

Πάυλος Παλαιολόγου

Άλγεβρα Α' Λυκείου Γενικής Παιδείας



Αγαπητοί μαθητές.

αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα χρήσιμο βοήθημα στην ύλη της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, που είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα, καθώς περιέχει απαραίτητες γνώσεις για τις επόμενες τάξεις του Λυκείου.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει :

- Βασική Θεωρία
- Μεθοδολογίες και σχόλια
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Θέματα ανά ενότητα, από την τράπεζα θεμάτων (2025)

Καλή μελέτη

Παύλος Παλαιολόγου

Σεπτέμβριος 2025

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε1. ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ.....	4
Ε2. ΣΥΝΟΛΑ.....	7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ.....	13
2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ	22
2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.....	30
2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.....	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	49
3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^y = a$	58
3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	59

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	74
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2 ^ο Υ ΒΑΘΜΟΥ.....	87
4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ.....	104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : ΠΡΟΟΔΟΙ

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.....	108
5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	111
5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	124

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	133
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	144
6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + b$	172

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο : ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2$	192
7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \frac{a}{x}$	194
7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2 + bx + c$	197

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

(Πηγή : Σχολικό Βιβλίο Άλγεβρα Α΄ Λυκείου)

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.

Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β . Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός « $\alpha = \beta$ » είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός « $\alpha^2 = \beta^2$ » θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός « $\alpha = \beta$ » συνεπάγεται τον ισχυρισμό « $\alpha^2 = \beta^2$ » και γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Rightarrow Q$ » λέγεται *συνεπαγωγή* και πολλές φορές διαβάζεται «αν P , τότε Q ». Ο P λέγεται *υπόθεση* της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται *συμπέρασμα* αυτής⁽¹⁾.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \quad (1)$$

και

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α , β και γ .

Παρατηρούμε ότι:

- ✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2 = 3^2$, ενώ $-3 \neq 3$.
- ✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι και γράφουμε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P , να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q , να αληθεύει και ο P , τότε λέμε ότι ο P **συνεπάγεται τον Q** και **αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι ο P είναι **ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Leftrightarrow Q$ » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται « P αν και μόνο αν Q ».

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P ή Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός « P ή Q » λέγεται **διάζευξη** των P και Q .

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

- ✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ
- ✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός « P και Q » λέγεται **σύζευξη** των P και Q .

Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x-1) = 0 \text{ και } (x-1)(x+1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

(Πηγή : Σχολικό Βιβλίο Άλγεβρα Α΄ Λυκείου)

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.

Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.

Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**.

Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- ✓ με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και
- ✓ με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A , γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A », ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A ». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \quad -2 \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο B των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{n}$, όπου n θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου $x > 0$ ».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα I , τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα I ».

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1, 2\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο B έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το A . Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα.

Γενικά

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:

«Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A ».

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A=B$.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \quad \text{και} \quad B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B .

Γενικά

Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

- i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A .
- ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
- iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A=B$.

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{\}$.

Δηλαδή:

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

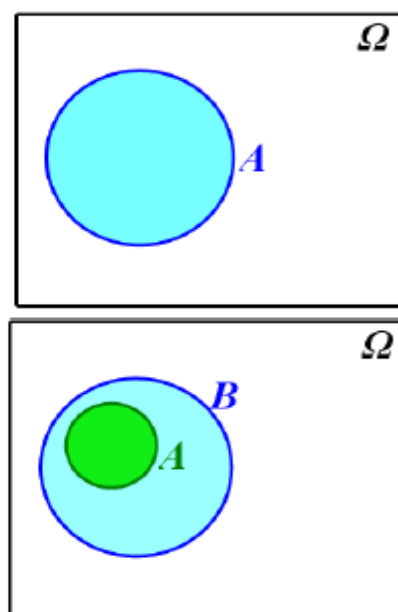
Διαγράμματα Venn

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω . Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

- Αν $A \subseteq B$, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το B .



Πράξεις με σύνολα

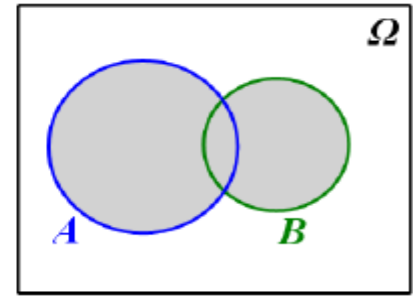
Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{και} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

- Το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B , δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα A και B λέγεται ένωση των συνόλων A και B .

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$.



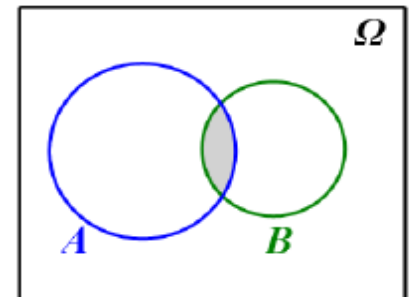
Δηλαδή είναι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- Το σύνολο $\{3, 4\}$ που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των A και B λέγεται τομή των A και B .

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$



Δηλαδή είναι:

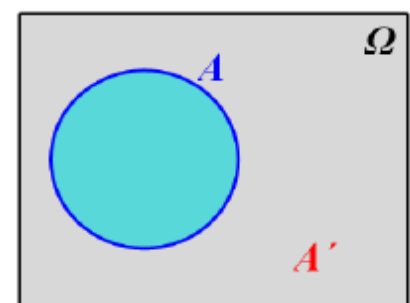
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- Το σύνολο $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A , λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου A .

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' .



Δηλαδή είναι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- I. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο “✓” εκείνα τα τετραγώνια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.
 2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγώνια μόνο της τελευταίας γραμμής;
 3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

- II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 24\}$, τότε:
 α) $A \cup B = \dots\dots\dots$ β) $A \cap B = \dots\dots\dots$
 2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του
 $A = \{x \in \Omega \mid x \text{ φωνήεν}\}$ και $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ σύμφωνο}\}$.

Τότε:

- α) $A \cup B = \dots\dots\dots$ β) $A \cap B = \dots\dots\dots$ γ) $A' = \dots\dots\dots$ δ) $B' = \dots\dots\dots$

- III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα A και B. Τότε:
 α) $A \subseteq A \cap B$ β) $B \subseteq A \cap B$ γ) $A \cap B \subseteq A$ δ) $A \cap B \subseteq B$
 2. Έστω δύο σύνολα A και B. Τότε:
 α) $A \subseteq A \cup B$ β) $A \cup B \subseteq B$ γ) $A \cup B \subseteq A$ δ) $A \cup B \subseteq B$

- IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, $\emptyset$ το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Τότε:
 α) $\emptyset' = \dots\dots\dots$ β) $\Omega' = \dots\dots\dots$ γ) $(A')' = \dots\dots\dots$
 2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε
 α) $A \cap B = \dots\dots\dots$ β) $A \cup B = \dots\dots\dots$

2.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- **Ρητός** ονομάζεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Ρητοί αριθμοί: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} / \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \right\}, \lambda \neq 0$.

Έτσι π.χ. οι αριθμοί $\frac{3}{4}, -\frac{5}{12}$ κτλ. είναι ρητοί. Όμως και όλοι οι ακέραιοι μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος π.χ. $3 = \frac{3}{1}$. Άρα και οι ακέραιοι ανήκουν στους ρητούς.

- **Άρρητοι** λέγονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν στη μορφή κλάσματος. Τέτοιοι αριθμοί είναι αυτοί που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη επαναλαμβανόμενα όπως οι ρίζες των μη τέλειων τετραγώνων π.χ. $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$ ή όπως το $\pi = 3,14 \dots$

Άρρητοι αριθμοί: $\mathbb{Q}' = \{ \dots, -\sqrt{2}, \dots, \pi, \dots, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{5}, \dots \}$

- **Πραγματικοί** είναι το σύνολο των αριθμών που αποτελείται από τους ρητούς και από τους άρρητους. Πραγματικοί αριθμοί: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

- **Πράξεις και Ιδιότητες**

Αντιμεταθετική: $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha$

Προσεταιριστική: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

Ουδέτερο Στοιχείο: Πρόσθεση: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, Πολλαπλασιασμός: $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Αντίθετο και Αντίστροφο Στοιχείο:

- $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$, οι αριθμοί α και $-\alpha$ λέγονται αντίθετοι.
- $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, οι αριθμοί α και $\frac{1}{\alpha}$, με $\alpha \neq 0$ λέγονται αντίστροφοι.

Επιμεριστική: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

- **Οι Πράξεις της Αφαίρεσης και της Διάρθρωσης**

Ονομάζουμε διαφορά του β από το α δηλαδή: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. (Αφαίρεση είναι η πρόσθεση του αντιθέτου)

Ονομάζουμε πηλίκο του α δια β δηλαδή $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$. (Διαίρεση είναι ο πολλαπλασιασμός του αντιστρόφου)

➤ **Πρόσθεση – Πολλαπλασιασμός Κατά Μέλη**

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$

➤ **Νόμος Διαγραφής**

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$

➤ **Ιδιότητα Γινομένου**

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ ή }, \beta = 0$$

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \text{ και }, \beta \neq 0$$

➤ **Δυνάμεις**

Αν α πραγματικός αριθμός και n φυσικός τότε:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n-\phiορες}, \alpha^1 = \alpha, \alpha^0 = 1 (\alpha \neq 0), \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

Αν n περιττός: $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν n άρτιος: $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

$$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}, \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}, (\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}, (\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$$

➤ **Ταυτότητες**

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

➤ Ιδιότητα : $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ ή }, \beta = 0$

$$\text{π.χ. } (6-3x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 6-3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{ή } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

➤ Όταν έχουμε $\alpha\beta = \alpha\gamma$, χωρίς περιορισμό για το α , τότε :

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \gamma$$

$$\text{π.χ. } x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

➤ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ και }, \beta = 0$

➤ $(-\alpha - \beta)^2 = [-(\alpha + \beta)]^2 = (\alpha + \beta)^2$ δηλ. $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$

➤ $(-\alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$

➤ $(-\alpha - \beta)^3 = [-(\alpha + \beta)]^3 = -(\alpha + \beta)^3$

➤ $(-\alpha + \beta)^3 = (\beta - \alpha)^3$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων. Τα εργαλεία της παραγοντοποίησης είναι :

➤ ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

1. ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ π.χ.1 $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$,

π.χ.2 $x(x-3) - 2(3-x) = x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2)$

2. ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ π.χ.2 $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2 + 5)$

➤ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x-1)(4x+1)$

ii) $(3x-1)^2 - 81 = (3x-1)^2 - 9^2 = (3x-1-9)(3x-1+9) = (3x-10)(3x+8)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Δίνεται η παράσταση : $A = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4 \right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3}$

i. Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$

- ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$

Λύση:

$$i. A = \left[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4 \right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3} = (x^{-4} \cdot y^{-6} \cdot x^4 \cdot y^{12}) : \frac{x^{-9}}{y^3} = (x^{-4+4} \cdot y^{-6+12}) \cdot \frac{y^3}{x^{-9}} =$$

$$x^0 \cdot y^6 \cdot y^3 \cdot \frac{1}{x^{-9}} = y^9 \cdot x^9 = x^9 \cdot y^9$$

- ii. Έχω $A = x^9 \cdot y^9 = (x \cdot y)^9$ αν $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$ τότε :

$$A = \left(2010 \cdot \frac{1}{2010} \right)^9 = 1^9 = 1$$

2. (Άσκηση 4 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

- i. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2$

Λύση:

- i. Ένας τρόπος για να αποδείξω μια ισότητα είναι να ξεκινήσω από το ένα μέλος και με διαδοχικές ισότητες να καταλήξω στο άλλο :

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 =$$

$$= 2\alpha\beta + 2\alpha\beta = 4\alpha\beta$$

- ii. Από i. έδειξα ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$, άρα αν $\alpha = \frac{999}{1000}$ και $\beta = \frac{1000}{999}$ τότε :

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2 = 4 \frac{999}{1000} \frac{1000}{999} = 4$$

3. (Άσκηση 6 σελ. 52 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών ακεραίων (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους.

Λύση: Έστω n ένας φυσικός ακέραιος, τότε ο $n+1$ είναι ο επόμενος φυσικός ακέραιος. Για να δείξω ότι η διαφορά των τετραγώνων τους (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους αρκεί να δείξω ότι :

$$(n+1)^2 - n^2 = n + (n+1) \Leftrightarrow (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

Ξεκινώ από το πρώτο μέλος και έχω : $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ άρα ισχύει.

4. (Άσκηση 1 σελ. 53 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i.
$$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$$

ii.
$$\frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$$

Λύση :

- i. Για να απλοποιήσω ένα κλάσμα, θα πρέπει πρώτα να παραγοντοποιήσω αριθμητή και παρονομαστή :

$$\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} = \alpha - 1$$

$$\text{ii. } \frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

5. (Άσκηση 2 σελ. 53 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i. } \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1}$$

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{i. } \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3} &= \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3} = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^3} = \\ &= \frac{((\alpha - 1)(\alpha + 1))^2}{(\alpha + 1)^2} \cdot \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha + 1)^2 \cdot \frac{1}{(\alpha + 1)^2} = (\alpha - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να υπολογίσετε την τιμή στις επόμενες παραστάσεις, αν οι x,y είναι αντίστροφοι :

$$\text{i. } A = \frac{2^{15} x^5 (-3)^{16} y}{6^{14} x^4}$$

$$\text{ii. } B = \left[\left(\frac{2^{15} x^5 (-3)^{14} y}{6^{10} (6x)^4} \right)^{-1} \right]^{-2}$$

$$\text{iii. } \Gamma = \frac{[(x^2 y^3)^{-1} (xy^3)^2]^2}{(x^3 y)^{-3}}$$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες που ακολουθούν :

$$\text{i. } \alpha^2 - (\alpha - \beta)^2 = 2\alpha\beta - \beta^2$$

$$\text{ii. } \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\text{iii. } \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$$

$$\text{iv. } (x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $x^2 = (x - 1)(x + 1) + 1$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της να υπολογίσετε τις δυνάμεις : α) 99^2 β) 999^2 γ) 1999^2

9. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

- i. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$
- ii. $\frac{x^2 - x + 5x - 5}{x^2 - 1}$
- iii. $\frac{x(x-4) + 4}{(x-2)(x+1)}$
- iv. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$
- v. $\frac{(x-2)(x-3) - (3-x)(x-7)}{x^2 - 9}$
- vi. $\frac{(x-1)(x+1)^3 - x^4 + 1}{2x^3 - 2x}$

10. Αν $x, y \neq 0$, να εκτελέσετε τις πράξεις:

- i. $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \cdot x^{-3} \cdot y^8$
- ii. $\left(\frac{x^3}{y^{-2}}\right)^4 \cdot \left(\frac{x^5}{y^{-3}}\right)^{-2}$
- iii. $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^3$
- iv. $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-5}}\right)^{-3} : \left(\frac{x}{y^3}\right)^7$
- v. $(x^6 \cdot y^7)^{-2} : (x^{-5} \cdot y^{-4})^3$
- vi. $(x^5 : y^4)^3 : (x^4 : y^2)^4$

11. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων, αν $x=8$ και $y=2$:

$$A = (x^4 y^{-1})^{-3} \cdot (x^3 y^{-2})^5 \cdot y^2 \quad B = \frac{(x^{-2} y)^{-4}}{(xy)^3 \cdot (xy)^{-1}}$$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $(x+2)^3 - 6(x+1)^2$
- ii. $(2a-5)^2 - 4(a-2)(a+2)$
- iii. $4(x-3)^2 - (2x+6)^2$
- iv. $(1-x)^3 - x(x+2)(2-x) - 3(x+1)^2$

13. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- i. $(2x-3)^2 - [2(x+1)]^2 = 5 - 20x$
- ii. $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = [(x-y)(x+y)]^2$
- iii. $(a+2\beta)^2 + (2\alpha-\beta)^2 = 5[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$
- iv. $(x+2)^2 - 2(2-x)(2+x) = (2x)^2 - (x-2)^2$
- v. $x(x+1)^2 - (2x)^2 = (x-1)^2 - (1-x)^3$
- vi. $(\alpha-3)^3 - 9(1-\alpha) = \alpha^3 - 9(\alpha-2)^2$
- vii. $(\omega+2)^3 - 6(\omega+1)^2 = \omega^3 + 2$
- viii. $(3-x)^3 - (x-1)^2 = 18x^2 + 26 - x(x+5)^2$

14. Αν ισχύει $(\alpha+1)^2 - (\beta-1)^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = 6$ να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=3$

15. Αν ισχύει ότι $\alpha-\beta=2$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^3 - 3\alpha^2 = \beta^3 + 3\beta^2 - 4$

16. Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε ισχύει :

$$(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

17. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ii. $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

18. Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

i. $\alpha^2 + \beta^2$ ii. $\alpha^3 + \beta^3$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta.$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 13088

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha.$

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14473

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14458

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 6 14489

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7 14555

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 13472

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 9 35388

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10 36884

α) Να δείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(Μονάδες 12)

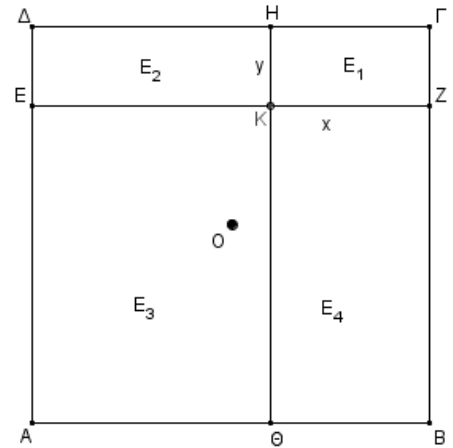
β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

(Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 11 15052

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$.
(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.

(Μονάδες 5)

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός της Διάταξης :** $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

➤ **Κανόνες Προσήμων Διάταξης :**

i. $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$

ii. $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$

iii. $\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$

iv. $\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$

v. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (το "=" ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$)

➤ **Ιδιότητες των Ανισοτήτων**

i. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

iii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

v. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω :

$\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

vi. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

➤ **Διάταξη και Δυνάμεις**

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$

ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$ (Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^n > \beta^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \alpha^n < \beta^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

➤ **Διαστήματα**

i. Κλειστό διάστημα : $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$

ii. Ανοιχτό διάστημα : $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta)$

iii. Ανοιχτό δεξιά διάστημα : $\alpha \leq x < \beta \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta)$

iv. Ανοιχτό αριστερά διάστημα : $\alpha < x \leq \beta \Leftrightarrow x \in (\alpha, \beta]$

v. $x \leq \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha]$

vi. $x < \alpha \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha)$

vii. $x \geq \alpha \Leftrightarrow x \in [\alpha, +\infty)$

viii. $x > \alpha \Leftrightarrow x \in (\alpha, +\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

➤ $\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$

➤ Δεν αντιστρέφουμε τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο τους.

Ισχύει : Αν α, β ομόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Αν α, β ετερόσημοι και $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

➤ Δεν υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη μιας ανισότητας, εκτός αν ξέρουμε ότι και τα δυο είναι θετικά οπότε η φορά παραμένει ίδια ή ότι και τα δυο είναι αρνητικά οπότε η φορά αλλάζει.

➤ Δεν μπορούμε να κάνουμε «χιαστή» σε ανισοτικές σχέσεις, εκτός αν ξέρουμε το πρόσημο των παρανομαστών οπότε και κάνουμε απαλοιφή.

➤ Πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό κατά μέλη γίνεται μόνο σε ανισότητες που έχουν την ίδια φορά. Δεν γίνεται ούτε αφαίρεση, ούτε διαίρεση κατά μέλη.

➤ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ και } \beta = 0$

➤ Όπως είπαμε αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και n φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει : $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$. Αν όμως α, β είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί τότε για κάθε n φυσικό αριθμό ισχύει : $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^n = \beta^n$ (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα).

Όμως ισχύει ότι : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \alpha = \beta, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$

ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

Λύση :

i. $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0$ που ισχύει.

ii. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει.

2. (Άσκηση 1 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση :

$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 1^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$ που ισχύει καθώς $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ και $\beta^2 \geq 0$ άρα και για το άθροισμα τους θα ισχύει ότι $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 \geq 0$.

Για την ισότητα : $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $(\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$. Άρα η ισότητα ισχύει αν $\alpha = 1, \beta = 0$.

3. (Άσκηση 3 σελ. 59 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. Αν $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$
- ii. Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

Λύση :

- i. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και $(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$
- ii. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y+2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$

4. (Άσκηση 4 σελ. 60 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις :

- i. $x + y$ ii. $x - y$ iii. $\frac{x}{y}$ iv. $x^2 + y^2$

Λύση :

- i. $4,5 < x < 4,6$ (1) και $5,3 < y < 5,4$ (2)
 Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :
 $4,5 + 5,3 < x + y < 4,6 + 5,4 \Leftrightarrow 9,8 < x + y < 10$
- ii. Επειδή δεν γίνεται αφαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το $-y$ πολλαπλασιάζοντας τη (2) με -1 οπότε έχω : $-5,3 > -y > -5,4 \Leftrightarrow -5,4 < y < -5,3$ (3)
 Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (3) και έχω :
 $4,5 - 5,4 < x - y < 4,6 - 5,3 \Leftrightarrow -0,9 < x - y < -0,7$
- iii. Επειδή δεν γίνεται διαίρεση ανισοτήτων κατά μέλη, θα σχηματίσω το $\frac{1}{y}$. Για να γίνει αυτό αντιστρέφουμε τα μέλη της (2) που είναι θετικά οπότε έχω : $\frac{1}{5,3} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5,4} \Leftrightarrow$
 $\frac{1}{5,4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5,3}$ (4). Πολλαπλασιάζω κατά μέλη (1) και (4) και έχω :
 $4,5 \cdot \frac{1}{5,4} < x \cdot \frac{1}{y} < 4,6 \cdot \frac{1}{5,3} \Leftrightarrow \frac{4,5}{5,4} < \frac{x}{y} < \frac{4,6}{5,3}$
- iv. Πρέπει να σχηματίσω τα x^2, y^2 . Τα μέλη των (1) και (2) είναι θετικά, άρα αν τα υψώσω στο τετράγωνο δεν αλλάζει η φορά τους. Δηλαδή :
 $(4,5)^2 < x^2 < (4,6)^2 \Leftrightarrow 20,25 < x^2 < 21,16$ (5)
 $(5,3)^2 < y^2 < (5,4)^2 \Leftrightarrow 28,09 < y^2 < 29,16$ (6) Προσθέτω κατά μέλη τις (5)&(6) και έχω
 $20,25 + 28,09 < x^2 + y^2 < 21,16 + 29,16 \Leftrightarrow 48,34 < x^2 + y^2 < 50,32$

5. (Άσκηση 6 σελ. 60 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$.

Λύση :

Έχω ότι $0 \leq \alpha < \beta$ άρα $1+\alpha > 0$ ομοίως και $0 \leq \alpha < \beta$ άρα $1+\beta > 0$

Στην ανισότητα $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$ απαγορεύεται το χιαστή, μπορώ όμως να κάνω απαλοιφή

παρανομαστών αφού γνωρίζω ότι το ΕΚΠ των παρανομαστών $(1+\alpha)(1+\beta) > 0$. Έχω :

$$(1+\alpha)(1+\beta)\frac{\alpha}{1+\alpha} < (1+\alpha)(1+\beta)\frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow (1+\beta)\alpha < (1+\alpha)\beta \Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

που ισχύει από το δεδομένο $0 \leq \alpha < \beta$.

6. (Άσκηση 2 σελ. 60 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha > 1 > \beta$, να δείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

Λύση :

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha\beta + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha(\beta-1) + \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(-\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow (\beta-1)(1-\alpha) > 0 \quad (1). \text{ Αρκεί να δείξω ότι}$$

ισχύει η σχέση (1). Από τη σχέση $\alpha > 1 > \beta$ έχω ότι :

$$1 > \beta \Leftrightarrow 0 > \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0. \text{ Επίσης :}$$

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 > 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0. \text{ Άρα } (\beta-1)(1-\alpha) > 0$$

7. (Άσκηση 4 σελ. 60 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : i. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ii. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

Λύση :

$$\text{i. } \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \overset{2}{2}\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{ii. } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \overset{2}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\text{ii. } x^2 + 4y^2 \geq -4xy$$

$$\text{iii. } (x + y)^2 \geq 4xy$$

9. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \alpha^2 + \alpha\beta \geq \beta(3\alpha - \beta)$$

$$\text{ii. } (1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) \geq 4\alpha\beta$$

$$\text{iii. } (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4) \geq 4(\alpha + \beta)^2$$

10. Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 2 \quad \text{ii. } \frac{1}{\alpha^4} + 1 \geq \frac{2}{\alpha^2}$$

11. Να αποδείξετε ότι :
- αν $x > 4$, τότε $5(x-1) > 15$
 - αν $\alpha > 3$ και $\beta > 1$, τότε $\alpha\beta + 3 > \alpha + 3\beta$
 - αν $\kappa \geq 4$ και $\lambda \leq 3$, τότε $\kappa(\lambda-3) \leq 4\lambda - 12$
12. Να αποδείξετε ότι :
- $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 4) \geq (2\alpha + \beta)^2$
 - αν $\alpha < 3 < \beta$ τότε : $\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$
 - Αν $\alpha > 1$ τότε : $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$
 - $x(x+6) \geq 2(x-2)$
 - $25 - 2(x-3)^2 \geq 8x - (2x+1)^2$
13. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta = 6$, τότε :
- $\alpha\beta \leq 9$
 - $\alpha^2 + \beta^2 \geq 18$
14. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha + \beta \geq 0$, τότε :
- $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta)$
 - $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$
15. Αν οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι με $x < y$, να αποδείξετε ότι : $x - y < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.
16. Αν ισχύει : $x < y < z$, να αποδείξετε ότι : α) $x < \frac{3x+4y}{7} < y$ β) $x < \frac{x+y+z}{3} < z$
17. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:
- $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$
 - $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$
 - $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$
 - $(\alpha + 5)^2 + (\beta - 2)^2 = 4(\alpha + \beta + 1)$
18. Αν $\alpha > 0$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:
- $\alpha^2\beta - \alpha^3$ και $\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta$
 - $(\alpha + 1)^3$ και $1 + 3\alpha + 3\alpha^2$
19. Να αποδείξετε ότι: i. $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ ii. $2\alpha^2 - 10\alpha + 25 > 0$
20. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-3 < \beta < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις: i. $4\alpha - 3\beta$ ii. $\alpha^2 + \beta^2$ iii. $\alpha\beta - 2$
21. Αν $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι :
- $12 < 3x + 2y < 19$
 - $-8 < -x - y < -5$
 - $0 < x - y + 3 < 3$
 - $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 1$
22. Αν $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών είναι οι παραστάσεις :
- $A = 2\alpha + 5\beta$
 - $B = -\alpha + 4\beta - 3$
 - $\frac{A}{B}$
23. α) Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

- β) Ένα ορθογώνιο, του οποίου οι διαστάσεις είναι x και y , έχει περίμετρο 20m.
- Να εκφραστεί το y με τη βοήθεια του x .
 - Να εκφραστεί το εμβαδόν E του ορθογωνίου με τη βοήθεια του x , χρησιμοποιώντας τη σχέση του ερωτήματος (α).
 - Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν E είναι μικρότερο ή ίσο των $25m^2$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

- Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)
- Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 37817

Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

- Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$. (Μονάδες 15)
- Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$. (Μονάδες 5)
 - Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3 14410

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

- Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)
 - Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$. (Μονάδες 8)
- Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 37179

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $L = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)
- Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = L$; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 36899

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

- $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$. (Μονάδες 12)
- $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 35040

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)
 β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)
 γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

- α) $\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 12)
 β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 14704

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- α) $x + y$ (Μονάδες 5)
 β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)
 γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9 12673

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)
 β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10 13266

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)
 β)
 i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)
 ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 12922

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12 13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13 14713

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$. (Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$. (Μονάδες 8)

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14 14602

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός Απόλυτης Τιμής :** $|α| = \begin{cases} α, & \text{αν } α \geq 0 \\ -α, & \text{αν } α < 0 \end{cases}$

➤ **Συνέπειες του Ορισμού :**

1. $|α| = |-α| \geq 0$

2. $|α| \geq α$ και $|α| \geq -α$

3. $|α|^2 = α^2$

4. Για κάθε $θ > 0$ ισχύει : $|x| = θ \Leftrightarrow x = θ$ ή $x = -θ$

π.χ.1 $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

π.χ.2 $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow 2x-1=3$ ή $2x-1=-3 \Leftrightarrow$

$2x=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$

5. $|x| = |α| \Leftrightarrow x = α$ ή $x = -α$

π.χ.1 $|x+3| = 3|x-2| \Leftrightarrow x+3=3(x-2) \Leftrightarrow x+3=3x-6 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

ή $x+3=-3(x-2) \Leftrightarrow x+3=-3x+6 \Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

➤ **Ιδιότητες Απολύτων Τιμών :**

1. $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$, π.χ. $|x^2-4| = |x^2-2^2| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2|$

Απόδειξη :

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

$$|α \cdot β| = |α| \cdot |β| \Leftrightarrow |α \cdot β|^2 = (|α| \cdot |β|)^2 \Leftrightarrow |α \cdot β|^2 = |α|^2 \cdot |β|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (α \cdot β)^2 = α^2 \cdot β^2, \text{ που ισχύει.}$$

2. $\frac{|α|}{|β|} = \frac{|α|}{|β|}$, π.χ. $\frac{|x^2-4|}{|x+2|} = \frac{|x^2-4|}{|x+2|} = \frac{|(x-2)(x+2)|}{|x+2|} = \frac{|x-2| \cdot |x+2|}{|x+2|} = |x-2|$

Απόδειξη : Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. $|α + β| \leq |α| + |β|$

Απόδειξη :

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|α + β| \leq |α| + |β|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

$$|α + β| \leq |α| + |β| \Leftrightarrow |α + β|^2 \leq (|α| + |β|)^2 \Leftrightarrow (α + β)^2 \leq |α|^2 + 2|α| \cdot |β| + |β|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow α^2 + 2αβ + β^2 \leq α^2 + 2|αβ| + β^2 \Leftrightarrow αβ \leq |αβ|, \text{ που ισχύει.}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $αβ = |αβ|$ ισχύει αν και μόνο αν $αβ \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Όταν σε μια άσκηση υπάρχουν απόλυτες τιμές και θέλω να απαλλαγώ από αυτές τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα θετική, τότε φεύγει η απόλυτη τιμή και η παράσταση που είναι μέσα της γράφεται όπως είναι.

