

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε την ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (μονάδες 15)

A2. Να χαρακτηρίσετε ως «ΣΩΣΤΕΣ» ή «ΛΑΘΟΣ» τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

β. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι πάντα εξίσωση δευτέρου βαθμού.

γ. Ισχύει $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[m]{\alpha} = \sqrt[n+m]{\alpha}$, όπου $\alpha \geq 0$ και m, n θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

δ. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

ε. Το άθροισμα των n -πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου, με πρώτο όρο α_1

και διαφορά ω , υπολογίζεται από τον τύπο $S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$ (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 7x - 4 = 0$ (μονάδες 12)

B2. Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - 7x - 4 \leq 0$. (μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Μια κερκίδα ενός γηπέδου έχει 20 σειρές καθισμάτων. Αν η πρώτη (κάτω) σειρά έχει 16 καθίσματα, η 16^η σειρά έχει 106 καθίσματα και οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των καθισμάτων από σειρά σε σειρά αυξάνεται κατά 6. (μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της 20^{ης} σειράς (μονάδες 7)

και το πλήθος όλων των καθισμάτων της κερκίδας. (μονάδες 7)

Γ3. Κατά τη διάρκεια ενός αγώνα, οι θεατές που κάθισαν στη συγκεκριμένη κερκίδα άφησαν ένα (1) κενό καθίσμα στην πρώτη σειρά, οκτώ (8) κενά καθίσματα στη δεύτερη, δεκαπέντε (15) κενά στην τρίτη κλπ.

Από ποια σειρά και μετά όλα τα καθίσματα είναι κενά; (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ και $B = \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $A = 2$ και $B = 3\sqrt{2}$. (μονάδες 8)

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^3}{4} = \frac{1}{A - \sqrt{A}} + \frac{1}{A + \sqrt{A}}$ (μονάδες 6)

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $|x - A^3| \geq B^2$ (μονάδες 6)

Δ4. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $K = A \cdot x - \frac{B}{\sqrt{2}} \cdot y$. (μονάδες 5)

....., 24 Μαΐου 2016

Ο Διευθυντής

Οι Εισηγητές

.....

.....

.....

Εναλλακτικά Προτεινόμενα Θέματα:

ΘΕΜΑ Β

Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) με $a_1 = 2$, το άθροισμα των πρώτων 10 όρων είναι 200. Να βρείτε:

B1. Τη διαφορά ω της προόδου. (μονάδες 8)

B2. Τον εικοστό όρο της προόδου και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (μονάδες 8)

B3. Για ποιες τιμές του n ισχύει ότι: $|S_n - 55| = 73$. (μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$, με $\lambda \neq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ , η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (μονάδες 6)

Γ2. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών συναρτήσει της παραμέτρου λ . (μονάδες 5)

Γ3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης:

α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) \leq -4$ (μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , ώστε $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = -4$ (μονάδες 7)

Απαντήσεις Θεμάτων Άλγεβρας Α Λυκείου – Μάιος 2016

Θέμα Α

A1) Επειδή $|\alpha \cdot \beta|, |\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$ έχουμε:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$$

που ισχύει.

A2) α: Σωστό

β: Λάθος

γ: Λάθος

δ: Σωστό

ε: Λάθος

Θέμα Β

B1) Έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0$$

άρα έχουμε δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

B2) Ο πίνακας προσήμων του τριωνύμου είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$	
$2x^2 - 7x + 4$	+	0	-	0	+

άρα $2x^2 - 7x + 4 \leq 0$ όταν $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Θέμα Γ

Γ1) Οι αριθμοί καθισμάτων των σειρών αποτελούν αριθμητική πρόοδο με

$a_1 = 16$ και $a_{16} = 106$. Έχουμε:

$$a_{16} = 106 \Rightarrow a_1 + (16-1)\omega = 106 \Rightarrow 16 + 15\omega = 106 \Rightarrow 15\omega = 90 \Rightarrow \omega = 6$$

δηλαδή το πλήθος των καθισμάτων από σειρά σε σειρά αυξάνεται κατά 6.

Γ2)

$$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot \omega = 16 + 19 \cdot 6 = 130$$

και

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20}) = 10 \cdot (16 + 130) = 1460$$

ή εναλλακτικά

$$S_{20} = \frac{20}{2} \cdot [2a_1 + (20-1) \cdot \omega] = 10 \cdot [2 \cdot 16 + 19 \cdot 6] = 1460$$

Γ3) Η $1^{\text{η}}$ σειρά έχει $16-1=15$ κατελιμμένα καθίσματα,
 η $2^{\text{η}}$ σειρά έχει $16+6-8=14$ κατελιμμένα καθίσματα,
 η $3^{\text{η}}$ σειρά έχει $16+2\cdot 6-15=13$ κατελιμμένα καθίσματα κοκ
 Άρα ο αριθμός των κατελιμμένων καθισμάτων είναι μία νέα αριθμητική πρόοδος,
 έστω (β_v) , με $\beta_1=15$ και $\omega=14-15=-1$.

Είναι

$$\beta_v > 0 \Rightarrow \beta_1 + (v-1) \cdot \omega > 0 \Rightarrow 15 + (v-1) \cdot (-1) > 0 \Rightarrow -v + 16 > 0 \Rightarrow v < 16.$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι σειρές κάτω από τη $16^{\text{η}}$ έχουν κατελιμμένα καθίσματα.
 Άρα από τη $16^{\text{η}}$ σειρά και μετά, όλα τα καθίσματα είναι κενά.

Θέμα Δ

Δ1) $A = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

και

$$B = \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Δ2) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{A-\sqrt{A}} + \frac{1}{A+\sqrt{A}} &= \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})} + \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2}) \cdot (2-\sqrt{2})} = \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2} &= \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} + \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2} = 2 \end{aligned}$$

άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{x^3}{4} = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = +\sqrt[3]{8} = 2.$$

Δ3) $A^3 = 2^3 = 8$ και

$$B^2 = (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

άρα

$$|x-8| \geq 18 \Leftrightarrow x-8 \geq 18 \text{ ή } x-8 \leq -18 \Leftrightarrow x \geq 26 \text{ ή } x \leq -10.$$

Δ4) Είναι

$$K = Ax - \frac{B}{\sqrt{2}}y = 2x - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}y = 2x - 3y.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2 \leq x \leq 3 &\Rightarrow 2 \cdot 2 \leq 2 \cdot x \leq 2 \cdot 3 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 6 \\ 1 \leq y \leq 2 &\Rightarrow -3 \cdot 1 \geq -3 \cdot y \geq -3 \cdot 2 \Rightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} (+) \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + (-6) \leq 2x + (-3y) \leq 6 + (-3) \Rightarrow -2 \leq 2x - 3y \leq 3$$