K είναι τα μέσα των AB, BM , οπότε $\Delta K \parallel AM$.

Άρα το $K \Delta A M$ είναι τραπέζιο.

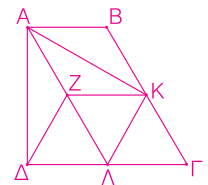
Για τη διάμεσο δ του τραπεζίου $K \Delta A M$, έχουμε $\delta = \frac{AM + \Delta K}{2}$.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.
- Στο τρίγωνο ABM τα Δ, K είναι τα μέσα των AB, BM , οπότε $\Delta K = \frac{AM}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.

$$\text{Άρα } \delta = \frac{\frac{B\Gamma}{2} + \frac{B\Gamma}{4}}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{4}}{2} = \frac{3}{8} B\Gamma.$$

385 Θέμα 4 - 1821

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Lambda$ ($\hat{A} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Lambda = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Lambda$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α. Το Z είναι μέσο του $A\Lambda$

β. $B\Gamma = 2\Delta Z$.

γ. Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

δ. $\hat{A}\hat{K}\hat{\Lambda} = 90^\circ$

Λύση

α. Το Λ είναι μέσο του $\Gamma\Lambda$, οπότε $\Gamma\Lambda = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow 2AB = 2\Gamma\Lambda \Leftrightarrow AB = \Gamma\Lambda$.

Επομένως $AB \parallel \Gamma\Lambda$, άρα το $AB\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. Οπότε $A\Lambda \parallel B\Gamma$.

Τα τετράπλευρα $ABKZ, ZK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμα γιατί έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες.

Οπότε $BK = AZ$ και $K\Gamma = Z\Lambda$.

Αφού $BK = K\Gamma$ έχουμε $AZ = Z\Lambda$.

Άρα το Z θα είναι το μέσο του $A\Lambda$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Lambda$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$), η ΔZ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$\Delta Z = \frac{A\Lambda}{2} \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta Z.$$

γ. Το $ZKΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο και $KΓ = \frac{BΓ}{2} = \frac{2AB}{2} = AB = ZK$, άρα είναι ρόμβος.

δ. Στο τρίγωνο $AKΛ$, η KZ είναι διάμεσος και $KZ = LZ = \frac{AL}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο $AKΛ$ είναι ορθογώνιο με $\hat{AKΛ} = 90^\circ$.

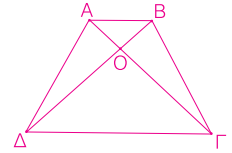
386 Θέμα 4 - 1834

Στο διπλανό τετράπλευρο $ABΓΔ$ ισχύουν: $AD = BΓ$, $AG = BΔ$, και $AB < ΓΔ$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελή.

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{ΔAB} = \hat{ABΓ}$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α. Τα τρίγωνα $ADΓ$ και $BΔΓ$ έχουν:

- $AD = BΓ$
- $AG = BΔ$
- $ΓΔ$ κοινή

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), επομένως $\hat{AΓΔ} = \hat{BΔΓ}$.

Οπότε το τρίγωνο $ΔΟΓ$ είναι ισοσκελές με $ΟΓ = ΟΔ$.

Επειδή $BΔ = AG$ και $ΟΓ = ΟΔ$ έχουμε $ΟΑ = ΟΒ$, δηλαδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο ABO , είναι $ΟΑ = ΟΒ$ οπότε $\hat{ΓAB} = \hat{ABΔ}$.

Επειδή τα τρίγωνα $AGΔ$ και $BΓΔ$ είναι ίσα, έχουμε $\hat{ΔAG} = \hat{ΔBΓ}$.

Άρα $\hat{ΔAB} = \hat{ΔAG} + \hat{ΓAB} = \hat{ΔBΓ} + \hat{ABΔ} = \hat{ABΓ}$

γ. Τα τρίγωνα $AGΔ$ και $BΓΔ$ είναι ίσα, οπότε $\hat{AΔΓ} = \hat{BΓΔ}$

Στο τετράπλευρο $ABΓΔ$ έχουμε:

$$\hat{ΔAB} + \hat{ABΓ} + \hat{AΔΓ} + \hat{BΓΔ} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ΔAB} + 2\hat{AΔΓ} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{ΔAB} + \hat{AΔΓ} = 180^\circ$$

Οι γωνίες $\hat{ΔAB}$ και $\hat{AΔΓ}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των AB , $ΓΔ$ που τέμνονται από την AD και είναι παραπληρωματικές, οπότε $AB \parallel ΓΔ$.

Άρα το $ABΓΔ$ είναι τραπέζιο και επειδή $AD = BΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

387 Θέμα 4 - 1778

Δίνεται ορθή γωνία $\hat{xOy} = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών Oy, Ox , με $OA = OB$. Η ε είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή O και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Η κάθετος από το σημείο A στην ε την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην ε την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

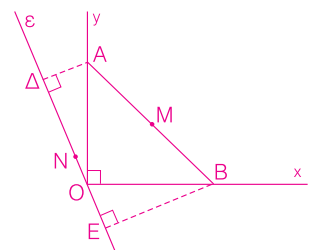
α. Τα τρίγωνα OAA και OEB είναι ίσα.

β. $AA + BE = \Delta E$

γ. $MN = \frac{\Delta E}{2}$, όπου MN είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔE και AB .

δ. Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

Λύση



α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΒ έχουμε $\widehat{ΟΒΕ} = 90^\circ - \widehat{ΒΟΕ}$

Είναι $\widehat{ΑΟΔ} + 90^\circ + \widehat{ΒΟΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΑΟΔ} = 90^\circ - \widehat{ΒΟΕ} \Leftrightarrow \widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΟΒΕ}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ έχουν:

- $ΟΑ = ΟΒ$
- $\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΟΒΕ}$

Άρα είναι ίσα.

β. Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ είναι ίσα, έχουμε $ΑΔ = ΟΕ$ και $ΟΔ = ΒΕ$.

Είναι $ΑΔ + ΒΕ = ΟΕ + ΟΔ = ΔΕ$.

γ. Είναι $ΑΔ \perp ΔΕ$ και $ΒΕ \perp ΔΕ$, οπότε $ΑΔ \parallel ΒΕ$, άρα το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.

Η ΜΝ είναι διάμεσος του τραpezίου, οπότε $MN = \frac{ΑΔ + ΒΕ}{2} = \frac{ΔΕ}{2}$.

δ. Είναι $MN \parallel ΑΔ$ και $ΑΔ \perp ΔΕ$, οπότε $MN \perp ΔΕ$. Στο $\triangle ΔΜΕ$ η ΜΝ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το $\triangle ΔΜΕ$ είναι ισοσκελές. Επειδή στο $\triangle ΔΜΕ$ η διάμεσος ΜΝ είναι ίση με $\frac{ΔΕ}{2}$, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Άρα το $\triangle ΔΜΕ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

388 Θέμα 4 - 1861

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$.

Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγωνίους ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

β. $ΑΕ = ΒΖ$

γ. Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και τα ΑΕ, ΒΖ είναι ύψη τους, οπότε είναι και διάμεσοί τους. Άρα τα Ζ, Ε είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα.

β. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε και $ΕΒ = ΖΑ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΒ έχουν:

- $ΕΒ = ΖΑ$
- $ΑΒ$ κοινή

Άρα είναι ίσα, οπότε $ΑΕ = ΒΖ$.

γ. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ τα Ε, Ζ είναι τα μέσα των διαγωνίων του, οπότε $ΕΖ \parallel ΑΒ$.

Άρα το ΑΕΖΒ είναι τραπέζιο και επειδή $ΑΕ = ΒΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΔ$, οπότε $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΒΔ}$. Επειδή $ΑΒ \parallel ΓΔ$ έχουμε $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΒΔΓ}$, ως εντός εναλλάξ.

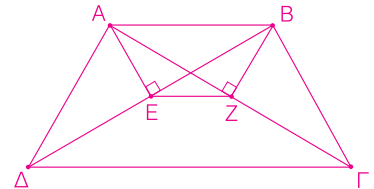
Άρα $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΒΔΓ}$, οπότε η ΒΔ είναι η διχοτόμος της $\widehat{Δ}$.

389 Θέμα 4 - 1797

α. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

Λύση



α. Επειδή τα K, Λ, M, N είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Gamma = B\Delta$.

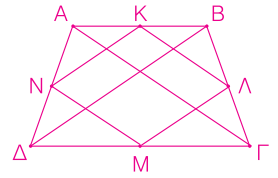
Στο $\triangle ABD$, τα K, N είναι τα μέσα των AB, AD , οπότε $KN = \frac{BD}{2}$.

Στο $\triangle AB\Gamma$, τα K, Λ είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$, οπότε $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$. Άρα $K\Lambda = KN$, οπότε το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

β. Επειδή το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος, έχουμε $KN = K\Lambda$ και από το **α.** ερώτημα $A\Gamma = B\Delta$.

Οπότε για να σχηματίζεται ρόμβος, αρκεί το $AB\Gamma\Delta$ να έχει ίσες διαγωνίους.

Άρα δεν είναι υποχρεωτικό το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο.



390 Θέμα 4 - 1854

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$.

Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Είναι $MN = MA + AN = \frac{A\Delta}{2} + \frac{A\Delta}{2} = A\Delta = B\Gamma$.

Επειδή $MN \parallel B\Gamma$, το $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Τα K, Λ είναι τα μέσα των παράλληλων τμημάτων $\Gamma M, NB$, οπότε $MK \parallel N\Lambda$, άρα το $MN\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $K\Lambda \parallel MN$, άρα $K\Lambda \parallel A\Delta$.

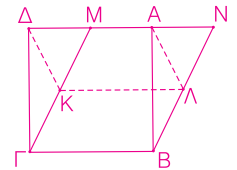
Οπότε το $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Επειδή $AM \parallel K\Lambda$, το $AMK\Lambda$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABN ($\hat{A} = 90^\circ$) η $A\Lambda$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$A\Lambda = \frac{BN}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK.$$

Επομένως το $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



391 Θέμα 4 - 1830

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H)

θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές.

β. Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ. Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

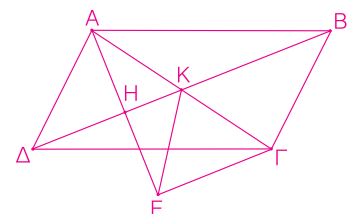
Λύση

α. Στο τρίγωνο AKE , το KH είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $AE\Gamma$, τα H, K είναι τα μέσα των $AE, A\Gamma$, οπότε $HK \parallel E\Gamma$.

Επειδή $HK \perp AE$, είναι $E\Gamma \perp AE$.

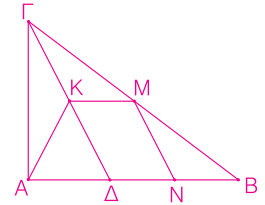
Άρα το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



γ. Επειδή $\Delta B \perp AE$ και $GE \perp AE$, έχουμε $\Delta B \parallel GE$, οπότε το ΔBGE είναι τραπέζιο.
 Η ΔB είναι η μεσοκάθετος του AE , οπότε $\Delta E = \Delta A$.
 Είναι $\Delta A = GB$, αφού το $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\Delta E = BG$.
 Οπότε το ΔBGE είναι ισοσκελές τραπέζιο.

392 Θέμα 4 - 1789

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.
 Να αποδείξετε ότι:



- α. Το τετράπλευρο $KMNA$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β. Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ. Η διάμεσος του τραπέζιου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, τα K, M είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma$, οπότε $KM \parallel \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow KM \parallel \Delta N$.

Άρα το $KMNA$ είναι παραλληλόγραμμο.

β. Επειδή $KM \parallel AB$, το $AKMN$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AK είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AK = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

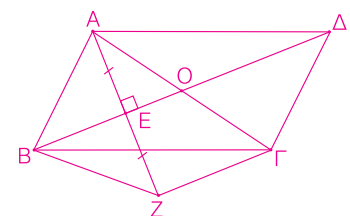
Επειδή το $KMNA$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε $MN = K\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $AK = MN$, οπότε το $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η διάμεσος του τραπέζιου $AKMN$ είναι $\delta = \frac{KM + AN}{2} = \frac{\Delta N + AN}{2} = \frac{NB + AN}{2} = \frac{AB}{2}$.

393 Θέμα 4 - 1841

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB < A\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν το Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ , τότε να αποδείξετε ότι:



- α. Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
- β. $Z\Gamma = 2OE$
- γ. Το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $A\Delta Z$, το ΔE είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β. Στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, τα E, O είναι τα μέσα των $AZ, A\Gamma$, οπότε

$$OE \parallel Z\Gamma \text{ και } OE = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2OE$$

γ. Είναι $OE \parallel Z\Gamma$, άρα $B\Delta \parallel Z\Gamma$, οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι τραπέζιο.

Η ΔB είναι η μεσοκάθετος του AZ , οπότε $BA = BZ$

Είναι $AB = \Gamma\Delta$, αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BZ = \Delta\Gamma$.

Οπότε το $B\Delta\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

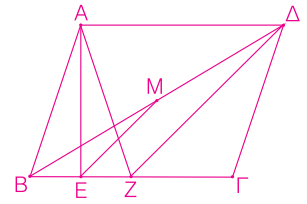
394 Θέμα 4 - 1790

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου $AZ\Gamma\Delta$.

γ. Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



Λύση

α. Στο τρίγωνο ABZ , το AE είναι ύψος και διάμεσος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AZ = AB$.

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, είναι $AB = \Delta\Gamma$, οπότε $AZ = \Delta\Gamma$.

Επειδή $Z\Gamma \parallel A\Delta$ και $AZ = \Delta\Gamma$ το $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

- β.** Είναι:
- $\hat{A} = \hat{B} = 70^\circ$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
 - $\hat{Z}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{A} = 70^\circ$
 - $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
 - $\hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} = 110^\circ$

Άρα οι γωνίες του τραπέζιου $AZ\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta} = \hat{Z}\hat{A}\hat{\Delta} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{Z}\hat{\Gamma} = 110^\circ$.

γ. Στο ισοσκελές τραπέζιο $A\Delta\Gamma Z$ είναι $A\Gamma = \Delta Z$.

Στο τρίγωνο $BZ\Delta$ τα M, E τα μέσα των $B\Delta, BZ$, οπότε $EM = \frac{\Delta Z}{2}$. Άρα $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.

395 Θέμα 4 - 1791

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β. $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$

γ. Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η AM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$.

Άρα το $\triangle MAB$ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ είναι ισόπλευρο.

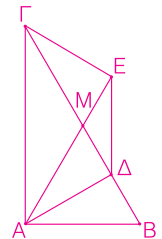
β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $EM\Gamma$ ($\hat{E} = 90^\circ$) και ΔMA ($\hat{\Delta} = 90^\circ$), έχουν:

- $MA = M\Gamma$
- $\hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}\hat{M}\hat{E}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $ME = M\Delta$.

Στο ισόπλευρο τρίγωνο MAB , το ύψος $A\Delta$ είναι και διάμεσος, οπότε

$$M\Delta = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$



γ. Στο $\triangle M\Delta E$ έχουμε $M\Delta = ME$, άρα $\hat{M}\Delta E = \hat{M}\Delta E$.

Η γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta E$ οπότε

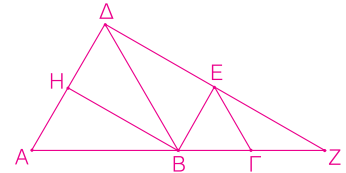
$$\hat{A}\hat{M}\hat{B} = \hat{M}\Delta E + \hat{M}\Delta E \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{M}\Delta E \Leftrightarrow \hat{M}\Delta E = 30^\circ.$$

Επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\Delta E$ ($= 30^\circ$) και είναι εντός εναλλάξ, έχουμε $\Delta E \parallel A\Gamma$, άρα το $A\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Αφού $\hat{\Gamma}\hat{E}\hat{\Delta} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{A}$ το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

396 Θέμα 4 - 1829

Σε μια ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A , B , Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:



α. Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

β. Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.