Δηλ. **π.χ.1** $|x^2 + 3| = x^2 + 3$, επειδή $x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

π.χ.2 $|\sqrt{7} - 2| = \sqrt{7} - 2 =$, επειδή $\sqrt{7} - 2 > 0$

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή είναι πάντα αρνητική, τότε η απόλυτη τιμή γίνεται παρένθεση και βγαίνει ένα μείων (-) απέξω. Δηλ.

π.χ.1 $|-x^2 - 3| = -(-x^2 - 3) = x^2 + 3$, επειδή $-x^2 - 3 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

π.χ.2 $|\sqrt{8} - 3| = -(\sqrt{8} - 3) = -\sqrt{8} + 3$, επειδή $\sqrt{8} - 3 < 0$.

- Αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις με βάση τον ορισμό.

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x), & \text{αν } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{αν } A(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Δηλ } |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x+3 \geq 0 \\ -(x+3), & \text{αν } x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{αν } x < -3 \end{cases}$$

Το ίδιο μπορεί να γίνει με πινακάκι και περιπτώσεις : Μηδενίζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκω τη ρίζα ή τις ρίζες της και κάνω πινακάκι. Από το πινακάκι διακρίνω τις αντίστοιχες περιπτώσεις και βγάζω το πρόσημο της παράστασης στο διάστημα που θέλω. Δηλ. $|x+3|$, το $x+3$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα, $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
x+3	-	0	+

- Αν $x \geq -3$ ή $x \in [-3, +\infty)$ τότε $|x+3| = x+3$ (αφού $x+3 \geq 0$ για κάθε $x \in [-3, +\infty)$)
- Αν $x < -3$ ή $x \in (-\infty, -3)$ τότε $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ (αφού $x+3 < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3)$)

➤ $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$

➤ $|\alpha^n| = |\alpha|^n$

➤ $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

➤ **Απόσταση Δυο Αριθμών :**

Ισχύει : $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$,

π.χ1. $d(-4, 2) = |-4 - 2| = |-6| = 6$

π.χ2 $d(x, 3) = 5 \Leftrightarrow |x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5 \text{ ή } x - 3 = -5 \Leftrightarrow$
 $x = 8 \text{ ή } x = -2$

Επίσης :

1. $|x| < \rho \Leftrightarrow d(x, 0) < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho)$

2. $|x| > \rho \Leftrightarrow d(x, 0) > \rho \Leftrightarrow x > \rho \text{ ή } x < -\rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$

3. $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$

4. $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow d(x, x_0) > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho, \text{ ή } x > x_0 + \rho$

π.χ.1 $|x + 3| < 4 \Leftrightarrow d(x, -3) < 4 \Leftrightarrow x \in (-3 - 4, -3 + 4) \Leftrightarrow x \in (-7, 1) \text{ ή } -7 < x < 1$

π.χ.2 $|x - 4| > 2 \Leftrightarrow d(x, 4) > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 4 - 2) \cup (4 + 2, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
 $\text{ή } x < 2, \text{ ή } x > 6$

5. Αν $x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow |x - x_0| < \rho$ με $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ και $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$

6. Αν $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty) \Leftrightarrow d(x, x_0) > \rho \Leftrightarrow |x - x_0| > \rho$ με $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ και $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i. $|\pi - 3|$

ii. $|\pi - 4|$

iii. $|3 - \pi| + |4 - \pi|$

iv. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$

Λύση :

i. Επειδή $\pi - 3 > 0$, τότε $|\pi - 3| = \pi - 3$

ii. Επειδή $\pi - 4 < 0$, τότε $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi$

iii. Επειδή $3 - \pi < 0$ και $4 - \pi > 0$, τότε $|3 - \pi| + |4 - \pi| = -(3 - \pi) + 4 - \pi = -3 + \pi + 4 - \pi = 1$

iv. Επειδή $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ και $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, τότε
 $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$

2. (Άσκηση 2 σελ. 66 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $3 < x < 4$ να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x - 3| + |x - 4|$

Λύση :

Επειδή $3 < x < 4$, τότε : $x - 3 > 0$ και $x - 4 < 0$

Οπότε : $|x - 3| + |x - 4| = x - 3 - (x - 4) = x - 3 - x + 4 = 1$

3. (Άσκηση 3 σελ. 66 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $|x-3|-|4-x|$ όταν :

i. $x < 3$

ii. $x > 4$

Λύση :

i. Επειδή $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$, επίσης $x < 3$ άρα και $x < 4 \Leftrightarrow 0 < 4-x \Leftrightarrow 4-x > 0$

Οπότε : $|x-3|-|4-x| = -(x-3) - (4-x) = -x+3-4+x = -1$

ii. Επειδή $x > 4 \Leftrightarrow 0 > 4-x \Leftrightarrow 4-x < 0$, επίσης $x > 4$ άρα και $x > 3 \Leftrightarrow x-3 > 0$

Οπότε : $|x-3|-|4-x| = x-3 + (4-x) = x-3+4-x = 1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 67 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left| \frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \right|$

Λύση :

Έχω : $\left| \frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \right| = \frac{|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|} = \frac{|\alpha-\beta|}{|-(\alpha-\beta)|} = \frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta|} = 1$

5. (Άσκηση 2 σελ. 68 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\alpha > \beta$ να δείξετε ότι

i. $\alpha = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$

ii. $\beta = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$

Λύση :

i. Επειδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Οπότε : $\frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

ii. Επειδή $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$

Οπότε : $\frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \beta - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = |\sqrt{6}+3| + |\sqrt{5}-3| - |1-\sqrt{6}| + |2-\sqrt{5}|$

ii. $B = |1-\sqrt{2}| - |5+\sqrt{2}| + |-x^2-2| - |x^2+4|, \quad x \in \mathbb{R}$

iii. $\Gamma = |5-\pi| + |\sqrt{8}+\pi| - |-\sqrt{8}-3|$

7. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $A = |\alpha-2| - |2-\beta|$ ii. $B = |\alpha-2| + |\beta-2|$ iii. $A = |\beta-\alpha| - 2|\alpha-\beta|$

8. Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x-3| - 2|x-4| + |x-5|$ και

$$B = 5|3-x| + |2x-7|$$

9. Αν $0 < x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x+1| + |x+2| + 2|x-2|$ και

$$B = |x-2| + |2x-5| + |3x|$$

10. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $A = |x+2| + |x-2|$ όταν :

i. $x < -2$ ii. $-2 \leq x < 2$ iii. $x > 2$

11. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

i. $A = |x-3|$ ii. $B = |x+2| + x$ iii. $\Gamma = 2x - |x-1|$

iv. $\Delta = x - |4-x|$ v. $E = x+1 - |2x-6|$ vi. $Z = 3 - |2-x|$

12. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = \frac{x^4 + 2|x^5|}{2|x|+1}$ ii. $B = \frac{x^2 + 2|x|}{|x|+2}$ iii. $\Gamma = \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x|+6}$ iv. $\Delta = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x|+2}$

v. $E = \frac{x^2 - 1}{|x|+1}$ vi. $Z = \frac{|x-1|}{|1-x|} + \frac{|2x+2|}{|-x-1|} + \frac{|x^2-1|}{|1-x^2|}$, $x \neq -1$ και $x \neq 1$

13. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\alpha+1|^2 - 4\alpha = |\alpha-1|^2$

ii. $(|a| - |\beta|)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2$

iii. $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ iv. $\alpha^2 - (|\alpha| - |\beta|)(|\alpha| + |\beta|) = \beta^2$

14. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$.

15. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|x+2| - |x-2|}{|x+2| + |x-2|}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

16. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-3| < 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $x \in (2, 4)$

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{|x-4| + |x-2|}{2} + |3x-6| + 3|x-5| + \frac{|x-1|}{|1-x|}$.

17. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|2x-6|+1}{4x^2-49}$ για $x \in (-\infty, 3]$.

18. Αν η απόσταση του x από το y στον πραγματικό άξονα είναι 4, να γραφεί χωρίς απόλυτη τιμή η παράσταση : $A = |x-y| + |-3y+3x|$.

19. Αν $|x| < 1$ και $|y| < 2$ να δείξετε ότι : i. $|x+y| < 3$ ii. $|x-y| < 3$ iii. $-10 < 3x-2y-3 < 4$

20. Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- Να λύσετε την ανίσωση : $A > 3$.

21. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x < 3$		
$ x \leq 4$		
$ x > 2$		
$ x \geq 5$		
		$x \in [-1, 1]$
		$x \in (-6, 6)$
		$x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$
		$x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$
	$d(x, 3) < 5$	
	$d(x, -4) \leq 7$	
	$d(x, -3) > 5$	
	$d(x, 1) \geq 3$	

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x + 4| < 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3 14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14491

- α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$ (Μονάδες 12)
 β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

- α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)
 γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6 14730

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε
 i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$. (Μονάδες 8)
 ii. Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$. (Μονάδες 10)
 β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 7 37201

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)
 β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 36898

- α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1). (Μονάδες 15)
 β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9 36894

- α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$. (Μονάδες 15)
 β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 10 35412

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

- α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)
 β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10} \quad (\text{Μονάδες 15})$$

ΘΕΜΑ 11 35112

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 35041

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13 35043

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14 35044

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15 37200

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$,

α) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 14753

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 17 35296

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β). (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

- α)
- i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)
 - ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)
- β)
- i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)
 - ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 19 36671

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

- α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)
- β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)
- γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)
- δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:
- $$|x+4| + |x-14| = 18$$
- (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 20 36672

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.
- i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)
 - ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)
- β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)
- δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21 33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

ΘΕΜΑ 22 33896

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 23 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right|$. (Μονάδες 6)

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

➤ **Ορισμός Τετραγωνικής Ρίζας :** Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α . Δηλαδή : $x = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

➤ **Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας :**

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ και $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

3. Για κάθε πραγματικό αριθμό α είναι : $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ (Προσοχή : $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$)

➤ **Ορισμός ν-οστής Ρίζας :** Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στη ν, δίνει τον α . Δηλαδή : $x = \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow x^n = \alpha$, με $\alpha \geq 0$ και $x \geq 0$. Η $\sqrt[n]{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$, παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

π.χ. $\sqrt[3]{27} = 3$ γιατί $3^3 = 27$. Η $\sqrt[3]{27} = 3$ είναι η μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης $x^3 = 27$.

Επίσης : $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$, ενώ $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

➤ **Ιδιότητες Ριζών :**

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ ή $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, αλλά και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$

2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

3. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε : $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ και $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\beta \neq 0$

Απόδειξη :

Έχουμε : $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ που ισχύει.

4. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n\mu]{\alpha}$, π.χ. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[12]{7} = \sqrt[6]{7}$

5. Αν $\alpha \geq 0$, τότε : $\sqrt[p]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\mu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\rho}}$, π.χ.1 $\sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^4} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

π.χ.2 $\sqrt[15]{8^5} = \sqrt[3 \cdot 5]{8^5} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{2^{15}} = 2^5 = 32$

6. Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

π.χ.1 $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$, π.χ.2 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, π.χ.3 $\sqrt[11]{5^4} = 5^{\frac{4}{11}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

$$\text{π.χ.1 } \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{π.χ.2 } \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{π.χ.3 } \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.

$$\text{π.χ.1 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{π.χ.2 } \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha} \pm \beta$, $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

$$\text{π.χ.1 } \frac{2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{2(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)} = \frac{2\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5}^2 - 2^2} = \frac{2\sqrt{5} - 4}{5 - 4} = 2\sqrt{5} - 4$$

$$\text{π.χ.2 } \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6})}{(\sqrt{5} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5} + \sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{30} + 6}{5 - 6} = -(\sqrt{30} + 6) = -\sqrt{30} - 6$$

$$\text{π.χ.3 } \frac{3}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{3 \cdot (2\sqrt{3} + 3)}{(2\sqrt{3} - 3) \cdot (2\sqrt{3} + 3)} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{(2\sqrt{3})^2 - 9} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{12 - 9} = \frac{3(2\sqrt{3} + 3)}{3} = 2\sqrt{3} + 3$$

- Απαραίτητη προϋπόθεση όταν έχουμε ρίζα είναι η υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν.

$$\text{π.χ.1 } \text{η παράσταση } \sqrt{x-3} \text{ έχει νόημα μόνο όταν } x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\text{π.χ.2 } \text{η παράσταση } \sqrt[3]{6-2x} \text{ έχει νόημα μόνο όταν } 6-2x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x \Leftrightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{π.χ.3 } \text{η παράσταση } \sqrt{\pi-4} \text{ δεν έχει νόημα, δηλαδή είναι λάθος, αφού } \pi-4 < 0$$

- Αν $x, y \geq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία : $x \leq y \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να υπολογίσετε τις ρίζες :

- i. $\sqrt{100}$ $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[4]{10000}$ $\sqrt[5]{100000}$
 ii. $\sqrt{4}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[5]{32}$
 iii. $\sqrt{0,01}$ $\sqrt[3]{0,001}$ $\sqrt[4]{0,0001}$ $\sqrt[5]{0,00001}$

Λύση :

- i. $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$ $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$ $\sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = 10$ $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$
 ii. $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
 iii. $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$ $\sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{1}{10}$
 $\sqrt[4]{0,0001} = \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{1}{10}$ $\sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{100000}} = \frac{1}{10}$

2. (Άσκηση 2 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς τις ρίζες :

- i. $\sqrt{(\pi - 4)^2}$
 ii. $\sqrt{(-20)^2}$
 iii. $\sqrt{(x - 1)^2}$
 iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

Λύση :

- i. $\sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| \stackrel{\pi - 4 < 0}{=} -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi$
 ii. $\sqrt{(-20)^2} = |-20| = 20$
 iii. $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), \alpha \nu \ x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x \geq 1 \\ -x + 1, \alpha \nu \ x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x - 1, \alpha \nu \ x \geq 1 \\ 1 - x, \alpha \nu \ x < 1 \end{cases}$
 iv. $\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{|x|}{2}$

3. (Άσκηση 3 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 1$

Λύση : Έχω $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| \stackrel{\substack{2 - \sqrt{5} < 0 \\ 3 - \sqrt{5} > 0}}{=} -(2 - \sqrt{5}) + 3 - \sqrt{5} =$
 $= -2 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 1$

4. (Άσκηση 4 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι : $(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8$

Λύση : Πρώτα πρέπει να πάρω περιορισμούς, πρέπει :

$x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ (1) και $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ (2). Άρα από (1) και (2) έχω $x \geq 5$.

$$\begin{aligned} \text{Ex } \omega : & (\sqrt{x-5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3}) \stackrel{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=} \sqrt{x-5}^2 - \sqrt{x+3}^2 = x-5 - (x+3) = \\ & = x-5-x-3 = -8 \end{aligned}$$

5. (Άσκηση 5 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

i. $(\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) = -14$

Λύση :

i. $\begin{aligned} \text{E}\chi\omega \left(\sqrt{8} - \sqrt{18} \right) \left(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32} \right) &= \left(\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} \right) \left(\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \right) = \\ &= \left(\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \right) = \left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \right) \left(5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \right) = \\ &= \left(-\sqrt{2} \right) \left(7\sqrt{2} \right) = -7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -7\sqrt{2}^2 = -7 \cdot 2 = -14 \end{aligned}$

6. (Άσκηση 6 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = 2$

Λύση :

ii. $\sqrt[3]{\text{Ex}\omega} \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9-5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

7. (Άσκηση 7 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[5]{2\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{2}$

Λύση :

[illegible]

8. (Άσκηση 8 σελ. 74 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

ii. $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

Λύση :

ii. $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{8}{9}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{8}{9} + \frac{5}{6}} = 2^{\frac{16}{18} + \frac{15}{18}} = 2^{\frac{31}{18}} = 2^{\frac{18}{18} + \frac{13}{18}} = 2^{1 + \frac{13}{18}} = 2 \cdot 2^{\frac{13}{18}} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

9. (Άσκηση 10 σελ. 75 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές :

iii. $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

Λύση :

$$\text{iii. } \text{Ex}_{\omega} \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2}{7 - 6} = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2 =$$

$$\sqrt{7}^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6 = 13 + 2\sqrt{42}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i. } \sqrt[7]{5^4} \cdot \sqrt[7]{5^3} \quad \text{ii. } \sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt[6]{3} \quad \text{iii. } \frac{\sqrt[5]{4^9}}{\sqrt[5]{4^4}} \quad \text{iv. } \sqrt[5]{7^{11}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{7^6}} \quad \text{v. } \frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}} \quad \text{vi. } \frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = (\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27})\sqrt{3} & \text{ii. } B = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8} \\ \text{iii. } \Gamma = (\sqrt{20} + \sqrt{45})(\sqrt{80} - \sqrt{5}) & \text{iv. } \Delta = (\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54})\sqrt[3]{4} \end{array}$$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 & \text{ii. } (\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}) \\ \text{iii. } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} & \text{iv. } 2\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)^2 \end{array}$$

13. Να δείξετε ότι :

$$\text{i. } A = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{ii. } B = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} = \sqrt[12]{3} \quad \text{iii. } \Gamma = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5} \quad \text{iv. } \Delta = \sqrt[5]{5^2\sqrt{5\sqrt{5}}} = \sqrt[20]{5^{11}}$$

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

$$\text{i. } \sqrt{x+1} \quad \text{ii. } \sqrt[4]{-2x+4} \quad \text{iii. } \sqrt[7]{9-3x}$$

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

$$\begin{array}{lll} \text{i. } A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} & \text{ii. } B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5} & \text{iii. } \Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}} \\ \text{iv. } \Delta = \sqrt{12-4x} + \frac{1}{\sqrt[4]{2x-14}} \end{array}$$

16. Αν ισχύει ότι: $x = 2 - \sqrt{3}$ και $y = 2 + \sqrt{3}$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } A = (y-x)^2 \quad \text{ii. } B = x^2 + y^2 \quad \text{iii. } \Gamma = xy \quad \text{iv. } \Delta = x^2 + 3xy + y^2$$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } A = \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}} & \text{ii. } B = \sqrt{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{32}) \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \\ \text{iii. } \Gamma = \sqrt[3]{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2(7 - 2\sqrt{10})} & \text{iv. } \Delta = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}-3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}} \end{array}$$

18. i. Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3} + 2)^2$ και $(\sqrt{3} - 2)^2$.

$$\text{ii. } \text{Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: } A = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right) \sqrt{3}$$

19. Αν ισχύει $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

20. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x+4} - \sqrt{2-x})(\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x})$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

21. Να δείξετε ότι : $(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-7}) = 9$.

22. Να δείξετε ότι : $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} + \sqrt{(5-\sqrt{10})^2} = 2$

23. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές: i. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ii. $\frac{-6}{\sqrt{5}-4}$ iii. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}-3}$ iv. $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{243}}{\sqrt{48}+\sqrt{147}}$ v. $\frac{9\sqrt{20}}{2\sqrt{45}}$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $A = \sqrt[4]{(\sqrt{2}-\sqrt{7})^4} + \sqrt[3]{(\pi-2\sqrt{2})^3} - \sqrt[5]{(\pi+\sqrt{7})^5} + \sqrt[6]{(1-3\sqrt{2})^6}$

ii. $B = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + 2\sqrt{(2-x)^4} - \sqrt[6]{(2x-4)^6} + \sqrt[8]{(\sqrt{3}-1)^8} - 3\sqrt[10]{(-2)^{10}}$

25. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

i. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \geq 4\sqrt{\alpha\beta}$

ii. $\frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta$

iii. $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$

iv. $\sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}}{2}$

26. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{12}}$

i. Να βρείτε τον αριθμό α .

ii. Να βρείτε τον αριθμό $\beta = \sqrt{8} \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}) \cdot \sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}$

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (\sqrt{6+\beta\sqrt{\alpha}} - 3)(1+\sqrt{2})$

27. Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

ii. $\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$

iii. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}}$

iv. $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}}$

v. $\frac{4}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

vi. $\frac{8}{\sqrt[3]{3} \cdot (3-\sqrt{5})}$

vii. $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{6})}$

viii. $\frac{6}{\sqrt[7]{3^4} \cdot (\sqrt{5}-1)}$

28. Αν $\alpha \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας:

i. $A = \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}}$

ii. $B = \sqrt[3]{\alpha \cdot \sqrt[5]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^3}}$

iii. $\Gamma = \sqrt[7]{\alpha^4 \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^7}}$

iv. $\Delta = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha}}$

29. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i. $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} - \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, αν $d(x,1) < 1$ ii. $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{\sqrt{-x^2-2x}}{\sqrt{x+2}}$, αν $d(x,-1) < 1$

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14682

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 14774

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 14599

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 14452

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5 12943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 14750

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$. (Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7 37199

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8 37198

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9 37197

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 10 37192

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \sqrt{3} \approx 1,73, \sqrt{5} \approx 2,24, \sqrt{7} \approx 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$. (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 36778

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 14849

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13 34157

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14 34152

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15 15051

- α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.
(Μονάδες 13)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 37172

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.
(Μονάδες 13)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17 14805

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)
(Μονάδες 10)
- β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.
(Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18 34155

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.
(Μονάδες 15)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .
(Μονάδες 10)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 19 14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.
(Μονάδες 7)
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.
(Μονάδες 8)
- γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.
(Μονάδες 10)

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Κάθε εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha x + \beta = 0$ ή $\alpha x = -\beta$ (1) λέγεται εξίσωση 1^{ου} βαθμού (ή πρωτοβάθμια εξίσωση), με άγνωστο το x , ενώ κάθε αριθμός που την επαληθεύει λέγεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης. Οι αριθμοί α, β λέγονται συντελεστές της εξίσωσης.

➤ Αν $\alpha \neq 0$, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$,

$$\text{καθώς : } (1) \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

➤ Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση) καθώς : $(1) \Leftrightarrow 0x = -\beta$ και $\beta \neq 0$.

➤ Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x) καθώς : $(1) \Leftrightarrow 0x = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 83 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

ii. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$

Λύση :

i. $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x + 3 = 7x - 42 \Leftrightarrow 4x - 6x - 7x = -42 - 3 \Leftrightarrow -9x = -45 \Leftrightarrow$
 $-\frac{9x}{9} = -\frac{45}{9} \Leftrightarrow x = 5$

ii. Πρώτα από όλα θέλω να απαλλαγώ από τα κλάσματα. Βρίσκω ΕΚΠ(4,5,20) = 20 και στη συνέχεια πολ/ζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να κάνω απαλοιφή

παρανομαστών. $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{ΕΚΠ}(4,5,20)=20}$

$$20 \frac{1-4x}{5} - 20 \frac{x+1}{4} = 20 \frac{x-4}{20} + 20 \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$4(1-4x) - 5(x+1) = x-4+25 \Leftrightarrow 4-16x-5x-5 = x+21 \Leftrightarrow -16x-5x-x = 21-4+5 \Leftrightarrow$$

$$-22x = 22 \Leftrightarrow -\frac{22x}{-22} = \frac{22}{-22} \Leftrightarrow x = -1$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 83 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

ii. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$

Λύση :

i. $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 6x - 6x = 4 - 3 + 2 \Leftrightarrow 0x = 3$ Η εξίσωση είναι αδύνατη (δηλ. δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x , καμία λύση)

ii. $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - 3 \frac{5-x}{3} = -3 \frac{5}{3} + 3 \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - (5-x) = -5+7x \Leftrightarrow$

$6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 7x - 7x = -5 + 5 \Leftrightarrow 0x = 0$ Η εξίσωση είναι ταυτότητα (δηλ. αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , άπειρες λύσεις)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i. } \frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2} - \frac{3x-1}{6} & \text{ii. } (x+1)^2 = (x-3)(x+3) & \text{iii. } 5(-x+2) - 4 = 6 - 5x \\ \text{iv. } \frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x-5}{6} & \text{v. } (x-2)^3 - x(x-3)^2 = 1 & \text{vi. } \frac{\frac{2x-3}{4} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{x-2 - \frac{2}{3}}{3 + \frac{1}{3}} \end{array}$$

4. Δίνονται οι εξισώσεις: $3 - \frac{x-4}{2} = \frac{3}{4} - 2(x-1)$ (1) και $(2\mu-6)x-5=1-\mu(-4x-2)$ (2).

Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε οι εξισώσεις (1) και (2) να έχουν κοινή λύση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 1^ο βάρθμια εξίσωση $ax + b = 0$, αν οι συντελεστές a, b είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα. Έτσι όταν χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, κάθε όρος που περιέχει το x θεωρείται άγνωστος και μεταφέρεται στο 1^ο μέλος, ενώ κάθε όρος που περιέχει το λ (ή μ κτλ) θεωρείται γνωστός και μεταφέρεται στο 2^ο μέλος. Για να λύσουμε μια παραμετρική 1^ο βάρθμια εξίσωση :

Βήμα 1 : φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax = -b$

Βήμα 2 : βρίσκω τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ισχύει : $a = 0$

Βήμα 3 : όταν $a \neq 0$ η εξίσωση $ax = -b$ έχει ακριβώς μια λύση τη $x = -\frac{b}{a}$

Βήμα 4 : για τις τιμές της παραμέτρου που ισχύει $a = 0$, αντικαθιστώ στην αρχική εξίσωση και προκύπτει είτε αδύνατη είτε ταυτότητα (αόριστη)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Βήμα 1 : $\lambda^2 x - \lambda = x - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$

Βήμα 2 : $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ ή

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \text{ή} \\ \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Βήμα 3 : Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση :

$$(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Βήμα 4 :

- Αν $\lambda = 1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \xrightarrow{\lambda=1} (1^2 - 1)x = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ είναι ταυτότητα
- Αν $\lambda = -1$ τότε : $(\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \xrightarrow{\lambda=-1} ((-1)^2 - 1)x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0x = -2$ είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2 x - \lambda = 4x - 2$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λυθούν οι εξισώσεις :
- $(\lambda - 2)x = \lambda - 2$
 - $(\lambda - 3)x = \lambda$
 - $\lambda(\lambda - 4)x = \lambda - 4$
 - $\lambda(\lambda + 3)x = \lambda^2 - \lambda$
8. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^2(x - 4) - 4\lambda = 4(x - \lambda^2)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
9. Έστω η εξίσωση : $\lambda(\lambda - 5)x = 6(\lambda - 5)$ (1). Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1)
- Έχει λύση το -2
 - Έχει μοναδική λύση το -2
 - Είναι αδύνατη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τη βοήθεια της πρότασης : «Ένα γινόμενο παραγόντων είναι μηδέν, όταν τουλάχιστον ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν». Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής :

Βήμα 1 : μεταφέρω όλους τους όρους στο 1^ο μέλος, οπότε στο 2^ο μένει μηδέν

Βήμα 2 : παραγοντοποιώ το 1^ο μέλος, ώστε να σχηματιστεί γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν, οπότε εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση.

ΘΥΜΗΣΟΥ : ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**➤ ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

1. ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ π.χ.1 $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$,

π.χ.2 $x(x - 3) - 2(3 - x) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$

2. ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ π.χ.3 $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

➤ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$

ii) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 = (3x - 1 - 9)(3x - 1 + 9) = (3x - 10)(3x + 8)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10. (Άσκηση 7 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$

Λύση :

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

ii. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-2)^2 + (x-2)(4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)[(x-2) + (4+x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-2+4+x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ 2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

11. (Άσκηση 10 σελ. 84 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

ii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (2x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $(x+2)(x-3) = (3x+1)(x+2)$

iii. $(x+7)^2 + x^2 - 49 = 0$

v. $3x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

vii. $x^3 - 4x^2 - 4(x-1)(x-4) = 0$

ix. $(x+2)^3 - 13(x+1) = 1$

xi. $(x^2 + 4)^2 - x[(x+3)^2 - (x+6)] = 16$

ii. $x(x^2 - 25) - x^3 + 5x^2 = 0$

iv. $(x-3)^2 - (3-x)(x+1) = 0$

vi. $(x^2 - 64)(x-2) = (x^2 - 4)(x-8)$

viii. $x(x+1)^2 - (x+5)^2 + 16 = 0$

x. $(x-1)^3 - (10x-7) = -3(x-2)(x+2)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή,

Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,

Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς,

Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,

Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. (Άσκηση 12 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

Λύση :

i.
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad \text{ΕΚΠ} = (x-1)(x+1)$$

Πρέπει : $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

Έτσι έχω : $(x-1)(x+1) \frac{1}{x-1} + (x-1)(x+1) \frac{1}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{2}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1+x-1=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii.
$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)} \quad \text{ΕΚΠ} = x(x+2)$$

Πρέπει : $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \& x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

Έτσι έχω : $x(x+2) \frac{3}{x+2} - x(x+2) \frac{2}{x} = x(x+2) \frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow 3x - 2(x+2) = x-4 \Leftrightarrow$

$3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0$ ταυτότητα δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

14. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i.
$$\frac{1-2x}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2}$$
 ii.
$$3 \frac{x+7}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{5}{x-3}$$
 iii.
$$\frac{x+2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-1}$$

iv.
$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1+x-x^2}{x-x^2}$$
 v.
$$1 + \frac{2}{x} - 4 \frac{x+1}{4x+5} = \frac{4x^2+8x+10}{4x^2+5x}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΡΦΗ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Οι εξισώσεις αυτές έχουν ή μπορούν να πάρουν μια από τις επόμενες μορφές :

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1** $|f(x)| = \alpha$

- για $\alpha > 0$ δίνει $f(x) = \alpha$ ή $f(x) = -\alpha$
- για $\alpha = 0$ δίνει $f(x) = 0$ και
- για $\alpha < 0$ είναι αδύνατη

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|2x - 1| = 3$

Λύση: $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3$ ή $2x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = 4$ ή $2x = -2 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2** $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|x + 3| = 3|x - 2|$

Λύση: $|x + 3| = 3|x - 2| \Leftrightarrow x + 3 = 3(x - 2) \Leftrightarrow x + 3 = 3x - 6 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$
 ή $x + 3 = -3(x - 2) \Leftrightarrow x + 3 = -3x + 6 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3** $|f(x)| = g(x)$

- για $g(x) \geq 0$, έχω : $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$
- για $g(x) < 0$, η εξίσωση $|f(x)| = g(x)$ είναι αδύνατη

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση : $|2x - 1| = x - 2$

Λύση: πρέπει $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Έτσι για $x \geq 2$ έχω :

$$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x - 2 \Leftrightarrow x = -1, \text{απορ.} \\ \text{ή} \\ 2x - 1 = -(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 1 = -x + 2 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{απορ.} \end{cases}$$

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4** $|f(x)| = |g(x)| + h(x)$ Σε αυτή την περίπτωση βρίσκω τις ρίζες των $f(x) = 0$ και $g(x) = 0$, φτιάχνω πινακάκι στο οποίο βάζω τις ρίζες των παραπάνω εξισώσεων και στη συνέχεια διακρίνω περιπτώσεις για τα αντίστοιχα διαστήματα που δημιουργούνται.

