

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα προαγωγικών εξετάσεων
στην Άλγεβρα και τα Στοιχεία Πιθανοτήτων

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:
 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

(10 μονάδες)

B. Να δώσετε τον ορισμό της n -οστής ρίζας, $\sqrt[n]{\alpha}$, ενός μη αρνητικού αριθμού α .

(5 μονάδες)

Γ. Να σημειώσετε στην κόλλα σας ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς.

i) Για $\alpha \geq 0$ ισχύει: $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, όπου $n \geq 2$ και $n \in \mathbb{N}$.

ii) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $|\alpha| + \alpha = 0$, τότε $\alpha \geq 0$.

iii) Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

iv) Η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$ είναι αόριστη για $\alpha = 0$ και $\beta < 0$

v) Αν $a \cdot b \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Για τον αριθμό $P(A)$ ισχύει: $|3 + 2P(A)| - |P(A) - 1| = 3$, ενώ ο αριθμός $P(B)$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $6x^2 - x - 1 = 0$.

A. Να βρείτε τους αριθμούς $P(A)$ και $P(B)$

(10 μονάδες)

Αν $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B είναι $\frac{1}{6}$, να υπολογίσετε:

B. Την πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A και B

(7 μονάδες)

Γ. Την πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένα από τα A και B

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1$.

A. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$, να έχει πραγματικές ρίζες.

(10 Μονάδες)

B. Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα;

(5 Μονάδες)

Γ. Να γράψετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης.

(5 Μονάδες)

Δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{3|S|}{2} - |P| < 4$.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - 4x + 3}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, να απλοποιήσετε τον τύπο της και να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{3}{x - 1}$.

(7 μονάδες)

B. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)} > 0$.

(7 μονάδες)

Γ. Να δείξετε ότι:

i) $f(2) = 3$

ii) $\sqrt[3]{f(2)} \cdot \sqrt{f(2)} = \sqrt{f(2)}$.

(6 μονάδες)

Δ. Να μετατρέψετε σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή την παράσταση:

$$\frac{1}{\sqrt{f(2)} - 1} + \frac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)} + 1}.$$

(5 μονάδες)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}$$

B. Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α .

Γ. i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Επειδή $0 \leq P(A) \leq 1$, είναι $3 + 2P(A) > 0$ και $P(A) - 1 \leq 0$, άρα

$$|3 + 2P(A)| - |P(A) - 1| = 3 \Leftrightarrow 3 + 2P(A) + P(A) - 1 = 3 \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Η εξίσωση $6x^2 - x - 1 = 0$ έχει $\Delta = 25$ και ρίζες $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{1}{3}$

Επειδή το $P(B)$ είναι ρίζα της εξίσωσης και $0 \leq P(B) \leq 1$ είναι $P(B) = \frac{1}{2}$

B. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Γ. Το ενδεχόμενο να συμβεί το πολύ ένα από τα A και B είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου να συμβούν και τα δύο ενδεχόμενα A και B , δηλαδή είναι το

$$(A \cap B)', \text{ με } P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4(-\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda - 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες όταν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 \geq 0$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 16$ και ρίζες 1 και -3. Κάνοντας το πίνακα προσήμων του έχουμε:

λ	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$\lambda^2 + 2\lambda - 3$		+	-	+

$$\text{Άρα } \lambda^2 + 2\lambda - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

B. Το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ ή $\lambda = 1$

Γ. $S = \lambda - 1$ και $P = -\lambda + 1$

$$\Delta. \frac{3|S|}{2} - |P| < 4 \Leftrightarrow \frac{3|\lambda-1|}{2} - |-\lambda+1| < 4 \Leftrightarrow \cancel{2} \frac{3|\lambda-1|}{\cancel{2}} - 2|\lambda-1| < 8 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda-1| < 8 \Leftrightarrow -8 < \lambda-1 < 8 \Leftrightarrow -7 < \lambda < 9$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες 1 και 3, άρα $x \neq 1$ και $x \neq 3$, οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{3x-9}{x^2-4x+3} = \frac{3(\cancel{x-3})}{(x-1)(\cancel{x-3})} = \frac{3}{x-1}$$

B. Είναι $\frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{3}$, οπότε:

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f^2(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{9} > 0 \Leftrightarrow$$

$$9\frac{x-1}{3} + 9\frac{(x-1)^2}{9} > 0 \Leftrightarrow 3(x-1) + (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(3+x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

x	$-\infty$	- 2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$		+	-	+

Γ. i) $f(2) = \frac{3}{2-1} = 3$

ii) $\sqrt[3]{f(2)} \cdot \sqrt{f(2)} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \sqrt{f(2)}$

$$\Delta. \frac{1}{\sqrt{f(2)}-1} + \frac{\sqrt{f(2)}}{\sqrt{f(2)}+1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} =$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}^2-1} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}^2-1} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}+1+\sqrt{3}^2-\cancel{\sqrt{3}}}{3-1} = \frac{1+3}{2} = 2$$