





# Μαθηματικά

Γ' Γυμνασίου

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα των εκδόσεων ΒΟΛΟΝΑΚΗ



© 2007 Εκδόσεις Βολονάκη  
Μαυρομιχάλη 41 & Βαλτετσίου, Αθήνα  
Τηλ.: 210 3608065, Fax: 210 3608197  
[www.volonaki.gr](http://www.volonaki.gr), mail: [info@volonaki.gr](mailto:info@volonaki.gr)

Διορθώσεις: Σιάκας Παναγιώτης  
Δημιουργικό εξωφύλλου: Κωνσταντίνος Παπακωνσταντίνου  
Ηλεκτρονική σελιδοποίηση: Πάρις Καρδαμίτσης  
Ειδικός συνεργάτης: Σιάκας Χριστόφορος

Απαγορεύεται η ολική ή μερική αναδημοσίευση του έργου αυτού, καθώς και η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε άλλο μέσο, χωρίς τη σχετική άδεια του εκδότη.

ISBN 978-960-381-363-7

Καρανικόλας Νικόλαος

# Μαθηματικά

## Γ' Γυμνασίου





Στη σύζυγό μου Σίσσυ  
και τα παιδιά μου  
Παναγιώτη, Θόδωρο και  
τη μικρή μας Εβελίνα



# Πρόλογος

**Τ**ο βιβλίο αυτό αποτελεί για το μαθητή, όπως και ο ίδιος θα διαπιστώσει διαβάζοντάς το, ένα πολύ υπεύθυνα γραμμένο βιόθημα για την πληρέστερη κατανόηση της ύλης που περιλαμβάνει το σχολικό εγχειρίδιο. Γι' αυτό φιλοδοξεί να συμβάλει στην καλύτερη εμπέδωση της ύλης των μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου, η οποία αποτελεί τη βάση για την ύλη των μαθηματικών και των τάξεων του Λυκείου.

Ο σκοπός αυτός καθόρισε τη δομή και το περιεχόμενο αυτού του βιβλίου όπου παρατίθενται ανά κεφάλαιο όλες οι ενότητες του σχολικού βιβλίου, αναλύονται λεπτομερώς και περιλαμβάνουν:

- Θεωρία
- Παρατηρήσεις - Σχόλια
- Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις
- Ερωτήσεις κατανόησης (πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης, σωστό - λάθος)
- Ασκήσεις για λύση - με τη λύση τους
- Κριτήρια αξιολόγησης (στο τέλος κάθε κεφαλαίου)
- Λύσεις - απαντήσεις σε όλες τις ασκήσεις και σε όλα τα θέματα του σχολικού βιβλίου.

Ελπίζω ότι το βιβλίο αυτό όχι μόνο θα βοηθήσει τους μαθητές, αλλά θα αποτελέσει και ένα χρήσιμο μέσο στα χέρια των συναδέλφων μαθηματικών.



Νίκος Π. Καρανικόλας



# Περιεχόμενα

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις - συμπληρώσεις).....	15
1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα .....	41
1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων .....	48
1.4 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων .....	49
1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες .....	54
1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων .....	63
1.7 Διαιρέση πολυωμύμων .....	69
1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων.....	76
1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις .....	78
1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων .....	81
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	87

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

2.1 Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ .....	133
2.2 Η εξίσωση $ax^2 + \beta = 0$ .....	139
2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού .....	148
2.4 Κλασματικές εξισώσεις .....	150
2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο .....	153
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	164

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης .....	195
3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.....	200
3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος .....	205
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	220

## **Κεφάλαιο 2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>**

4.1 Η συνάρτηση $\psi = ax^2$ με $a \neq 0$ .....	239
4.2 Η συνάρτηση $\psi = ax^2 + bx + c$ με $a \neq 0$ .....	244
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	252

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>**

5.1 Σύνολα .....	265
5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα .....	270
5.3 Η έννοια της πιθανότητας .....	274
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	283

## **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

1.1 Ισότητα τριγώνων .....	293
1.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων .....	302
1.3 Θεώρημα του Θαλή .....	310
1.4 Ομοιοθεσία .....	315
1.5 Ομοιότητα .....	319
1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων .....	324
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	329

## **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ**

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$ με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ .....	351
2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών .....	357
2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας .....	361
2.4 Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων .....	364
Λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου .....	370

## **ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ .....**

# Κεφάλαιο 10





## 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις - συμπληρώσεις)

### A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Τα σύνολα των αριθμών τα οποία ξέρουμε είναι:

- Το σύνολο των **φυσικών**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Το σύνολο των **ακεραίων**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$
- Το σύνολο των **ρητών**  $\mathbb{Q}$ , το οποίο περιέχει τους αριθμούς, που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή  $\frac{\alpha}{\beta}$ , όπου οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ακέραιοι με  $\beta \neq 0$ .
- Το σύνολο των **άρρητων**, το οποίο περιέχει τους αριθμούς που δεν είναι ρητοί.
- Το σύνολο των **πραγματικών**  $\mathbb{R}$ , το οποίο περιέχει τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Κάθε **πραγματικός** αριθμός παριστάνεται μ' ένα σημείο πάνω σ' έναν άξονα.