π.χ.1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x + 2| = 2|x - 1| + 1$

Λύση: $|x + 2| = 2|x - 1| + 1$ (1) Έχω : $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ και $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται : $-(x + 2) = -2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow -x - 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow x = 5$ αδύνατο γιατί $x \in (-\infty, -2)$
- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται : $x + 2 = -2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow x + 2 = -2x + 2 + 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (δεκτή)
- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται : $x + 2 = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 2 + 1 \Leftrightarrow x = 3$ (δεκτή)

➤ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5** $|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ και $g(x) = 0$

π.χ. 1 Να λυθεί η εξίσωση : $|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0$.

$|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0$ επειδή $|x^2 - 4| \geq 0$ και $|x^2 - 2x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχω :

$$|x^2 - 4| + |x^2 - 2x| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{και } x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Άρα η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η κοινή λύση $x = 2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 14 σελ. 84 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|2x - 3| = 5$

ii. $|2x - 4| = |x - 1|$

iii. $|x - 2| = 2x - 1$

Λύση :

i. $|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \\ \text{ή} \\ 2x - 3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ \text{ή} \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$

ii. $|2x - 4| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = x - 1 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -x + 1 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$

iii. $|x - 2| = 2x - 1$, πρέπει $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Έτσι για $x \geq \frac{1}{2}$ έχω :

$$|x - 2| = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2x - 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -(2x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ \text{ή} \\ x - 2 = -2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \text{απορ.} \\ \text{ή} \\ 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1, \text{δεκτή} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

16. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|x - 3| = 2$

ii. $|2x - 5| = 3$

iii. $|3x - 1| = 2|x + 1|$

iv. $2|x - 2| = 3|x - 1|$

v. $\frac{|x| - 4}{5} = \frac{|x| - 3}{2} + \frac{4|x| - 1}{3}$

vi. $\left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| = 2$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\frac{1}{2} + \frac{|x| - 1}{3} = \frac{5|x| + 1}{6}$

ii. $|x - 2| = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

iii. $(x - 4)^2 + |x^2 - 16| = 0$

iv. $|3 - |x - 1|| = 2$

v. $|3x - 2| = 4 - x$

vi. $||x + 1| - 2| = 3$

vii. $\left| 4 - \frac{x}{4} \right| = x - 1$

viii. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$

ix. $||x| + 2| = 2x$

$$\begin{array}{lll} \text{x. } \frac{|2x-1|-3}{|x-2|-1} = 3 & \text{xi. } \frac{|2x-6|+1}{3} - 5 = \frac{|9-3x|+7}{6} & \text{xii. } 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x \\ \text{xiii. } |x+2| + |x-2| = |3x-1| & \text{xiv. } \frac{|x-1|+|3x|}{|x|-x} = 3 & \text{xv. } \frac{|x-1|+1}{2} + \frac{2-|x-1|}{3} = 1 - \frac{3-|x-1|}{2} \end{array}$$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{llll} \text{i. } |x+3| - |2-x| = x+5 & \text{ii. } |x^2-9| + |x^2+3x| = 0 & \text{iii. } x^2 - 2|x| + 1 = 0 & \text{iv. } |x|^3 - 4x^2 = 0 \\ \text{v. } |x-2| - x^2 + 4x - 4 = 0 & \text{vi. } \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1 & \text{vii. } \frac{|x-5|+1}{3} - \frac{16-|4x-20|}{6} = \frac{|15-3x|+8}{12} \end{array}$$

19. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{|x^2-9|}{|x^2+3x|+|3x+9|}$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A και να την απλοποιήσετε.
- Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 3.1 Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1-x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)
- Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.
 - Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14224

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2-1}{x^2-x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

- Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται. (Μονάδες 8)
 - Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3 12857

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x - 2\lambda + 2 = 0$.

- Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$. (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|a-1|-3)x = a+2$ (1), με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $a=0$ και $a=5$. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε για ποιες τιμές του a ισχύει $|a-1|=3$. (Μονάδες 8)
 - Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του a που βρήκατε στο ερώτημα β) i. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 36896

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 9)
- β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση. (Μονάδες 8)
- ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6 34872

Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$. (Μονάδες 13)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 34146

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
- i. Όταν $\alpha = 1$. (Μονάδες 5)
- ii. Όταν $\alpha = -3$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 8 36673

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$. (Μονάδες 10)
- β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:
- i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13170

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$).

- α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \in \mathbb{E}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \in \mathbb{E}$. (Μονάδες 7)
- β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.
- i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης $(1,03^2 - 1,02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$ (Μονάδες 10)
- ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα. (Μονάδες 8)

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = \alpha$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ : ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έχουν τη μορφή $x^v = \alpha$ ($v \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$). Οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

- 1) Αν $\alpha > 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{\alpha}$
- 2) Αν $\alpha > 0$ και v – άρτιος έχει ακριβώς δυο λύσεις $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{\alpha}$
- 3) Αν $\alpha < 0$ και v – περιττός έχει ακριβώς μια λύση $x^v = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{-\alpha}$
- 4) Αν $\alpha < 0$ και v – άρτιος δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

π.χ.1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$

π.χ.2) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.3) Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = -4$

π.χ.4) Να λύσετε την εξίσωση : $x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -5$ Αδύνατη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 125 = 0$

Λύση :

i. $x^3 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow x = 5$

2. (Άσκηση 2 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $x^5 + 243 = 0$

Λύση :

ii. $x^5 + 243 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -243 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{243} \Leftrightarrow x = -3$

3. (Άσκηση 4 σελ. 87 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

iii. $x^5 + 16x = 0$

Λύση :

iii. $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 16) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -16$ αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3 - 8 = 0$ ii. $x^4 - 16 = 0$ iii. $2x^7 - x = 0$ iv. $x^3 + 8 = 0$ v. $x^6 + 2 = 0$ vi. $16x^4 - 1 = 0$

vii. $8x^3 - 27 = 0$ viii. $x^5 - 2x = 0$ ix. $(5x + 2)^3 + 64 = 0$ x. $(x - 2)^{10} - 1024 = 0$

xi. $(x^5 - 32)(x^4 - 81) = 0$ xii. $(|x - 2| - 3)^3 = 8$ xiii. $(|3 - x| - 5)^4 = 16$

xiv. $(x - 1)^5 + 81 = 81x$ xv. $(x + 3)^5 - 16x = 48$ xvi. $x^8 - 27 = 27x^5 - x^3$

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες άνισες : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα : $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 10x + 25 = 0$

Είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2 + 4x = -3$

$$(x-3)^2 + 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 12 = 0$$

Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 4 - 48 = -44 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Προσοχή : Όταν $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

- Αν $\beta=0$ τότε $ax^2 + \gamma = 0$

π.χ.1 $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.2 $x^2 - 169 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x = \pm 13$

π.χ.3 $x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3 \cdot 4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

π.χ.4 $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ Αδύνατη.

- Αν $\gamma=0$ τότε $ax^2 + \beta x = 0$

π.χ.1 $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

π.χ.2 $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii. $(x-2)^2 + 3x = 2$
 iv. $x^2 - 9x = 0$ v. $x^2 - 9 = 0$ vi. $2x^2 - 72 = 0$ vii. $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x = 0$ viii. $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$
 ix. $2x^2 + 8x - 10 = 0$ x. $9x^2 - 6x + 1 = 0$ xi. $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ xii. $-3x^2 + 12 = 0$
2. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $(2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1)$
 ii. $(x-2)^2 - (x-1)(x+1) = (x+3)^2 - 6x$ iii. $(x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15 - (3x+1)(1-3x)$
 iv. $(x-1)^3 - x(x-2)(x+2) = 1$ v. $(3x+2)^2 - (x-2)(3-x) = 6 - 4(x-1)^2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VΙΕΤΑ

Σε περίπτωση που η εξίσωση : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε για το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ ισχύει :

$$\triangleright S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\triangleright P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Απόδειξη :

$$\triangleright x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$\triangleright x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta. Με τη βοήθεια των τύπων του Vieta η εξίσωση : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Π.χ. η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 6 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε την εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

- i. 2 και 3 ii. 1 και $\frac{1}{2}$ iii. $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$

Λύση :

- i. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2 + 3 \Leftrightarrow S = 5$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow P = 6$,
 άρα $x^2 - 5x + 6 = 0$

- ii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = \frac{3}{2}$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 1 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}$,
 άρα $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$
- iii. Η εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$
 με $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow S = 10$ και
 $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6}) \Leftrightarrow P = 25 - (2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow P = 25 - 24 \Leftrightarrow P = 1$,
 άρα $x^2 - 10x + 1 = 0$

4. (Άσκηση 7 σελ. 94 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

- i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -15 ii. Άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

Λύση :

- i. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 2$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = -15$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, έχω $\Delta = 4 + 60 = 64$
 και $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

- ii. Έχω $S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = 9$ και $P = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow P = 10$, άρα οι αριθμοί που ψάχνω θα είναι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 10 = 0$, έχω

$$\Delta = 81 - 40 = 41 \text{ και } x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{41}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{9 + \sqrt{41}}{2} \\ x_2 = \frac{9 - \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς :

- i. -5 και 2 ii. 4 και $\frac{1}{4}$ iii. $1 - \sqrt{7}$ και $1 + \sqrt{7}$ iv. $-\sqrt{2} - \sqrt{5}$ και $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$

6. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

- i. Άθροισμα 2 και γινόμενο -1. ii. Άθροισμα $\frac{5}{6}$ και γινόμενο $\frac{1}{6}$

7. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να υπολογίσετε τη διακρίνουσα τους.

- i. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii. $x^2 - 8x + 15 = 0$ iii. $x^2 + x - 12 = 0$ iv. $x^2 + x - 2 = 0$

8. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

- i. $x_1 + x_2$ ii. $x_1 x_2$ iii. $x_1^2 + x_2^2$ iv. $x_1^3 + x_2^3$ v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vi. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

9. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

- i. $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ ii. $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$ iii. x_1^2 και x_2^2 iv. x_1^3 και x_2^3

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

➤ ΜΟΡΦΗ 1 : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Επειδή : $x^2 = |x|^2$ τότε : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ και έπειτα θέτω $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

Λύση: Έχω $x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 35 = 0$. Θέτω $|x| = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + 2\omega - 35 = 0, \Delta = 4 + 140 = 144$,

$$\omega_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} \omega = 5, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -7, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$
- Για $\omega = -7 \Leftrightarrow |x| = -7$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 2 : $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΗ)

Έχουν τη μορφή $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ και λύνονται με αντικατάσταση :

$$x^2 = \omega \geq 0$$

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Λύση: Θέτω $x^2 = \omega \geq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $2\omega^2 - 7\omega - 4 = 0$. Είναι

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0, \omega_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} \omega = 4, \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega = -\frac{1}{2}, \text{απορ.} \end{cases}$$

- Για $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- Για $\omega = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ Αδύνατη.

➤ ΜΟΡΦΗ 3 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρονομαστή, 1^{ου} παραγοντοποιώ τους παρονομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους, 2^{ου} παίρνω περιορισμούς, 3^{ου} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρονομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ου} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$

Λύση: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{(x-1)(x+1)}$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

$$(x-1)(x+1) \frac{x}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+1) - 2(x-1) = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{δεκτή}) \quad \text{ή} \\ x = -2 \quad (\text{δεκτή}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $x^2 - 8|x| + 7 = 0$
- ii. $6x^2 + 5|x| - 11 = 0$
- iii. $5x^2 + 3|x| + 1 = 0$
- iv. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
- v. $x^4 + x^2 - 6 = 0$
- vi. $2x^4 + 10x^2 + 7 = 0$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $3(x+5)^2 + 2|x+5| - 5 = 0$
- ii. $3(4x-1)^2 + |4x-1| + 5 = 0$
- iii. $2\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 - \left|\frac{5x}{2} - 5\right| + 2 = 0$
- iv. $(x-4)^4 - 7(x-4)^2 + 6 = 0$
- v. $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{4}{x}\right) + 20 = 0$
- vi. $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 0$
- vii. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 35\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0$
- viii. $(x^2 - 5x + 1)^2 + 2(x^2 - 5x + 1) - 3 = 0$
- ix. $(x-1)^2 - 6\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8 = 0$
- x. $(x+2)^2 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 15 = 0$
- xi. $(2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3 = 0$
- xii. $(|x| - 3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - 4 = 0$
- xiii. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$
- xiv. $x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 6$
- xv. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$
- xvi. $x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = 0$
- ii. $\frac{x^2 + 5}{x^2 - x} - \frac{x+5}{x-1} = \frac{1}{x}$
- iii. $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Σε μια 2^ο βαθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, αν οι συντελεστές a, b, c είναι παράμετροι, τότε η εξίσωση λέγεται παραμετρική. Στις παραμετρικές εξισώσεις ο άγνωστος συνήθως συμβολίζεται με x ενώ η παράμετρος με λ ή μ ή κάποιο άλλο γράμμα.

Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

- έχει δυο ρίζες άνισες, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta > 0$
- έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. τουλάχιστον μια), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \geq 0$
- έχει μια διπλή ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta = 0$
- δεν έχει πραγματικές ρίζες (δηλ. είναι αδύνατη), αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta < 0$

Επιπλέον οι τύποι του Vieta μπορούν να συνδυαστούν με τις ρίζες τις εξίσωσης, δηλαδή αν θέλουμε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ να έχει :

- δυο ρίζες άνισες θετικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S > 0$
- δυο ρίζες άνισες αρνητικές, τότε πρέπει $\Delta > 0, P > 0$ και $S < 0$
- δυο ρίζες άνισες ετερόσημες, τότε πρέπει $\Delta > 0, P < 0$
- δυο ρίζες αντιστροφές, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, P = 1$
- δυο ρίζες αντίθετες, τότε πρέπει $\Delta \geq 0, S = 0$
- μια ρίζα θετική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S > 0$
- μια ρίζα αρνητική (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S < 0$
- μια ρίζα το μηδέν (διπλή), τότε πρέπει $\Delta = 0, S = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13. (Άσκηση 3 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες :

i. $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$ ii. $ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \alpha \neq 0$

Λύση :

i. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 2, \gamma = -(\lambda - 2)$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot \lambda \cdot [-(\lambda - 2)] = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \lambda \neq 0).$$

ii. Αρκεί να δείξω ότι $\Delta \geq 0$. Έχω : $\alpha = \alpha, \beta = \alpha + \beta, \gamma = \beta$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (άρα και για κάθε } \alpha \neq 0).$$

14. (Άσκηση 4 σελ. 93 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0, \mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

Λύση :

Για να έχει η εξίσωση μια διπλή ρίζα πρέπει $\Delta = 0$, έχω : $\alpha = \mu, \beta = 2, \gamma = \mu$

$$\text{Οπότε } \Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot \mu \cdot \mu = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 4 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ ή } \mu = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ ii. $3x^2 + 2\lambda x - \lambda^2 = 0$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 = 0$, έχει μια διπλή ρίζα.

17. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

18. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

i. Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίθετες.

iii. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες αντίστροφες.

19. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (6\lambda - 1)x - 20\lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον αριθμό 3.

i. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση έχει και άλλη μια ρίζα, διαφορετική του 3.

20. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq \lambda$, να δειχτεί ότι η εξίσωση : $(\lambda - \kappa)x^2 - 2(\kappa + \lambda)x + \kappa - \lambda = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες.

21. Δίνεται η εξίσωση $\kappa^2 x^2 - 2\lambda \kappa^2 x + \lambda^2 (\kappa^2 - 1) = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

i. η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες,

ii. οι αριθμοί $\lambda - \frac{\lambda}{\kappa}$ και $\lambda + \frac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρίζες της εξίσωσης.

22. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει:

i. μια διπλή ρίζα,

ii. δύο ρίζες ετερόσημες,

iii. δύο ρίζες αρνητικές,

iv. δύο ρίζες θετικές,

v. δύο ρίζες αντίστροφες.

23. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 3x - 7 = 0$ (1).

i. Να υπολογίσετε τις τιμές των $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

ii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ και $B = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1)$.

iii. Να δείξετε ότι : $x_1^2 + x_2^2 = 23$.

iv. Να βρείτε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τα τετράγωνα των ριζών της (1).

24. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να λύσετε την εξίσωση : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.
- Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 2x_1 + 1$, $\rho_2 = 2x_2 + 1$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -\frac{2}{3}.$$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- Να βρείτε το λ , ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
- Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την επόμενη παράσταση : $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 3.2 – 3.3 Η εξίσωση $x^v = a$ - Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 13028

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, με $a \in \mathbb{R}^*$ (1).

- Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3. (Μονάδες 10)
- Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2 14741

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

- Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$. (Μονάδες 13)
- Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,
 - Να δείξετε ότι $K \neq 0$. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3 37181

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ . (Μονάδες 13)
- Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 37178

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

- α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
(Μονάδες 10)
- β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5 37171

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.
(Μονάδες 10)
- β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 6 36890

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.
(Μονάδες 10)
- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7 35038

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

- α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.
(Μονάδες 10)
- β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8 34920

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

- α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και x_1x_2 .
(Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1, 4x_2$.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9 34436

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}, B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)
- ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)
- β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 10 34161

- α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.
(Μονάδες 12)
- β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 34154

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12 34150

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13 34149

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2). (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2). (Μονάδες 7)

3ο Θέμα

ΘΕΜΑ 14 14749

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x-|x|}$. (Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15 14052

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 16 14651

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \quad \text{όπου } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

- i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)
- ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 17 14490

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω . (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)
- ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 18 14406

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$. (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 19 12912

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20 13320

Θεωρούμε τις εξισώσεις $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (I) και $\gamma x^2 + bx + \alpha = 0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II). (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

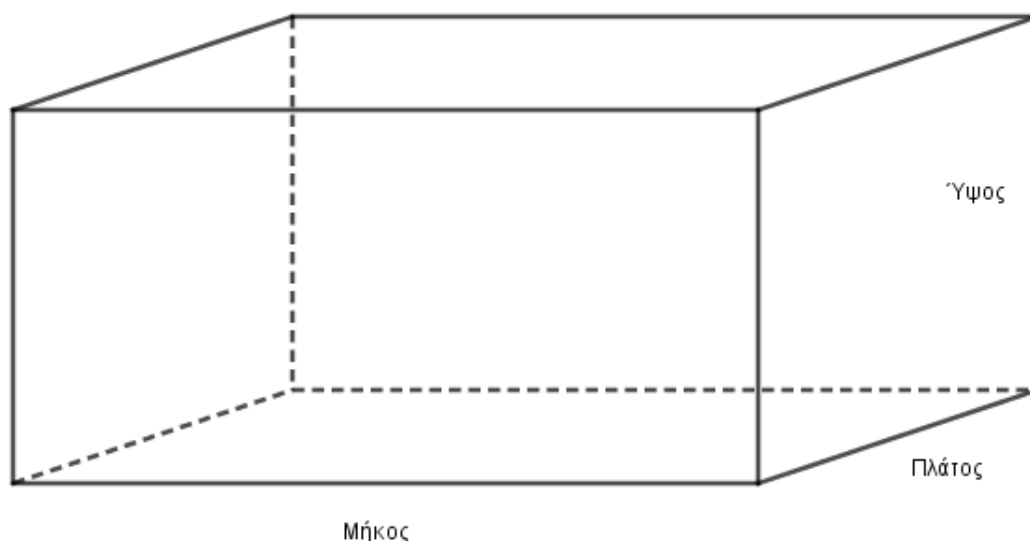
ΘΕΜΑ 21 12683

Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 . (Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 22 36675

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό λ . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 23 36651

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.
(Μονάδες 8)
- β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 3)
ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.
(Μονάδες 6)
- γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 24 36663

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

- α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
- i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)
ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 36661

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
- δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 26 34544

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

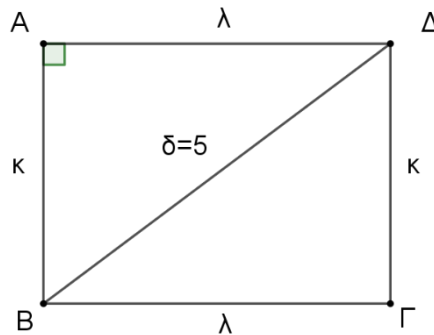
- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ . (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 27 34327

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)
- β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.
- i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)
- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 34390

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14 \text{ cm}$ και μια διαγώνιος $\delta = 5 \text{ cm}$.



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12 \text{ cm}^2$. (Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$. (Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14 \text{ cm}$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 34310

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 30 33889

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$. (Μονάδες 5)

ii. $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4). (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31 33585

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α . (Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 32 33584

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 33 14820

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A . (Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 34 14759

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$. (Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γι), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x + \beta > 0$ ή $\alpha x + \beta < 0$

1^{ος} τρόπος : Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

2^{ος} τρόπος : Αν θέλω να λύσω την ανίσωση με τη βοήθεια του πίνακα πρόσημου τότε λύνω την αντίστοιχη εξίσωση και στη συνέχεια βάζω τη ρίζα στο πινακάκι. Για τα πρόσημα ισχύει ότι δεξιά από το 0 είναι ομόσημο του α ενώ αριστερά ετερόσημο του α. Δηλ.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	ετερόσημο α	0	ομόσημο α

π.χ.1 Ναλυθεί και με τους 2 τρόπους η ανίσωση : $-3x + 18 \geq 0$

Λύση: 1^{ος} $-3x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -18 \Leftrightarrow x \leq 6$ ή $x \in (-\infty, 6]$

Λύση: 2^{ος} Έχω $-3x + 18 = 0 \Leftrightarrow -3x = -18 \Leftrightarrow x = 6$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-3x + 18$	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $-3x + 18 \geq 0$ τότε $x \in (-\infty, 6]$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : Για να βρούμε τις κοινές δυο (ή περισσότερων) ανισώσεων, τις λύνουμε ξεχωριστά και παριστάνουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα αριθμών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Για να λύσουμε μια διπλή ανίσωση $A(x) \leq B(x) \leq \Gamma(x)$, λύνουμε ξεχωριστά τις ανισώσεις $A(x) \leq B(x)$ και $B(x) \leq \Gamma(x)$ και βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 : Ειδική περίπτωση εξίσωσης με απόλυτες τιμές που ανάγεται σε ανίσωση 1^{ου} βαθμού :

$|f(x)| = f(x)$ ή $|f(x)| = -f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα εξής :

$$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

π.χ. 1 Ναλυθεί η εξίσωση : $|2x - 8| = 2x - 8$.

$$|2x - 8| = 2x - 8 \Leftrightarrow 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

π.χ. 2 Ναλυθεί η εξίσωση : $|3x - 6| = 6 - 3x$.

$$|3x - 6| = 6 - 3x \Leftrightarrow 3x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6}$

ii. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x$

iii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

Λύση:

i. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{4} < \frac{x}{6} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=12} 12 \frac{x-1}{2} + 12 \frac{2x+3}{4} < 12 \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1) + 3(2x+3) < 2x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 6x - 6 + 6x + 9 < 2x \Leftrightarrow 12x - 2x < -3 \Leftrightarrow 10x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{10} \text{ ή } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$

ii. $\frac{x-12}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} > x \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=4} 4 \frac{x-12}{2} + 4 \frac{x}{2} + 4 \frac{3}{4} > 4x \Leftrightarrow 2(x-12) + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow$
 $2x - 24 + 2x + 3 > 4x \Leftrightarrow 0x > 21 \text{ αδύνατη}$

iii. $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5} \xLeftrightarrow{\text{ΕΚΠ}=10} 10 \frac{x-2}{2} + 10 \frac{1-2x}{5} < 10 \frac{x}{10} - 10 \frac{2}{5} \Leftrightarrow$
 $5(x-2) + 2(1-2x) < x - 4 \Leftrightarrow 5x - 10 + 2 - 4x < x - 4 \Leftrightarrow 0x < 4 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

2. (Άσκηση 2 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

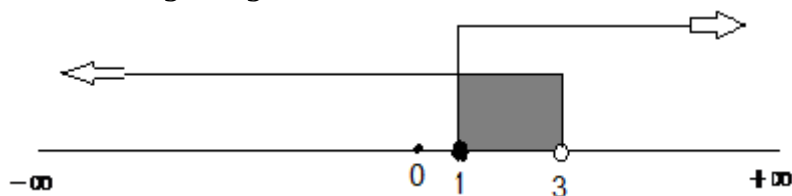
$$3x - 1 < x + 5 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$$

Λύση:

Έχω : $3x - 1 < x + 5 \Leftrightarrow 3x - x < 5 + 1 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3 \quad (1)$

Επίσης : $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - 2 \frac{x}{2} \leq 2x + 2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \geq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (2)$$



Άρα $1 \leq x < 3$ ή $x \in [1, 3)$.

3. (Άσκηση 7 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $|2x - 6| = 2x - 6$

ii. $|3x - 1| = 1 - 3x$

Λύση:

i. $|2x - 6| = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$

ii. $|3x - 1| = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $2x - 1 < -x + 3 - 3(x - 2)$

ii. $2 \frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{2} \leq 2x + \frac{6x+1}{6}$

$$\begin{aligned} \text{iii. } & \frac{x+3}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{x+19}{6} \\ \text{iv. } & \frac{x+10}{5} - 2 < \frac{3(x+1) - (x-3)}{10} \\ \text{v. } & \frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{5x}{4} - \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 \\ \text{vi. } & \frac{x(x-3)^2}{2} - \frac{x(1-9x)}{3} > \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

5. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{7x-18}{5} > 4\frac{2x-5}{5} - 1 \quad \text{και} \quad x + \frac{3}{2} + \frac{2x}{5} > \frac{27}{5} + \frac{6x-1}{20} \\ \text{ii. } & \frac{x-3}{3} - \frac{x+4}{6} < \frac{x-6}{2} + 2 \quad \text{και} \quad \frac{x+6}{4} - \frac{-x+8}{4} \geq \frac{6x-8}{5} - x + 2 \\ \text{iii. } & -6(x-6) < 7(3x+1) + 2 \quad \text{και} \quad -5\left(\frac{x}{3} - 1\right) \geq 2x + \frac{x-9}{3} - 4 \end{aligned}$$

6. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\begin{aligned} \text{i. } & -6 < -x - 1 < 3 \\ \text{ii. } & -x < -5x - 4 < -5x \\ \text{iii. } & 2 + \frac{8-3x}{4} < 5 - \frac{x}{4} \leq \frac{4+x}{4} + 3 \\ \text{iv. } & x + \frac{5}{2} \leq 2x + \frac{11}{2} < 2 + \frac{3(x+2)}{2} \end{aligned}$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i. } & |4x-8| = 4x-8 \\ \text{ii. } & |x-2| = 2-x \end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια παραμετρική ανίσωση, εργάζομαι ως εξής :

Βήμα 1 : Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή : $\alpha \cdot x < \beta$ ή $\alpha \cdot x > \beta$

Βήμα 2 : Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το α , μια $\alpha > 0$, μια $\alpha < 0$ και μια $\alpha = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. Να λύσετε την ανίσωση : $\lambda(2x - \lambda) \leq \lambda x - 2\lambda + 2x$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Λύση :

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } & \lambda(2x - \lambda) \leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda^2 \leq \lambda x - 2\lambda + 2x \Leftrightarrow \lambda x - 2x \leq \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ αν } \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 \text{ τότε : (1): } (\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \leq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \leq \lambda$$

- αν $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ ΤΟΤΕ : (1): $(\lambda - 2)x \leq \lambda(\lambda - 2) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 2)x}{\lambda - 2} \geq \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Leftrightarrow x \geq \lambda$
- αν $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ΤΟΤΕ : (1): $(2 - 2)x \leq 2(2 - 2) \Leftrightarrow 0x \leq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ

- $\lambda(x + 5) < \lambda^2 + 2x + 6$
- $\lambda(x - 4) \geq (\lambda - 2)(\lambda + 2) - 4(x - 1)$
- $\frac{(\lambda - 2)x}{3} < 1 - \frac{x - 2}{3}$
- $\frac{\lambda x - \lambda}{3} \geq \frac{x - \lambda}{4} - \frac{x + 4}{6}$

10. Δίνεται η εξίσωση: $-x - \lambda(\lambda - 3x) = \lambda^2 - 2(2x + 1)$

- Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ .
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση που είναι μεγαλύτερη του αριθμού -4.

11. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + 2 = 2(\alpha - \beta)$ να λύσετε τις ανισώσεις:

- $\frac{x}{\alpha - \beta} - \frac{3 - x}{4} \leq \frac{6x - \beta}{8}$
- $(\alpha^{2012} - \beta^{2012})x + \frac{\beta^{10} + 3\beta^9 x}{2} > -\frac{x + 2}{\beta - \alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Για τις ανισώσεις με απόλυτη τιμή υπάρχουν οι παρακάτω σημαντικές ιδιότητες :

$$\begin{aligned} 1) \quad |x| < \alpha &\Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \quad (\alpha > 0) \\ 2) \quad |x| > \alpha &\Leftrightarrow x > \alpha \quad \text{ή} \quad x < -\alpha \\ &(\alpha > 0) \end{aligned}$$

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $|2x - 5| < 6$

Λύση: $|2x - 5| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x - 5 < 6 \Leftrightarrow -1 < 2x < 11 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{11}{2}$ ή αλλιώς $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 7| > 2$

Λύση: $|3x + 7| > 2 \Leftrightarrow 3x + 7 > 2 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$ (1)

ή $3x + 7 < -2 \Leftrightarrow 3x < -9 \Leftrightarrow x < -3$ (2)

Αν συναληθεύσω της (1) και (2) $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $|3x + 2| \geq 3|x - 1|$

Λύση: $|3x + 2| \geq 3|x - 1| \Leftrightarrow |3x + 2|^2 \geq 9|x - 1|^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 12x + 4 \geq 9x^2 - 18x + 9 \Leftrightarrow$

$30x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{30} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12. (Άσκηση 5 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| < 3$

ii. $|x - 1| \leq 4$

iii. $|2x + 1| < 5$

Λύση :

i. $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ ή $x \in (-3, 3)$

ii. $|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$ ή $x \in [-3, 5]$

iii. $|2x + 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$ ή $x \in (-3, 2)$

13. (Άσκηση 6 σελ. 104 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

ii. $|x - 1| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 4 \\ \text{ή} \\ x - 1 < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ \text{ή} \\ x < -3 \end{cases}$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

$$\text{iii. } |2x+1| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 5 \\ \text{ή} \\ 2x+1 \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 4 \\ \text{ή} \\ 2x \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ή} \\ x \leq -3 \end{cases} \text{ ή αλλιώς } x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ)

- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > B(x)$ ή $|A(x)| < B(x)$ εδώ θα πρέπει πρώτα να βγάλουμε το απόλυτο διακρίνοντας δυο περιπτώσεις $A(x) \geq 0$ και $A(x) < 0$. Έπειτα συναληθεύουν τις λύσεις με τον αντίστοιχο περιορισμό.
- **ΜΟΡΦΗ :** $|A(x)| > |B(x)|$ ή $|A(x)| < |B(x)|$ εδώ υψώνω και τα δυο μέλη στο τετράγωνο και σύμφωνα με την ιδιότητα $|\alpha|^2 = \alpha^2$, φεύγουν τα απόλυτα και λύνω κανονικά την ανίσωση.
- **ΜΟΡΦΗ :** $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| > \Gamma(x)$ ή $\kappa|A(x)| + \lambda|B(x)| < \Gamma(x)$ εδώ πρέπει να κάνουμε απαλοιφή των απολύτων, σχηματίζοντας πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

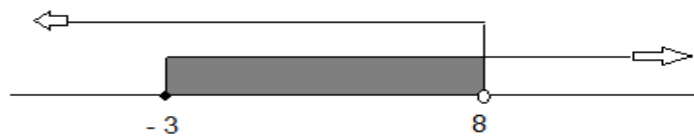
14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i. $|x+3| > 2x-5$
- ii. $|2x-1| \geq 2|x-2|$
- iii. $-3|x+2| + |x-1| < x-3$

Λύση:

i. $|x+3| > 2x-5 \quad (1)$

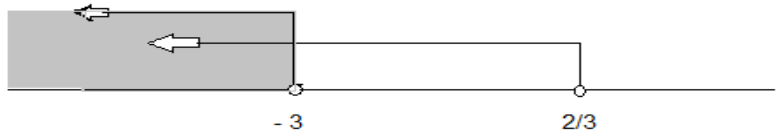
- Αν $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow x+3 > 2x-5 \Leftrightarrow -x > -8 \Leftrightarrow x < 8$



Άρα $x \geq -3$ και $x < 8$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in [-3, 8)$

- Αν $x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ τότε η (1) γίνεται :
 $|x+3| > 2x-5 \Leftrightarrow -x-3 > 2x-5 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$



Άρα $x \leq -3$ και $x < \frac{2}{3}$ δηλ.

Άρα τελικά $x \in (-\infty, -3)$

ii. $|2x-1| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow |2x-1|^2 \geq (2|x-2|)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 4(x-2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 4x^2 - 16x + 16 \Leftrightarrow 12x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

iii. $-3|x+2|+|x-1| < x-3$ (1)

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
x+2	-	0	+		+
x-1	-		-	0	+

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x \in (-\infty, -2)$ η (1) γίνεται :

$$3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow 3x+6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow x < -10, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in (-\infty, -2) \text{ παίρνουμε } x \in (-\infty, -10)$$

- Αν $x \in [-2, 1)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2)-(x-1) < x-3 \Leftrightarrow -3x-6-x+1 < x-3 \Leftrightarrow -5x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [-2, 1) \text{ παίρνουμε } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right)$$

- Αν $x \in [1, +\infty)$ η (1) γίνεται :

$$-3(x+2)+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x-6+x-1 < x-3 \Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}, \text{ οπότε αν το συναληθεύσουμε με το } x \in [1, +\infty) \text{ παίρνουμε } x \in [1, +\infty). \text{ Άρα οι λύσεις της ανισώσεως είναι } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, 1\right) \text{ ή } x \in [1, +\infty) \text{ δηλ. } x \in (-\infty, -10) \text{ ή } x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

$$x \in \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

15. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| < 7$ ii. $|1-x| \leq 3$ iii. $|2x+3| < 1$ iv. $|x-7| > 2$ v. $|x+4| \geq 5$

vi. $|3x-6| > 9$ vii. $|1-2x| \geq 5$ viii. $|x-3| > 2x+1$ ix. $4-|x-2| \geq 3x$ x. $3-\frac{x-3}{2} \leq |x+2|$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-3| \geq |x+2|$ ii. $|3-2x|-2|x-3| > 0$ iii. $3|x-1|-2|x-3| \geq 5$

iv. $|x+3|-|2-x| > 2x+7$ v. $|x+4| \geq -5$ vi. $|13x-21| \leq -4$

vii. $\frac{|1-2x|-3}{2} \leq 4$ viii. $\frac{7-3|2x+1|}{4} > 1$ ix. $|2x-6| \leq 0$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x-1|+|2x-2| > |5x-5|-6$

ii. $|x-2|+8 < |5x-10|-|4-2x|$

iii. $|2x-1|+2-\frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$

iv. $8-|2x-6| \leq \frac{|3-x|-4}{2}$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $1 < |x+5| < 3$ ii. $4 \leq |6-2x| \leq 10$ iii. $4-|x-2| \geq 3x$
 iv. $2x-|x+4| < 8$ v. $|x-3| > |x+2|$ vi. $|x-1| \leq |x+4|$
 vii. $|x-4| - |x+1| > 0$ viii. $|3-2x| - 2|x-3| > 0$

19. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $|x| > x$ ii. $|x| \geq x$ iii. $|x| > -x$ iv. $|x| \geq -x$ v. $|x| < x$
 vi. $|x| \leq x$ vii. $|x| < -x$ viii. $|x| \leq -x$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $||x|-3| < 2$ ii. $||x-2|-3| \leq 1$ iii. $|7-|2x-1|| \geq 10$ iv. $1 \leq ||x-1|-4| \leq 3$

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $\sqrt{4x^2-8x+4} + |x-1| < 12$ ii. $\sqrt{9x^2-36x+36} + |2x-4| > 15$

22. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
 ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι: i) ίση με 8, ii) μικρότερη του 2, iii) ανήκει στο διάστημα $[4,6]$.

23. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 8x + |\lambda - 2| = 0$ (1).

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 \cdot x_2 \geq 3$.

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0$ (1).

- i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να είναι ίση με 8.
 iii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να είναι μικρότερη του 2.
 iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διπλή ρίζα να ανήκει στο διάστημα $[4,6]$.

25. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + |2\lambda - 1| = 0$ (1).

- i. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες.
 ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1^3 + x_2^3 \geq 90$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14319

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

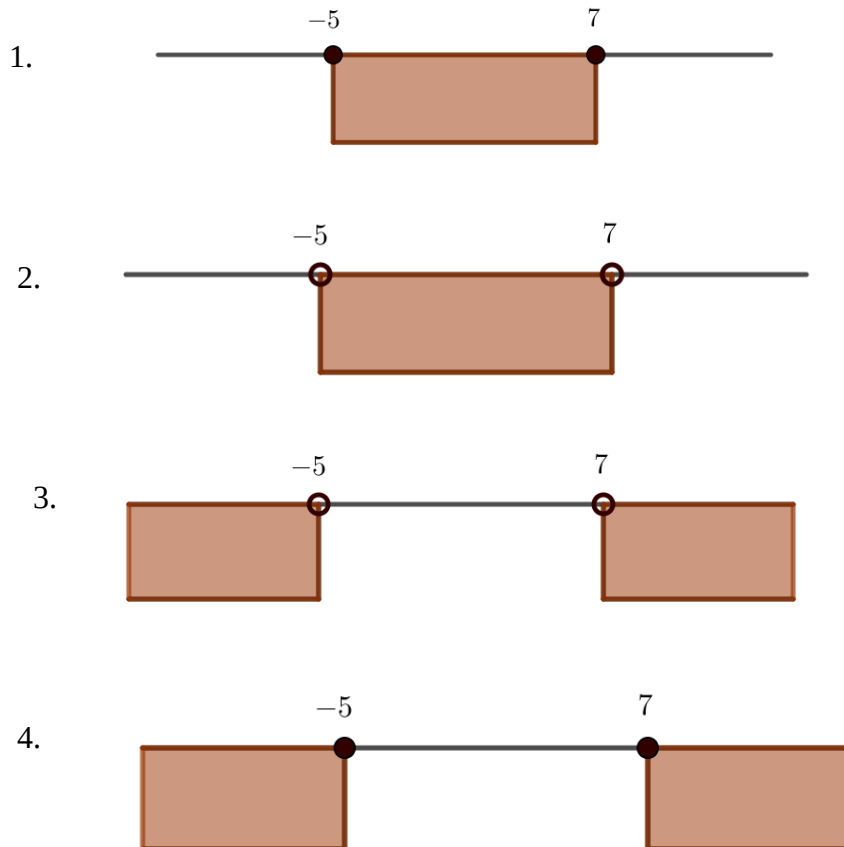
β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14295

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 13025

α) Να λύσετε την ανίσωση : $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|-x - 1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

- α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 37196

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)
- β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 37195

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 7 37193

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 37191

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

- i. $|1-2x| < 5$ (Μονάδες 9)
- ii. $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 9 37170

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . (Μονάδες 10)
- γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 36777

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 36888

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 12 36886

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$. (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13 35404

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14 36895

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$. (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15 36893

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$. (Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 16 35415

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

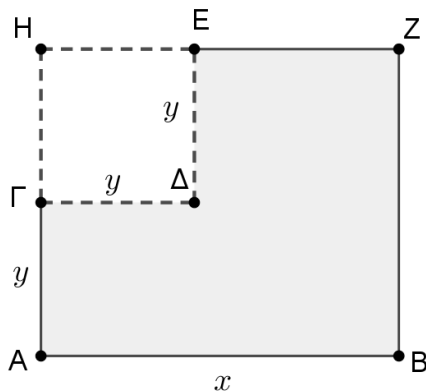
α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$. (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17 35549

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 18 34148

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 19 14650

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1). (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20 34325

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21 13474

Δίνονται οι ανισώσεις :

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x+4}{2} < 0 \quad (2)$$

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)
 β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α , β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)
 β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε :
 i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)
 ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)
 γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 34322

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$

- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ; (Μονάδες 4)
 β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ; (Μονάδες 6)
 γ)
 i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:
 $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$. (Μονάδες 2)
 ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)
 iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 24 33586

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

- α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
 β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
 i. να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)
 ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $ax^2 + bx + \gamma$, ($a \neq 0$) αρχικά βρίσκω τη διακρίνουσα του και έπειτα :

➤ Αν $\Delta > 0$ το τριώνυμο έχει 2 ρίζες x_1, x_2 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 - 5x + 6$

Λύση : έχω $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

➤ Αν $\Delta = 0$ το τριώνυμο έχει 1 διπλή ρίζα x_1 και παραγοντοποιείται ως εξής :

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)^2$$

π.χ.2 Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο : $x^2 + 6x + 9$

Λύση : έχω $x^2 + 6x + 9 = 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$

Άρα : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

➤ Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 112 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $x^2 - 3x + 2$

ii. $2x^2 - 3x - 2$

Λύση :

i. έχω $x^2 - 3x + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Άρα : $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

ii. έχω $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα : $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

i. $2x^2 + 5x - 3$

ii. $-9x^2 + 6x - 1$

iii. $x^2 - 3x + 4$

iv. $x^3 - 3x^2 - 4x$

v. $-x^3 - x^2 + 6x$

vi. $6x^3 + 7x^2 - 3x$

3. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.

- i. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$
- ii. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$
- iii. $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$
- iv. $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$
- v. $\frac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3x - 4}$
- vi. $\frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3 - x^2 - 3x}$
- vii. $\frac{-x^3 - 5x^2 + 6x}{3x^3 - 5x^2 + 2x}$
- viii. $\frac{x^3 - 4x}{x^3 - x^2 - 6x}$
- ix. $\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$
- x. $\frac{2x^2 + 5|x| - 3}{x^2 - 2|x| - 15}$
- xi. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2|x| - 3}$

4. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- i. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
- ii. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^4 - 4x^3 + 3x^2}$
- iii. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$
- iv. $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 + 2x + 1} : \left(\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3} : \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right)$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x}{x - 3} = \frac{1 - x}{x - 2}$
- ii. $\frac{x + 3}{x - 1} = \frac{x + 4}{x - 2} - \frac{2(x + 1)}{x^2 - 3x + 2}$
- iii. $\frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x + 2}{x + 3} + \frac{x + 1}{1 - x}$
- iv. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$

6. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{(x^2 - 3|x| - 4)(x^2 + |x| - 6)}{x^2 + 4|x| + 3}$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $A = 3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ ($\alpha \neq 0$) αρκεί να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και τις τιμές του x που γίνεται θετικό ή αρνητικό. Πιο συγκεκριμένα λύνω την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ βρίσκω τις ρίζες x_1, x_2 και τις τοποθετώ στο πινακάκι από το οποίο και βρίσκω το πρόσημο τις συνάρτησης στο διάστημα που θέλω.

1^η περίπτωση: $\Delta > 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

2^η περίπτωση: $\Delta = 0$

Τιμές του x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α		ομόσημο του α

3^η περίπτωση: $\Delta < 0$

Τιμές του x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α	ομόσημο του α

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 5x + 6 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 5x + 6 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in (2, 3)$

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in [2, 3]$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 6x + 9 > 0$

Λύση: Έχω : $x^2 - 6x + 9 = 0$ $\Delta = 36 - 36 = 0$ άρα $x = 3$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 6x + 9 > 0$ τότε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(Όταν η Διακρίνουσα είναι 0 το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας δηλ. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ οπότε μπορούμε να καταλάβουμε ακόμα καλύτερα γιατί ισχύουν τα πρόσημα στο πίνακάκι)

Παρατήρηση 1 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση 2 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 < 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα ότι είναι αδύνατη

Παρατήρηση 3 Αν είχα να λύσω την ανίσωση $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ θα έκανα ακριβώς την ίδια διαδικασία απλά στο τέλος θα έγραφα $x = 3$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $25 - x^2 \geq 0$

Λύση: Έχω $25 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $25 - x^2 \geq 0$ τότε $x \in [-5, 5]$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7. (Άσκηση 3 σελ. 112 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Για τις διαφορές τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων :

i. $x^2 - 2x - 15$ ii. $4x^2 - 4x + 1$ iii. $x^2 - 4x + 13$

Λύση :

i. Για το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχω : $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 4 + 60 = 64$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	0	+

Άρα $x^2 - 2x - 15 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ και

$x^2 - 2x - 15 < 0$ για κάθε $x \in (-3, 5)$.

ii. Για το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ έχω : $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$, $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (Διπλή ρίζα)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$	+	0	+

Άρα $4x^2 - 4x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(Άλλωστε θα μπορούσα εξ αρχής να παρατηρήσω ότι : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$. Γενικά όταν η Διακρινουσα ενός τριωνύμου είναι 0 τότε το τριώνυμο είναι ανάπτυσμα ταυτότητας)

iii. Για το τριώνυμο $x^2 - 4x + 13$ έχω : $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$	+	

Άρα $x^2 - 4x + 13 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 + 2x - 3 > 0$ ii. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ iii. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ iv. $4x^2 - 12x + 9 > 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2 - 5x \geq 0$ ii. $-x^2 + 4x > 0$ iii. $x^2 - 16 \leq 0$ iv. $49 < x^2$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $(x+3)^2 > 4(2x+3)$ ii. $4(x-5) - (x-4)(x+4) \geq 0$ iii. $2x(x-2) - (x-1)^2 < -4$
iv. $x^2 + 1 - \frac{(x+2)^2}{5} > 0$

11. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων :

i. $x^2 - 2x - 3 < 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$
ii. $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$
iii. $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$
iv. $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$
v. $3 \leq x^2 - 2x \leq 8$
vi. $2x^2 - 8x - 6 < (x-3)^2 < 3x^2 - 8x + 5$

12. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

i. $x^2 + 2x - 4 < 3x(x-1)$
ii. $(x-3)(x+3) > 2(2x-7)$
iii. $28 - (x+2)^2 > -2(x-3)(x+3)$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ ii. $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ iii. $x^2 - 6|x| + 8 > 0$ iv. $x^2 - 7|x| + 6 > 0$
v. $(2x-3)^2 - 6|2x-3| + 5 \leq 0$ vi. $(x^2 + 2x)^2 - 11|x^2 + 2x| + 24 \geq 0$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $|x^2 + 3x - 1| < 3$ ii. $|x^2 - 2x - 9| > 6$ iii. $|x-3| \geq 2|x+1|$ iv. $2|x+2| < |x+4|$
v. $|-x^2 + x + 2| \leq 1 - x(x+6)$ vi. $|x^2 + x - 6| \leq x^2 - 3x + 2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

- Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta < 0$ και $a < 0$
- Για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$) ισχύει :
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a > 0$
 - $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όταν : $\Delta \leq 0$ και $a < 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15. (Άσκηση 4 σελ. 114 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση :

i. έχει ρίζες ίσες ii. έχει ρίζες άνισες iii. είναι αδύνατη

Λύση :

i. Στην εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$ (1) έχω : $\alpha = \lambda, \beta = 3\lambda, \gamma = \lambda + 5$

Αρχικά για να είναι η εξίσωση 2^ο βαθμια πρέπει $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$. Έστω ότι $\lambda = 0$ τότε η (1) γίνεται $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow 0x^2 + 0x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$ αδύνατη. Άρα πρέπει $\lambda \neq 0$

Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες ίσες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 4 \end{cases} \text{ . Όμως πρέπει } \lambda \neq 0, \text{ άρα } \lambda = 4.$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες άνισες θα πρέπει να ισχύει :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) > 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda > 0$$

$$\text{Έχω : } 5\lambda^2 - 20\lambda = 0 \Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \\ \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$5\lambda^2 - 20\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $5\lambda^2 - 20\lambda > 0$ τότε $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, που ικανοποιεί και τον περιορισμό $\lambda \neq 0$.

iii. Για να είναι η εξίσωση (1) αδύνατη πρέπει :

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda + 5) < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20\lambda < 0 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 20\lambda < 0, \text{ άρα όπως προκύπτει από το παραπάνω πίνακάκι } \lambda \in (0, 4)$$

16. (Άσκηση 5 σελ. 114 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση :

Για να αληθεύει η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει : $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$.

Εδώ : $\alpha = 1 > 0$, $\beta = 3\lambda$ και $\gamma = \lambda$. Άρα αρκεί $\Delta < 0$.

$$\text{Έχω : } \Delta < 0 \Leftrightarrow (3\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 4\lambda < 0$$

$$\text{Έχω : } 9\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ 9\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{9} \end{cases}$$

λ	$-\infty$	0		$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$9\lambda^2 - 4\lambda$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $9\lambda^2 - 4\lambda < 0$ τότε $\lambda \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 - 4x + \lambda - 3$, με $\lambda \neq 0$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση : $(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

21. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2 > 0$ με $\lambda \neq 1$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda < 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

23. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση : $4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 + 4x + (3\lambda^2 - \lambda) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 - Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1^2 + x_2^2$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 8$.
25. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 4\lambda = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1 \cdot x_2 > 2x_1 + 2x_2 - 6$.
26. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + 3)x + \lambda + 6 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 + x_2^2 < 42$.
27. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $x_1^2 + x_2^2 < -2(2x_1 \cdot x_2 + 1)$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 4.2 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 12976

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 13321

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 14189

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι : $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14474

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6 38203

- α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$. (Μονάδες 7)
 β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 37182

- α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$. (Μονάδες 8)
 β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)
 γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 8 37169

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :
 $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$. (Μονάδες 12)
 β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9 37168

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1), $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

- α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2). (Μονάδες 12)
 β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 10 36892

- α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)
 β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 11 36887

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

- α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (Μονάδες 9)
 γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12 35035

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)
 β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13 35030

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14 34919

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$. (Μονάδες 13)

β) Αν $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15 34162

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 5| \leq 3$. (1) (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (2) (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16 14577

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1). (Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$. (Μονάδες 9)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 17 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$

και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18 13174

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B; (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19 14615

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20 14652

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21 14653

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 22 36678

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 36670

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 24 36669

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)
 β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)
 γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

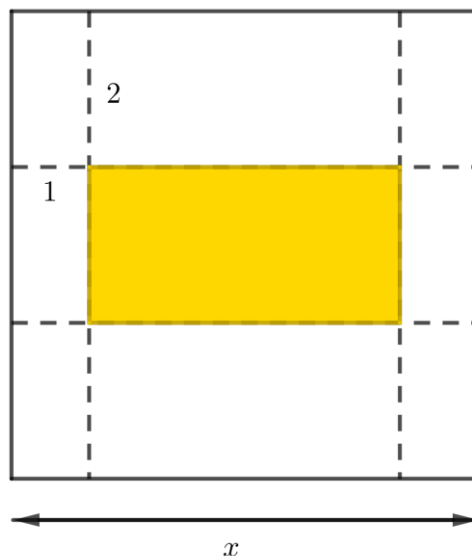
ΘΕΜΑ 25 36658

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

- α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)
 β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$; (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 26 35724

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά.



- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$, $5 \leq x \leq 10$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 . (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 27 14123

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. (Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$. (Μονάδες 4)

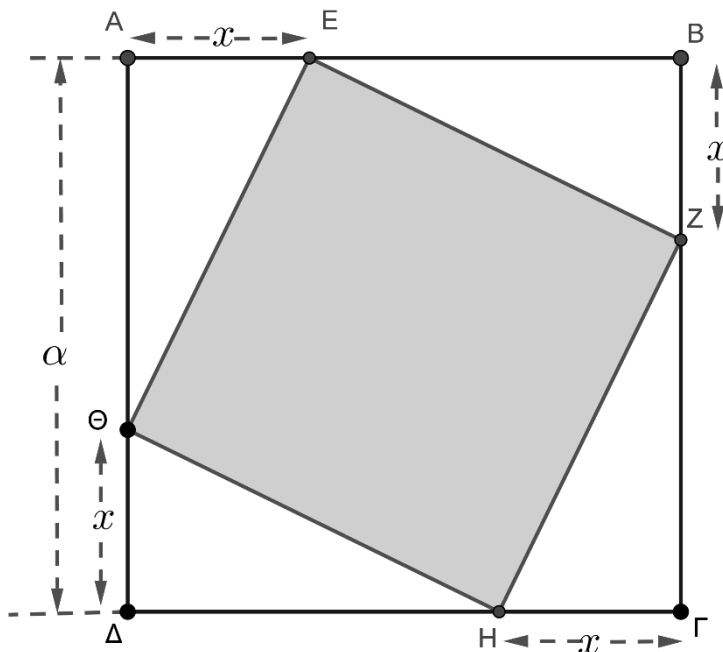
(ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης: $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024. (Μονάδες 7)

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 28 13368

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\Theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $EZH\Theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2 \text{ με } 0 \leq x \leq \alpha.$$

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 11)

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$. (Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)

ΘΕΜΑ 29 34323

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$, (Μονάδες 4)

ii. να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 30 34319

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31 34185

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 32 34186

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

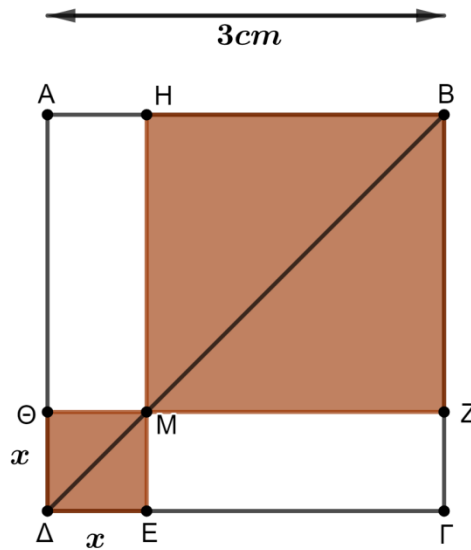
ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 33 34182

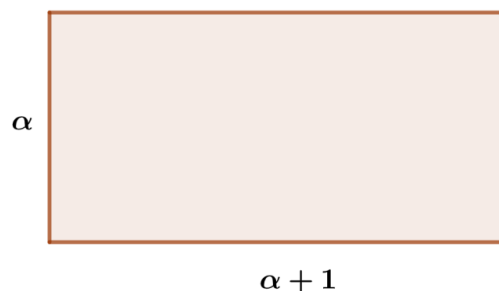
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



- α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta M E \Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (Μονάδες 9)
- β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$. (Μονάδες 7)
- γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 34 33892

- α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$. (Μονάδες 5)
- γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

- i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)
- ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 35 33890

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1). (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ . (Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 36 33712

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β)

i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$; (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 37 33711

Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 38 33698

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 39 33587

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 40 33582

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$. (Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 41 32682

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. (Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$. (Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:
 $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 42 14963

Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί. (Μονάδες 8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 43 14924

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3,1415\dots$. (Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 44 14654

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0.$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι. (Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$. (Μονάδες 5)

4.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \quad \text{Ή} \quad A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$$

Για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) < 0$

Βήμα 1 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$

Βήμα 2 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)

Βήμα 3 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.

Βήμα 4 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$
- $(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 117 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου : $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

Λύση :

Έχω :

- $2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$
- $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$
- $x^2 - x + 1 = 0$, αδύνατη

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων :

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$2 - 3x$	+		+	0	-		-
$x^2 - x - 2$	+	0	-		-	0	+
$x^2 - x + 1$	+		+		+		+
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Άρα $P(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ και $P(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

i. $(x-2)(x^2+2x-3) > 0$

ii. $(x-3)(x^2-4x+3) \leq 0$

iii. $(x^2+3x-4)(x^2-3x+2) < 0$

iv. $(x^2-4)(-x^2+3x+10) \geq 0$

v. $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2) > 0$

vi. $(x^2-7x+12)(-x^2+5x-6) \leq 0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(x-2)^4(x+1)^6(x^2-4) \geq 0$

ii. $(x-1)^5(x-2)^4(x-3)^3 \leq 0$

iii. $x^3+4x^2-12x \geq 0$

iv. $4x^2+5x > x^3$

v. $x^4-16 \leq 0$

vi. $x^5-5x^3+4x < 0$

4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$(x-2)(x^2+2x-15) \geq 0 \text{ και } (x^3-1)(5x^2-x+4)(x+3) > 0$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ :

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{Ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ γράφεται ισοδύναμα $A(x) \cdot B(x) > 0$ ή $A(x) \cdot B(x) < 0$ [όπου $B(x) \neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

➤ Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > \Gamma(x)$ γράφεται :
 $\frac{A(x)}{B(x)} - \Gamma(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow [A(x) - B(x) \cdot \Gamma(x)] \cdot B(x) > 0$ και λύνεται όπως η προηγούμενη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0$

Λύση: Πρέπει $x^2-5x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 4$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \leq 0$$

$$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ ή } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{ή } x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$$

x	$-\infty$	-3		0		1		4	$+\infty$
$x^2 + 3x$	+	0	-	0	+		+		+
$x^2 - 5x + 4$	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x + 4} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)(x^2 - 5x + 4) \leq 0$ τότε $x \in [-3, 0] \cup (1, 4)$.

(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

6. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Λύση: Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$

$$\text{Έχω : } \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3, \text{ Αδύνατη}$$

$$\text{ή } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x^2 + 3$	+		+		+
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 6) < 0$ τότε $x \in (2, 3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πινακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφθεί εντελώς.)

7. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \geq \frac{8}{x^2-1}$

Λύση: Έχω : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2(x-1) - 8}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2 - 8}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0 \text{ Έχω : } (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2$$

$$\text{ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Αρα επειδή θέλω $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - 1) \geq 0$ τότε

$x \in (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [3, +\infty)$. (Στο $(-1, 1)$ είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0$ ii. $\frac{25-x^2}{x+2} > 0$ iii. $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ iv. $\frac{-x^2+3x+4}{x^2-1} \leq 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $\frac{3x-1}{x+2} \geq 2$ ii. $\frac{2(x-3)}{7-x} \geq -1$ iii. $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1$ iv. $\frac{x+1}{x-1} - 2 < \frac{1-x}{x}$
v. $\frac{2-x}{x^3+x^2} \leq \frac{1-2x}{x^3-2x^2}$ vi. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $(|x|-2)(x^2-2x-3) \geq 0$ ii. $(|x|-4)(x^2+2x-8) \leq 0$
iii. $\left| \frac{x^2-5x}{x^2-4} \right| = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$ iv. $\left| \frac{3x-x^2}{x-2} \right| = \frac{x^2-3x}{x-2}$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-2}{x-1} + 2 \leq 0$ ii. $\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x-2} - 2 \leq 0$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda-2)x^2 - 3x + (\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

13. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 3 = 0$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν:

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$ β) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 7$

5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε

συνήθως με α_1 , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n καλείται **n -οστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_n .