γ. Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$ το BH είναι διάμεσος οπότε είναι ύψος και διχοτόμος.

$$\text{Άρα } BH \perp A\Delta \text{ και } \hat{H}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{H}\hat{B}\hat{A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \hat{H}\hat{B}\hat{E} = 180^\circ - \hat{H}\hat{B}\hat{A} - \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Οπότε $BH \perp \Delta H$ και $BH \perp EB$, άρα $EB \parallel \Delta H$.

$$\text{Έχουμε } EB = B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta}{2} = H\Delta.$$

Επειδή $EB \parallel \Delta H$ το $BH\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο και αφού επιπλέον είναι $\hat{H} = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

β. Είναι $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = 90^\circ$, αφού το $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta Z$ το H είναι το μέσο της $A\Delta$ και $HB \parallel \Delta Z$, οπότε το B είναι το μέσο της AZ .

$$\text{Επομένως } AB = BZ \Rightarrow AB = B\Gamma + \Gamma Z \Rightarrow 2B\Gamma = B\Gamma + \Gamma Z \Rightarrow B\Gamma = \Gamma Z.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEZ ($\hat{E} = 90^\circ$) η $E\Gamma$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε

$$E\Gamma = \frac{BZ}{2} \Leftrightarrow E\Gamma = \Gamma Z.$$

Άρα το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta Z$ το B είναι το μέσο του AZ και $BE \parallel A\Delta$, οπότε το E είναι το μέσο της

AZ . Στο $\triangle A\Delta Z$ τα H , E είναι τα μέσα των $A\Delta$, ΔZ , οπότε $HE \parallel AZ$.

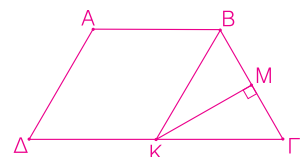
Άρα το $HE\Gamma A$ είναι τραπέζιο και επειδή $\hat{A} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{B} = 60^\circ$, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

397 Θέμα 4 - 1853

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και

$$AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$, η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Λύση

α. Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, οπότε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

Άρα $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 120^\circ$, $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

β. i. Στο τρίγωνο $B\hat{K}\Gamma$ είναι $\hat{K}\hat{B}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{B}\hat{K}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Άρα είναι ισόπλευρο, οπότε $KB = B\Gamma = K\Gamma$.

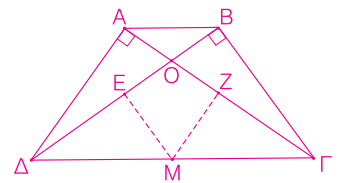
$$\text{Έχουμε } B\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2B\Gamma = \Delta\Gamma \Leftrightarrow 2K\Gamma = \Delta K + K\Gamma \Leftrightarrow K\Gamma = \Delta K \Leftrightarrow BK = \Delta K.$$

Επειδή $AB = BK = K\Delta = A\Delta$ το $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

ii. Επειδή το τρίγωνο $B\hat{K}\hat{\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και το KM είναι ύψος, θα είναι και διάμεσος, οπότε το M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

398 Θέμα 4 - 1867

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. $ME = MZ$

β. Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$.

γ. Τα τρίγωνα $M\hat{\Delta}E$ και $M\hat{Z}\Gamma$ είναι ίσα.

δ. Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .

Λύση

α. Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $A\Delta = B\Gamma$.

• Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ τα M , E είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma$, ΔB , οπότε $ME = \frac{B\Gamma}{2}$.

• Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta A$, τα M , Z είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, ΓA οπότε $MZ = \frac{A\Delta}{2}$.

Άρα $ME = MZ$.

β. Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta A$, τα M , Z είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, ΓA , οπότε $MZ \parallel A\Delta$ και επειδή $A\Delta \perp A\Gamma$ είναι και $MZ \perp A\Gamma$.

γ. Τα τρίγωνα $M\hat{\Delta}E$ και $M\hat{Z}\Gamma$ έχουν:

- $M\hat{\Delta} = M\hat{\Gamma}$
- $ME = MZ$
- $\Delta E = Z\Gamma$ ως μισά ίσων τμημάτων

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ).

δ. Επειδή τα τρίγωνα $M\hat{\Delta}E$ και $M\hat{\Gamma}Z$ είναι ίσα έχουμε $E\hat{\Delta}M = M\hat{\Gamma}Z$.

Άρα το τρίγωνο $O\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $O\Delta = O\Gamma$.

Οπότε $OE = O\Delta - \Delta E = O\Gamma - \Gamma Z = OZ$.

Επειδή $OE = OZ$ και $ME = MZ$, η OM είναι η μεσοκάθετος του EZ .

399 Θέμα 4 - 1893

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην AG .

α. Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $AM = \frac{1}{4}AG$

β. Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη BA , να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. i. Επειδή το O είναι το κέντρο του ορθογωνίου, έχουμε $OA = OD$.

Αφού επιπλέον $\widehat{AOD} = 60^\circ$, το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Επειδή το ΔM είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου $OA\Delta$, θα είναι και διάμεσος.

Άρα το M είναι το μέσο του OA .

ii. Είναι $AM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AG = \frac{1}{4}AG$.

β. Στο τρίγωνο $O\Gamma B$ είναι $OB = O\Gamma$ και $\widehat{BO\Gamma} = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο.

Επειδή το ΓN είναι ύψος του, θα είναι και διάμεσος, οπότε το N είναι το μέσο του OB .

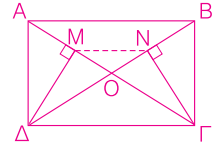
Στο τρίγωνο OAB , τα M, N είναι τα μέσα των OA, OB , οπότε $MN \parallel AB$.

Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ έχουμε $MN \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο $MN\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

Είναι: • $OM = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2} = ON$

• $O\Gamma = OD$

Οπότε $OM + O\Gamma = ON + OD \Leftrightarrow M\Gamma = N\Delta$. Άρα το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**400 Θέμα 4 - 1722**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.

γ. Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.

δ. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ έχουν: • $B\Delta$ κοινή
• $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $BA = BE$.

Επομένως το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ έχουν: • $AB = BE$
• $\widehat{B}$ κοινή

Άρα είναι ίσα.

γ. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ είναι ίσα, έχουμε $\Delta A = \Delta E$ και $BA = BE$.

Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .

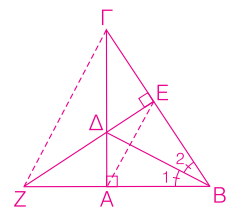
Επειδή τα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα, έχουμε $B\Gamma = BZ$ και $A\Gamma = ZE$.

Οπότε $\Delta\Gamma = A\Gamma - \Delta A = ZE - \Delta E = \Delta Z$.

Αφού $B\Gamma = BZ$ και $\Delta\Gamma = \Delta Z$, η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $Z\Gamma$.

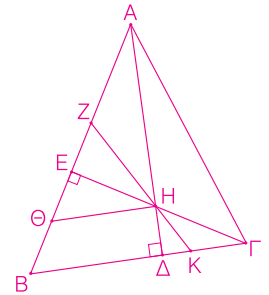
δ. Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$ είναι $AE \parallel \Gamma Z$.

Επομένως το $AE\Gamma Z$ είναι τραπέζιο. Αφού επιπλέον $A\Gamma = ZE$, το $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



401 Θέμα 4 - 1845

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη AD και GE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας EHA και ΘH κάθετο στο ύψος AD . Να αποδείξετε ότι:



- α.** Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH = 2EZ$.
β. Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.
γ. Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\widehat{BA\Delta} + \widehat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BA\Delta} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BA\Delta} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\epsilon H$ είναι $\widehat{EHA} + \widehat{EAH} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EHA} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EHA} = 60^\circ$.

$$\text{Άρα } \widehat{EHZ} = \frac{\widehat{EHA}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ZHE ($\widehat{E} = 90^\circ$), έχουμε $\widehat{EHZ} = 30^\circ$, άρα $EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$.

β. Είναι $\widehat{EH\Theta} = \widehat{AH\Theta} - \widehat{EHA} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, άρα $\widehat{EH\Theta} = \widehat{EHZ}$.

Οπότε στο τρίγωνο ΘZH το HE είναι ύψος και διχοτόμος.

Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και αφού επιπλέον είναι $\widehat{ZH\Theta} = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο.

γ. Επειδή $\Theta H \perp AD$ και $B\Gamma \perp AD$, έχουμε $\Theta H \parallel BK$, οπότε το ΘHKB είναι τραπέζιο.

Είναι $\widehat{K} = \widehat{HZ} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Αφού το ΘHKB είναι τραπέζιο και ισχύει $\widehat{B} = \widehat{K} = 60^\circ$, το ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

402 Θέμα 4 - 1755

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = A\Delta$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .
β. Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.
γ. Αν επιπλέον είναι γωνία $\widehat{BA\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

Λύση

α. Επειδή $AB = A\Delta$, είναι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Delta B}$.

Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, έχουμε $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Delta\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ.

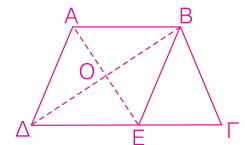
Άρα $\widehat{A\Delta B} = \widehat{B\Delta\Gamma}$, επομένως η $B\Delta$ είναι η διχοτόμος της Δ .

β. Από το B φέρουμε παράλληλη στην $A\Delta$ που τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο E .

Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($AB = A\Delta$), οπότε είναι ρόμβος.

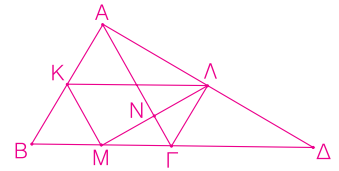
γ. Επειδή το $ABE\Delta$ είναι ρόμβος, οι διαγώνιοί του AE και $B\Delta$ διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετα. Είναι:

- $\widehat{BOE} = 90^\circ$
- $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{BA\Delta} = 120^\circ$
- $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^\circ$
- $\widehat{OB\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} - \widehat{ABO} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$
- $\widehat{OEG} = 360^\circ - (\widehat{BOE} + \widehat{\Gamma} + \widehat{OB\Gamma}) = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$



403 Θέμα 4 - 14882

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M , K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Lambda\Delta$.

β. Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
- Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Delta$, η $A\Gamma$ είναι διάμεσος και $A\Gamma = B\Gamma = \frac{B\Delta}{2}$, οπότε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 90^\circ$.

Είναι $\hat{B} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

β. i. Στο τρίγωνο $AB\Delta$, τα K , Λ είναι τα μέσα των AB , $A\Delta$, οπότε

- $K\Lambda \parallel B\Delta$, άρα το $K\Lambda\Gamma M$ είναι τραπέζιο
- $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = 2M\Gamma$.

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ τα K , M και Γ , Λ είναι τα μέσα των πλευρών τους, οπότε $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ και $\Gamma\Lambda = \frac{AB}{2}$.

Αφού $AB = A\Gamma$ έχουμε $KM = \Gamma\Lambda$.

Άρα το τραπέζιο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές.

- ii. Είναι:
- $\hat{A}\hat{K}\hat{\Lambda} = \hat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη
 - $\hat{\Lambda}\hat{K}\hat{M} = \hat{K}\hat{M}\hat{B}$, ως εντός εναλλάξ
 - $\hat{K}\hat{M}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη

Οπότε $\hat{\Lambda}\hat{K}\hat{M} = 60^\circ = \hat{A}\hat{K}\hat{\Lambda}$.

Τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και $AK\Lambda$ έχουν:

- $K\Lambda$ κοινή
- $AK = KM$, αφού $AK = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = KM$
- $\hat{\Lambda}\hat{K}\hat{M} = \hat{A}\hat{K}\hat{\Lambda}$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{K}\hat{M}\hat{\Lambda} = \hat{A} = 90^\circ$.

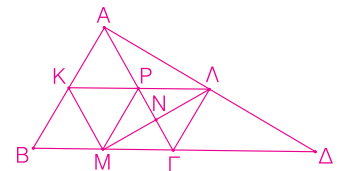
Επομένως το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ορθογώνιο.

2^{ος} τρόπος

Έστω P το σημείο τομής των $K\Lambda$, $A\Gamma$.

Αφού το Λ είναι το μέσο του $A\Delta$ και $P\Lambda \parallel \Gamma\Delta$, το P είναι το μέσο του $A\Gamma$.

Είναι $PM = \frac{AB}{2} = AK = \frac{K\Lambda}{2}$.



Επειδή επιπλέον η PM είναι διάμεσος στο τρίγωνο $KM\Lambda$ έχουμε $\hat{K}\hat{M}\hat{\Lambda} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο.

404 Θέμα 4 - 1884

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $\triangle B\Gamma K$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ABK$, $\triangle A\Gamma K$ έχουν

- $BK = K\Gamma$
- $\angle BAK = \angle \Gamma AK$ επειδή AK διχοτόμος της $\angle A$
- $\angle ABK = \angle A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντηση του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$.

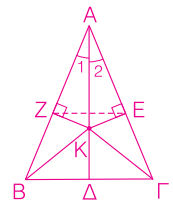
Λύση

α. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος.

Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο AD του $B\Gamma$ έχουμε $KB = K\Gamma$.

Οπότε το τρίγωνο $\triangle KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Επειδή Το K ανήκει στην AD διχοτόμο της γωνίας $\angle A$ έχουμε $KZ = KE$, οπότε το τρίγωνο $\triangle ZKE$ είναι ισοσκελές.



- β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ZAK$ και $\triangle EAK$ έχουν:
- AK κοινή
 - $\angle ZAK = \angle EAK$

Άρα είναι ίσα, οπότε $AZ = AE$.

Επομένως το τρίγωνο $\triangle AZE$ είναι ισοσκελές, με $\angle AZE = \angle AEZ$

$$\text{Είναι } \angle AZE + \angle AEZ + \angle A = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle AZE = 180^\circ - \angle A \Leftrightarrow \angle AZE = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $\angle B = \angle \Gamma$ και έχουμε

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle B = 180^\circ - \angle A \Leftrightarrow \angle B = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Άρα $\angle B = \angle AZE$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, οπότε $ZE \parallel B\Gamma$.

Επομένως το $ZE\Gamma B$ είναι τραπέζιο και επειδή $\angle B = \angle \Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ. Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $\angle AKB = \angle AK\Gamma$.

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

405 Θέμα 4 - 1718

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A' , B' , Γ' , Δ' των κορυφών του A , B , Γ , Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε .

α. Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

β. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. i. Είναι $AA' \perp \varepsilon$ και $\Gamma\Gamma' \perp \varepsilon$, οπότε $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$. Άρα το $AA'\Gamma'\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι $AA' \parallel OO' \parallel \Gamma\Gamma'$ και $OA = O\Gamma$, οπότε $O'A' = O'\Gamma'$.

Άρα η OO' είναι διάμεσος του τραπεζίου $AA'\Gamma'\Gamma$.

$$\text{Οπότε } OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

ii. Είναι $BB' \perp \varepsilon$ και $\Delta\Delta' \perp \varepsilon$, οπότε $BB' \parallel \Delta\Delta'$.

Άρα το $BB'\Delta'\Delta$ είναι τραπέζιο.

