Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα προαγωγικών εξετάσεων
στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0, a\neq 0$

Να αποδείξετε ότι $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$,$P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ (x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης)

15 μονάδες

Β. Να σημειώσετε στην κόλλα σας ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς .

i) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $\alpha^2>0, \alpha\neq 0$

ii) για κάθε x∈R ισχύει $|x|\leq x$

iii) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$ για κάθε $\alpha\geq 0$

iv) Αν α,β<0 τότε $\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{\beta}$

v) Κέντρο ενός διαστήματος $[\alpha,\beta]$ λέγεται ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

10 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $x^2+y^2-2x+4y+5\leq 0$ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει :

- $3\leq\alpha\leq 5$ (1)
- $4\leq\beta\leq 6$ (2) .

α. Να αποδείξετε ότι :

i) $(x-1)^2+(y+2)^2=x^2+y^2-2x+4y+5$

ii) $x=1$ και $y=-2$.

(8 μονάδες)

β. Να γραφούν οι ανισώσεις (1) και (2) υπό μορφή διαστήματος.

(8 μονάδες)

γ. Να δείξετε ότι :

i) $12\leq a\cdot\beta\leq 30$

(5 μονάδες)

ii) $25\leq 3a+4\beta\leq 39$

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-5|x|+4$ και $g(x)=-|x|+1$

i) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(8 μονάδες)

ii) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

(8 μονάδες)

iii)Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2-4x-2015, \lambda\neq 0$

Α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,-2018)

i) να δείξετε ότι λ=1.

6 μόρια

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq -2x-2012$.

6 μόρια

iii) Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{2-\sqrt{f(3)+2021}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{f(3)+2021}}=4$.

6 μόρια

Β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$,να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει

$$-\lambda\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-\frac{\lambda^2}{2015^2}\geq 4$$

7 μόρια

-Ο-
Δ/ ΝΤΗΣ

-ΟΙ-
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία
Β. ΣΛΛΛΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α. i) $(x-1)^2+(y+2)^2=x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+y^2-2x+4y+5$

ii) $x^2+y^2-2x+4y+5\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 0$.

Αλλά $(x-1)^2+(y+2)^2\ge 0$ οπότε $(x-1)^2+(y-1)^2=0$ δηλαδή $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ και $y+2=0\Leftrightarrow y=-2$

β. $\alpha\in[3,5]$ και $\beta\in[4,6]$

γ. $3\le\alpha\le 5$ (1)

$4\le\beta\le 6$ (2).

i) Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1),(2) έχουμε τη ζητούμενη σχέση $12\le\alpha\cdot\beta\le 30$

ii) $3\le\alpha\le 5\overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow}9\le 3\alpha\le 15$ (3)

$4\le\beta\le 6\overset{(\cdot 4)}{\Leftrightarrow}16\le 4\beta\le 24$(4)

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (3) έχουμε τη ζητούμενη σχέση $25\le 3a+4\beta\le 39$.

ΘΕΜΑ3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-5|x|+4$ και $g(x)=-|x|+1$

i) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-5|x|+4=0\Leftrightarrow |x|^2-5|x|+4=0\Leftrightarrow (|x|-1)\cdot(|x|-4)\Leftrightarrow$ $(|x|-1=0\Leftrightarrow |\text{x}|=1\Leftrightarrow x=\pm 1)$ ή $(|x|-4=0\Leftrightarrow |\text{x}|=4\Leftrightarrow x=\pm 4)$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ είναι τα
.

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y έχουν τετμημένη 0 οπότε $f(0)=4$ και το ζητούμενο σημείο τομής είναι το (0,4)

ii) Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x λύνουμε την ανίσωση $g(x)<0\Leftrightarrow -|x|+1<0\Leftrightarrow |x|>1\Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1$

Άρα $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

iii) Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-5|x|+4=-|x|+1\Leftrightarrow x^2-4|x|+3=0\Leftrightarrow |x|^2-4|x|+3=0\Leftrightarrow$

$(|x|-1)\cdot(|x|-3)=0\Leftrightarrow(|x|-1=0\Leftrightarrow |\text{x}|=1\Leftrightarrow x=\pm 1)$ ή $(|x|-3=0\Leftrightarrow |\text{x}|=3\Leftrightarrow x=\pm 3)$

$g(1)=0=f(1)$

$g(-1)=0=f(-1)$

$g(3)=-3+1=-2=f(3)$

$g(-3)=-3+1=-2=f(-3)$

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $(-1,0),(1,0)(-3,-2),(3,-2)$

ΘΕΜΑ 4ο

Α) i) Αφού το σημείο Α(1,-2018) ανήκει στη γραφική παράσταση της f οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της δηλαδή

$$f(1)=-2018 \Leftrightarrow \lambda\cdot 1^2-4\cdot 1-2015=-2018 \Leftrightarrow \lambda-4-2015=-2018 \Leftrightarrow \lambda=1$$

να δείξετε ότι λ=1.

ii) $f(x)=x^2-4x-2015$

$f(x)\le 2x-2012 \Leftrightarrow x^2-4x-2015\le -2x-2012 \Leftrightarrow x^2-2x-3\le 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-2x-3 είναι οι αριθμοί -1 και 3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης βρίσκονται στο διάστημα $(-1,3)$

iii) $f(3)=3^2-4\cdot 3-2015=9-12-2015=-2018$

$$\frac{1}{2-\sqrt{f(3)+2021}}+\frac{1}{2+\sqrt{f(3)+2021}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=$$

$$\frac{2+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{4}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{4}{4-3}=4$$

Β) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=4$ και $\mathrm{P}=x_1\cdot x_2=\dfrac{2015}{\lambda}$

$$-\lambda\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-\frac{\lambda^2}{2015^2}\ge 4 \Leftrightarrow -\lambda\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}-\frac{\lambda^2}{2015^2}\ge 4 \Leftrightarrow -\cancel{\lambda}\cdot\frac{4}{\frac{2015}{\cancel{\lambda}}}-\frac{\lambda^2}{2015^2}\ge 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\lambda}{2015}-\frac{\lambda^2}{2015^2}\ge 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{2015}\right)^2-4\cdot\frac{\lambda}{2015}+4\le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{2015}-2\right)^2\le 0$$

Άρα $\dfrac{\lambda}{2015}=2 \Leftrightarrow \lambda=4030$