➤ Σε μια ακολουθία ο πρώτος όρος είναι ο α_1 , εκτός και αν έχει οριστεί διαφορετικά, ενώ ο n -οστός όρος δεν είναι ο τελευταίος όρος, εκτός κι αν έχει έτσι οριστεί.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός όρων μιας ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό της όρο.

Όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας, τότε για να βρούμε οποιονδήποτε όρο της α_k , αρκεί να θέσουμε $n = k$ στον τύπο της.

Αναδρομικός τύπος μιας ακολουθίας ονομάζεται μια σχέση που συνδέει δυο ή περισσότερους γενικούς όρους της ακολουθίας. Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου μπορούμε να βρούμε οποιονδήποτε άλλο όρο της ακολουθίας. Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

- (i) Τον αναδρομικό της τύπο και
- (ii) Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Προσδιορισμός αναδρομικού τύπου ακολουθίας, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της.

Για να ορίσουμε αναδρομικά μια ακολουθία, συνήθως εργαζόμαστε ως εξής :

1^ο Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1}

2^ο Προσπαθούμε να εκφράσουμε τον όρο α_{n+1} με τη βοήθεια του όρου α_n .

3^ο Βρίσκουμε όσους αρχικούς όρους χρειάζονται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

- i) $\alpha_n = 2n + 1$ ii) $\alpha_n = 2^n$ iii) $\alpha_n = n^2 + n$

Λύση :

i) $\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $\alpha_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $\alpha_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, $\alpha_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

ii) $\alpha_1 = 2^1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 = 4$, $\alpha_3 = 2^3 = 8$, $\alpha_4 = 2^4 = 16$, $\alpha_5 = 2^5 = 32$

iii) $\alpha_1 = 1^2 + 1 = 2$, $\alpha_2 = 2^2 + 2 = 6$, $\alpha_3 = 3^2 + 3 = 12$, $\alpha_4 = 4^2 + 4 = 20$, $\alpha_5 = 5^2 + 5 = 30$

2. (Άσκηση 2 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i) $\alpha_1 = 2, \alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ ii) $\alpha_1 = 0, \alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$

Λύση:

i) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \frac{1}{\alpha_v}$ για :

$$v = 1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$v = 2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v = 3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

$$v = 4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4} \Leftrightarrow \alpha_5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha_5 = 2$$

ii) Από τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \alpha_v^2 + 1$ για :

$$v = 1 \text{ έχω : } \alpha_2 = \alpha_1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1$$

$$v = 2 \text{ έχω : } \alpha_3 = \alpha_2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 1^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_3 = 2$$

$$v = 3 \text{ έχω : } \alpha_4 = \alpha_3^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 2^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_4 = 5$$

$$v = 4 \text{ έχω : } \alpha_5 = \alpha_4^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 5^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha_5 = 26$$

3. (Άσκηση 3 σελ. 124 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

i) $\alpha_v = v + 5$ ii) $\alpha_v = 2^v$ iv) $\alpha_v = 5v + 3$

Λύση:

i) $\alpha_1 = 1 + 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = (v+1) + 5 - (v+5) = v+1+5-v-5 = 1$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 1 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 1$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 6} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 1}$$

ii) $\alpha_1 = 2^1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω το πηλίκο

$$: \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2^{v+1}}{2^v} = \frac{2^v \cdot 2}{2^v} = 2. \text{ Άρα } \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = 2\alpha_v. \text{ Άρα η ακολουθία ορίζεται}$$

αναδρομικά ως εξής : $\boxed{\alpha_1 = 2}$ και $\boxed{\alpha_{v+1} = 2\alpha_v}$

iv) $\alpha_1 = 5 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8$

Για να βρω μια σχέση που να συνδέει τους όρους α_{v+1} και α_v , υπολογίζω τη διαφορά : $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5(v+1) + 3 - (5v+3) = 5v+5+3-5v-3 = 5$. Άρα

$\alpha_{v+1} - \alpha_v = 5 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 5$. Άρα η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής :

$$\boxed{\alpha_1 = 8} \text{ και } \boxed{\alpha_{v+1} = \alpha_v + 5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών :

i. $\alpha_n = 3n + 2$ ii. $\alpha_n = 4n - 2$ iii. $\alpha_n = n^2 - 3n + 2$ iv. $\alpha_n = 2^{n-1}$

5. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

(ΑΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ)

i. $\alpha_n = 2n + 3$ ii. $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$ iii. $\alpha_n = 3n - 1$ iv. $\alpha_n = 3^n - 2$

v. $\alpha_n = 2n - 3$ vi. $\alpha_n = 2n \cdot 3^n$ vii. $\alpha_n = 3^n + 1$

6. Να βρείτε το n -οστό (γενικό) όρο των ακολουθιών :

(ΑΠΟ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟ ΤΥΠΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΣΕ ΓΕΝΙΚΟ)

i. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 3$

ii. $\alpha_1 = 7$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 2$

iii. $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$

iv. $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$

v. $\alpha_1 = 18$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$

7. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = 2n^2 - 4n$. Να βρείτε :

i. τους τέσσερις πρώτους όρους και τον 100^ο όρο της

ii. τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}$.

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega$ ή $\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega$

- Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και ω μιας αριθμητικής προόδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας αριθμητικής προόδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$. (Ασκήσεις 1 - 5 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 129,130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Αριθμητικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Ο β λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ .

(Ασκήσεις 6 - 7 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Έστω α_v μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Το άθροισμα S_v των πρώτων ν όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

(Ασκήσεις 8 - 12 σχολικό βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 130)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, υπολογίζω το ν ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη συνέχεια από τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v)$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση 10 Α΄ ομάδας σελ. 130, Ασκήσεις 2,3 Β΄ ομάδας σελ. 131)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^{ov} Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου ν το ν+1, στον τύπο του α_n

2^{ov} Υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$

3^{ov} Αν η παραπάνω διαφορά είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν), τότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, με διαφορά ω ίση με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 131)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 7,10,13,... iii. 5,2,-1,... v. -6,-9,-12,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,10,13,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 10 - 7 \Leftrightarrow \omega = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + (n-1)3 \Leftrightarrow \alpha_n = 7 + 3n - 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 3n + 4$$

iii. Στην αριθμητική πρόοδο 5,2,-1,... έχω : $\alpha_1 = 5$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 2 - 5 \Leftrightarrow \omega = -3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 5 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = 5 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n + 8$$

v. Στην αριθμητική πρόοδο -6,-9,-12,... έχω :

$$\alpha_1 = -6 \text{ και } \omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = -9 + 6 \Leftrightarrow \omega = -3$$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = -6 + (n-1)(-3) \Leftrightarrow \alpha_n = -6 - 3n + 3 \Leftrightarrow \alpha_n = -3n - 3$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 129 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις αριθμητικές προόδους :

i. τον α_{15} της -2,3,8,... vi. τον α_{47} της $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο -2,3,8,... έχω : $\alpha_1 = -2$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 3 + 2 \Leftrightarrow \omega = 5$

$$\text{Άρα : } \alpha_{15} = \alpha_1 + (15-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 14 \cdot 5 \Leftrightarrow \alpha_{15} = -2 + 70 \Leftrightarrow \alpha_{15} = 68$$

vi. Στην αριθμητική πρόοδο $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } \alpha_{47} &= \alpha_1 + (47-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + 46 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{138}{4} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{1}{2} + \frac{69}{2} \Leftrightarrow \alpha_{47} = \frac{70}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_{47} = 35. \end{aligned}$$

3. (Άσκηση 6 σελ. 130 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και -40

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x+1$ και 11 είναι ο $3x-2$.

Λύση :

i. Ο αριθμητικός μέσος των $\alpha = 10$ και $\gamma = -40$ είναι ο $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{10 - 40}{2} \Leftrightarrow \beta = -15$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = 5x + 1$, $\beta = 3x - 2$ και $\gamma = 11$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 3x - 2 = \frac{5x + 1 + 11}{2} \Leftrightarrow 6x - 4 = 5x + 12 \Leftrightarrow x = 16$.

4. (Άσκηση 8 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων :

i. 7,9,11,...

Λύση :

i. Στην αριθμητική πρόοδο 7,9,11,... έχω : $\alpha_1 = 7$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 9 - 7 \Leftrightarrow \omega = 2$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n-1)\omega] \Leftrightarrow S_{40} = \frac{40}{2} [2 \cdot 7 + (40-1)2] \Leftrightarrow S_{40} = 20(14 + 78) \Leftrightarrow S_{40} = 1840$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 130 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτώση)**

Να βρείτε τα αθροίσματα :

i. $1 + 5 + 9 + \dots + 197$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 1,5,9,...,197 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 5 - 1 \Leftrightarrow \omega = 4$. Είναι $\alpha_n = 197$ και ψάχνουμε το n.

Έτσι έχω : $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow 197 = 1 + (n-1)4 \Leftrightarrow 197 = 1 + 4n - 4 \Leftrightarrow 4n = 200 \Leftrightarrow n = 50$

$$\text{Άρα : } S_n = \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_n) \Leftrightarrow S_{50} = \frac{50}{2} (1 + 197) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950 .$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος :

$$S_{50} = \frac{50}{2} [2\alpha_1 + (50-1)\omega] \Leftrightarrow S_{50} = 25(2 \cdot 1 + 49 \cdot 4) \Leftrightarrow S_{50} = 25 \cdot 198 \Leftrightarrow S_{50} = 4950)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 131 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n-ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 12 - 4n$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή

είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω .

Λύση :

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το n+1, στον τύπο του α_n δηλαδή :

$$\alpha_{n+1} = 12 - 4(n+1) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 12 - 4n - 4 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 8 - 4n .$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 8 - 4n - (12 - 4n) = 8 - 4n - 12 + 4n = -4$

Η διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -4$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = -4$ και πρώτο όρο :

$$\alpha_n = 12 - 4n \stackrel{n=1}{\Leftrightarrow} \alpha_1 = 12 - 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 31^ο όρο των αριθμητικών προόδων :

i. 1,4,7,... ii. -9,-5,-1,... iii. 7,5,3,...

8. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Να βρείτε :

- τον 10^ο όρο της προόδου,
- ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 62.

9. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -15$ και $\alpha_7 = 9$. Να βρείτε :
- τη διαφορά ω της προόδου
 - τον 11^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με 41.
10. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_8 = -3$ και $\omega = -2$. Να βρείτε :
- τον πρώτο όρο της προόδου
 - τον 19^ο όρο της προόδου,
 - ποιος ορος της προόδου είναι ισος με -40.
11. Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών :
- 5 και 37
 - 3 και 23
 - 31 και -3
12. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $2x+1$ και $7x+2$ είναι ο 15.
13. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$, οι αριθμοί : $x+5$, $3x-5$, $2x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
14. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -14$ και $\omega = 3$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου.
15. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου :
- 3,5,7,...
 - 8,-3,2,...
 - 2,-1,-4,...
16. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :
- $1+4+7+\dots+94$
 - $3+7+11+\dots+119$
 - $-5-1+3+7+\dots+135$
17. i. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) και έστω S_n, S_{2n} και S_{3n} τα αθροίσματα των πρώτων $n, 2n$ και $3n$ όρων της αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$
- ii. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_{41} + \alpha_{42} + \dots + \alpha_{80} = 2010$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 120 όρων της.
18. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_6=8$ και $\alpha_{11}=23$. Να βρείτε:
- Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
 - Πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 14
 - Το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25}$
 - Το άθροισμα $S_1 = a_1 + a_3 + \dots + a_{39}$
19. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 θετικών πολλαπλασίων του 3.
20. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 θετικών πολλαπλασίων του 5.
21. Να βρείτε το άθροισμα :
- των άρτιων αριθμών μεταξύ 21 και 153
 - των περιπλών αριθμών μεταξύ 10 και 170
 - των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 40 και 200
 - των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 31 και 206.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : **5.1 – 5.2 Ακολουθίες – Αριθμητική πρόοδος**

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14476

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7,...

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14512

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω . (Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3 14573

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4 14574

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14597

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήστε τον συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 6 14259

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 36897

- α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 8 35375

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.
(Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τον α_{20} .
(Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 35408

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

- α) Να βρείτε την τιμή του x .
(Μονάδες 10)
- β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) .
i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω .
(Μονάδες 7)
- ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 35299

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

- α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.
(Μονάδες 9)
- β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;
(Μονάδες 8)
- γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 35143

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.
(Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12 35046

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

- α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13 34877

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).
(Μονάδες 13)
- β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14 34871

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $x + 1$, $3x + 2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 13)
- β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15 34158

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_ν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.
 (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16 34153

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

- α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)
 β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17 34147

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)
 β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 18 34145

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω .

- α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$. (Μονάδες 13)
 β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19 14656

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 20 12809

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ...

- α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21 12945

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. (Μονάδες 8)
- γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της (α_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22 14758

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής πρόοδου. (Μονάδες 6)
- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)
- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23 13171

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι

$$S_n = 2n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}^*$$

- α) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$, $n \geq 2$ (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1$, $n \geq 1$ (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω και τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι αν $p \in \mathbb{N}^*$, τότε όλοι οι όροι της μορφής $a_{p(p+1)}$ είναι τέλεια τετράγωνα περιττών φυσικών αριθμών. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 24 14927

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

- α) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $\alpha_n = 107n + 1210$. (1) (Μονάδες 9)
- β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία
 - i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)
 - ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της πρόοδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)
- γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 25 13056

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. .	. . .		...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_v = \frac{v(v+1)}{2}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)
 β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)
 γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26 13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

- α)
 i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
 ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_v) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_v , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)
 β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)
 δ) Να δείξετε ότι $\alpha_v = \beta_{8-v}$ για κάθε $v = 1, 2, \dots, 7$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 27 13173

Δίνεται η ακολουθία (α_v) με γενικό τύπο $\alpha_v = 10 + 3v$.

- α)
 i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)
 ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)
 β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_v) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιπτές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 30 37204

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1^η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7^η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην 1^η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2^η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3^η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2^η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 31 36674

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

- Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
- Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)
- Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 32 36662

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμία από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

- Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)
- Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)
- Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7^η μέχρι και την 14^η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 33 36660

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

- Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)
- Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20^η κυψέλη; (Μονάδες 6)
- Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.
 - Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3^η κυψέλη; (Μονάδες 6)
 - Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 34 36653

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x, \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \alpha_3 = x^2 - 2, \text{ με } x \text{ ακέραιο.}$$

- Να αποδείξετε ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)
- Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014. (Μονάδες 8)
- Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 35 36650

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει 0,5€ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $n \leq 51$ ο αριθμός a_n εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο n -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 36 33858

Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 37 33583

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) ,

τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 38 33581

Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $a_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1^ο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 9)

Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 39 33579

Οι αριθμοί : $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii. Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 40 32741

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλευέται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x + 3$ σειρές με $x - 3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν , δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της (από τον δεύτερο και μετά) προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό επί του ίδιου πάντοτε αριθμού. Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγος της**

πρόοδου. Έτσι ισχύουν : $\alpha_{v+1} = \alpha_v \cdot \lambda$ ή $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \lambda$

- Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής πρόοδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :** Προσδιορισμός α_1 και λ μιας γεωμετρικής πρόοδου όταν γνωρίζουμε στοιχεία για διάφορους όρους της.

Όταν έχουμε ως δεδομένα σχέσεις μεταξύ διαφόρων όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου α_v , τότε αντικαθιστούμε όλους τους όρους σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$. Στη συνέχεια συνήθως διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν. (Ασκήσεις 1 - 7 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 136 - 137)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :** Γεωμετρικός Μέσος

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής πρόοδου, αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ (Πρέπει να είναι πάντα θετικός αριθμός).

(Άσκηση 8 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 137, Άσκηση 2 σχ. βιβλίο Β΄ ομάδας σελ. 138)

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :** Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής πρόοδου

Έστω α_v μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 0$. Το άθροισμα S_v των πρώτων ν

όρων της δίνεται από τον τύπο : $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$. Αν αντικαταστήσουμε το

$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, προκύπτει ο τύπος : $S_v = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}$. Με τον τύπο αυτό υπολογίζουμε

το άθροισμα των πρώτων ν - όρων μιας γεωμετρικής πρόοδου, χωρίς να γνωρίζουμε το πλήθος αυτών, αρκεί να γνωρίζουμε τα $\alpha_v, \alpha_1, \lambda$

(Ασκήσεις 9 - 10 σχ. βιβλίο Α΄ ομάδας σελ. 138)

Υποπερίπτωση : αν το άθροισμα είναι της μορφής : $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v$ τότε αρχικά από τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, υπολογίζω το ν ή το α_v (ανάλογα με την εκφώνηση) και στη

συνέχεια από τον τύπο $S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$ υπολογίζω το ζητούμενο άθροισμα. (Άσκηση

11 Α΄ ομάδας σελ. 138)

➤ **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 :** Πως αποδεικνύουμε ότι μια ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον ν-οστό όρο της.

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία α_n είναι γεωμετρική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε τον γενικό όρο της α_n , εργαζόμαστε ως εξής :

1^{ov} Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το n+1, στον τύπο του α_n

2^{ov} Υπολογίζουμε το πηλίκο $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

3^{ov} Αν το παραπάνω πηλίκο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του n), τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, με λόγο λ ίσο με τον σταθερό αυτό αριθμό.
(Άσκηση 1 Β΄ ομάδας σελ. 138)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 136 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ν-οστό όρο των γεωμετρικών προόδων :

- i. 3,6,12,... ii. $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ vi. 18,6,2,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 3,6,12,... έχω : $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

ii. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^{n-2}$$

vi. Στην γεωμετρική πρόοδο 18,6,2,... έχω : $\alpha_1 = 18$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6}{18} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_n = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{3^{n-3}}$$

2. (Άσκηση 2 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1)**

Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμία από τις γεωμετρικές προόδους :

- i. τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ iv. τον α_{10} της 1, -2, 4, ...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots$ έχω : $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^{9-1} \Leftrightarrow \alpha_9 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^8 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 2^6 \Leftrightarrow \alpha_9 = 64$$

iv. Στην γεωμετρική πρόοδο 1, -2, 4, ... έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow \lambda = -2$

$$\text{Άρα : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^{10-1} \Leftrightarrow \alpha_{10} = (-2)^9 \Leftrightarrow \alpha_{10} = -512$$

3. (Άσκηση 8 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2)**

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20 καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$.

ii. Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Λύση :

i. Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = 5$ και $\gamma = 20$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 = 5 \cdot 20 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta = 10$

Ο γεωμετρικός μέσος των $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\gamma = \sqrt{3}$ είναι ο $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow$

$$\beta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

ii. Οι αριθμοί $\alpha = x-4$, $\beta = x+1$ και $\gamma = x-19$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει : $\beta^2 = \alpha\gamma \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 19x - 4x + 76 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$.

4. (Άσκηση 9 σελ. 137 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3)**

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων :

i. 1,2,4,...

Λύση :

i. Στην γεωμετρική πρόοδο 1,2,4,... έχω : $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda = 2$

$$\text{Άρα : } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{1024 - 1}{1} \Leftrightarrow S_{10} = 1023$$

5. (Άσκηση 10 σελ. 138 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 Υπο/πτωση)**

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

i. $2 + 8 + 32 + \dots + 8192$

Λύση :

i. Οι αριθμοί 2,8,32,...,8192 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$. Είναι $\alpha_n = 8192$ και ψάχνουμε το n .

$$\text{Έτσι έχω : } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow 8192 = 2 \cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4096 \Leftrightarrow 4^{n-1} = 4^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\text{Άρα : } S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{4^7 - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 2 \cdot \frac{16384 - 1}{3} \Leftrightarrow S_7 = 10922$$

(Εναλλακτικά θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω και τον άλλο τύπο του αθροίσματος :

$$S_n = \frac{\alpha_n \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_7 = \frac{8192 \cdot 4 - 2}{4 - 1} \Leftrightarrow S_7 = 10922)$$

6. (Άσκηση 1 σελ. 138 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου) **(ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4)**

Ο n -ος όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή

είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ .

Λύση :

Αρχικά βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο του α_n δηλαδή :

$$\alpha_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο :
$$\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{\frac{2^{v+1}}{3^{v+2}}}{\frac{2^v}{3^{v+1}}} = \frac{2^v \cdot 2 \cdot 3^v \cdot 3}{2^v \cdot 3^v \cdot 3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ο λόγος $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2}{3}$ είναι δηλαδή σταθερός αριθμός άρα η ακολουθία (α_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{2}{3}$ και πρώτο όρο : $\alpha_v = 2^v \cdot \frac{1}{3^{v+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2^1 \cdot \frac{1}{3^{1+1}} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2}{9}.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7. Να βρείτε το 8^ο όρο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων :

i. 1,2,4,... ii. 32,16,8,... iii. $\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, \dots$ iv. $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \dots$

8. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και $\lambda = 2$. Να βρείτε :

i. τον 8^ο όρο της (α_v) ii. ποιος ορος της (α_v) είναι ισος με 12.

9. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_1 = \frac{2}{9}$ και $\alpha_4 = 6$. Να βρείτε :

i. τον λόγο λ της (α_v) ii. τον 6^ο όρο της (α_v)

10. Οι αριθμοί 2, x, 8 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

11. Ο αριθμός 6 είναι ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $x-3$ και $2x+8$. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

12. Οι αριθμοί $x-2$, $2x-2$, $4x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x.

13. Οι αριθμοί 2, $x-1$, x^2+2x-3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

14. Οι αριθμοί $x-6$, $x-2$, $2x+2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

i. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x.

ii. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο i. να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών x και 50.

15. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 4,12,36,...

16. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου : 192,96,48,...

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα : i. $5+10+20+\dots+640$ ii. $4-8+16-\dots-8192$

18. Δίνεται γεωμ. πρόοδος για την οποία ισχύει $\frac{S_{10}}{S_5} = 33$. Να βρείτε:

i. τον λόγο λ της (α_v) ii. το πηλίκο $\frac{S_6}{a_6}.$

19. Ο ν-ος ορος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 2^{n+2} \cdot \frac{1}{3^n}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο : $\alpha_n = 2n - 11$.
 - να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά $\omega = 2$.
 - Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{21}$, όπου $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου α_n .
 - Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης : $|x^2 - 2x - 1| = 2$ είναι διαδοχικοί όροι της προηγούμενης προόδου α_n .
- Δίνεται αριθμητική πρόοδος α_n , της οποίας ο 13^{ος} ορος είναι -32 και το άθροισμα των πρώτων 8 όρων της είναι 84.
 - Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + \alpha_7 x^2 = \alpha_5$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^3 + \alpha_{12}}{x^2 - 5x - S_{12}} \geq 0$
- Οι αριθμοί $x - 4$, $x + 4$, $3x - 4$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου α_n .
 - Να βρείτε την τιμή του x
Αν ο αριθμός $x - 4$, είναι ο πέμπτος ορος της αριθμητικής προόδου α_n , να βρείτε :
 - τον α_1 και τη διαφορά ω της α_n
 - το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της α_n
 - ποιος ορος της α_n είναι ίσος με 100
 - το πλήθος των πρώτων όρων της α_n που έχουν άθροισμα 80.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0$ (1)
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ, οι αριθμοί :
 $-x_1 x_2$, $x_1 + x_2$, $\frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
- Σε μια γεωμετρική πρόοδο α_n ο τρίτος ορος είναι ίσος με 16 και ο έκτος ορος είναι ίσος με 2. Να βρείτε :
 - τον πρώτο όρο και τον λόγο της α_n
 - τον δέκατο όρο της α_n
 - το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της α_n
 - τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών α_8 και $\alpha_1 + \alpha_4$

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 12763

Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

- α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 12787

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3 14920

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου. (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 36891

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με θετικό λόγο λ , για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

- α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)
 β) Να δείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 5 35205

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x, 2x + 1, 5x + 4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:
 i. $x = 1$
 ii. $x = -1$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 6 35042

- α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)
 β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:
 i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)
 ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 7 34874

- α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1). (Μονάδες 13)
 β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8 34156

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

- α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)
 β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 9 12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός. (Μονάδες 10)
 γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 10 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)
 ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$. (Μονάδες 5)
 β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)
 γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 33891

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

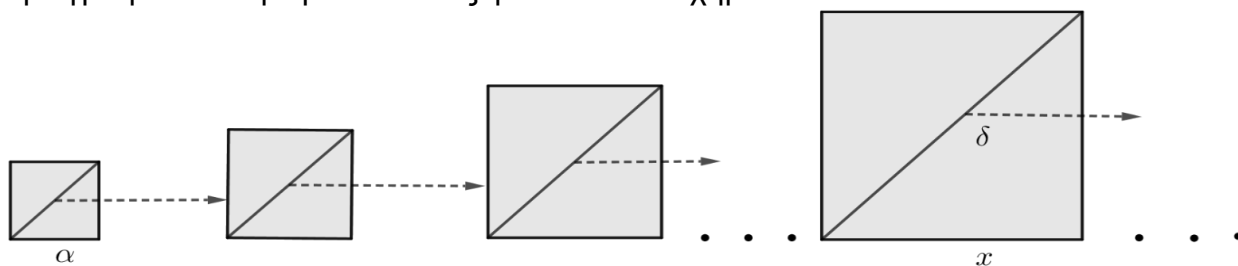
$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0.$$

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}, n = 1, 2, 3, \dots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)
 γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_n) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}. \quad (\text{Μονάδες 8})$$

ΘΕΜΑ 12 14645

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



- α)
- Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$. (Μονάδες 4)
 - Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = \alpha^2 2^{n-1}$. (Μονάδες 7)
- β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:
- την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου. (Μονάδες 8)
 - το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13 37205

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1^{ης} ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2^{ης} ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3^{ης} ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά από το ατύχημα. (Μονάδες 7)
- β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.; (Μονάδες 9)
- γ) Στο τέλος της 9^{ης} ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 36649

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

- α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)
- β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).
- Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)
 - Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . (Μονάδες 6)
 - Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15 36677

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n^o (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)

ii) το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 16 34180

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον αριθμό x , ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 7)

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \dots$ και (β_n) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \dots$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) . (Μονάδες 5)

ii. Την τιμή του n , ώστε για το άθροισμα S_n του γι) ερωτήματος να ισχύει:

$$2 \cdot (S_n + 24) = \beta_7. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

ΘΕΜΑ 17 34181

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E . Οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E . (Μονάδες 10)

β) Αν $E=1$ και $\alpha + \beta = 10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ou} βαθμού με ρίζες α και β . (Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x . (Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f).

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^2 - 3x + 12$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

iii. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

iv. $f(x) = 2x + \sqrt{6 - x}$

v. $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 3} + \sqrt{x - 2}$

vi. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$

vii. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

Λύση :

i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$.

ii. Πρέπει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

iii. Πρέπει : $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

iv. Πρέπει : $6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα $D_f = (-\infty, 6]$

v. Πρέπει : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Άρα $D_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$

vi. Πρέπει : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2]$. Άρα $D_f = [1, 2]$

vii. Πρέπει : $x \neq 0$ (1) και $1 - x^2 \geq 0$ (2)

Έχω $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$		0	$+$	0	$-$

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2x^2 - 7x + 15$ ii. $f(x) = \frac{x - x^2}{12 + 3x}$ iii. $f(x) = \frac{x^2 - 7}{2x - 8}$ iv. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$
 v. $f(x) = 2x^2 + \sqrt{14 - 2x}$ vi. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ vii. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 8}$

3) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+5}$ ii. $f(x) = \frac{4x}{x-3} + \frac{2x-7}{x^2+3x-4}$ iii. $f(x) = \frac{6-4x}{x^2-9} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{5}{2}$
 iv. $f(x) = \frac{2x+6}{|2x-1|-5}$ v. $f(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|}$ vi. $f(x) = \frac{2x+7}{5+|1-3x|}$ vii. $f(x) = \frac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

4) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x+3}{x^3+8}$ ii. $f(x) = \frac{x-1}{x^3-9x}$ iii. $g(x) = \frac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$
 iv. $g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x}$ v. $h(x) = \frac{x-5}{x^4-27x}$ vi. $h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2}$

5) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2}$ ii. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$ iii. $g(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$
 iv. $g(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$ v. $h(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$ vi. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

6) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{|x|-x}$ ii. $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$ iii. $g(x) = \sqrt{|x|-x}$
 iv. $g(x) = \sqrt{x-|x|}$ v. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ vi. $h(x) = \sqrt{|x|+x}$

7) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \alpha\nu \ x \geq 0 \\ -x^2+7, & \alpha\nu \ x < 0 \end{cases}$

- i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;
 ii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(-3)$ β) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ γ) $f(-1)$ δ) $f(0)$ ε) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ στ) $f(-\sqrt{3})$
 iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 2x$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τις επόμενες τιμές: i) $f(-2)$ ii) $f(-1)$ iii) $f(0)$ iv) $f\left(\frac{2}{3}\right)$

iii. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) - 2(f(\alpha) + f(\beta))$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1) + f(x) = -1$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(-2)$ β) $f(0)$ γ) $f(5)$

iii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $f(-3\alpha)$ β) $f(2a^2)$ γ) $f(\alpha - \beta)$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x+2) + f(x) \leq 22$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2 + 8x}$

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

iii. Να βρείτε τις τιμές: α) $f(2)$ β) $f(4)$ γ) $f(-4)$ δ) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + a$ για την οποία ισχύει $f(4) = 6$.

i. Να βρείτε τον αριθμό a

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ και $f(2)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 12$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x^2+3x-4}$ για την οποία ισχύει $f(-5) = -2$.

i. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

ii. Να βρείτε τον αριθμό a .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 5$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) = f(\beta) + 5$

ii. $f(\alpha^2) + f(\beta^2) \geq 2f(\alpha\beta)$

14) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+2) = 3f(2) - 2(x-3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε: α) την τιμή $f(2)$, β) τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης.

15) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + a}{x^2 - 9}$ για την οποία ισχύει $f(5) = \frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε τον αριθμό a .

iii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

16) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 3x+a, & \alpha\nu \ x \geq -2 \\ x^2+\beta x+a, & \alpha\nu \ x \leq -2 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(-1)=-7$.