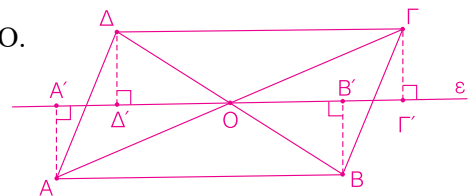
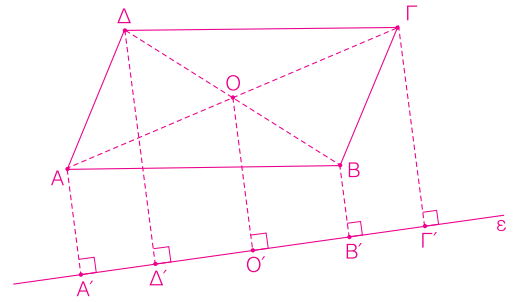
Βρίσκουμε ότι η OO' είναι διάμεσος και του τραπεζίου $BB'\Delta'\Delta$.

$$\text{Οπότε } OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6.$$

β. Η ευθεία ε είναι παράλληλη στις AB , $\Gamma\Delta$ και διέρχεται από το κέντρο O .

Επομένως η ευθεία ε είναι μεσοπαράλληλος των AB και $\Gamma\Delta$.

Τα σημεία A , B , Γ και Δ των AB , $\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τη μεσοπαράλληλό τους, οπότε $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$.

**406 Θέμα 4 - 1770**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K . Θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α. $EO = \frac{B\Delta}{2}$

β. Η γωνία $\hat{\Delta EB}$ είναι ορθή.

γ. Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

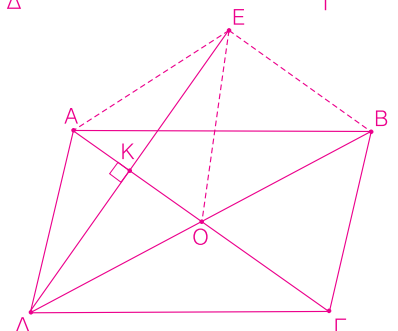
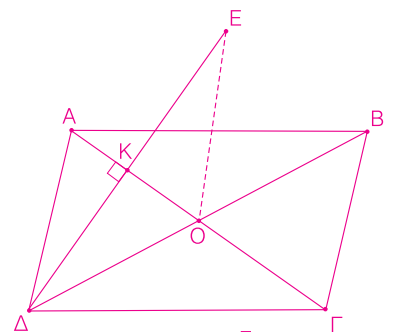
α. Η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ΔE , οπότε $OE = OD \Leftrightarrow OE = \frac{B\Delta}{2}$.

β. Στο $\hat{\Delta BE}$ η EO είναι διάμεσος και ίση με $\frac{B\Delta}{2}$, οπότε το τρίγωνο είναι

ορθογώνιο με $\hat{\Delta EB} = 90^\circ$.

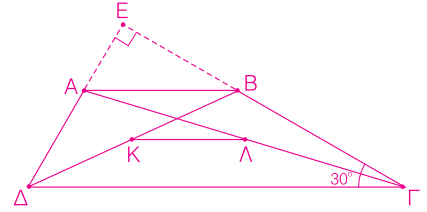
γ. Είναι $BE \perp \Delta E$ και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε $BE \parallel A\Gamma$. Επειδή η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ΔE , έχουμε $AE = \Delta\Delta \Leftrightarrow AE = B\Gamma$.

Οπότε το $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



407 Θέμα 4 - 1736

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:



α. $AB = 2AE$

β. $K\Lambda = A\Delta$

γ. Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι $\hat{ABE} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB είναι $\hat{B} = 30^\circ$, οπότε $AE = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2AE$.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $E\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 2E\Delta$.

Τα K, Λ είναι μέσα των διαγώνιων του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$, οπότε

$$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2E\Delta - 2AE}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{2(E\Delta - AE)}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = E\Delta - AE \Leftrightarrow K\Lambda = A\Delta.$$

γ. Είναι $K\Lambda \parallel AB$, οπότε για να είναι το $AB\Lambda K$ παραλληλόγραμμο αρκεί $K\Lambda = AB$.

Είναι $K\Lambda = A\Delta$, οπότε αρκεί $A\Delta = AB$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

408 Θέμα 4 - 1876

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($BA = B\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

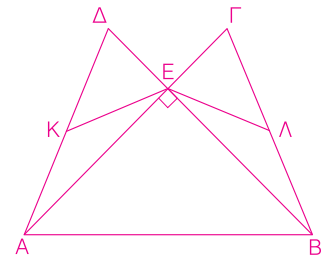
Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α. $E\Delta = E\Gamma$

β. $\Delta\Gamma \parallel AB$

γ. Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.



Λύση

α. Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BA\Delta$, είναι ίσα, θα έχουν τις γωνίες της κορυφής ίσες, οπότε έχουμε $\hat{A} = \hat{B}$.

Άρα το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές με $EA = EB$.

Επειδή $A\Gamma = B\Delta$, έχουμε $E\Delta = E\Gamma$, ως διαφορές ίσων τμημάτων.

β. Τα τρίγωνα $E\Gamma\Delta$ και EAB είναι ορθογώνια και ισοσκελή, οπότε:

• $\hat{E\Gamma\Delta} = \hat{E\Gamma\Delta} = 45^\circ$

• $\hat{EAB} = \hat{EBA} = 45^\circ$

Επομένως $\hat{E\Gamma\Delta} = \hat{EBA}$, οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $\Delta\Gamma \parallel AB$.

γ. • Στα ορθογώνια τρίγωνα $E\Delta\Lambda$ και $E\Gamma K$ οι $EK, E\Lambda$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα, επομένως

$$EK = \frac{A\Delta}{2} \text{ και } E\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Οπότε $EK = E\Lambda$, άρα το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές.

• Είναι $\Delta\Gamma \parallel AB$ οπότε το $\Delta\Gamma B A$ είναι τραπέζιο και επειδή η $K\Lambda$ είναι διάμεσος, έχουμε $K\Lambda \parallel AB$.

409 Θέμα 4 - 1856

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $B < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $EG = GB$, να αποδείξετε ότι:

- α.** Η γωνία BEZ είναι ορθή.
- β.** Το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ.** Το τετράπλευρο $AGZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

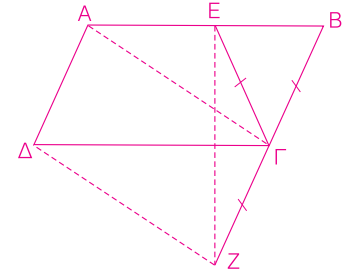
- α.** Στο τρίγωνο EBZ η EG είναι διάμεσος και $EG = GB = \frac{BZ}{2}$, οπότε

$$\widehat{BEZ} = 90^\circ.$$

- β.** Επειδή $AE \parallel \Gamma\Delta$, το $AE\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

Έχουμε $GE = GB$ και $GB = \Delta\Delta$, οπότε $GE = \Delta\Delta$, άρα το $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

- γ.** Είναι $B\Gamma \parallel \Delta\Delta$, οπότε $\Gamma Z \parallel \Delta\Delta$, άρα το $AGZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**410 Θέμα 4 - 1786**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M , N τα μέσα των AB , $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.
- β.** Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ.** Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ME\Gamma}$.

Λύση

- α.** Είναι $MB \parallel \Gamma N$ και $MB = \Gamma N$, ως μισά ίσων τμημάτων.

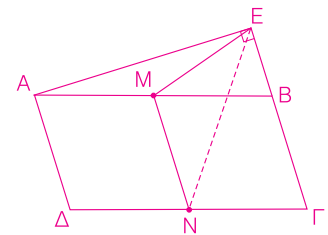
Επειδή $MB \parallel \Gamma N$, το $MB\Gamma N$ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $MB = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$. Άρα το $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.

- β.** Επειδή το $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος έχουμε $MN \parallel B\Gamma$, οπότε το $ME\Gamma N$ είναι τραπέζιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB , το EM είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EM = \frac{AB}{2} = MB = \Gamma N$.

Οπότε το $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

- γ.** Επειδή $ME = MN$ έχουμε $\widehat{MEN} = \widehat{MNE}$. Αφού $MN \parallel E\Gamma$, έχουμε $\widehat{MNE} = \widehat{NE\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ. Άρα $\widehat{MEN} = \widehat{NE\Gamma}$, οπότε η EN είναι διχοτόμος της $\widehat{ME\Gamma}$.

**411 Θέμα 4 - 1732 - ΔΙΑΓΡΑΦΗΚΕ**

412 Θέμα 4 - 13838

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K, M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα K και M είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, άρα $KM \parallel B\Gamma$. Το $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο αφού $KM \parallel B\Gamma$. Είναι $KB = M\Gamma$, ως μισά των ίσων τμημάτων AB και $A\Gamma$.

Άρα το $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β. Είναι: • $KM \parallel B\Gamma$, άρα και $HZ \parallel B\Gamma$. Επιπλέον οι BH και ΓZ τεμνόμενες από τη $B\Gamma$ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ($\hat{B}x$ και $\hat{B}\Gamma y$) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

$$\bullet \quad \hat{B}x = \hat{H}Bt = \frac{\hat{B}\epsilon\xi}{2}$$

$$\bullet \quad \hat{B}\Gamma y = \hat{Z}\Gamma p = \frac{\hat{\Gamma}\epsilon\xi}{2}$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε οι ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $\hat{B}\epsilon\xi$ και $\hat{\Gamma}\epsilon\xi$ είναι αμβλείες επομένως:

$$\hat{B}\epsilon\xi < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{B}\epsilon\xi}{2} < 90^\circ \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}\epsilon\xi < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{\Gamma}\epsilon\xi}{2} < 90^\circ$$

Άρα $\frac{\hat{B}\epsilon\xi}{2} + \frac{\hat{\Gamma}\epsilon\xi}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow \hat{H}Bt + \hat{Z}\Gamma p < 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}x + \hat{B}\Gamma y < 180^\circ$. Οι BH και ΓZ τέμνονται, άρα το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι τραπέζιο με βάσεις $B\Gamma$ και ZH .

$$\text{Έχουμε:} \bullet \quad \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B}\epsilon\xi = \hat{\Gamma}\epsilon\xi \Leftrightarrow \frac{\hat{B}\epsilon\xi}{2} = \frac{\hat{\Gamma}\epsilon\xi}{2} \Leftrightarrow \hat{K}B\hat{H} = \hat{M}\Gamma\hat{Z}$$

$$\bullet \quad \hat{B}\hat{H} = \hat{B}\hat{\Gamma}Z \quad \text{ως άθροισμα ίσων γωνιών} \quad \hat{B} + \hat{K}B\hat{H} \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma} + \hat{M}\hat{\Gamma}Z.$$

Άρα το τραπέζιο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες του $\hat{B}\hat{H}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}Z$ ίσες.

413 Θέμα 4 - 1784

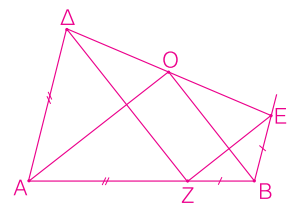
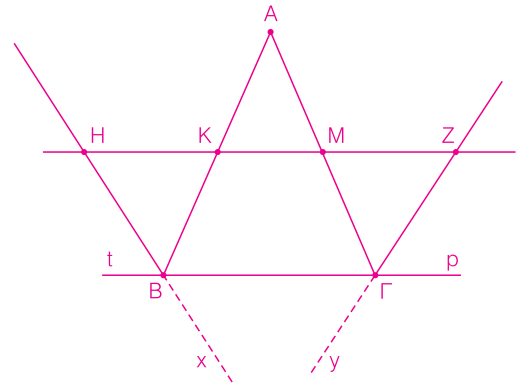
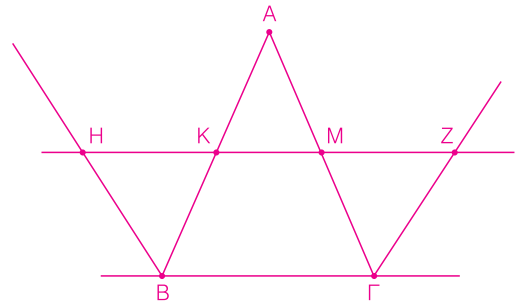
Δίνεται τραπέζιο $A\Delta E B$, με $A\Delta \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE . Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$. Αν γωνία $\hat{\Delta A Z} = \varphi$,

α. να εκφράσετε τη γωνία $\hat{AZ\Delta}$ σε συνάρτηση με τη φ

β. να εκφράσετε τη γωνία $\hat{EZB}$ σε συνάρτηση με τη φ

γ. να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

Λύση



α. Επειδή $AZ = AD$, το $\triangle AZD$ είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AZD = \angle ADZ$.

Στο $\triangle AZD$ είναι $\angle AZD + \angle ADZ + \angle ZAD = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle AZD + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle AZD = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \angle AZD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

β. Επειδή $AD \parallel BE$, έχουμε $\angle ZBE + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZBE = 180^\circ - \varphi$.

Αφού το $\triangle BZE$ είναι ισοσκελές, έχουμε $\angle ZBE = \angle BEZ$.

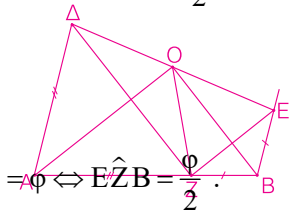
Στο $\triangle BZE$ είναι $\angle ZBE + \angle BEZ + \angle ZEB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZBE + \angle ZBE + 180^\circ - \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ZBE = \varphi \Leftrightarrow \angle ZBE = \frac{\varphi}{2}$.

γ. Είναι $\angle ZDE = 180^\circ - \angle AZD - \angle ZBE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ZDE$ η ZO είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $ZO = \frac{DE}{2} = OD = OE$.

Επειδή:

- $AZ = AD$ και $OZ = OD$, η AO είναι η μεσοκάθετος του AD .
- $BZ = BE$ και $OZ = OE$, η BO είναι η μεσοκάθετος του BE .



414 Θέμα 4 - 1715

Δίνεται ευθεία ε και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην ε . Φέρουμε AD, BG κάθετες στην ε και M, N μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

α. Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ε

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1. $AD < BG$

2. $AD = BG$

ii. να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.

β. Αν η ευθεία ε τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα M, N ταυτίζονται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. i. 1. Αν $AD < BG$, τότε $AD \neq BG$ άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.

2. Αν $AD = BG$, τότε $AD \parallel BG$.

Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\angle A = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

ii. • Αν $AD < BG$, τότε το MN είναι η διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε

$$MN = \frac{AD + BG}{2}.$$

• Αν $AD = BG$, τότε $MN = AD = BG$.

β. Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMN$ και $\triangle BMN$ έχουν:

- $MA = MB$
- $\angle M_1 = \angle M_2$

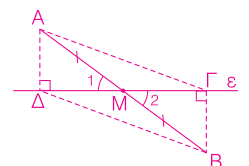
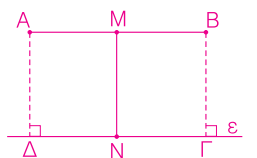
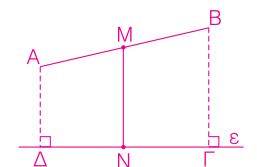
Οπότε είναι ίσα, άρα $MN = MN$

Επομένως το M είναι μέσο και του $\Gamma\Delta$, οπότε τα M, N ταυτίζονται.

Επειδή $MA = MB$ και $MN = MN$ το $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $AM > MN$ και $BM > MN$ θα είναι $AM + BM > MN + MN \Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$.

Άρα το $A\Gamma B\Delta$ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.



415 Θέμα 4 - 1735

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

α. Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.

β. Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ. Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' \parallel BB'$.

β. Επειδή η KL είναι η μεσοκάθετος του AB , έχουμε $KA = KB$.

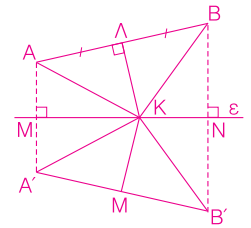
Αφού η ευθεία ε είναι η μεσοκάθετος των AA' και BB' έχουμε

$$KA = KA' \text{ και } KB = KB'.$$

Οπότε $KA' = KB'$, άρα το K ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ. Για να είναι το τετράπλευρο $ABB'A'$ ορθογώνιο, πρέπει $\hat{A} = 90^\circ$.

Οπότε $AB \perp AA'$ και αφού $\varepsilon \perp AA'$, θα έχουμε $AB \parallel \varepsilon$.



25. Εγγεγραμμένη γωνία

416 Θέμα 2 - 1581

Σε κύκλο κέντρου O δίνονται οι χορδές AB και AD τέτοιες ώστε η γωνία $\hat{B\Delta A}$ να είναι 44° . Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta O$.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία x .

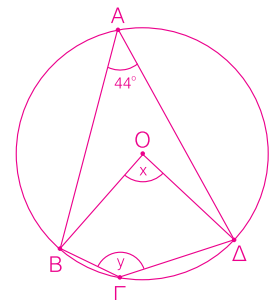
β. Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136° .

Λύση

α. Η επίκεντρη γωνία x και η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε $x = 2\hat{A} = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$.

β. Επειδή $\hat{B\Delta A} = 88^\circ$, είναι $\widehat{B\Gamma\Delta} = 88^\circ$, άρα $\widehat{B\Delta A} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$.

$$\text{Οπότε } y = \frac{272^\circ}{2} = 136^\circ.$$



417 Θέμα 2 - 13441

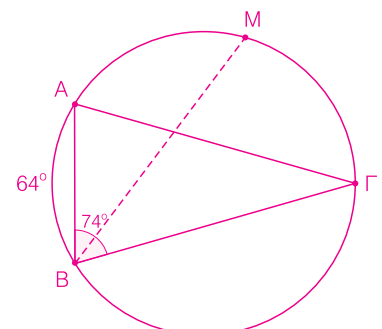
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^\circ$. Το μέτρο του τόξου AB που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64° και M είναι το μέσο του τόξου $A\Gamma$.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να αποδείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

Λύση



α. Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο AB, άρα $\hat{\Gamma} = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ$.

Στο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 74^\circ + 32^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 74^\circ$.

β. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^\circ$.

γ. Το σημείο M είναι το μέσο του τόξου AG, άρα $\widehat{AM} = \widehat{MG}$ είναι ίσα, οπότε $\widehat{ABM} = \widehat{GBM}$, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα.

Άρα η BM είναι διχοτόμος της γωνίας B.

418 Θέμα 2 - 12638

Στον κύκλο του σχήματος, το O είναι το κέντρο του, το τόξο AB ισούται με 60° και η γωνία B ισούται με 50° . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α. πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ.

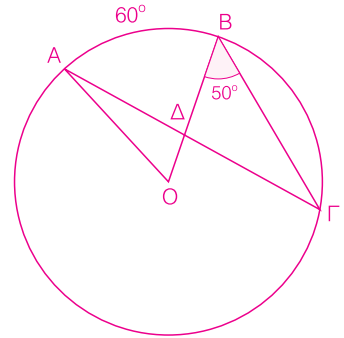
β. πόσες μοίρες είναι η γωνία AΔO

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο AB άρα $\hat{\Gamma} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

β. Στο τρίγωνο BΓΔ είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} + \widehat{B\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 30^\circ + \widehat{B\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Delta\Gamma} = 100^\circ$.

Επομένως η $\widehat{A\Delta O} = 100^\circ$, ως κατά κορυφήν της.



419 Θέμα 2 - 13753

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο BΓ. Έστω A και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο BΓ. Τα μέτρα των τόξων BΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α. της γωνίας BAΓ.

β. x του τόξου ΓΔ.

γ. της γωνίας BOΔ.

Λύση

α. Η γωνία BAΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο οπότε $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$.

β. Η BΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\widehat{B\Delta} + \widehat{\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$.

γ. Η γωνία BOΔ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο BΔ. Άρα $\widehat{BO\Delta} = 2x = 120^\circ$

420 Θέμα 2 - 1663

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας BÂΓ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AΒΔ και AΓΔ είναι ίσα.

Λύση

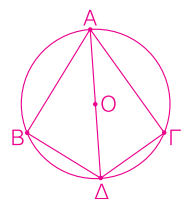
Επειδή $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta}$, είναι $\widehat{B\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma}$, οπότε $B\Delta = \Delta\Gamma$.

Είναι $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ$, διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε ημικύκλια.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AΒΔ και AΔΓ έχουν:

- $B\Delta = \Delta\Gamma$
- AΔ κοινή

Άρα είναι ίσα.



421 Θέμα 2 - 13740

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε μια τυχαία χορδή του AB , την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του B κατά ίσο τμήμα $BΓ$. Φέρουμε κάθετη στην $ΑΓ$ στο σημείο της B που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

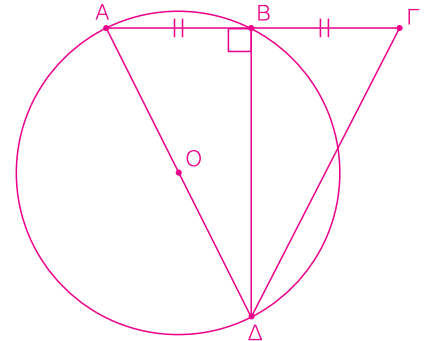
α. $\Delta A = \Delta \Gamma$.

β. Η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ το τμήμα ΔB είναι διάμεσος και ύψος, άρα το $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, επομένως $\Delta A = \Delta \Gamma$.

β. Η γωνία $\hat{A}B\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.

**422 Θέμα 2 - 12642**

Σε κύκλο με κέντρο το O , παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ και Δ , ώστε η $A\Delta$ να είναι διάμετρος και η γωνία $\hat{BO}\Gamma$ να ισούται με 50° . Αν η προέκταση της AB προς το B , τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ προς το Γ στο E , αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α. το μέτρο της γωνίας $B\Delta\Gamma$.

β. το μέτρο της γωνία $A\epsilon\Delta$.

Λύση

α. Η γωνία $B\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο $B\Gamma$, οπότε

θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $\hat{B\Delta\Gamma} = \frac{\hat{BO\Gamma}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

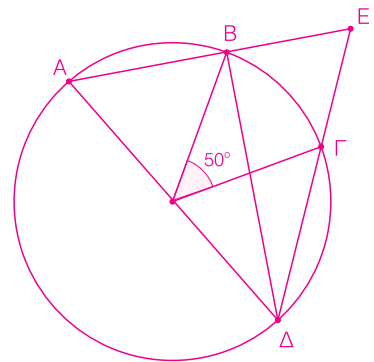
β. Επειδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος, η γωνία $AB\Delta$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή.

Άρα $\hat{AB\Delta} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\Delta BE} = 90^\circ$.

Είναι $\hat{B\Delta\Gamma} = 25^\circ$.

Οι γωνίες $B\Delta E$ και $BE\Delta$ είναι συμπληρωματικές, οπότε $\hat{BE\Delta} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Άρα $\hat{A\epsilon\Delta} = 65^\circ$.

**423 Θέμα 2 - 13756**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Να αποδείξετε ότι:

α. $\hat{AKB} = 2\hat{A\Gamma B}$.

β. το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

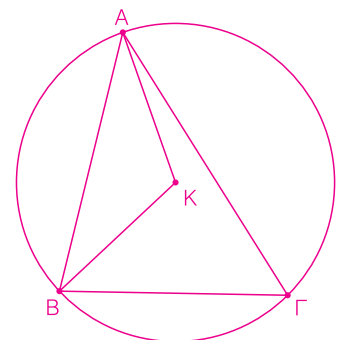
γ. $\hat{KAB} + \hat{A\Gamma B} = 90^\circ$.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{AKB}$ είναι επίκεντρη και η γωνία $\hat{A\Gamma B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο AB .

Άρα $\hat{AKB} = 2\hat{A\Gamma B}$.

β. Είναι $KA = KB = \rho$, άρα το τρίγωνο AKB είναι ισοσκελές.

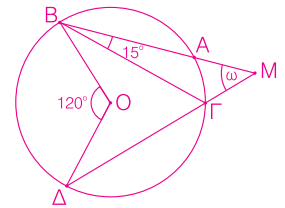


γ. Στο τρίγωνο KAB :

$$\hat{KAB} + \hat{ABK} + \hat{AKB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{KAB} + \hat{KAB} + 2\hat{AGB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{KAB} + 2\hat{AGB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{KAB} + \hat{AGB} = 90^\circ$$

424 Θέμα 2 - 1580

Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $\hat{BO\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\hat{\Gamma BA}$ είναι 15° .



α. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B\Gamma\Delta}$.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45° .

Λύση

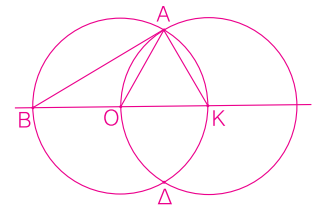
α. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{B\Gamma\Delta}$ και η επίκεντρη $\hat{BO\Delta}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε

$$\hat{B\Gamma\Delta} = \frac{\hat{BO\Delta}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

β. Στο τρίγωνο BMΓ η $\hat{B\Gamma\Delta}$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{\Gamma BM} + \omega \Leftrightarrow 60^\circ = 15^\circ + \omega \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$.

425 Θέμα 2 - 1673

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ.



α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK.

Λύση

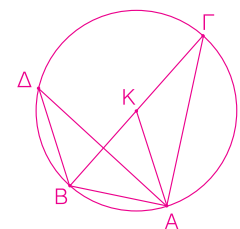
α. Επειδή $OA = KA = OK = \rho$, το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:

- $\hat{BAK} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.
- $\hat{K} = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο
- $\hat{BAK} + \hat{K} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ$

426 Θέμα 2 - 1696

Έστω κύκλος κέντρου K, μια διάμετρός του BΓ και σημείο A του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των B και Γ,



α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο

β. να υπολογίσετε την γωνία $\hat{B\Delta A}$

γ. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.

Λύση

α. Είναι $BA = K\Gamma = KA = KB = \rho$, άρα το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

β. Είναι:

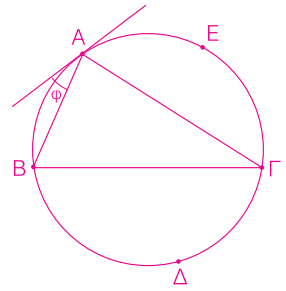
- $\hat{BKA} = 60^\circ$, αφού το $\hat{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $\hat{B\Delta A} = \frac{\hat{BKA}}{2} = 30^\circ$

γ. Είναι:

- $\hat{BAG} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
- $\hat{AB\Gamma} = 60^\circ$, αφού το $\hat{BKA}$ είναι ισόπλευρο
- $\hat{B\Gamma A} = \hat{B\Delta A} = 30^\circ$.

427 Θέμα 2 - 1561

Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά AB . Αν το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι 160° ,



α. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β. να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{AE\Gamma}$.

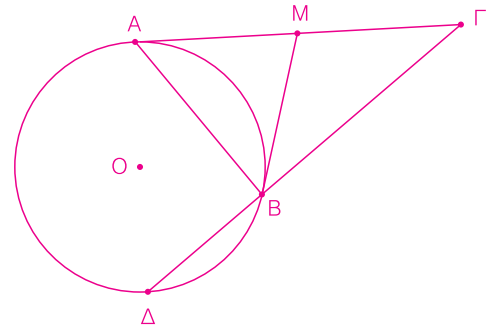
Λύση

- α. Είναι:
- $\widehat{BA\Gamma} = \frac{\widehat{B\Delta\Gamma}}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$
 - $\hat{\Gamma} = \hat{\varphi} = 30^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
 - $\hat{B} = 180^\circ - \widehat{BA\Gamma} - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

β. Είναι $\hat{B} = 70^\circ$, οπότε $\frac{\widehat{AE\Gamma}}{2} = 70^\circ \Leftrightarrow \widehat{AE\Gamma} = 140^\circ$.

428 Θέμα 2 - 13747

Από σημείο M εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου O φερούμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε το τμήμα AM προς το μέρος του M και παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = AM$. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα $\Gamma\Delta$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:



α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Τα σημεία A και Δ είναι αντιδιαμετρικά.

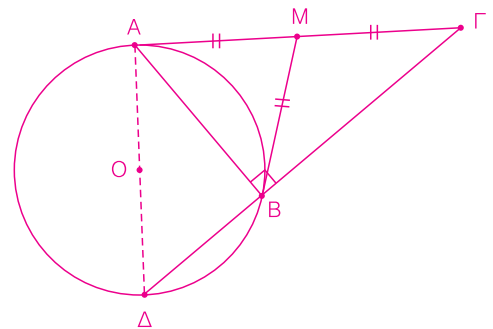
Λύση

- α. Είναι:
- $MA = MB$, ως εφαπτόμενα τμήματα
 - $M\Gamma = AM$, άρα $MA = MB = M\Gamma$

Δηλαδή η BM , που είναι διάμεσος προς την πλευρά AG στο τρίγωνο $BA\Gamma$, ισούται με το μισό της AG .

Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά AG και $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$.

β. Είναι $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$, οπότε και $\widehat{A\Delta B} = 90^\circ$, η οποία είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία A , Δ είναι αντιδιαμετρικά.



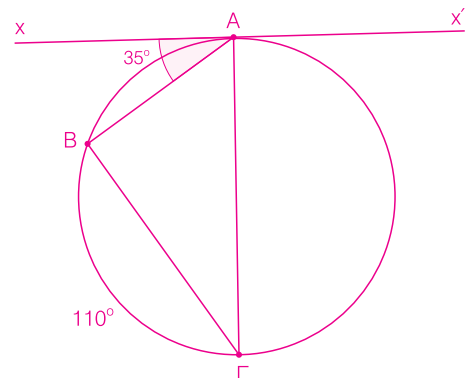
429 Θέμα 2 - 12637

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και επιπλέον ισχύουν: $\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

α. Ποιά είναι το μέτρο της γωνίας Γ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση



α. Η $\widehat{B\hat{A}x}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως $\widehat{\Gamma} + \widehat{B\hat{A}x} = 35^\circ$.

β. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η γωνία του $\widehat{A}$ είναι εγγεγραμμένη, που βαίνει στο τόξο $B\Gamma$, άρα $\widehat{A} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$, οπότε και $\widehat{B} = 90^\circ$, επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

430 Θέμα 2 - 13754

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με διάμετρο $B\Gamma$ και τα σημεία A, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου $B\Gamma$ έτσι ώστε $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ .

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α. $\widehat{BA\Gamma}$.

β. $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

γ. $\widehat{\Delta_1}$.

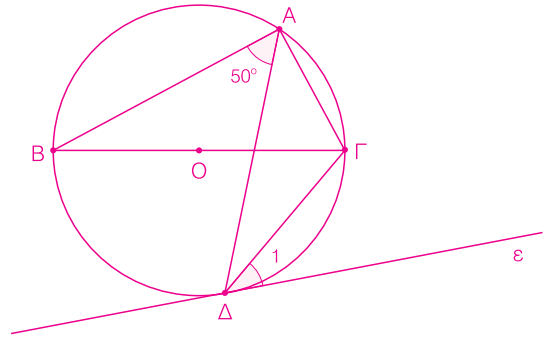
Λύση

α. Η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$.

β. Είναι $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 50^\circ$, ως εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Delta$.