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-8$.

iii. Να μετατρέψετε το κλάσμα: $\frac{2}{f(-\sqrt{6})+f(\sqrt{6})}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή.

i. Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1) \leq f(f(-6))$.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ και η εξίσωση $x^2-3x+1=0$. (1)

Ισχύει: $f(\Delta) = \frac{1}{6}$ όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

i. Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού, που να έχει ρίζες τους αριθμούς $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

18) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20m και πλάτος x m.

i. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 21 m^2 .

19) Σε μια κοινότητα όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν 6€ πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως κατανάλωσης. Για τα πρώτα 12 m^3 νερού πληρώνουν $0,60 \text{ €/m}^3$. Για κάθε επιπλέον m^3 από τα 12 m^3 πληρώνουν $0,80 \text{ €/m}^3$. Να βρεθεί συνάρτηση $y = f(x)$ που να δίνει το κόστος y του νερού, αν σε ένα μήνα καταναλωθούν $x \text{ m}^3$ νερό.

20) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & \alpha\nu \ x \leq 1 \\ \frac{x+a}{8}, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$x^2 + f(-1) \cdot x + f(75) = 0$ (1), έχει μοναδική ρίζα.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και να βρείτε την ρίζα της εξίσωσης (1).

ii. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$P(A \cap B) = f(4)$, $f(P(A)) = 0$ και $f(P(A \cup B)) = 1$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14781

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

- i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
- ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 14681

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3 14728

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4 12997

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

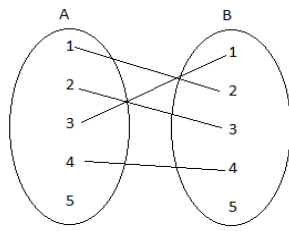
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

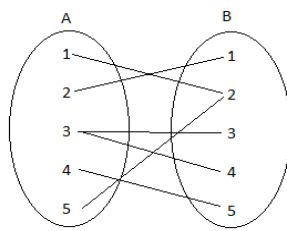
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5 12908

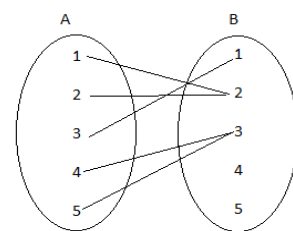
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B. (Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. (Μονάδες 4)
- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f. (Μονάδες 4)
- Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6 13031

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2$, $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1-3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε $f(x) = g(4)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 8 37202

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 37189

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10 37185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 11 37175

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12 35405

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13 35298

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$. (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14 34446

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ; (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 15 14562

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 16 14629

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$. (Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε; (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50; (Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 17 14702

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18 36680

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$. (Μονάδες 5 + 5 = 10)

ΘΕΜΑ 19 36679

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20 36668

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273 \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 21 36654

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση). (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22 14655

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^{\circ}$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0,10)$. (Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$. (Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; (Μονάδες 6)

γ) Αν $x=5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 23 34317

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

- έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό, (Μονάδες 2)
- έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού, (Μονάδες 3)
- έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 24 34184

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

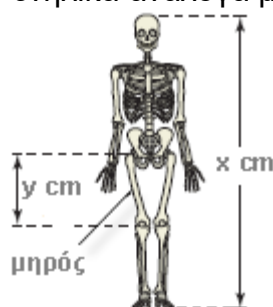
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. (Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 32753

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Ανδρας: $y = 0,45x - 31$

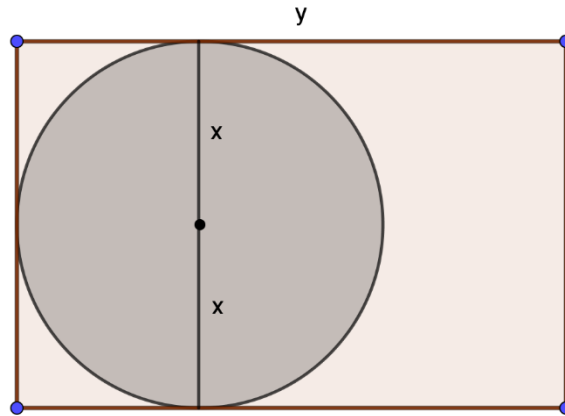
α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 26 14122

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α)

- i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$E = 10x - (\pi + 4)x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right). \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

- i. την ακτίνα x του κύκλου. (Μονάδες 6)
 ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου. (Μονάδες 3)

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Ο τύπος που δίνει την απόσταση των σημείων A και B είναι : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Αν $A(-4, -2)$ και $B(2, -2)$, να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B.

Λύση : $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 + 4)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{36} = 6$

2. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-1, 6)$.

- Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από το B.
- Να βρείτε σημείο Γ που ανήκει στον άξονα x'x, τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με $(ΓA) = (ΓB)$

Λύση :

- $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- Το $\Gamma \in x'x \Leftrightarrow \Gamma(x, 0)$. Επίσης $(\Gamma A) = (\Gamma B) \Leftrightarrow \sqrt{(1 - x)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-1 - x)^2 + (6 - 0)^2} \Leftrightarrow$
 $(1 - x)^2 + 4 = [-(1 + x)]^2 + 36 \Leftrightarrow (1 - x)^2 + 4 = (1 + x)^2 + 36 \Leftrightarrow$
 $1 - 2x + x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2 + 36 \Leftrightarrow -4x = 32 \Leftrightarrow x = -8$ άρα $\Gamma(-8, 0)$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y = f(x)$. Δηλ. $M(x, f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη C_f , αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $x'x$ σε σημεία της της μορφής $M(x_0, 0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y = f(x) = 0$
 - ❖ Η C_f τέμνει τον $y'y$ σε σημεία της της μορφής $M(0, y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Για ποιες τιμές του $x \in D_f$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

Λύση :

i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \eta, x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii. Πρέπει : $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

4. Για ποιες τιμές του $x \in D_f$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση :

- i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$x^2 + 1$	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

- ii. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 > 0$

Έχω $x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ή, $x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	+	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία A(1,5) και B(3,7) ανήκουν στην καμπύλη της f .

6. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία A(-1,3) και B(1,7).

7. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία A(0,3), B(-1,0) και Γ(-2,-1).

8. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

ii. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+9}$

iii. $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$

9. Δίνεται η επόμενη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{αν } x \geq 2 \\ |x-3| - 2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση της f:

i. A(5,10) ii. B(-1,2) iii. Γ(2,-1) iv. Δ(3,0) v. E(1,0) vi. Z(4,-1)

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x| - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (|2x - 1| - 3)$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f,
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

12. Το σημείο M(-3,-5) ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + \lambda x - 8$. Να βρείτε:

- i. τον αριθμό λ,
- ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \beta x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία A(-3,5) και B(5,10).

- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. Αν είναι M(2,f(2)) και N(-1,f(-1)), να βρείτε την απόσταση (MN).

14. Οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων: $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ και

$g(x) = x^2 + \lambda x - 5$ τέμνουν τον άξονα x'x στο ίδιο σημείο. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τον αριθμό λ
- iii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| - 5$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:
 - α) πάνω από τον άξονα x'x
 - β) κάτω από τον άξονα x'x

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία:

- i. η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x
- ii. η C_g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x
- iii. η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 7| + a$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a .
- ii. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται:
 - α) πάνω από τον άξονα $x'x$
 - β) κάτω από τον άξονα $x'x$.

18. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + a, & \text{αν } x < -1 \\ |x+1| - a, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική

παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -3. Να βρείτε:

- i. την τιμή του a
- ii. τα διαστήματα, στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iii. τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη 6.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a - x^2}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-4,3)$. Να βρείτε τον αριθμό a και το πεδίο ορισμού της f .

20. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + \mu}{|2x - 1| - 5}$ η οποία τέμνει τον

άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $\frac{5}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $M(2,6)$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της f
- ii. τους αριθμούς λ και μ
- iii. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$
- iv. το συμμετρικό του σημείου $N(4, f(4))$ ως προς:
 - α) τον άξονα $x'x$,
 - β) τον άξονα $y'y$,
 - γ) την αρχή των αξόνων,
 - δ) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 14072

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ; (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 14306

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 10)
 β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$. (Μονάδες 7)
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3 14596

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ με $x \neq -1$.

- α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$. (Μονάδες 13)
 β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 14603

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 6)
 β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 5 14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$. (Μονάδες 7)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 10)

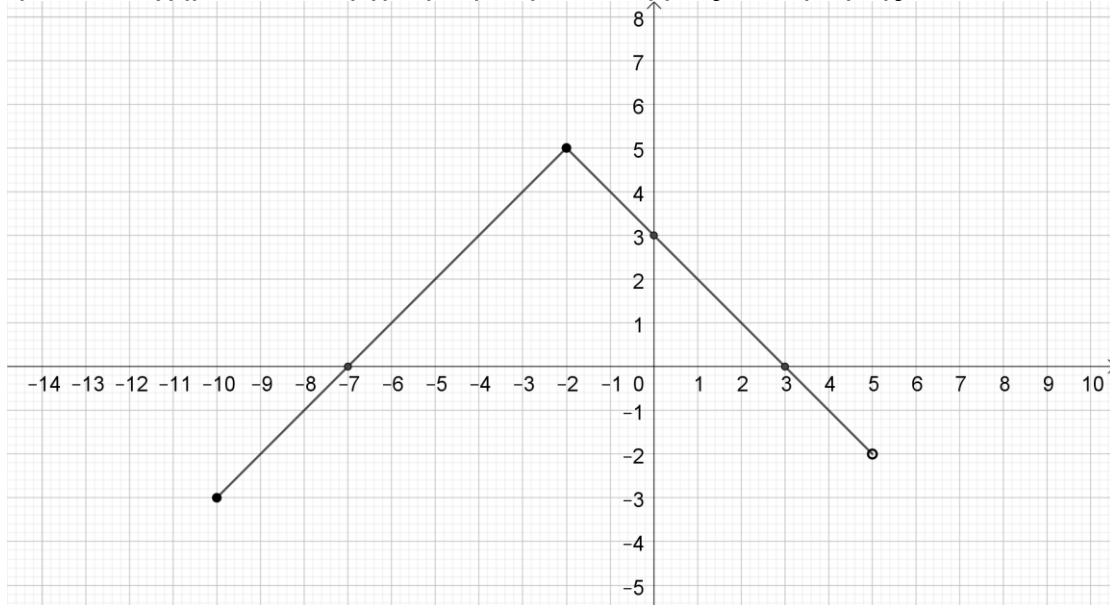
ΘΕΜΑ 6 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)
 γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 7 12910

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. (Μονάδες 6)
 γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$. (Μονάδες 4)
 δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 8 12686

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$. (Μονάδες 9)
 γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 12913

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 11 12729

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

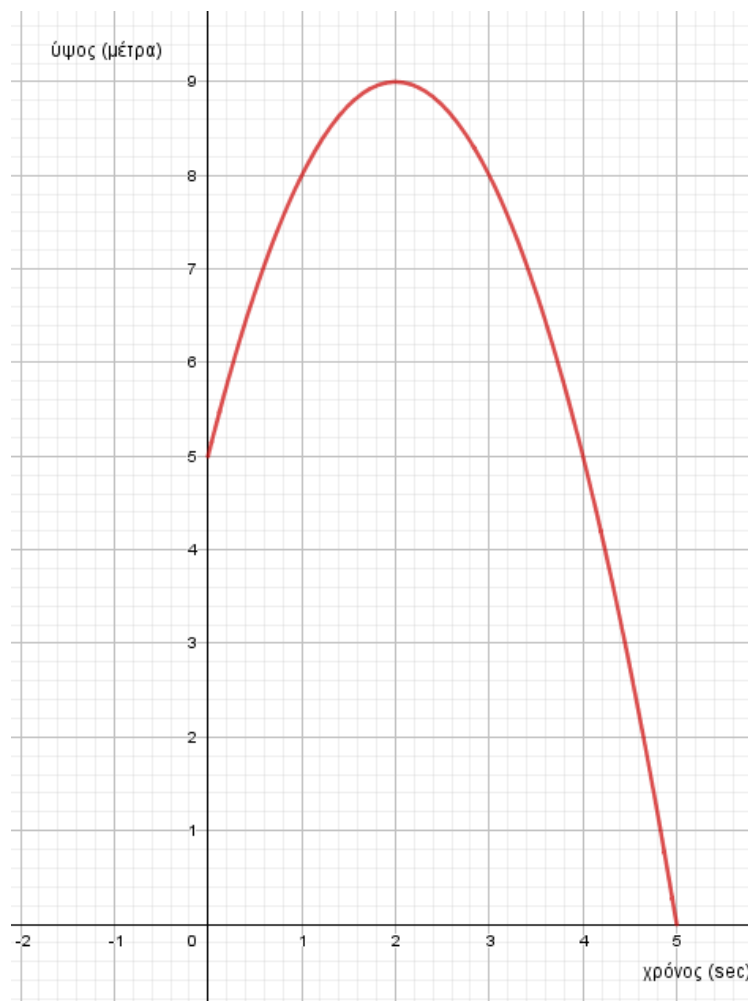
(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

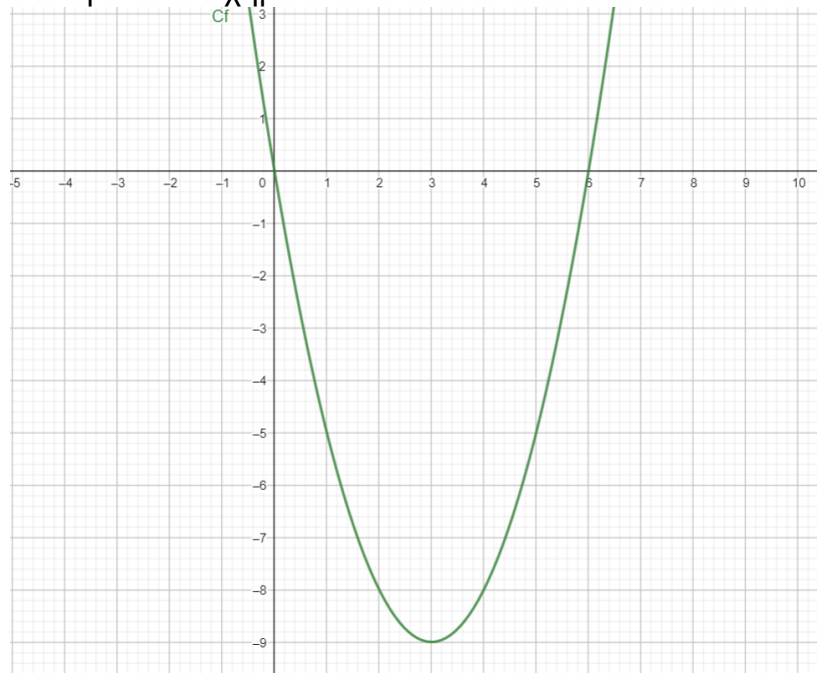
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 12 15000

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 13 34159

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 36885

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15 36889

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

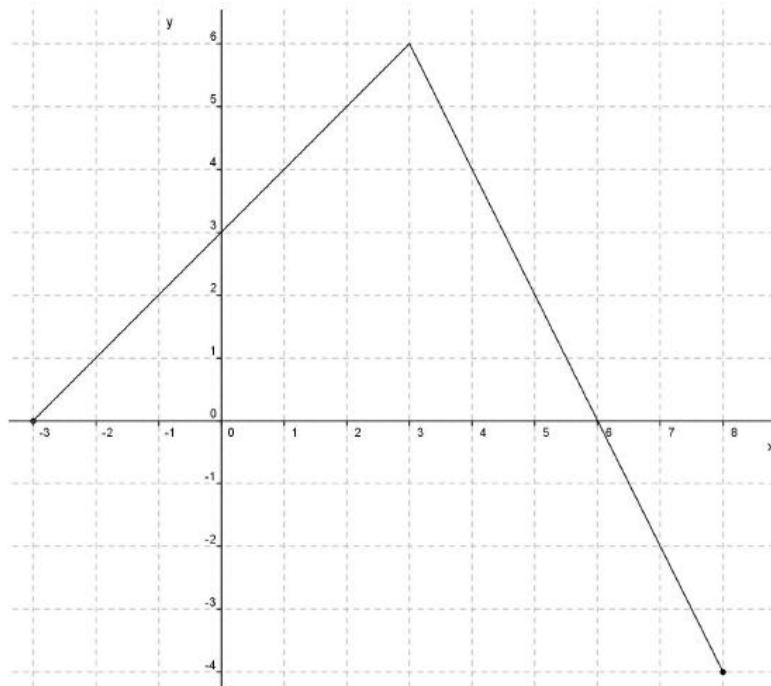
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16 35034

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17 35413

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 14760

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 19 14810

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$. (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
 γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
 i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$ (Μονάδες 6)
 ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20 14225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 5x + 4)}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A . (Μονάδες 5)
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$. (Μονάδες 7)
 γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$. (Μονάδες 6)
 δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)

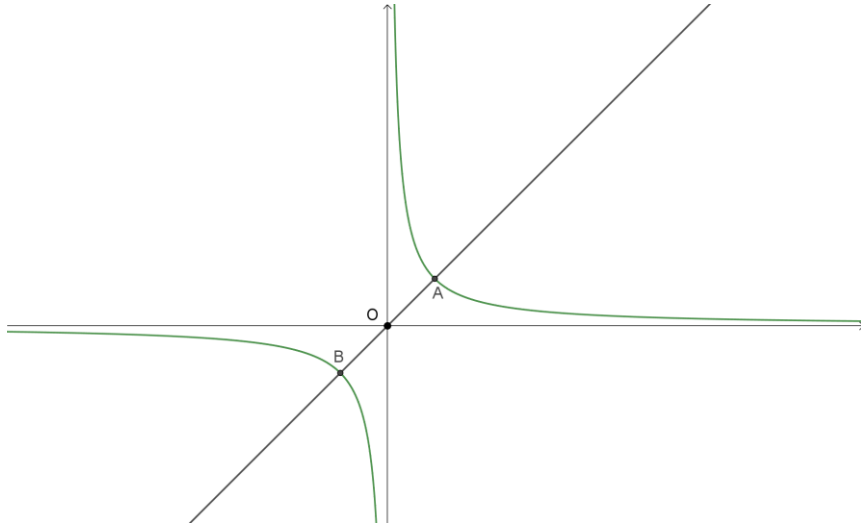
ΘΕΜΑ 21 14459

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες. (Μονάδες 10)
 γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22 14925

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB. (Μονάδες 9)

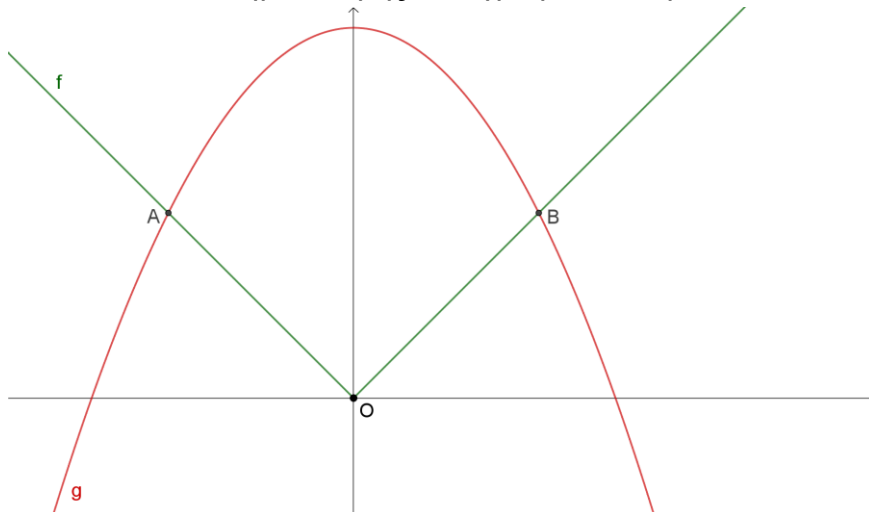
Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1)$, $M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 23 14926

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 10)

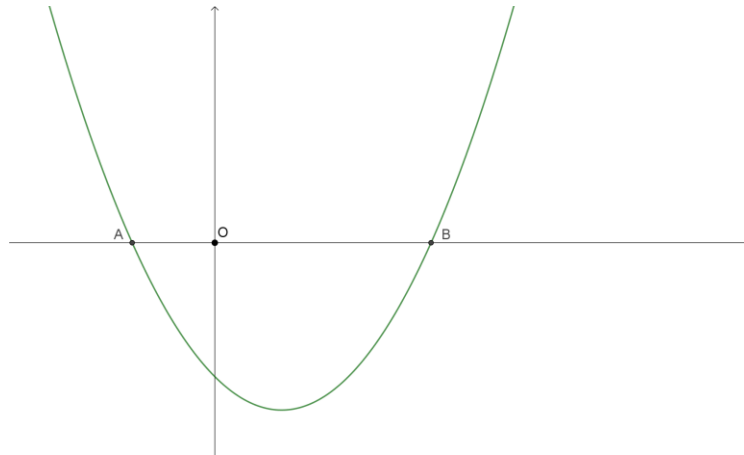
β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 24 14961

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.



Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega + \phi = 1$.

ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

(Μονάδες 4+4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$.

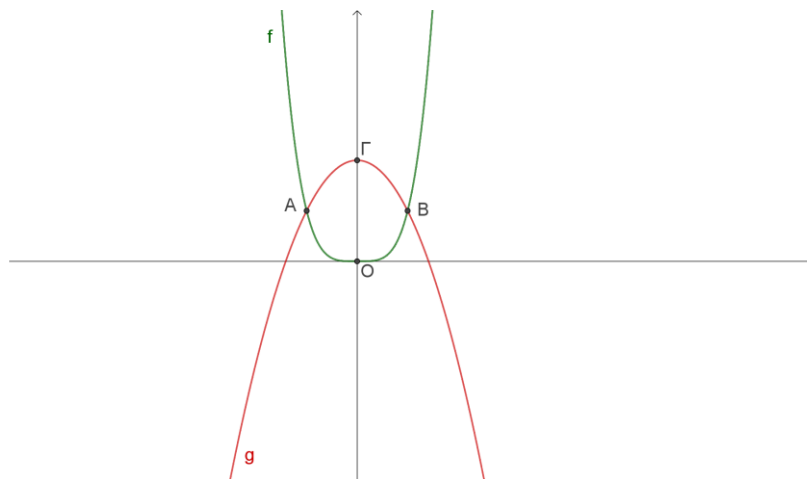
(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 25 14307

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $\Gamma(0, 2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

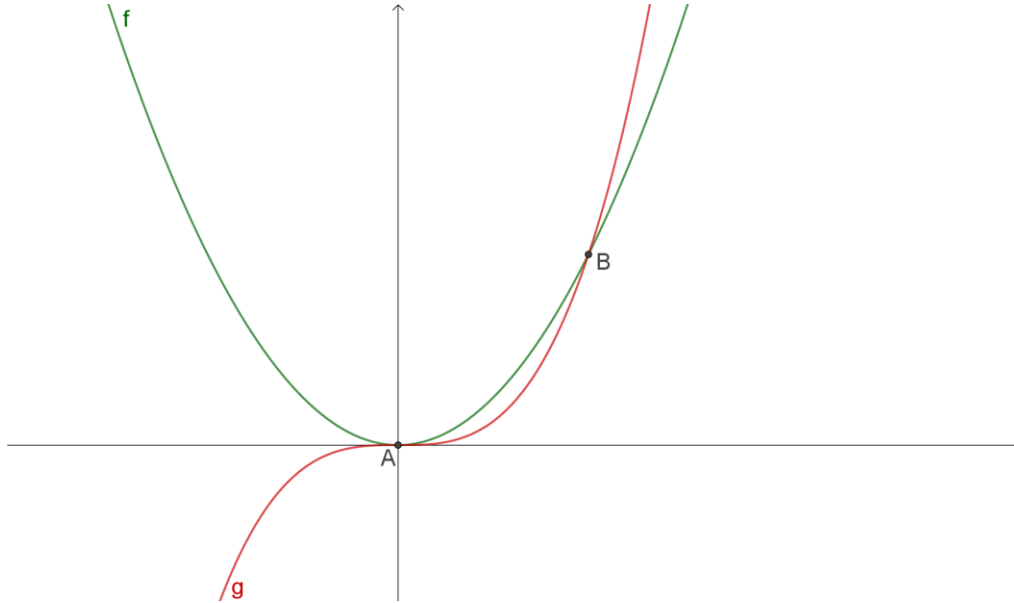
(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 26 14665

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B. (Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$. (Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$. (Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 27 13479

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 28 14745

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

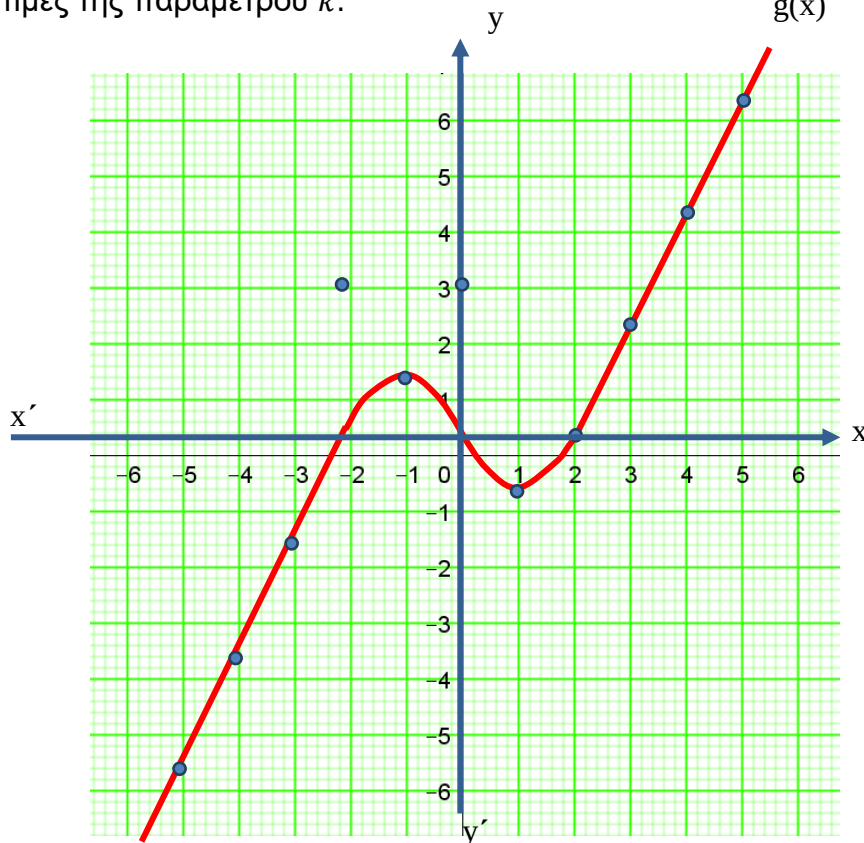
α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$. (Μονάδες 7)

γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k . (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 29 14185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . (Μονάδες 6)

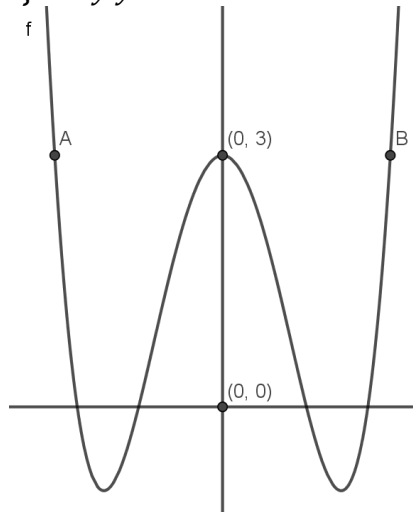
β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 30 13454

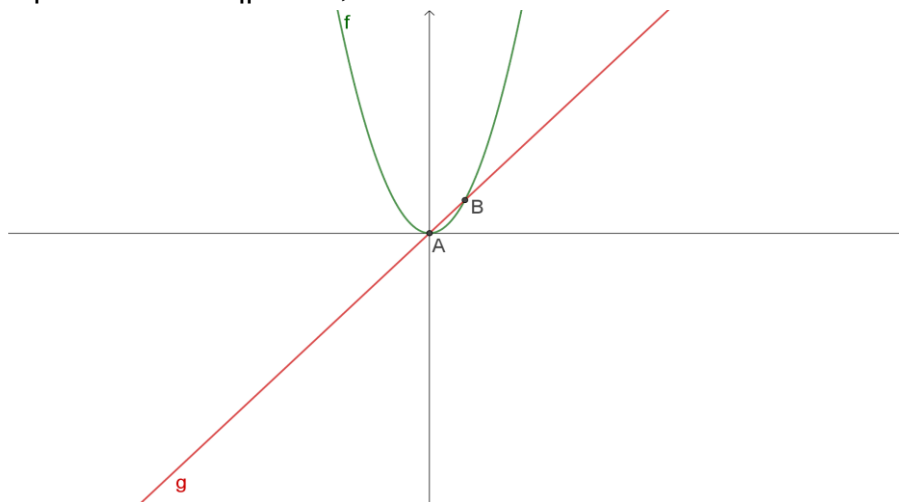
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



- α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$. (Μονάδες 6)
- β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
- δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 31 13557

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B. (Μονάδες 7)
- β) Αν $A(0, 0), B(1, 1)$, τότε:
- Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 5)
 - Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)
- γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 32 14190

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη. (Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$. (Μονάδες 9)