γ. Η γωνία $\widehat{\Delta_1}$ σχηματίζεται από τη χορδή $\Delta\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ .

Επομένως $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{BA\Gamma} - \widehat{B\hat{A}\Delta} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Άρα $\widehat{\Delta_1} = 40^\circ$.



431 Θέμα 2 - 1665

Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και διάμετρό του AB . Στην εφαπτομένη του κύκλου στο B θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία $\widehat{B\Gamma O}$ να είναι ίση με 30° . Αν η OG τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α. $OG = 2OA$

β. $B\Gamma = A\Delta$

Λύση

α. Η εφαπτόμενη $B\Gamma$ είναι κάθετη στην ακτίνα OB στο σημείο επαφής, άρα $\widehat{GB\hat{O}} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ ($\widehat{B} = 90^\circ$), έχουμε $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $OB = \frac{OG}{2} \Rightarrow OA = \frac{OG}{2} \Rightarrow OG = 2OA$.

β. Είναι $\widehat{B\hat{\Delta}A} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma O$ είναι $\widehat{B\hat{O}\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{O}\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$.

Είναι $OB = OD$ και $\widehat{B\hat{O}\Delta} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $OB\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα $B\Delta = OB$.

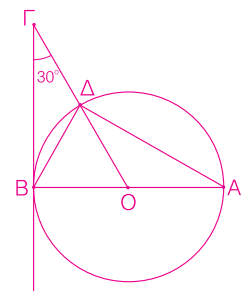
Έχουμε $\widehat{A} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Delta}}{2} = 30^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma O$ και $B\Delta A$ έχουν:

- $OB = B\Delta$

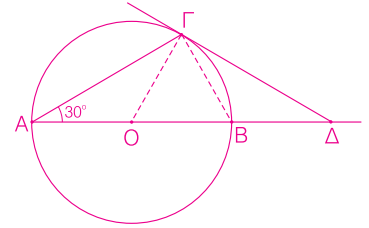
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$

Άρα είναι ίσα, οπότε $B\Gamma = A\Delta$.



432 Θέμα 2 - 1626

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή AG τέτοια ώστε $\widehat{BAG} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) στο σημείο Δ .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $O\Gamma\Delta$.
 β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Λύση

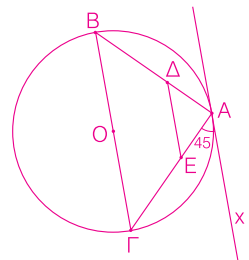
- α. Είναι: • $OG \perp \Gamma\Delta$, άρα $\widehat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ$
 • $\widehat{GO\Delta} = 2\widehat{A} = 60^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο
 • $\widehat{O\Gamma\Delta} + \widehat{GO\Delta} + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 60^\circ + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 30^\circ$

- β. Επειδή $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ είναι $\Gamma A = \Gamma\Delta$.

Είναι $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{A} = 30^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
 Οπότε $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta} = 30^\circ$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

433 Θέμα 2 - 1672

Σε σημείο A ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Ax και τη χορδή AG που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45° . Φέρουμε τη διάμετρο GB και μία παράλληλη ευθεία στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Δ και την AG στο E .



- α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$.
 β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

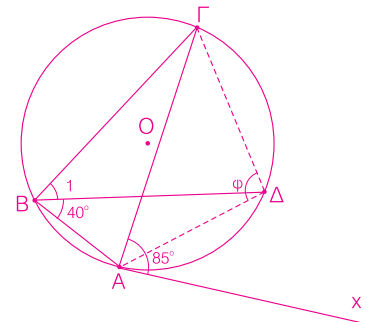
- α. Είναι: • $\widehat{BAG} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο
 • $\widehat{B} = \widehat{GAx} = 45^\circ$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης
 • $\widehat{\Gamma} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{BAG} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

β. Έχουμε $B\Gamma \parallel \Delta E$, οπότε το $B\Gamma E\Delta$ είναι τραπέζιο. Επειδή επιπλέον είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} (=45^\circ)$, το $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

434 Θέμα 2 - 1530

Στο διπλανό σχήμα, η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) σε σημείο του A και επιπλέον ισχύουν $\widehat{\Gamma Ax} = 85^\circ$ και $\widehat{\Delta BA} = 40^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B_1} = 45^\circ$.
 β. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\phi}$.



- α. Η $x\hat{A}\Delta$ σχηματίζεται από τη χορδή $A\Delta$ και την εφαπτομένη Ax , οπότε $x\hat{A}\Delta = \widehat{AB\Delta} = 40^\circ$.
 Είναι: • $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}X} - x\hat{A}\Delta = 85^\circ - 40^\circ = 45^\circ$
 • $\widehat{B_1} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

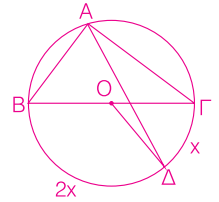
- β. Είναι $\widehat{AB\Gamma} = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε

$$\widehat{\phi} + \widehat{AB\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - \widehat{AB\Gamma} \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - 85^\circ \Leftrightarrow \phi = 95^\circ.$$

435 Θέμα 2 - 1703

Έστω κύκλος κέντρου O και διαμέτρου $BΓ$. Θεωρούμε τα σημεία A και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της $BΓ$, τέτοια ώστε το τόξο $B\Delta$ να είναι διπλάσιο του τόξου $\Delta\Gamma$. Να υπολογίσετε:



α. το μέτρο x του τόξου $\Gamma\Delta$,

β. τη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Delta}$,

γ. τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Delta}$.

Λύση

α. Είναι $\widehat{B\Delta} + \widehat{\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$.

β. Επειδή $\widehat{B\Delta} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, έχουμε $\widehat{B\hat{O}\Delta} = 120^\circ$.

γ. Είναι $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \frac{\widehat{B\hat{O}\Delta}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

436 Θέμα 2 - 1695

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο σημείο Γ .

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $O\Delta\Gamma$ ως προς τις πλευρές.

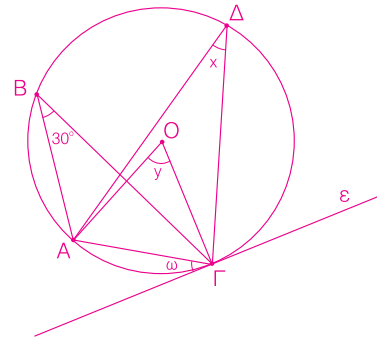
Λύση

α. Είναι: • $x = \widehat{A\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$.

• $y = 2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, αφού η y είναι επίκεντρη και η x εγγεγραμμένη που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{A\Gamma}$.

• $\omega = \widehat{A\hat{B}\Gamma} = 30^\circ$, αφού η ω σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ και την εφαπτομένη ε στο Γ που στο αντίστοιχο τόξο βαίνει η εγγεγραμμένη $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$.

β. Επειδή $OA = OG = \rho$ και $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$, το $\triangle O\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



437 Θέμα 2 - 1769

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και δύο χορδές του $A\Gamma$ και $B\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E . Φέρουμε $EZ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α. Οι γωνίες $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ είναι ίσες.

β. Τα τετράπλευρα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα.

γ. Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta\hat{Z}\Gamma}$.

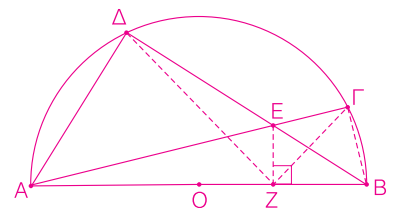
Λύση

α. Οι $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Delta\Gamma}$.

β. Είναι $\widehat{A\hat{\Delta}B} = \widehat{A\hat{\Gamma}B} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα $A\Delta EZ$ και $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμα διότι: • $\widehat{\Delta} + \widehat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

• $\widehat{\Gamma} + \widehat{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

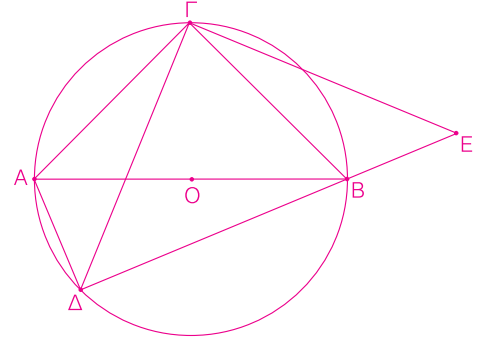


- γ. Είναι:
- $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{\Delta AE}$, αφού το $\Delta\Delta EZ$ είναι εγγράψιμο
 - $\widehat{EZ\Gamma} = \widehat{EB\Gamma}$, αφού το $EZB\Gamma$ είναι εγγράψιμο
 - $\widehat{\Delta AE} = \widehat{EB\Gamma}$, από το α. ερώτημα

Άρα $\widehat{\Delta ZE} = \widehat{EZ\Gamma}$, οπότε η EZ είναι η διχοτόμος της $\widehat{\Delta Z\Gamma}$.

438 Θέμα 2 - 1712

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = \Delta A$.



α. Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα.
- Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .

β. Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Λύση

α. i. Το Γ είναι μέσο του $\widehat{AB}$, άρα $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Gamma}$, οπότε $A\Gamma = B\Gamma$. Αφού το $\Delta\Gamma B\Delta$ είναι εγγεγραμμένο, έχουμε $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$.

Τα τρίγωνα $\Delta\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουν:

- $A\Gamma = B\Gamma$
- $\Delta\Delta = BE$
- $\widehat{\Gamma\Delta\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ).

ii. Είναι $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{\Delta\Gamma B} + \widehat{B\Gamma E} \stackrel{\text{α.ι.}}{=} \widehat{\Delta\Gamma B} + \widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$, αφού η $\widehat{A\Gamma B}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικόκλιο. Οπότε $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β. Αν $\Gamma\Delta$ διάμετρος, τότε $O\Gamma \perp \Gamma E$, οπότε η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

439 Θέμα 4 - 13520

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\widehat{APB} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α. $OP = 2\rho$.

β. $\widehat{A\Gamma B} = 120^\circ$.

γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος.

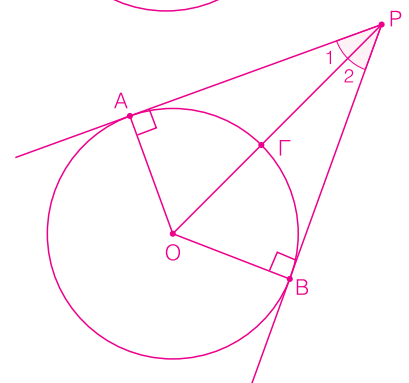
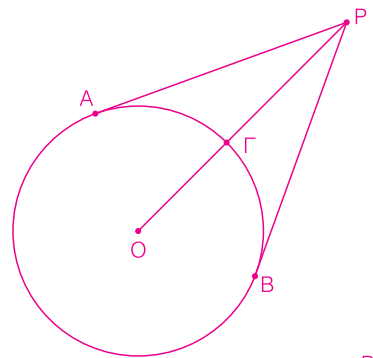
Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. • Οι ακτίνες OA και OB είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB , οπότε τα τρίγωνα OAP και OBP είναι ορθογώνια.

• Η PO είναι διχοτόμος της $\widehat{APB} = 60^\circ$, οπότε $\widehat{P_1} = \widehat{P_2} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP είναι $\widehat{P_1} = 30^\circ$, οπότε $OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow PO = 2\rho$



β. • Στο τρίγωνο OPA έχουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{OAP} + \hat{OPA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ.$$

• Είναι $OA = OG = \rho$, οπότε το τρίγωνο OGA είναι ισοσκελές με μία γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 60^\circ$ (1).

• Στο τρίγωνο OPB έχουμε:

$$\hat{O}_2 + \hat{OBP} + \hat{OPB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_2 = 60^\circ.$$

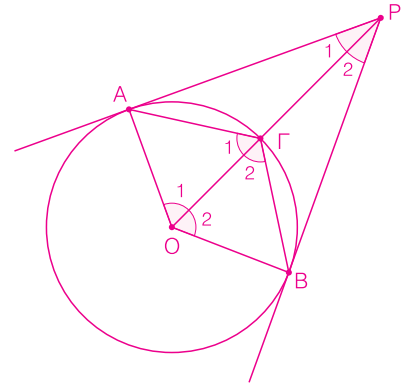
• Είναι $OB = OG = \rho$, οπότε το τρίγωνο OGB είναι ισοσκελές με μία γωνία 60° , άρα ισόπλευρο.

Επομένως, $\hat{\Gamma}_2 = 60^\circ$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{AGB} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

γ. Τα τρίγωνα OGA και OGB είναι ισόπλευρα, οπότε $AG = OA = OG = OB$.

Το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



440 Θέμα 4 - 12419

Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R > r$, τέμνονται στα σημεία A και B . Από το σημείο A φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (K, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma\Delta = 2K\Lambda$

β. Τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

Λύση

α. Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) με $R > r$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A, B και η τέμνουσα $\Gamma\Delta$ παράλληλη στη διάκεντρο $K\Lambda$.

Φέρουμε τα αποστήματα KH και $\Lambda\Theta$ των χορδών $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο $K\Lambda\Theta H$ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες ($K\Lambda // H\Theta$ από υπόθεση και $KH // H\Theta$ αφού $KH, \Lambda\Theta$ είναι κάθετα στη $\Gamma\Delta$). Οπότε $K\Lambda = H\Theta$.

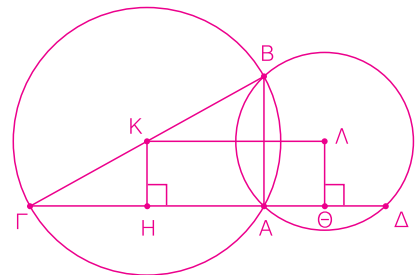
Επίσης, τα σημεία H, Θ είναι μέσα των χορδών $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

Οπότε έχουμε: $\Gamma\Delta = \Gamma A + A\Delta = 2HA + 2A\Theta = 2(HA + A\Theta) = 2H\Theta = 2K\Lambda$

β. Η διάκεντρος $K\Lambda$ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους AB , οπότε $AB \perp K\Lambda$. Αφού, $K\Lambda // \Gamma\Delta$ έχουμε, $AB \perp \Gamma\Delta$.

Επομένως, η γωνία $\hat{BAG}$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (K, R) , οπότε η $B\Gamma$ είναι διάμετρος.

Άρα, τα σημεία B και Γ είναι αντιδιαμετρικά.



441 Θέμα 4 - 1739

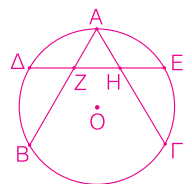
Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και AG , το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

γ. Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και AG .

Λύση



- α. Είναι:
- $\widehat{AB} = \widehat{AG} = 120^\circ$
 - $\widehat{BG} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$

Οπότε $\widehat{AB} = \widehat{BG} = \widehat{GA}$, άρα $AB = BG = GA$

Επομένως το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρο.

- β. Είναι $\widehat{AD} = \widehat{AE} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, οπότε $AD = AE$.

Είναι $\widehat{DAB} = \frac{\widehat{BG}}{2} = 30^\circ$ και $\widehat{DAE} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 30^\circ$.

Όμοια $\widehat{EAH} = \widehat{AEH} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{AZD} = \widehat{AHE} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Τα τρίγωνα AZD και AHE έχουν:

- $AD = AE$
- $\widehat{DAZ} = \widehat{EAH}$
- $\widehat{AZD} = \widehat{AHE}$

Οπότε είναι ίσα (ΓΠΓ).

- γ. Στο τρίγωνο AZH , είναι:
- $\widehat{A} = \frac{\widehat{BG}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$
 - $\widehat{Z} = 180^\circ - \widehat{AZD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 - $\widehat{H} = 180^\circ - \widehat{AHE} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 - $\widehat{A} = \widehat{Z} = \widehat{H} = 60^\circ$

Οπότε είναι ισόπλευρο, άρα $AZ = ZH = AH$.

Αφού $DZ = AZ$, $HE = AH$ έχουμε $DZ = ZH = HE$.

Οπότε η DE τριχοτομείται από τις AB και AG .

442 Θέμα 4 - 1720

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ABG που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα GZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία G και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα $ΘH$ είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ZBG είναι ισόπλευρο.
 β. Το τετράπλευρο $AGZB$ είναι ρόμβος.
 γ. Το τετράπλευρο $BGHΘ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

- α. Είναι:
- $ZB = ZG$, οπότε το τρίγωνο ZBG είναι ισοσκελές.
 - $\widehat{ZBG} = \widehat{BAG} = 60^\circ$ ως γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως το τρίγωνο ZBG είναι ισόπλευρο.

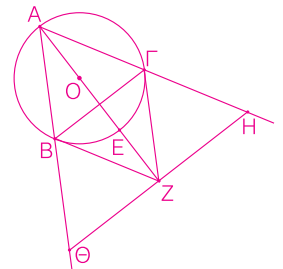
- β. Είναι $AB = AG = BG$ και $ZB = ZG = BG$. Οπότε $AB = AG = ZB = ZG$, άρα το $AGZB$ είναι ρόμβος.

- γ. Επειδή το $AGZB$ είναι ρόμβος, έχουμε $BG \perp AZ$ και αφού έχουμε $ΘH \perp AZ$, είναι $BG \parallel ΘH$.

Άρα το $BGHΘ$ είναι τραπέζιο.

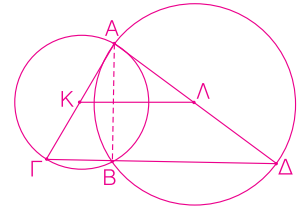
Είναι $\widehat{\Theta} = \widehat{B} = 60^\circ$ και $\widehat{H} = \widehat{G} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη.

Οπότε $\widehat{\Theta} = \widehat{H}$, άρα το $BGHΘ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



443 Θέμα 4 - 1717

Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A, B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:



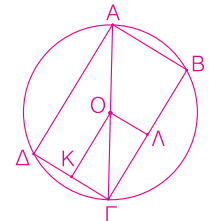
- α.** $\hat{AB}\Gamma = 90^\circ$
- β.** τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.
- γ.** το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο.

Λύση

- α.** Επειδή η γωνία $\hat{AB}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (K, ρ) και βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
Άρα $\hat{AB}\Gamma = 90^\circ$.
- β.** Η γωνία $\hat{AB}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Λ, R) και βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε $\hat{AB}\Delta = 90^\circ$.
Είναι $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{AB}\Gamma + \hat{AB}\Delta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα τα Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.
- γ.** Τα K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma, A\Delta$ στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ οπότε $K\Lambda \parallel \Gamma\Delta$.
Άρα το $K\Lambda\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο.

444 Θέμα 4 - 1848

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και $A\Gamma$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε τις χορδές $AL = BG$. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- α.** Οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.
- β.** Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- γ.** Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ.** Το τετράπλευρο $OL\Gamma K$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση

- α.** Έχουμε $AL = BG$, οπότε $\widehat{AL} = \widehat{BG}$. Άρα $\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{G}\Lambda B$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, οπότε $AB \parallel \Delta\Gamma$.
- β.** Επειδή $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{AL} = \widehat{BG}$, έχουμε $\widehat{\Delta\Gamma} = \widehat{AB}$, οπότε $AL \parallel B\Gamma$.
Είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $AL \parallel B\Gamma$, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή $\hat{B} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, έχουμε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- γ.** Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, έχουμε $\hat{\Delta AB} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{\Delta\Gamma B} = 180^\circ$.
Άρα η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου.
- δ.** Επειδή τα K, Λ είναι τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma, B\Gamma$, έχουμε ότι $OK \perp \Delta\Gamma$ και $OL \perp B\Gamma$.
Το $OL\Gamma K$ έχει τρεις ορθές γωνίες $\hat{K} = \hat{\Lambda} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, οπότε είναι ορθογώνιο.

445 Θέμα 4 - 1897

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Έστω σημείο Δ του τόξου AB τέτοιο ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $AL \perp A\Gamma$.
- β.** Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ALBH$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ.** Αν M το μέσον της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OM = \frac{AH}{2}$.

Λύση

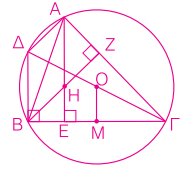
α. Επειδή η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη και $\widehat{\Delta B \Gamma} = 90^\circ$, η $\Delta \Gamma$ είναι διάμετρος.

Οπότε και $\widehat{\Delta A \Gamma} = 90^\circ$, άρα $\Delta A \perp A \Gamma$.

β. Είναι: • $AH \perp B \Gamma$ και $\Delta B \perp B \Gamma$, άρα $AH \parallel \Delta B$
• $BH \perp A \Gamma$ και $A \Delta \perp A \Gamma$, άρα $BH \parallel A \Delta$

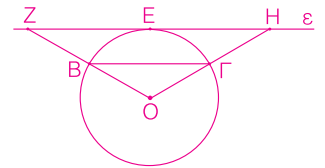
Οπότε το $A \Delta B H$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ. Στο τρίγωνο $B \Gamma \Delta$ τα O, M είναι τα μέσα των $\Gamma \Delta$ και $B \Gamma$, οπότε $OM = \frac{B \Delta}{2} = \frac{A H}{2}$, αφού το $A \Delta B H$ είναι παραλληλόγραμμο.



446 Θέμα 4 - 1772

Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του $B \Gamma$. Μια ευθεία ε εφάπτεται στο κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των OB, OG τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α. $B \Gamma \parallel ZH$

β. $OZ = OH$

γ. Αν B μέσον της OZ

i. να αποδείξετε ότι $\widehat{B \hat{E} Z} = \frac{\widehat{Z \hat{O} H}}{4}$

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

Λύση

α. Είναι $OE \perp ZH$, αφού η ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο επαφής.

Επειδή το E είναι το μέσο του $\widehat{B \Gamma}$, έχουμε $\widehat{E B} = \widehat{E \Gamma}$, οπότε $EB = EG$.

Αφού επιπλέον $OB = OG = \rho$, το OE είναι μεσοκάθετος του $B \Gamma$.

Άρα $OE \perp B \Gamma$, επομένως $B \Gamma \parallel ZH$.

β. Είναι $\widehat{E B} = \widehat{E \Gamma}$, άρα $\widehat{B \hat{O} E} = \widehat{G \hat{O} E}$.

Στο τρίγωνο OZH , το OE είναι ύψος και διχοτόμος.

Οπότε το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές με κορυφή το O , άρα $OZ = OH$.

γ. i. Είναι: • $\widehat{B \hat{E} Z} = \widehat{B \hat{\Gamma} E}$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης

• $\widehat{B \hat{\Gamma} E} = \frac{\widehat{B \hat{O} E}}{2}$, ως εγγεγραμμένη γωνία και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο

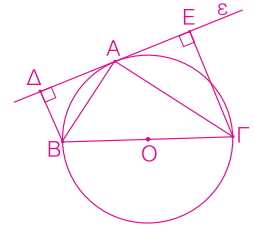
Οπότε $\widehat{B \hat{E} Z} = \frac{\widehat{B \hat{O} E}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{Z \hat{O} H}}{2} = \frac{\widehat{Z \hat{O} H}}{4}$.

ii. Το τρίγωνο OEZ είναι ορθογώνιο ($\widehat{E} = 90^\circ$) με $OE = OB = \frac{OZ}{2}$.

Άρα $\widehat{Z} = 30^\circ$, οπότε $\widehat{H} = \widehat{Z} = 30^\circ$ και $\widehat{O} = 180^\circ - \widehat{Z} - \widehat{H} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

447 Θέμα 4 - 1809

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O , με διάμετρο $B\Gamma$. Από σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$. Από τα σημεία B και Γ φέρουμε τα τμήματα BA και ΓE κάθετα στην ευθεία ε .



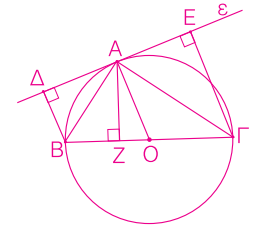
α. Να αποδείξετε ότι BA και ΓA είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Delta}B\Gamma$ και $\hat{E}\Gamma B$ αντίστοιχα.

β. Αν AZ είναι ύψος του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AD = AE = AZ$.

γ. Να αποδείξετε ότι $BA + \Gamma E = B\Gamma$.

Λύση

- α.** Είναι:
- $\hat{BA}\Gamma = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
 - $\hat{\Delta AB} = \hat{A\Gamma B}$ και $\hat{E\hat{A}\Gamma} = \hat{A\hat{B}\Gamma}$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης
- Οπότε:
- $\hat{\Delta BA} = 90^\circ - \hat{\Delta AB} = 90^\circ - \hat{A\Gamma B} = \hat{A\hat{B}\Gamma}$.
 - $\hat{E\Gamma A} = 90^\circ - \hat{E\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \hat{A\hat{B}\Gamma} = \hat{A\Gamma B}$



Επομένως η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta B\Gamma}$, και η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{E\Gamma B}$.

β. Η BA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta B\Gamma}$, οπότε $AD = AZ$.

Η ΓA είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{E\Gamma B}$, οπότε $AZ = AE$.

Άρα $AD = AE = AZ$.

γ. Επειδή $BA \perp \varepsilon$ και $\Gamma E \perp \varepsilon$, έχουμε $BA \parallel \Gamma E$, οπότε το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο.

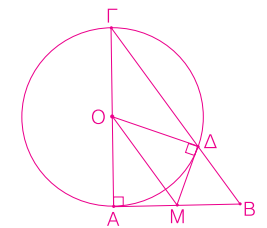
Επειδή το O είναι το μέσο του $B\Gamma$ και $OA \perp \varepsilon$, έχουμε $OA \parallel BA$.

Επομένως η OA είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

$$\text{Άρα } OA = \frac{BA + \Gamma E}{2} \Rightarrow BA + \Gamma E = 2OA \Rightarrow BA + \Gamma E = 2OB \Rightarrow BA + \Gamma E = B\Gamma.$$

448 Θέμα 4 - 1883

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓAB ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \hat{B}$

β. Το τρίγωνο $\hat{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές.

γ. Το M είναι το μέσο του AB .

Λύση

α. Είναι $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \hat{B}$, αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{A\hat{B}\Gamma}$.

Οπότε $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \hat{B}$.

β. Είναι:

- $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

$$\bullet \hat{M\hat{\Delta}B} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{O\hat{\Delta}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}, \text{ αφού το τρίγωνο } O\hat{\Delta}\Gamma \text{ είναι ισοσκελές}$$

Άρα $\hat{B} = \hat{M\hat{\Delta}B}$, οπότε το τρίγωνο $\hat{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές.

γ. Είναι:

- $MA = M\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα

$$\bullet MB = M\Delta, \text{ αφού το τρίγωνο } \hat{\Delta MB} \text{ είναι ισοσκελές}$$

Οπότε $MA = MB$, άρα το M είναι το μέσο του AB .

449 Θέμα 4 - 1768

Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB}$ ίση με 120° .

Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P . Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM .

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο.

β. $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$

γ. Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$;

Λύση

α. Στο τετράπλευρο $PAOB$ είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$. Οπότε

$\widehat{P} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Επιπλέον $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Άρα, το τρίγωνο PAB είναι ισόπλευρο.

β. Είναι $\widehat{AOB} = 120^\circ$ ή $\widehat{AMB} = 120^\circ$.

Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$ είναι ίσο με 240° .

Η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$.

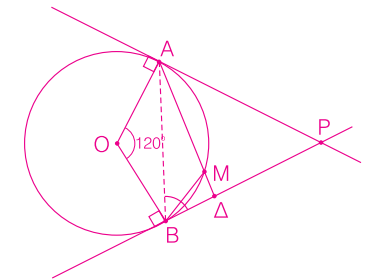
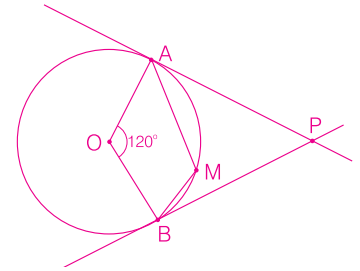
Τότε $\widehat{AMB} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$.

Στο τρίγωνο MAB έχουμε $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} + \widehat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MBA} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 60^\circ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ADB είναι $\widehat{B} = 60^\circ$ οπότε $\widehat{MAB} = 30^\circ$.

Από το ερώτημα **β.** προκύπτει ότι $\widehat{MBA} = 30^\circ$. Άρα $MA = MB$.

Επομένως $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το M είναι μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.


26. Εγγεγραμμένα και Εγγράψιμα τετράπλευρα
450 Θέμα 2 - 12643

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο E . Αν η γωνία A του τετραπλεύρου ισούται με 80° και η γωνία B ισούται με 110° , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α. το μέτρο της γωνία $E\Gamma B$.

β. το μέτρο της γωνία $BE\Gamma$.

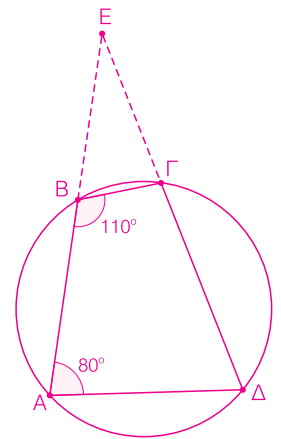
Λύση

α. Η γωνία $E\Gamma B$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\Gamma B = \widehat{A} = 80^\circ$.

β. Η γωνία $EB\Gamma$ είναι παραπληρωματική της $\widehat{B}$ του τετραπλεύρου, οπότε $EB\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Στο τρίγωνο $EB\Gamma$ έχουμε:

$\widehat{BE\Gamma} + \widehat{EB\Gamma} + \widehat{E\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE\Gamma} + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE\Gamma} = 30^\circ$.



451 Θέμα 2 - 13818

Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες A, B, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40^\circ$, $x + 20^\circ$, $3x$. Να υπολογίσετε :

α. πόσες μοίρες είναι το x .

β. τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση

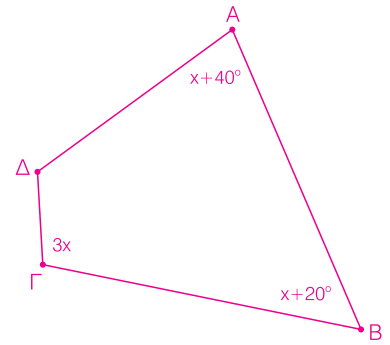
α. Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Άρα } \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow x + 40^\circ + 3x = 180^\circ \Leftrightarrow 4x = 140^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ.$$

$$\text{β. Εχουμε } \hat{A} = 35^\circ + 40^\circ = 75^\circ, \hat{B} = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ, \hat{\Gamma} = 3 \cdot 35^\circ = 105^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, άρα είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Οπότε } \hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 125^\circ.$$

**452 Θέμα 2 - 12641**

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 4 cm . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία APB ισούται με 60° .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας APB .

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OP .