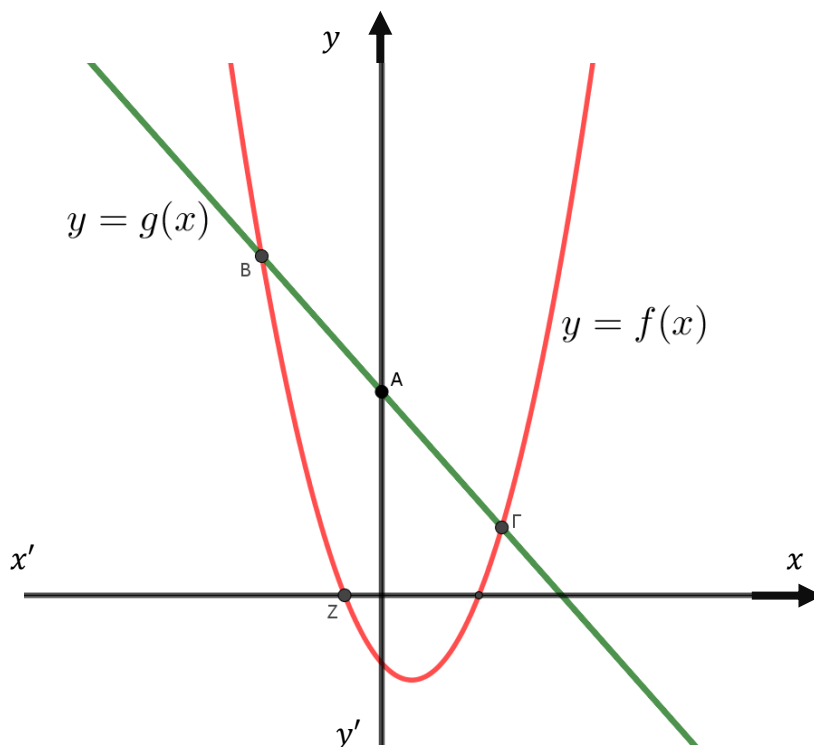
ΘΕΜΑ 33 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$. (Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (Μονάδες 9)



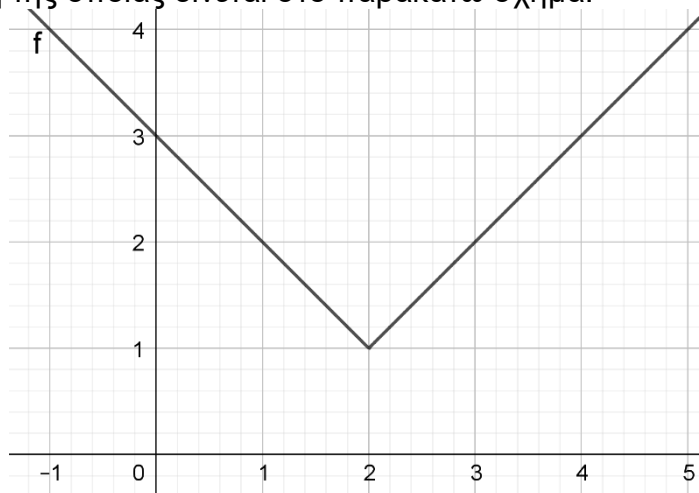
ΘΕΜΑ 34 12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f . (Μονάδες 6)
 α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες. (Μονάδες 6)
 δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 35 12914

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α)
 i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία; (Μονάδες 4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i). (Μονάδες 5)
 β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δύο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$. (Μονάδες 8)
 γ)
 i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$; (Μονάδες 4)
 ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i). (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 36 13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4, 4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)
 δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 37 13027

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 38 13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 39 12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 40 12944

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 41 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

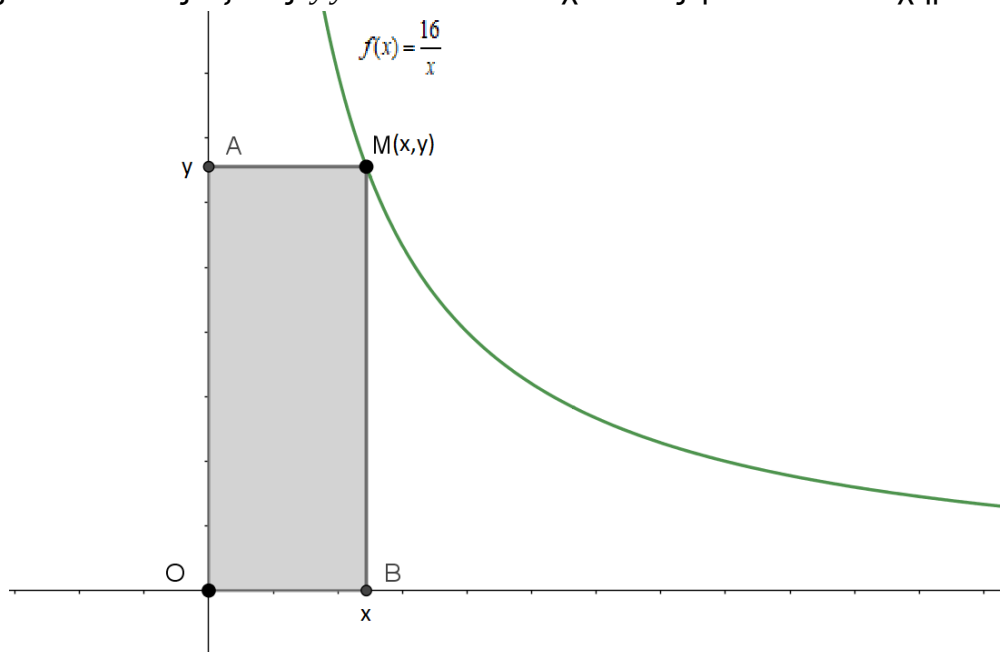
γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 42 13090

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε :

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 43 34309

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 44 16153

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

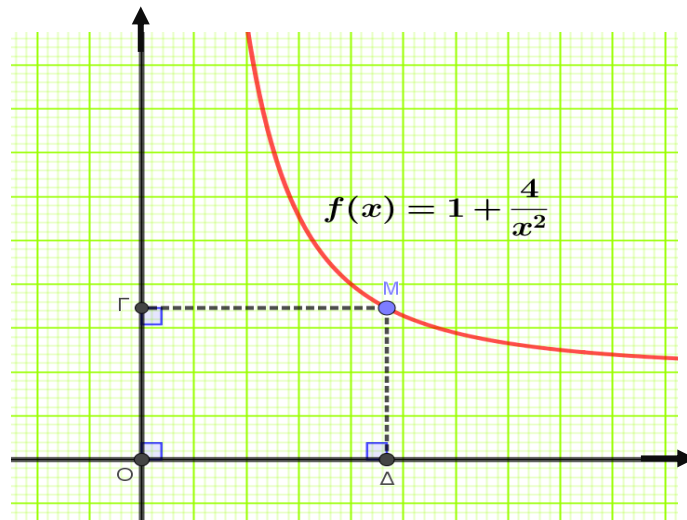
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$. (Μονάδες 7)

ii. $E \geq 4$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 45 33754

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400Km; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

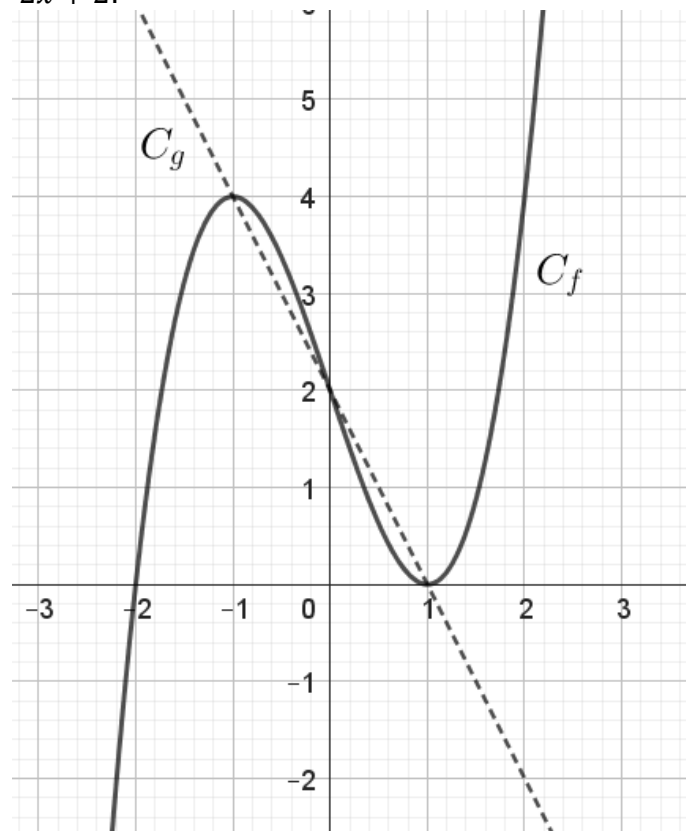
δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0,20x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0,10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ). (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 46 32742

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

- τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$, (Μονάδες 6)
- τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$, (Μονάδες 6)
- τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , (Μονάδες 6)
- τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 47 33701

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)

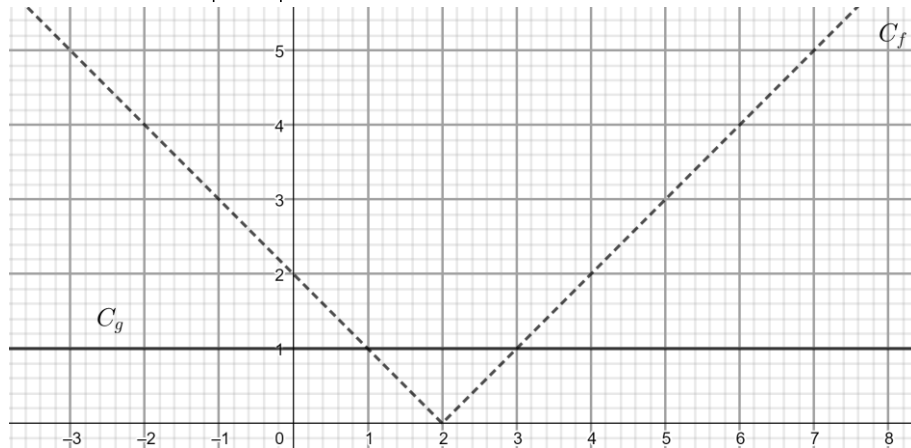
ΘΕΜΑ 48 14786

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ . (Μονάδες 7)
- Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ . (Μονάδες 6)
- Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$
 - Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B . (Μονάδες 7)
 - Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 49 33597

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g .

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αι) και αιι).

(Μονάδες 10)

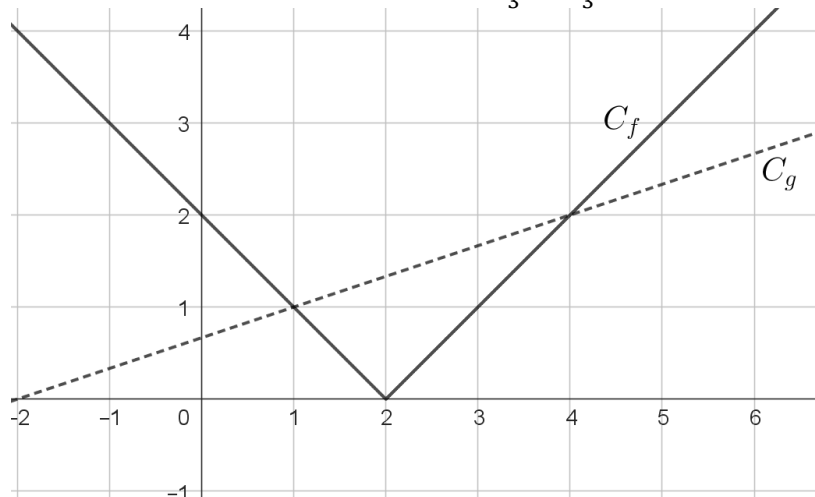
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 50 34312

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση: $K = \sqrt{3|2-x|} - (x+2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 51 14763

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$. (Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

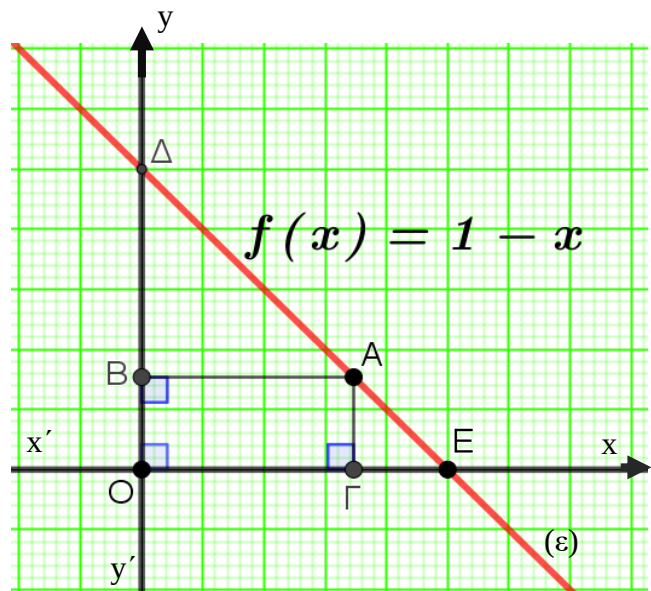
- Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$. (Μονάδες 7)
- Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 5)
- Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 52 14744

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πότε ισχύει το ίσον; (Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

- Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 10)
- Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή; (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 53 36657

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, παράμετρος.

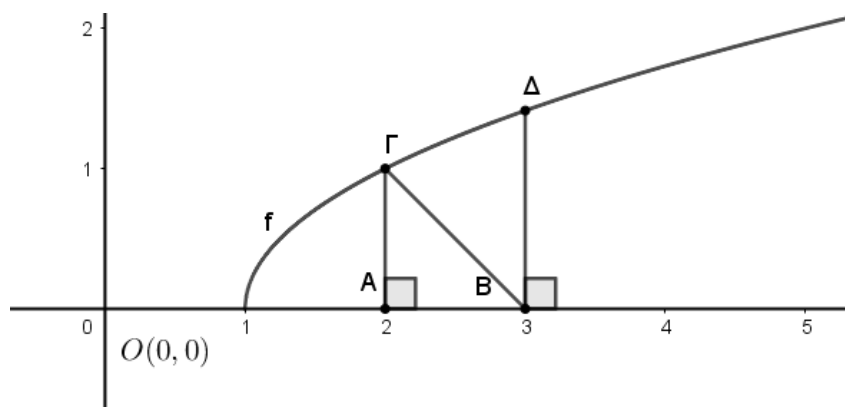
α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 54 14771

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.



- α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$. (Μονάδες 6)
 β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)
 γ)
 iii. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
 iv. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 4)
 v. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 55 35385

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. (Μονάδες 6)
 β) Για $\beta = -1$
 (i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$. (Μονάδες 5)
 (ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$. (Μονάδες 7)
 (iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 56 36681

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$. (Μονάδες 3)
 β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)
 γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)
 δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 57 36684

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .
(Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 58 36676

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .
(Μονάδες 7)
- β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
(Μονάδες 4)
 - Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3$, $\alpha = -2$, $\alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 59 37206

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 10)
- β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:
- Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h έχουν δύο κοινά σημεία.
 - Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h δεν έχουν κοινά σημεία.
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 60 35409

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$. (Μονάδες 05)

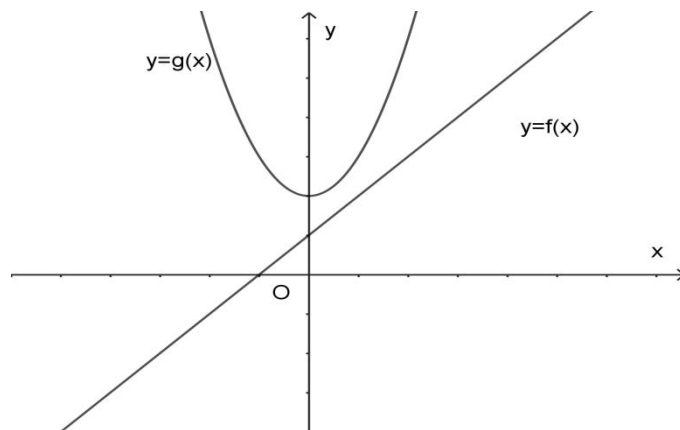
β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

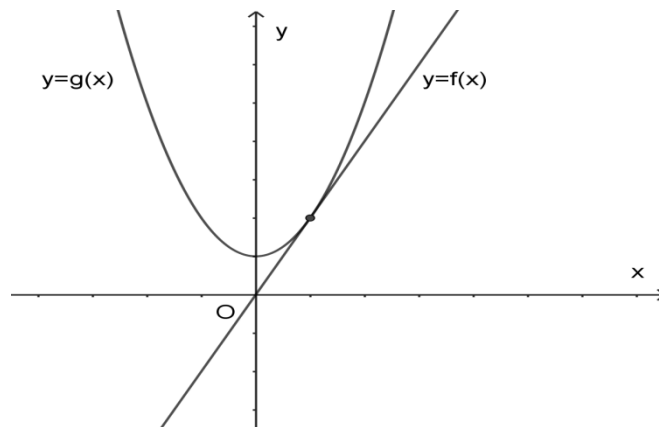
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$. (Μονάδες 05)

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

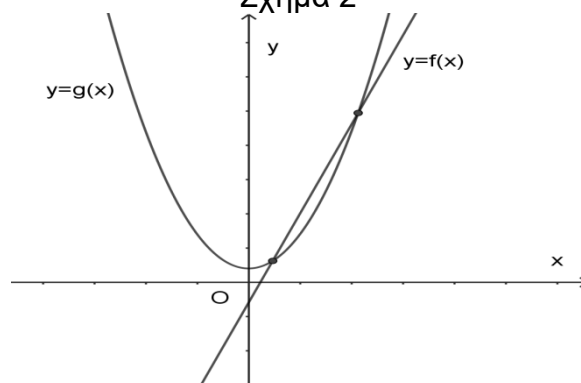
Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΘΕΜΑ 61 35410

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$. (Μονάδες 05)

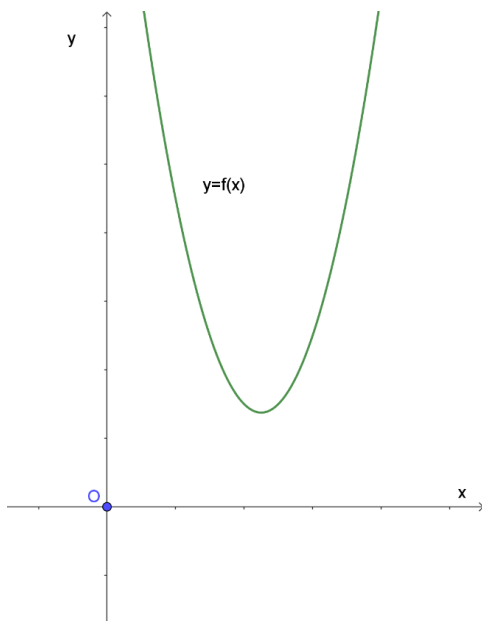
β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5.$$

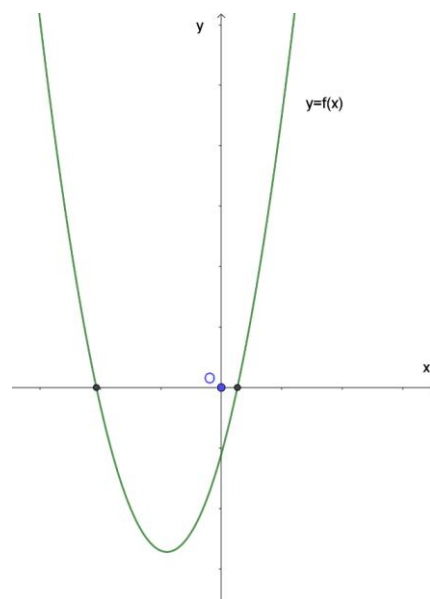
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

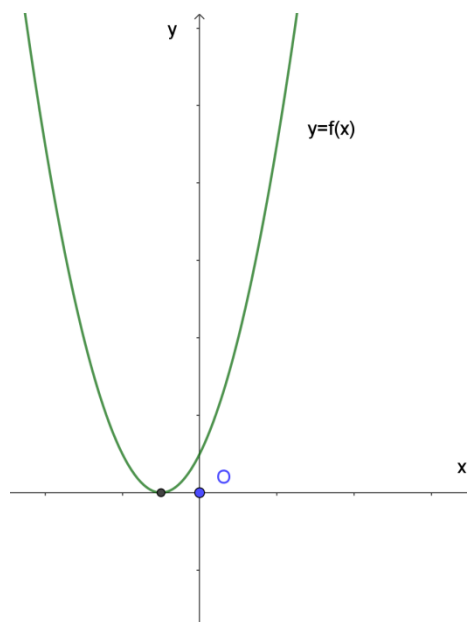
ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



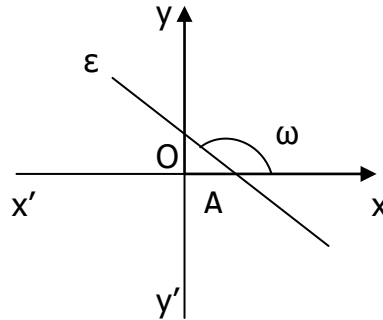
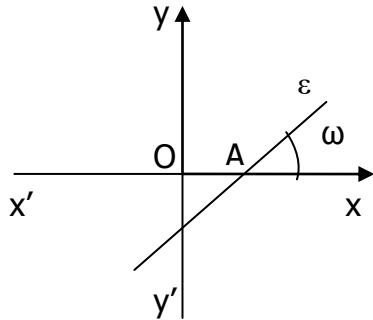
Σχήμα 3

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➤ Γωνία ευθείας (ε) με τον άξονα x'x

Έστω Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α.



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας x'x όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'x**.

- Αν $(\varepsilon) \parallel x'x$, είναι $\omega = 0$
- Αν $(\varepsilon) \parallel y'y$, είναι $\omega = 90^\circ$
- Σε κάθε περίπτωση είναι $0 \leq \omega < 180^\circ$

➤ Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Συντελεστής διεύθυνσης λ ευθείας, ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει η ευθεία, με τον άξονα x'x.

Δηλ.: $\lambda = \tan \omega$ με $0 \leq \omega < 180^\circ$. (Δίνονται οι εφαπτομένες :)

$\tan 0^\circ = 0$	
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$
$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 135^\circ = -1$
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\tan 90^\circ = \text{δεν ορίζεται}$	

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 :

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι μια ευθεία με εξίσωση : $(\varepsilon) : y = ax + \beta$
- Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x έχει συντελεστή διεύθυνσης: $a=0$. $((\varepsilon) \parallel x'x \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = 0)$
- Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για ευθεία παράλληλη του άξονα y'y. $((\varepsilon) \parallel y'y \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \text{--} \text{δεν ορίζεται})$
- Αν $\alpha_\varepsilon > 0$ τότε η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x'x
- Αν $\alpha_\varepsilon < 0$ τότε η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 :

Αν μια ευθεία (ε) περνάει από τα σημεία: $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$, διότι αν $x_1 = x_2$ η AB είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, άρα δεν έχουμε συντελεστή διεύθυνσης).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (AB) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-3, -5)$ και $B(-9, 1)$. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει η (AB) με τον άξονα $x'x$;

Λύση : $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-5)}{-9 - (-3)} = \frac{6}{-9 + 3} = \frac{6}{-6} = -1$, δηλ. $\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = -1$, άρα $\omega = 135^\circ$ ή $\omega = \frac{3\pi}{4}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 :

Μια ευθεία γενικά έχει τη μορφή (ε) : $y = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. είναι ο συντελεστής διεύθυνσης.

- Για να βρούμε τα κοινά σημεία δυο ευθειών **λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους**. Αν το σύστημα έχει μια λύση οι ευθείες τέμνονται, αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται ενώ αν είναι αδύνατο τότε οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $x'x$, **θέτουμε $y=0$ στην εξίσωση της**.
- Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με τον άξονα $y'y$, **θέτουμε $x=0$ στην εξίσωση της**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Δίνονται οι ευθείες (ε) : $y = 2x + 4$ και (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$. Να βρείτε :

- α_ε , α_ζ
- το σημείο τομής των (ε) και (ζ)
- τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες

Λύση :

i. (ε) : $y = 2x + 4$ άρα $\alpha_\varepsilon = 2$, (ζ) : $y = \frac{7}{2}x + 1$ άρα $\alpha_\zeta = \frac{7}{2}$

- ii. Για να βρω το σημείο τομής των (ε) και (ζ) θα λύσω το σύστημα των εξισώσεων

τους :
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = \frac{7}{2}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ 2y = 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 4 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ -7x + 2y = 2 \end{cases} \text{ προσθέτω}$$

κατά μέλη και έχω $-3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$ άρα πάω στην πρώτη και έχω :

$4 \cdot 2 - 2y = -8 \Leftrightarrow 8 - 2y = -8 \Leftrightarrow 2y = 16 \Leftrightarrow y = 8$. Άρα το σημείο τομής των (ε) και (ζ) είναι το σημείο Α(2,8)

iii. Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον x'x θέτω $y = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow x = -2$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον x'x είναι το Β(-2,0)

Για να βρούμε σημείο τομής της (ε) με τον y'y θέτω $x = 0$ στην εξίσωση της :

(ε): $y = 2x + 4 \Leftrightarrow y = 2 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow y = 4$, άρα το σημείο τομής της (ε) με τον y'y είναι το Γ(0,4)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : (ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ & ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ)

- Δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλ. $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.
- Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντιθετοαντίστροφους, δηλ. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ για τον οποίο :

- Οι ευθείες $y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $y = -x + 12$ είναι παράλληλες.
- Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$ είναι κάθετες.

Λύση :

- Έστω $(\varepsilon): y = (3\lambda - 5)x + 4$ και $(\zeta): y = -x + 12$. $(\varepsilon) \parallel (\zeta) \Leftrightarrow \alpha_\varepsilon = \alpha_\zeta \Leftrightarrow 3\lambda - 5 = -1 \Leftrightarrow 3\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$
- Έστω $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 1)x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3$. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - 1 + \frac{\lambda}{2} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 - 2 + \lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Δίνονται οι ευθείες: ε: $y = -2x + 4$ και ζ: $y = 3x + 9$.

- Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.
- Να σχεδιάσετε τις ευθείες ε και ζ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x + \lambda}{3}$ διέρχεται από το σημείο Α(-1,-2).

- Να βρείτε τον αριθμό λ.
- Να βρείτε το f(2).
- Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

6. Η ευθεία $\varepsilon: y=(2\lambda-6)x+\lambda-1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε τον αριθμό λ .
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .
7. Η ευθεία $\varepsilon: y=(3-\lambda)x+\lambda+1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
- Να βρείτε τον αριθμό λ .
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .
8. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=|x+4|-2|x-2|-2x$
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+x+3$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-1|+\lambda x+\mu$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5 και τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3.
- Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
 - Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y=(\alpha+2)x+7\alpha+4$ και $\zeta: y=(\beta-\alpha)x-\beta-2\alpha$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(-3,2)$ και ισχύει ότι $\varepsilon \parallel \zeta$. Να βρείτε:
- τις τιμές των α και β
 - το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.
12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-2x+2$, $\varepsilon_2: y=4x-1$ και $\varepsilon_3: y=-3x+6$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:
- που είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το σημείο τομής των ε_2 και ε_3
 - που διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_3 και το σημείο της ε_2 με τετμημένη -3.
13. Η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x-4$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$, ενώ το τρίγωνο που σχηματίζει με τους άξονες έχει εμβαδόν 4 τ.μ. Να βρείτε τον αριθμό λ .
14. Η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{\lambda+1}{2} \cdot x+1-\lambda$ διέρχεται από το σημείο $A(-4,5)$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ ,
 - την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $B(4,6)$
 - το σημείο στο οποίο η ευθεία ε τέμνει την ευθεία ζ που βρήκατε στο (β).
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και έστω A και B τα σημεία της γραφικής της παράστασης με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα.
- Να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B , καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B .
 - Να σχεδιάσετε την C_f και την παραπάνω ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων.
 - Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $|x| \leq \frac{x+15}{4}$.

Θέματα τράπεζας για την ενότητα :

6.3 Η Συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1 13471

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (Μονάδες 11)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2 14575

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$. (Μονάδες 8)
 γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3 13400

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

- α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 9)
 γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 13318

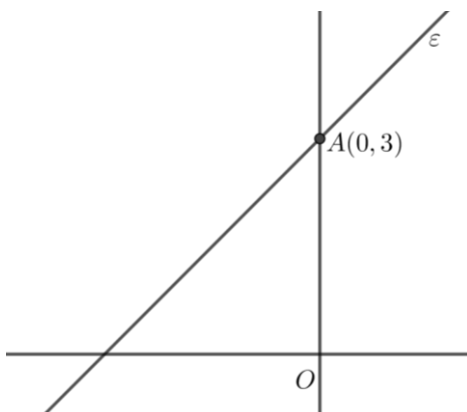
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in R$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$. (Μονάδες 12)
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5 14641

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε . (Μονάδες 7)
 β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
 (Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)



ΘΕΜΑ 6 12630

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β . (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
 γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 7 12939

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Α (0, -6) και τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β(-3, 0).

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 8 13033

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

- α)
 i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε). (Μονάδες 4)
 ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα; (Μονάδες 4)
 β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε). (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε). (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 9 13178

Δίνεται το σημείο Μ(3,4).

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το Ο(0,0). (Μονάδες 9)
 β) Δίνεται το σημείο Ν(-3, λ) με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.
 i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
 ii. Αν Ν(-3, -4) να εξετάσετε αν τα σημεία Μ, Ν είναι συμμετρικά ως προς το Ο. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 10 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:
 i. Τις εξισώσεις των ευθειών. (Μονάδες 6)
 ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 11 12730

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$.

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12 12856

Δίνεται ευθεία $\varepsilon: y=ax+5$. Αν η ευθεία $\delta: y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε) , τότε:

α)

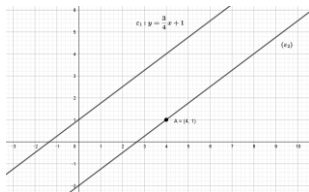
- i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε . (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13 12631

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1) .



- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 14 12684

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο A (-4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

- α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15 35201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β . (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 16 37183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 17 21239

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 18 13507

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6-p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για $p = 0$ και $p = 2$. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία; (Μονάδες 4)

β)

i. Για $p = 0$ και $p = 2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα, το οποίο και να βρείτε. (Μονάδες 6)

ii. Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον $x'x$ άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$; (Μονάδες 6)

γ) Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον $x'x$ άξονα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 19 14184

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 4)
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση. (Μονάδες 8)
 γ) Αν είναι $f(x) = x+2$, $x \neq -1$, τότε:
 i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$. (Μονάδες 7)
 ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20 14320

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι :

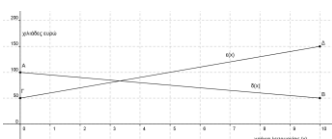
$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \in [0,6] \\ 16, & x \in (6,9] \\ 25-x, & x \in (9,12] \end{cases} \quad \text{και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.}$$

- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία :
 i. Διατηρείται σταθερή.
 ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου. (Μονάδες 4+7=11)
 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 21 14477

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



- α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)

β)

- i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

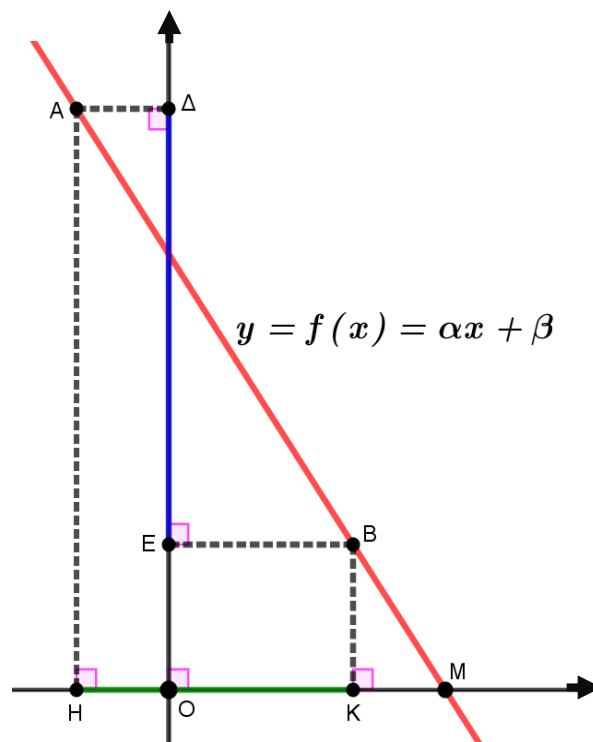
ΘΕΜΑ 22 14556

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x', y' είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$. (Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 9)



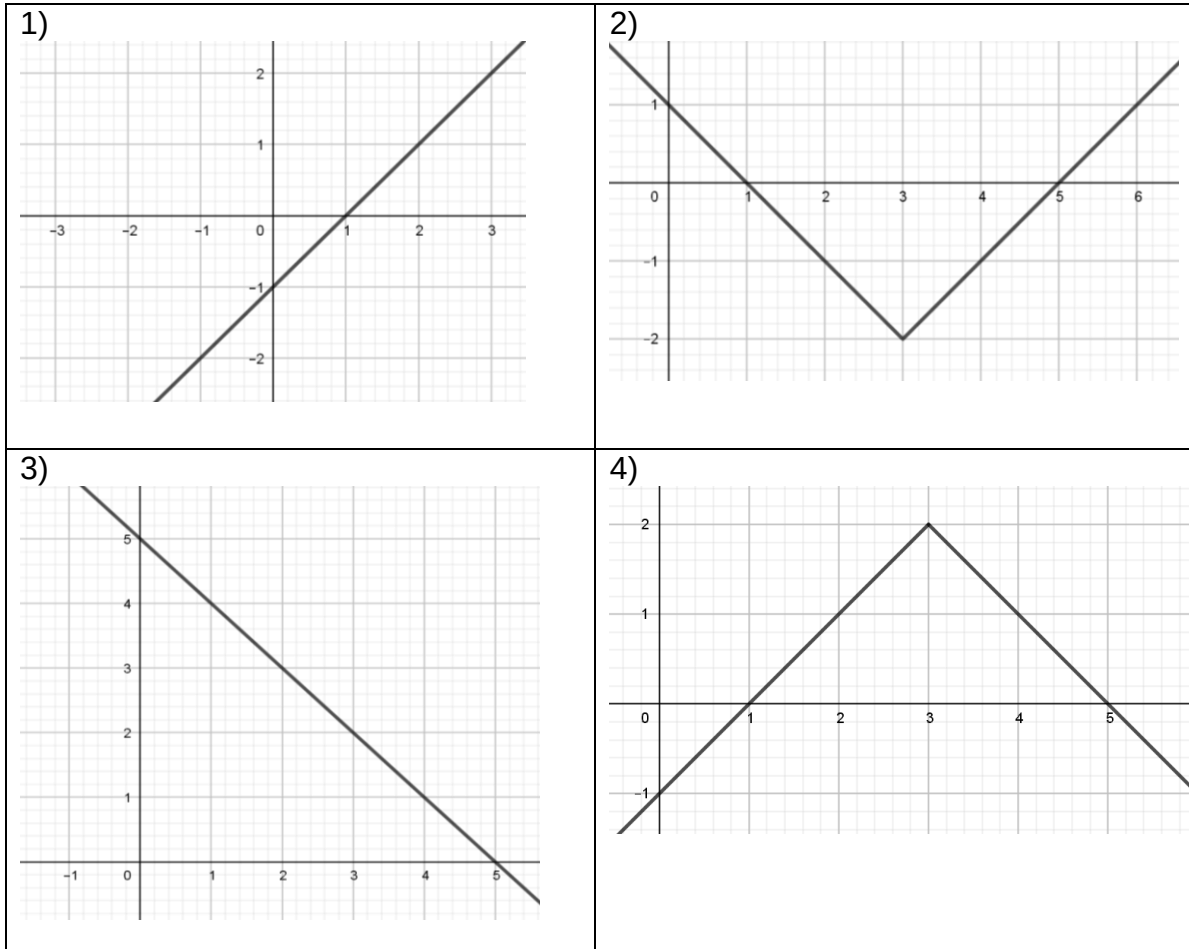
ΘΕΜΑ 23 12681

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$. (Μονάδες 5)

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



(Μονάδες 9)

γ)

iii. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$ (Μονάδες 5)

iv. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 24 12682

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

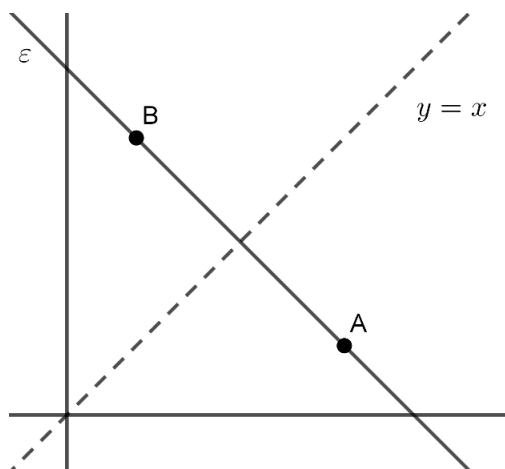
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 25 13298

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B . (Μονάδες 3)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$. (Μονάδες 6)
- γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:
- Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B . (Μονάδες 8)
 - Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 26 13367

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

- α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:
- Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 6)
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες. (Μονάδες 5)
 - Να σχεδιάσετε την ευθεία ε . (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 27 13473

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A . (Μονάδες 6)
- Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.
- β) i. Να δείξετε ότι $A=2$. (Μονάδες 4)
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$. (Μονάδες 5)
- γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$. (Μονάδες 6)
- ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$. (Μονάδες 4)

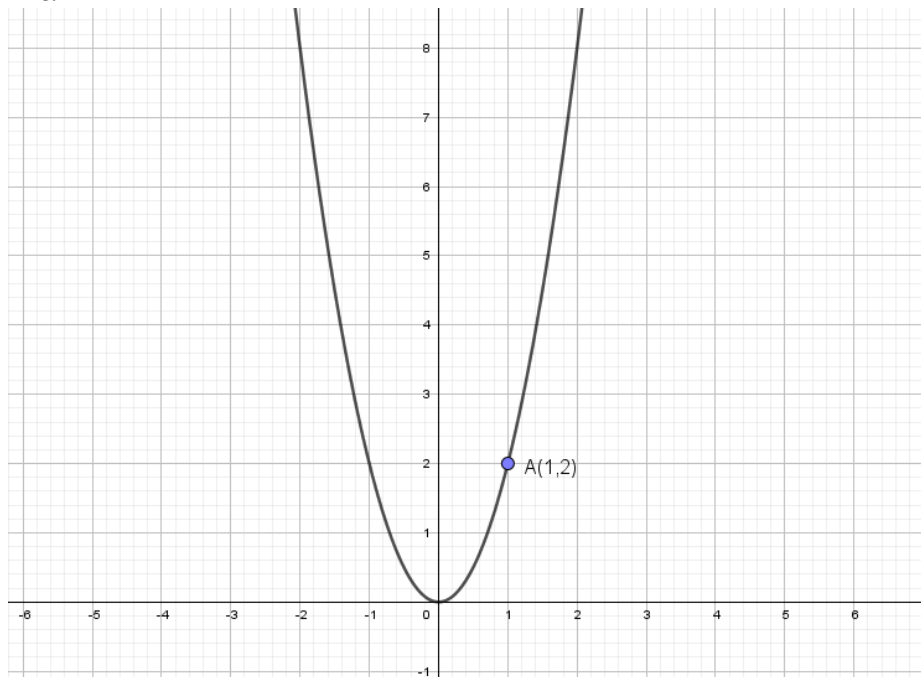
ΘΕΜΑ 28 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|x - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 5)
- β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .
(Μονάδες 8)
- γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 5)
- δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 29 12942

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2, x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο α .



- α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 2$.
(Μονάδες 6)
- β)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.
(Μονάδες 4)
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.
(Μονάδες 4)
- γ)
- Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.
(Μονάδες 4)
 - Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 30 13055

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 31 12999

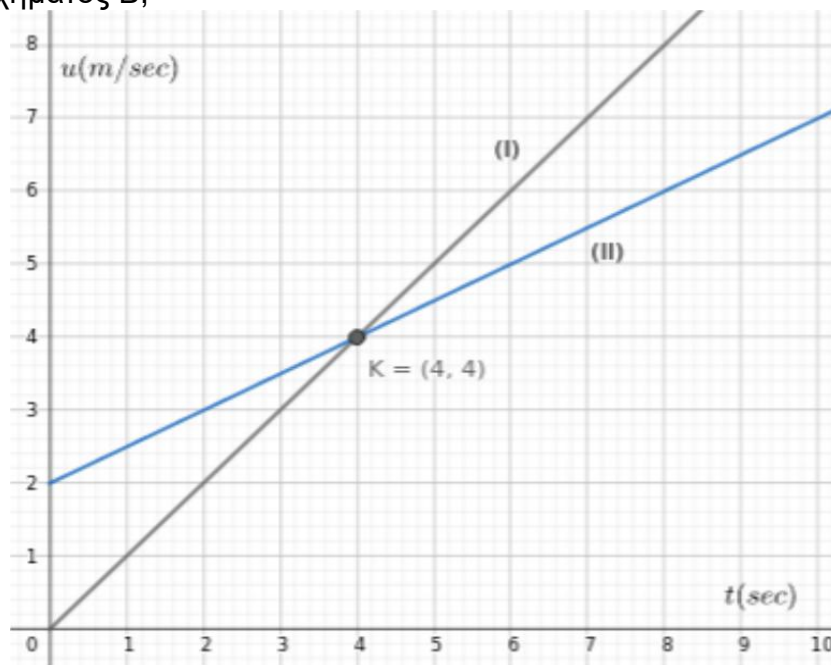
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση η-ρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in (3,5)$.

(Μονάδες 7)

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 32 13314

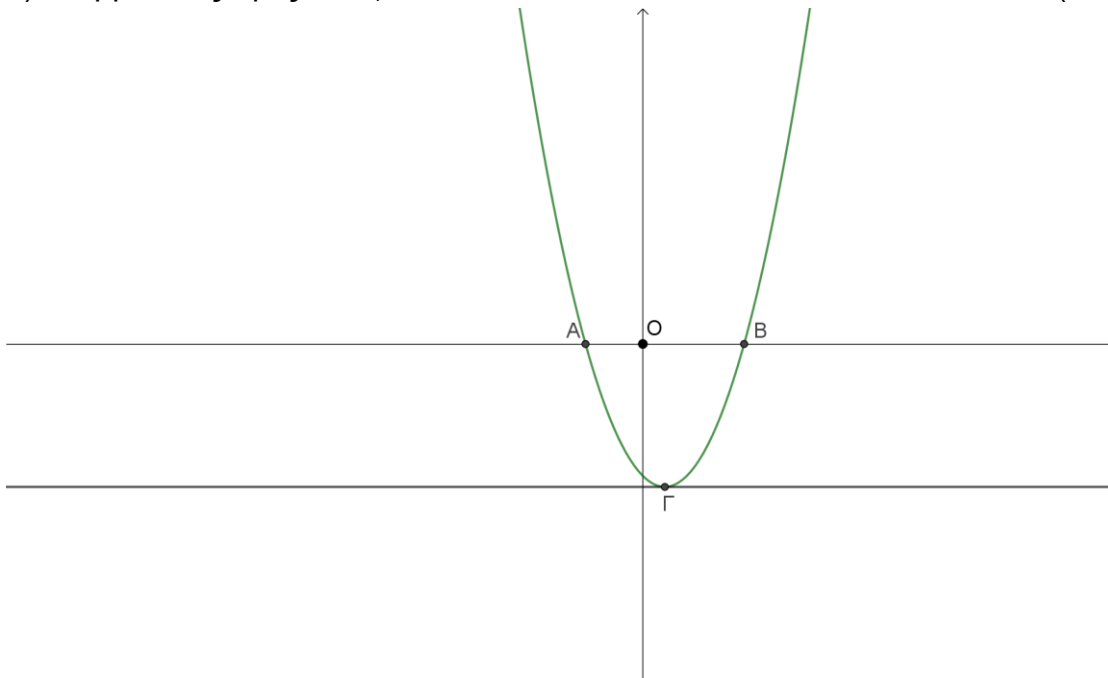
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε :

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 33 12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση :

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο; (Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτήρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα. (Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

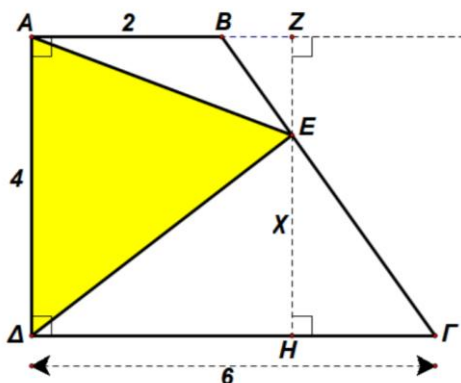
ΘΕΜΑ 34 12834

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; (Μονάδες 10)

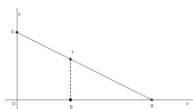
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 35 12728

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ. (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, y_Γ) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

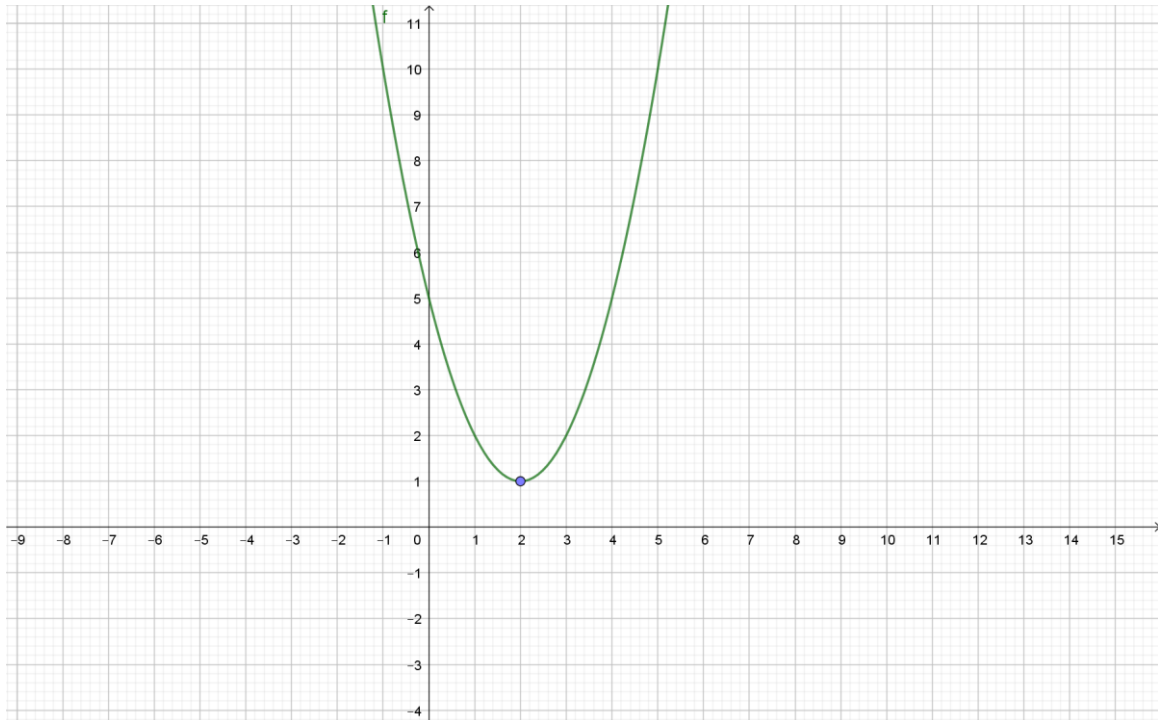
β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπέζιου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπέζιου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 36 13091

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 37 33894

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 38 33895

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. (Μονάδες 7)
 δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 39 34183

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

- α)
 i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

- ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)
 γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
 δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον Β, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 40 36655

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)
 γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 41 36652

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.
(Μονάδες 4)
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
(Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox .
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 42 36659

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

- α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;
(Μονάδες 5)
- β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
- Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.
(Μονάδες 7)
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
(Μονάδες 4)
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 43 36682

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
(Μονάδες 10)
- γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 44 36683

Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

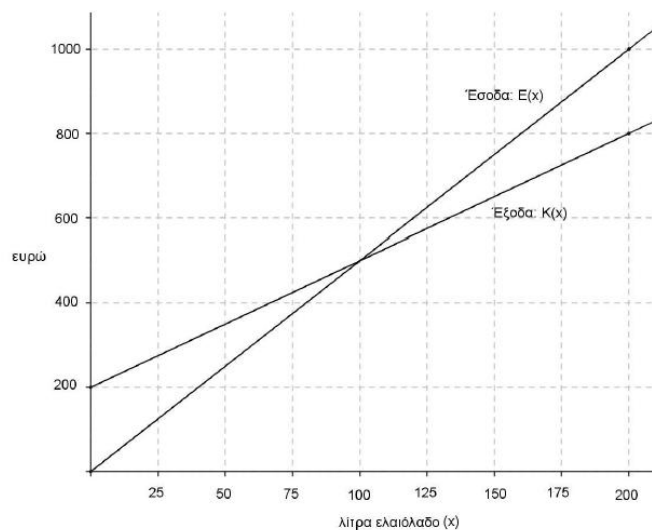
i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γι), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 45 37203



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)

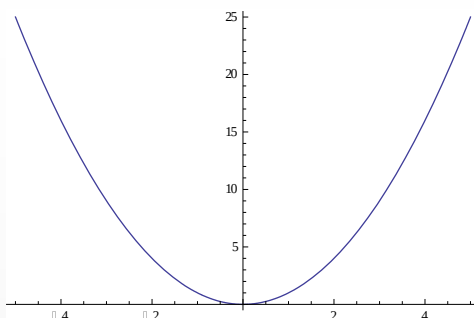
7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = ax^2$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = x^2$

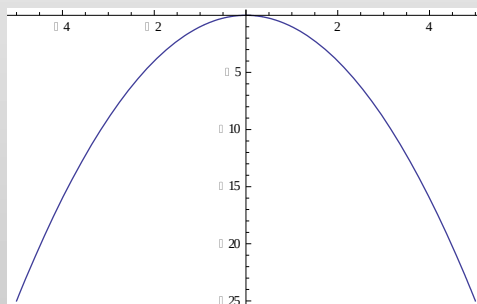
Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού ολό το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0 = f(0)$, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -x^2$

Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια, άρα συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq 0 = g(0)$, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $g(0) = 0$
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$ και όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$

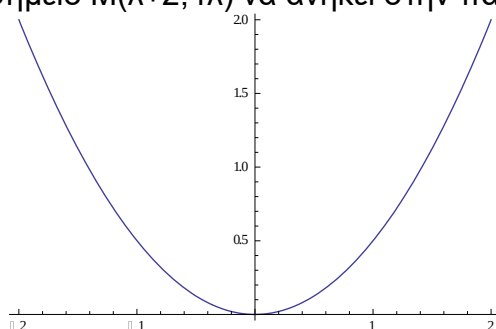
3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ (με $a \neq 0$ είναι παραβολή με κορυφή $O(0,0)$)

- Όταν $a > 0$: Είναι σαν τη x^2 , αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "κλίνει".
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν τη $-x^2$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα. Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "κλίνει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 + ax^2}{x^2 - 4}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η παραβολή του παρακάτω σχήματος, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$.
Να βρείτε:
- της εξίσωση της παραβολής
 - το σημείο της παραβολής με τετμημένη -4
 - τα σημεία της παραβολής με τεταγμένη 18
 - τον αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(\lambda+2,4\lambda)$ να ανήκει στην παρακάτω παραβολή.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-6, & \text{αν } -6 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ -x+6, & \text{αν } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} (x+a)^3, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x^2+8, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει $f(f(3))=1$.

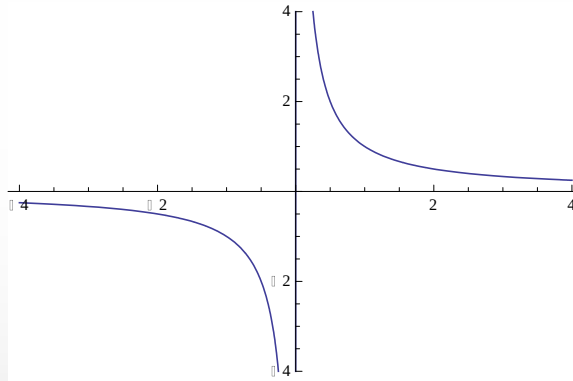
- Να βρείτε την τιμή του a .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- Να βρείτε το σύνολο της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ και έστω A, B τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 4 αντίστοιχα.

- Να βρείτε τις τεταγμένες των A και B .
- Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B .
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
 - Να σχεδιάσετε τη C_f και την ευθεία ε στο ίδιο σύστημα αξόνων
- Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{2}x^2 < x+4$
- Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το παραπάνω συμπέρασμα.

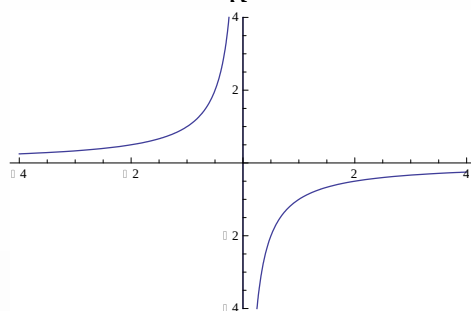
7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

1. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ **Ιδιότητες**

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $f(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $f(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

2. Μορφή της συνάρτησης $g(x) = -\frac{1}{x}$



Ιδιότητες

- Έχει πεδίο ορισμού $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Είναι περιττή, άρα συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων
- Είναι γν.αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και στο διάστημα $(0, +\infty)$
- Όταν $x \rightarrow 0$ από δεξιά, τότε $g(x) \rightarrow -\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα κάτω
- Όταν $x \rightarrow 0$ από αριστερά, τότε $g(x) \rightarrow +\infty$. Οπότε ο άξονας $y'y$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g προς τα πάνω
- Όταν $x \rightarrow -\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα αριστερά
- Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $g(x) \rightarrow 0$. Οπότε ο άξονας $x'x$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_g προς τα δεξιά
- Έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες (διχοτόμους) $y = x$ και $y = -x$

3. Μορφή της συνάρτησης $f(x) = \frac{a}{x}$ (με $a \neq 0$ είναι ισοσκελής υπερβολή)

- Όταν $a > 0$: Είναι σαν την $\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο μεγαλώνει το a , τόσο η καμπύλη "ανοίγει".
- Όταν $a < 0$: Είναι σαν την $-\frac{1}{x}$, αλλά αλλάζει η καμπυλότητα . Όσο το a μικραίνει, τόσο η καμπύλη "ανοίγει".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{a^2 + 3a + 4}{x}$ διέρχεται από το σημείο

$M(-1, a)$.

- Να βρείτε τον αριθμό a
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x, & \alpha \nu -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu x \geq 1 \end{cases}$

- Να βρείτε το πεδίο της f .
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

iii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{αν } x \leq -1 \\ 2, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:
 - α) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή
 - β) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|}, & \text{αν } |x| \geq 1 \\ -x^2, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης:
 - α) να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
 - β) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+a-3}{x-1}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από

το σημείο $M(2,3)$.

- i. Να βρείτε την τιμή του a .
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

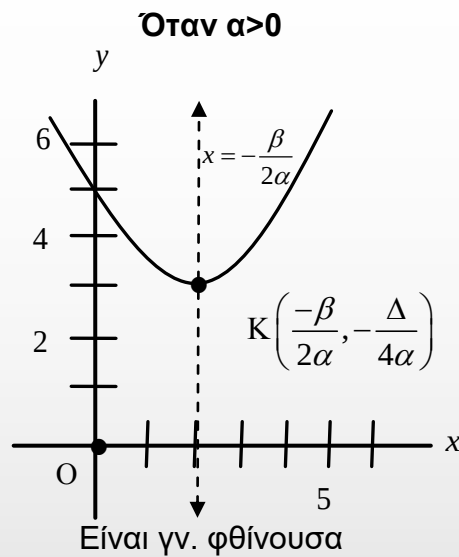
ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

1. Γενική μορφή του τριωνύμου : $f(x) = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

2. Κορυφή : Η C_f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K \left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

3. Συμμετρία : Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$.

4. Μονοτονία και ακρότατο : (Από τη γραφική παράσταση)

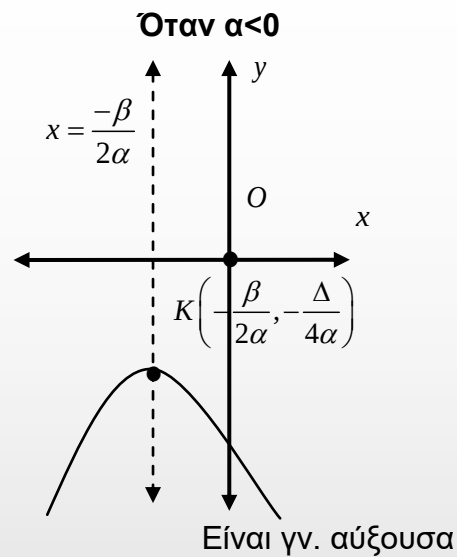


στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a} \right]$

και γν. αύξουσα

στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty \right)$

Ελάχιστο το $f \left(-\frac{\beta}{2a} \right) = -\frac{\Delta}{4a}$



στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a} \right]$

και γν. φθίνουσα

στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty \right)$

Μέγιστο, το $f \left(-\frac{\beta}{2a} \right) = -\frac{\Delta}{4a}$

5. Κοινά σημεία με τους άξονες :

- Τέμνει τον άξονα y στο σημείο $\Gamma(0, \gamma)$.
- Α) Όταν $\Delta > 0$, τέμνει τον άξονα x στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ όπου x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου.
Β) Όταν $\Delta = 0$, εφάπτεται του άξονα x στο σημείο $A(\rho, 0)$, όπου $\rho = -\frac{\beta}{2a}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου.
Γ) Όταν $\Delta < 0$, δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα x .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**1. Το πρόσημο του α**

- Όταν $\alpha > 0$, η παραβολή έχει ελάχιστο.
- Όταν $\alpha < 0$, η παραβολή έχει μέγιστο.
- Όταν $\alpha = 0$, δεν έχουμε παραβολή, αλλά ευθεία.

2. Ο αριθμός $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Εκφράζει την τετμημένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο δεξιά ή αριστερά συμβαίνει το ακρότατο.

3. Ο αριθμός $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Εκφράζει την τεταγμένη της κορυφής, δηλαδή το πόσο πάνω ή κάτω συμβαίνει το ακρότατο.

4. Μέθοδος

Για να βρούμε το κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$, θέτουμε όπου x το 0.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5. Μέθοδος

Για να βρούμε παραβολή από δοσμένα στοιχεία της, θεωρούμε την παραβολή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ και δημιουργούμε σύστημα με αγνώστους α, β, γ .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f .
- Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

3. Η παραβολή $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda + 2)x - 2(2\lambda - 1)$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.

- Να βρείτε τον αριθμό λ .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 10$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + (\lambda + 2)x - 2\lambda$ εφάπτεται στον άξονα

$x'x$. Να βρείτε:

- τον αριθμό λ
- τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 1 και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.
- Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 21$
6. Η παραβολή $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda^2 - 4\lambda - 9)x + 4\lambda$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ
 - την κορυφή της παραβολής.
7. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40cm.
- Αν το μήκος του είναι x cm, να εκφράσετε συναρτήσει του x , το πλάτος και το εμβαδόν του ορθογωνίου.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο εμβαδόν.
8. Δίνεται η παραβολή: $f(x) = \mu x^2 + 2(\mu - 1)x + \mu - 1$, $\mu \neq 0$. Η κορυφή της παραβολής ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 6$.
- Να βρείτε τον αριθμό μ .
 - Δίνεται και η συνάρτηση: $g(x) = -x^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda - 10$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το σημείο τομής των C_f και C_g έχει τη μεγαλύτερη τετμημένη.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x^2 + ax + 2a - 13|$ για την οποία ισχύει $f(-1) = f(-3)$.
- Να βρείτε την τιμή του a .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του a .