Λύση

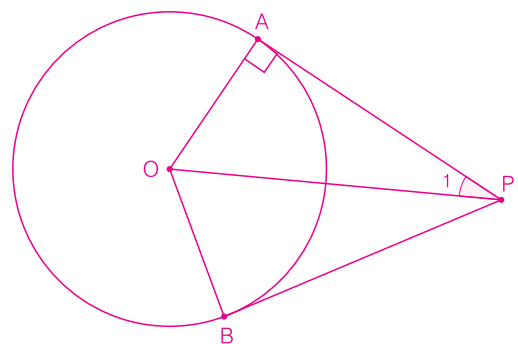
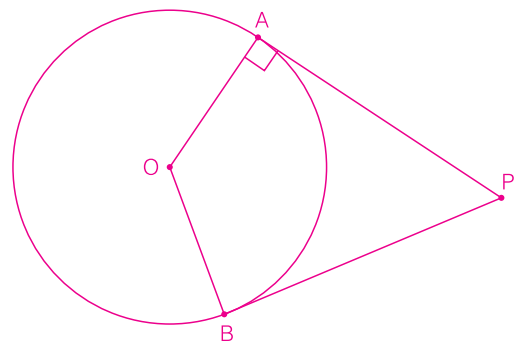
α. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής, οπότε $\hat{PAO} + \hat{PBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Επομένως το τετράπλευρο $PAOB$ είναι εγγράψιμο.

β. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων, άρα $\hat{APO} = \frac{\hat{APB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η γωνία $\hat{P}_1 = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

$$\text{Άρα } OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 2 \cdot OA \Leftrightarrow OP = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow OP = 8 \text{ cm}.$$

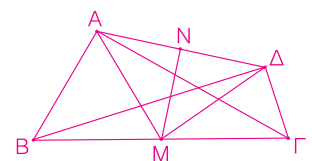
**453 Θέμα 4 - 1807**

Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $AM = M\Delta$

β. Η MN είναι κάθετη στην $A\Delta$.

γ. $\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{\Gamma \Delta A}$

Λύση

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$), $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta}=90^\circ$) οι AM , ΔM είναι διάμεσοι, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $AM = \Delta M$.

β. Στο ισοσκελές τρίγωνο $MA\Delta$, η MN είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, οπότε $MN \perp A\Delta$.

γ. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο, αφού $\hat{B}\hat{A}\Gamma = \hat{B}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$, οπότε η $B\Gamma$ φαίνεται από τις κορυφές A και Δ , υπό ίσες γωνίες. Άρα $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{\Gamma A\Delta}$.

454 Θέμα 4 - 1886

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta}=90^\circ$) (όπου A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$) και το μέσο M της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές

β. $\hat{AM\Delta} = 2 \cdot \hat{A\Gamma\Delta}$

γ. $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{\Gamma A\Delta}$

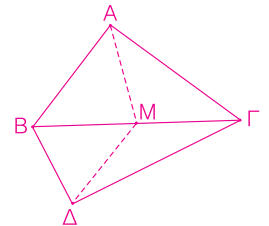
Λύση

α. Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta}=90^\circ$) οι AM , ΔM είναι διάμεσοι, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $AM = \Delta M$, οπότε το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο M . Οπότε $\hat{AM\Delta} = 2\hat{A\Gamma\Delta}$, αφού η $\hat{AM\Delta}$ είναι επίκεντρη και η $\hat{A\Gamma\Delta}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την $\hat{AM\Delta}$.

γ. Επειδή το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ είναι εγγράψιμο η πλευρά του $\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες.

Άρα $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{\Gamma A\Delta}$.



455 Θέμα 4 - 1847

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Έστω σημείο A εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ ώστε να ισχύει $\hat{B}\hat{A}\Gamma = 60^\circ$. Το OA τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ , τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο με $OA = 2OB$.

β. Το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.

γ. $2ZB = AZ$

δ. Το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

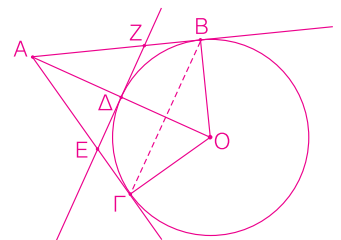
α. Είναι $OB \perp AB$ και $OG \perp A\Gamma$.

Επειδή $\hat{A}\hat{B}O + \hat{A}\hat{\Gamma}O = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, το $ABO\Gamma$ είναι εγγράψιμο. Η διακεντρική ευθεία AO είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\Gamma$, οπότε $\hat{B}\hat{A}O = \frac{\hat{B}\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABO είναι $\hat{B}\hat{A}O = 30^\circ$, άρα $OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2OB$.

β. Η ZE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ , άρα $ZE \perp O\Delta$.

Στο τρίγωνο AEZ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος.



Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{A} = 60^\circ$ είναι ισόπλευρο.

γ. Είναι $ZB = Z\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι $\hat{ZA\Delta} = 30^\circ$, οπότε $Z\Delta = \frac{AZ}{2} \Rightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Rightarrow 2ZB = AZ$.

δ. Η διακεντρική ευθεία AO είναι κάθετη στη χορδή $B\Gamma$, άρα $A\Delta \perp B\Gamma$.

Είναι $A\Delta \perp ZE$ και $A\Delta \perp B\Gamma$, οπότε $ZE \parallel B\Gamma$.

Άρα το $EZB\Gamma$ είναι τραπέζιο.

Είναι: • $EG = E\Delta$, ως εφαπτόμενα τμήματα

• $E\Delta = \Delta Z$, αφού το ύψος $A\Delta$ στο ισοσκελές τρίγωνο AEZ είναι και διάμεσος.

• $\Delta Z = ZB$, ως εφαπτόμενα τμήματα

Άρα $ZB = EG$, οπότε το $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

456 Θέμα 4 - 1892

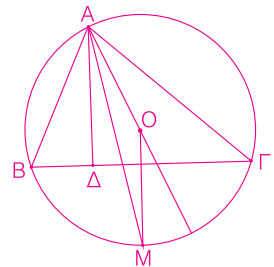
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O .

Θεωρούμε το μέσο M του κυρτογώνιου τόξου $B\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α. AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAO .

β. $\hat{OAG} = \hat{\Delta AB}$

γ. $\hat{\Delta AO} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$



Λύση

α. Είναι $A\Delta \perp B\Gamma$ και $OM \perp B\Gamma$, οπότε $A\Delta \parallel OM$.

Άρα $\hat{\Delta AM} = \hat{AMO}$, ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $OA = OM$, είναι $\hat{AMO} = \hat{MAO}$.

Οπότε $\hat{\Delta AM} = \hat{MAO}$, άρα η AM είναι η διχοτόμος της $\hat{\Delta AO}$.

β. Επειδή το M είναι το μέσο του $\widehat{B\Gamma}$ έχουμε $\hat{BAM} = \hat{MAG}$. Από το α. ερώτημα είναι $\hat{\Delta AM} = \hat{MAO}$, οπότε $\hat{BAM} - \hat{\Delta AM} = \hat{MAG} - \hat{MAO} \Rightarrow \hat{\Delta AB} = \hat{OAG}$.

γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB είναι $\hat{\Delta AB} = 90^\circ - \hat{B}$.

Είναι $\hat{\Delta AO} = \hat{\Delta A\Gamma} - \hat{OAG} = 90^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\Delta AB} = 90^\circ - \hat{\Gamma} - (90^\circ - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

457 Θέμα 4 - 1864

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (O, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔB να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία B είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές AB και $B\Gamma$ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη BA στο O , η οποία τέμνει τις πλευρές $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ στα E και Z αντίστοιχα.

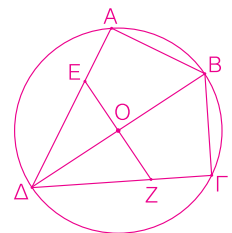
α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔAB και ΔGB .

γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma O$ είναι ρόμβος.

δ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABOE$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση



459 Θέμα 4 - 1799

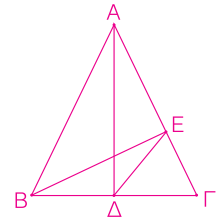
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $A\Delta$, BE τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α. $B\Gamma = 2E\Delta$

β. $\widehat{BE\Delta} = \frac{\widehat{A}}{2}$

γ. Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο.

δ. $\widehat{ABE} = \widehat{A\Delta E}$

**Λύση**

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BE\Gamma$ ($\widehat{E} = 90^\circ$), η $E\Delta$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Οπότε $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta$.

β. Είναι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \Delta B$.

Το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\widehat{BE\Delta} = \widehat{EB\Delta}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Gamma$, έχουμε $\widehat{EB\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EB\Delta} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{BE\Delta} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, έχουμε $\widehat{\Delta\Gamma A} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - \widehat{\Gamma}$.

Άρα $\widehat{BE\Delta} = \frac{\widehat{A}}{2}$.

γ. Το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο, αφού $\widehat{AEB} = 90^\circ = \widehat{A\Delta B}$.

δ. Επειδή το τετράπλευρο $AE\Delta B$ είναι εγγράψιμο, έχουμε $\widehat{ABE} = \widehat{A\Delta E}$.

460 Θέμα 4 - 1774

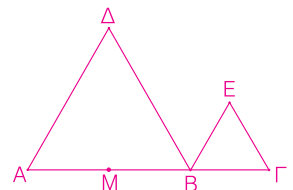
Έστω A, B, Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο M της AB . Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta B$, $BE\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο ($A\Delta \parallel BE$).

β. Τα τρίγωνα ΔMB , ΔEB είναι ίσα.

γ. Το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

**Λύση**

α. Έχουμε $\widehat{\Delta AB} = \widehat{EB\Gamma} = 60^\circ$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη, άρα $A\Delta \parallel BE$.

Οπότε το $A\Delta EB$ είναι τραπέζιο.

β. Είναι $\widehat{\Delta BM} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB έχουν:

- $MB = BE$
- ΔB κοινή
- $\widehat{\Delta BM} = \widehat{\Delta BE} (= 60^\circ)$

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

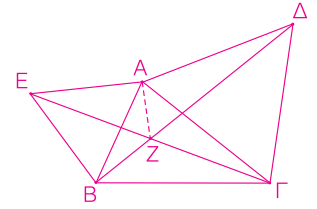
γ. Το ΔM είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο $A\Delta B$, οπότε είναι και ύψος του, άρα $\widehat{\Delta MB} = 90^\circ$.

Επειδή $\widehat{\Delta MB} = \widehat{\Delta EB}$, είναι ίσα έχουμε $\widehat{\Delta MB} = \widehat{\Delta EB} = 90^\circ$.

Είναι $\widehat{\Delta MB} + \widehat{\Delta EB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε το τετράπλευρο ΔMBE είναι εγγράψιμο.

461 Θέμα 4 - 1776

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB , $A\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Z το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων BA , ΓE . Να αποδείξετε ότι:



- α. Τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.
- β. Τα τετράπλευρα $AZ\Gamma\Delta$, $AZBE$ είναι εγγράψιμα.
- γ. Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120° .

Λύση

- α. Τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν:
- $AE = AB$
 - $A\Gamma = A\Delta$
 - $\hat{E}A\Gamma = \hat{\Delta}AB (= 60^\circ + \hat{B}A\Gamma)$

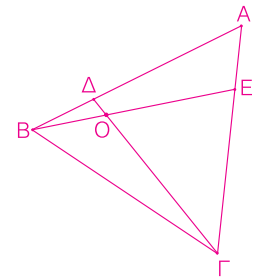
Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε $\hat{A}\Gamma E = \hat{A}\Delta B$ και $\hat{A}\epsilon\Gamma = \hat{A}B\Delta$.

- β. Επειδή:
- $\hat{A}\Gamma E = \hat{A}\Delta B$, το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.
 - $\hat{A}\epsilon\Gamma = \hat{A}B\Delta$, το $AZBE$ είναι εγγράψιμο

- γ. Είναι $\hat{B}Z\Gamma = \hat{E}Z\Delta = \hat{E}Z\Delta + \hat{A}Z\Delta = \hat{E}B\Delta + \hat{A}\Gamma\Delta = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

462 Θέμα 4- 1779

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε να είναι $A\Delta = \Gamma E$. Έστω O το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE .



- α. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{B}\epsilon\Gamma = \hat{\Gamma}\Delta A$
- ii. $\hat{B}O\Gamma = 120^\circ$

- β. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

- α. i. Τα τρίγωνα $B\epsilon\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν:
- $B\Gamma = A\Gamma$
 - $\Gamma E = A\Delta$
 - $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Οπότε είναι ίσα (ΠΓΠ), άρα $\hat{B}\epsilon\Gamma = \hat{\Gamma}\Delta A$.

- ii. Επειδή τα τρίγωνα $B\epsilon\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουμε $\hat{E}B\Gamma = \hat{O}\Gamma E$.

Στο τρίγωνο $O\Gamma E$ η $\hat{B}O\Gamma$ είναι εξωτερική, οπότε

$$\hat{B}O\Gamma = \hat{O}\Gamma E + \hat{O}\epsilon\Gamma \stackrel{i.}{=} \hat{E}B\Gamma + \hat{O}\epsilon\Gamma = 180^\circ - \hat{B}\Gamma E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

- β. Είναι:
- $\hat{\Delta}O\epsilon = \hat{B}O\Gamma = 120^\circ$

$$\bullet \hat{A} + \hat{\Delta}O\epsilon = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

Άρα το τετράπλευρο $AEO\Delta$ είναι εγγράψιμο.

463 Θέμα 4 - 14878

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο M εξωτερικό του.

Από το M φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία MB .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β. Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $AMBO$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να αποδείξετε ότι $BA \parallel M\Gamma$.

Λύση

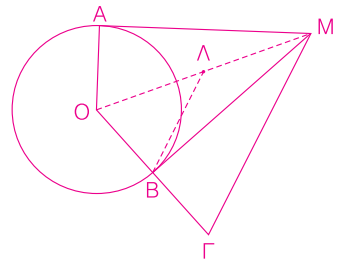
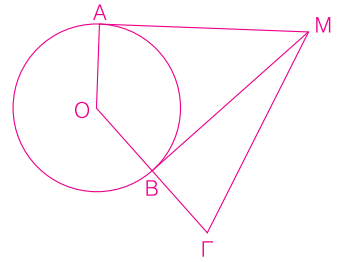
α. Είναι $OA \perp AM$ και $OB \perp BM$.

Οπότε $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα το τετράπλευρο $AMBO$ είναι εγγράψιμο.

β. Αφού $\hat{A} = 90^\circ$, η OM είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$.

Οπότε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετράπλευρου $AMBO$ είναι το μέσο του MO .

γ. Στο τρίγωνο $OM\Gamma$ τα σημεία B, Λ είναι μέσα των OG, OM , οπότε $BA \parallel M\Gamma$.

**464 Θέμα 4 - 13444**

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Η γωνία $\hat{\Delta}\Gamma x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Gamma x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\Delta\Delta = \frac{1}{2} \hat{A}\Gamma x$.

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.

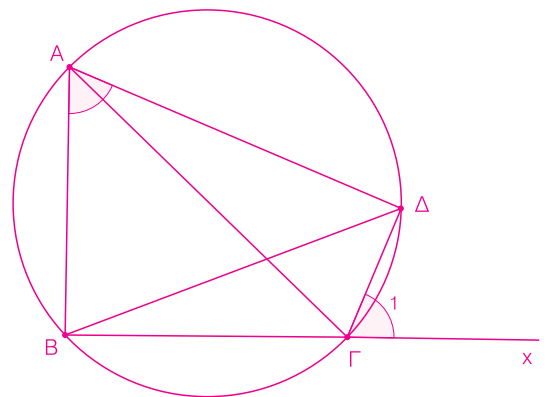
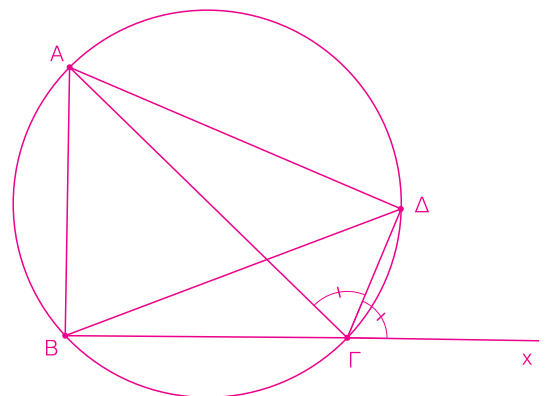
γ. Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{A}\Gamma B$ και $\hat{B}\Delta\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

Λύση

α. • Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$, είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}\Delta\Delta$, (1).

• Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Gamma x$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2} \hat{A}\Gamma x$, (2).

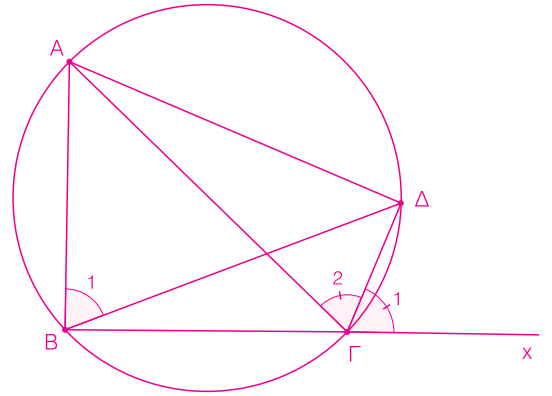
Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B}\Delta\Delta = \frac{1}{2} \hat{A}\Gamma x$, (3).



β. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$, (4), ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο AD .

Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\Gamma x$, άρα
 $\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\hat{A}\Gamma x \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{A}\Gamma x \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}_1$.

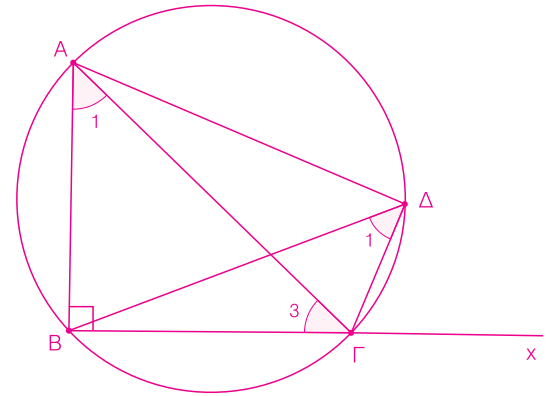
Οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta A$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\hat{B}\hat{A}\Delta$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα.



γ. • Αν η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε $\hat{AB}\Gamma = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{\Gamma}_3 + \hat{A}_1 = 90^\circ$, (5).

• Οι γωνίες $\hat{A}_1, \hat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $B\Gamma$, άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Οπότε $\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$, άρα οι γωνίες $\hat{A}\Gamma B$ και $\hat{B}\Delta\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.



465 Θέμα 4 - 13538

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.

β. Αν η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Z είναι το μέσο της AB .

ii. $\hat{E}\hat{A}\Gamma = \hat{E}\hat{Z}\Gamma$.

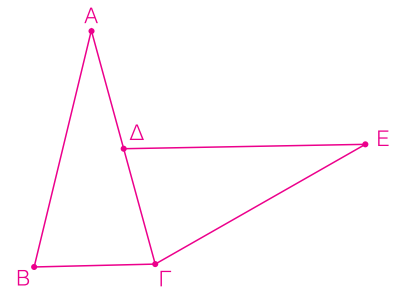
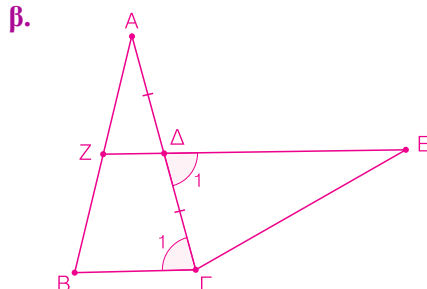
Λύση

α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $AB = E\Gamma$,
- $A\Gamma = E\Delta$,
- $B\Gamma = \Gamma\Delta$, γιατί $B\Gamma = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$.

Άρα είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

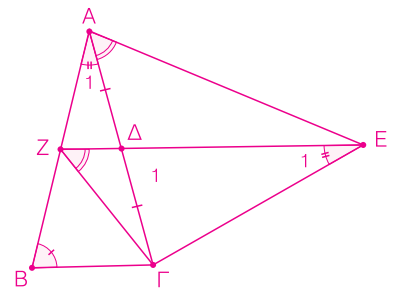
β.



i. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Οι $B\Gamma$ και ΔE τεμνόμενες από την $A\Gamma$ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_1$, άρα η $B\Gamma$ είναι παράλληλη στη ΔE .

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και η ΔZ είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, άρα το Z είναι το μέσο της AB .



ii. Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓZ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του A και E υπό ίσες γωνίες.

Οπότε στο εγγράψιμο $AE\Gamma Z$ η πλευρά ΓE φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του A και Z υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $\hat{E}\hat{A}\Gamma = \hat{E}\hat{Z}\Gamma$.

466 Θέμα 4 - 13521

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AA . Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $K\Lambda // B\Gamma$.

β. i. $M\Lambda = K\Lambda$

ii. $KM = \Delta\Lambda$.

γ. Το $K\Lambda M\Delta$ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το K είναι μέσο του AB και το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$, άρα $K\Lambda // B\Gamma$ (1).

β. i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$ και το M είναι μέσο του $B\Gamma$, άρα $\Lambda M = \frac{AB}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$, είναι $\Delta K = \frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΔK είναι διάμεσος προς την υποτεινούςά του.

Από (2) και (3) έχουμε $\Lambda M = \Delta K$. (4)

ii. Επειδή $K\Lambda // B\Gamma$ και οι $K\Delta$ και $M\Lambda$ δεν είναι παράλληλες, το $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή $KM = \Delta\Lambda$. (5)

γ. Τα σημεία Δ και M δεν ταυτίζονται γιατί αν ταυτίζονταν, τότε το ύψος AA θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα ήταν ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Άτοπο, αφού $AB < A\Gamma$.

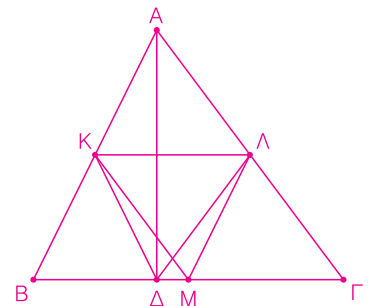
Το τραπέζιο $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές. Επομένως $K\Delta = M\Lambda$ (6) και $KM = \Delta\Lambda$.

Τα τρίγωνα $K\Delta\Lambda$ και $\Lambda M\Delta$ έχουν:

- $K\Delta = M\Lambda$
- $KM = \Delta\Lambda$
- $K\Lambda$ κοινή πλευρά

Άρα είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{K}\hat{M}\hat{\Lambda}$.

Επομένως το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά $K\Lambda$ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και M υπό ίσες γωνίες.



467 Θέμα 4 - 13670

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος BA . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AG , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα.

β. Το τετράπλευρο $ZA\Delta E$ είναι εγγράψιμο.

γ. Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

Λύση

α. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο προς την πλευρά AG και το Δ είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Επομένως, το Z θα είναι μέσο της πλευράς AB .

Τα τρίγωνα ABE και ΔBZ έχουν:

- $AB = B\Delta$, ως μισά του $B\Gamma$, αφού $B\Gamma = 2AB$ (υπόθεση) και $B\Gamma = 2B\Delta$ (το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$).
- $BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων BA και AB αντίστοιχα.

• $\hat{B}$ κοινή γωνία.

Άρα είναι ίσα (ΠΓΠ).

β. Από την ισότητα των τριγώνων ABE και $BZ\Delta$ προκύπτει ότι $\hat{BAE} = \hat{BZ\Delta}$ (1).

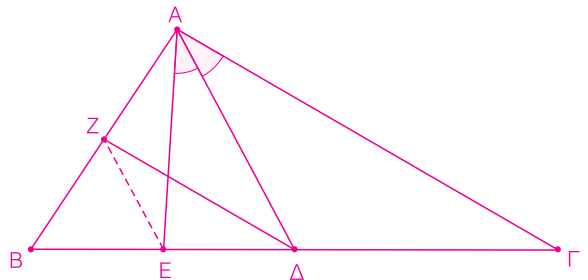
Το τετράπλευρο $ZA\Delta E$ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ZE φαίνεται από τις απέναντι κορυφές A και Δ υπό τις ίσες γωνίες $\hat{BAE}$ και $\hat{BZ\Delta}$ αντίστοιχα.

γ. Το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές με $AB = B\Delta$, οπότε $\hat{BA\Delta} = \hat{B\Delta A}$ (2).

Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{BA\Delta} - \hat{BAE} = \hat{B\Delta A} - \hat{BZ\Delta} \Leftrightarrow \hat{E\Delta A} = \hat{Z\Delta A}$$

Είναι $\hat{Z\Delta A} = \hat{\Delta A\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ, οπότε $\hat{E\Delta A} = \hat{\Delta A\Gamma}$, άρα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.



468 Θέμα 4 - 13671

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , AG , $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB . Να αποδείξετε ότι:

α. $HE = EG$ και $HZ = ZG$.

β. $\hat{Z\Delta E} = \hat{ZHE}$.

γ. Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο.

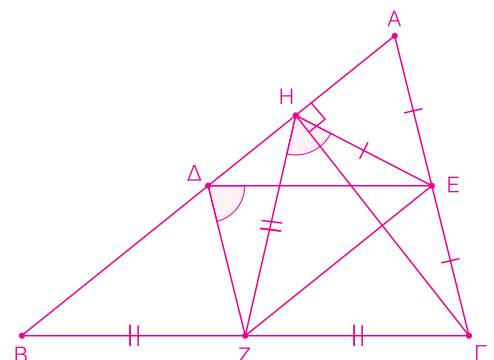
Λύση

α. • Στο ορθογώνιο τρίγωνο $HA\Gamma$ ($\hat{GHA} = 90^\circ$), η HE είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα AG , οπότε

$$HE = EG = EA = \frac{AG}{2}.$$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο $H\Delta B$ ($\hat{GHB} = 90^\circ$), η HZ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, οπότε

$$HZ = ZG = ZB = \frac{B\Gamma}{2}.$$



β. • Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα σημεία Δ και Z είναι μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Επομένως, $\Delta Z \parallel A\Gamma$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα, το τετράπλευρο $Z\Delta E\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις ΔZ και $E\Gamma$ ίσες και παράλληλες, οπότε

$$\hat{Z}\Delta E = \hat{E}\Gamma Z \quad (1).$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $HE\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}HE = \hat{H}\Gamma E$ (2), και στο ισοσκελές τρίγωνο $HZ\Gamma$ είναι $\hat{Z}H\Gamma = \hat{H}\Gamma Z$ (3).

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{Z}H\Gamma + \hat{\Gamma}HE = \hat{H}\Gamma Z + \hat{H}\Gamma E \Leftrightarrow \hat{Z}HE = \hat{E}\Gamma Z \quad (4).$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει ότι $\hat{Z}\Delta E = \hat{Z}HE$.

γ. Το τετράπλευρο $Z\Delta HE$ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ZE φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και H υπό τις ίσες γωνίες $\hat{Z}\Delta E$ και $\hat{Z}HE$ αντίστοιχα.

469 Θέμα 4 - 13840

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- α.** το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) .
- β.** η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO .
- γ.** το τετράπλευρο $AOBM$ είναι εγγράψιμο.
- δ.** το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

Λύση

α. Η ευθεία $x'x$ έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A , άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A , οπότε $OA \perp MA$.

Τα τρίγωνα MOB και MOA έχουν:

- MO , κοινή πλευρά
- $OB = OA$, ως ακτίνες του κύκλου (O, R)
- $MB = MA$

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα.

Οπότε $\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ$.

Άρα, το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R) .

β. Έστω $M\delta$ η διχοτόμος της γωνίας BMx , οπότε $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$.

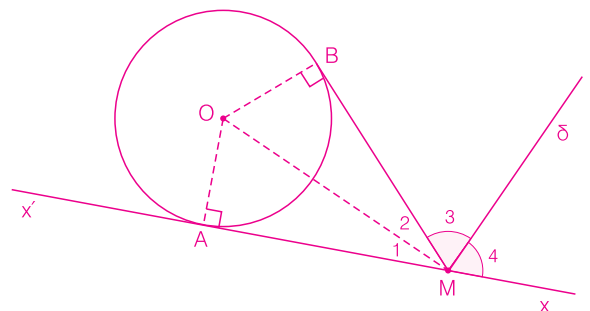
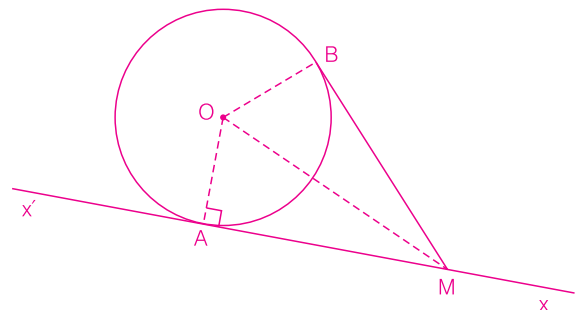
Τα τμήματα MA και MB είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα η MO είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$, οπότε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \hat{AMx} &= 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\hat{M}_2 + 2\hat{M}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{OM\delta} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Άρα η $M\delta$ είναι κάθετη στη MO .

γ. Στο τετράπλευρο $AOBM$ έχουμε $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, οπότε

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, οπότε το $AOBM$ είναι εγγράψιμο.



δ. Το ευθύγραμμο τμήμα OB και η διχοτόμος $M\delta$ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα OM . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° , οπότε το OB και η $M\delta$ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας OM που βρίσκονται οι γωνίες.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$.

Η γωνία $\widehat{BOM}$ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου OBM , οπότε $\widehat{BOM} < 90^\circ$.

Είναι $\widehat{OM\delta} = \widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} = \widehat{BOM} + 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ$, δηλαδή $\widehat{BOM} + \widehat{OM\delta} < 180^\circ$.

470 Θέμα 4 - 13847

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ . Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

- τα τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα.
- το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο.
- το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγράψιμο.
- οι γωνίες BMZ και BEZ είναι ίσες.

Λύση

α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ έχουν:

- $\Delta A = \Delta \Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- $AZ = \Gamma M$, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

β. Για να είναι το τετράπλευρο ΔMEZ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Έχουμε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_3}$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AZ και ΓM των ίσων τριγώνων ΔAZ και $\Gamma\Delta M$.

Άρα $\widehat{M\Delta Z} = \widehat{\Delta_2} + \widehat{\Delta_3} = \widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2} = 90^\circ$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔMEZ είναι ορθογώνιο.

Τα τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα, οπότε $\Delta Z = \Delta M$. Άρα το ορθογώνιο ΔMEZ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ. Για να είναι το τετράπλευρο $BZEM$ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widehat{ZBM} + \widehat{ZEM} = 180^\circ$.

Είναι $\widehat{ZBM} = 90^\circ$ και από το τετράγωνο ΔMEZ έχουμε $\widehat{ZEM} = 90^\circ$.

Άρα $\widehat{ZBM} + \widehat{ZEM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

δ. Επειδή το τετράπλευρο $BZEM$ είναι εγγράψιμο η πλευρά BZ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του M και E υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{BMZ} = \widehat{BEZ}$.