Αν ο αριθμός  $a$  παριστάνεται στον άξονα με το σημείο  $A$  τότε **απόλυτη τιμή** του  $a$  λέμε την απόσταση του  $A$  από την αρχή του άξονα.

### Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

#### A. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** πραγματικούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε πρόσημο, το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** πραγματικούς αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

#### B. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο (+).
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** πραγματικούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο (-).

## Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική (ως προς την πρόσθεση)	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	

### Γ. ΑΦΑΙΡΕΣΗ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με την βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.  $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$
- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ( $\alpha : \beta$ , ή  $\frac{\alpha}{\beta}$  με  $\beta \neq 0$ ) πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη,  $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$  ή  $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ .

#### Ακόμη ισχύουν:

- $\alpha \cdot 0 = 0$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .
- Άν  $\alpha \cdot \beta = 0$ , τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ .
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο την μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Κάθε πραγματικός αριθμός έχει μοναδικό αντίθετο.
2. Κάθε πραγματικός αριθμός  $a \neq 0$  έχει μοναδικό αντίστροφο.
3. Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι τότε είναι ετερόσημοι.
4. Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι τότε είναι ομόσημοι.
5. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.
6. Αν ένας αριθμός  $a$  είναι ίσος με τον αντίθετό του τότε  $a = 0$ .
7. Αν ένας αριθμός  $a$  είναι ίσος με τον αντίστροφό του τότε  $a = 1$  ή  $a = -1$ .
8. Η διαφορά δύο φυσικών δεν είναι πάντα φυσικός.
9. Το πηλίκο δύο ακέραιων δεν είναι πάντα ακέραιος.
10. Σε ένα γινόμενο αν ο ένας παράγοντας είναι 0 τότε το αποτέλεσμα είναι 0.
11. Σε ένα γινόμενο το πρόσημο εξαρτάται από το πλήθος των αρνητικών παραγόντων.
12. Αν ένα σύνολο δεν περιέχει το 0 τότε συνοδεύεται από το σύμβολο \* π.χ.  $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
13. Οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι ρητοί.
14. Οι ακέραιοι χωρίζονται σε άρτιους που είναι τα πολλαπλάσια του 2 και σε περιττούς οι οποίοι δεν είναι πολλαπλάσια του 2.
15. Ένας ρητός αριθμός είναι ακέραιος όταν ο παρονομαστής είναι διαιρέτης του αριθμητή.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### 1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις.

**α)**  $A = (-4) - \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{7} \cdot -4\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{2}{4}\right) \left(-\frac{16}{5}\right)$    **β)**  $B = \frac{\frac{3}{3} + \frac{2}{2}}{1 + \frac{\frac{3}{3}}{2 + \frac{3}{5}}}$

**γ)**  $\Gamma = -(3 \frac{2}{5} + 1) - \left[-(3 + \frac{1}{10}) + \left(-\frac{3}{10} - \frac{7}{10}\right)\right]$    **δ)**  $\Delta = \left(3 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(-3 - \frac{1}{6}\right)}$ .

**Λύση**

**α)**  $A = (-4) - \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{7} \cdot -4\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{2}{4}\right) \left(-\frac{16}{5}\right) = -4 + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot -4 - \frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \left(+\frac{32}{20}\right) =$   
 $= -4 + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot -4 - \frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \frac{16}{5} = -4 - 4 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} + \frac{1}{10} - \frac{16}{5} = -8 + \frac{6}{5} + \frac{2}{7} - \frac{15}{10} =$   
 $= -\frac{560}{70} + \frac{84}{70} + \frac{20}{70} - \frac{105}{70} = -\frac{645}{70}.$

**Κεφάλαιο 1**

$$\text{β) } \mathbf{B} = \frac{\frac{3+2}{3}}{1+\frac{3}{\frac{3}{2+\frac{3}{5}}}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{1+\frac{3}{\frac{10+3}{5}}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{1+\frac{3}{\frac{13}{5}}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{1+\frac{1}{\frac{13}{5}}} = \frac{\frac{3+2}{3}}{1+\frac{15}{13}} = \frac{\frac{9+2}{3}}{\frac{13+15}{13}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{28}{13}} = \frac{143}{54}.$$

$$\text{γ) } \mathbf{\Gamma} = -(3 \cdot \frac{2}{5} + 1) - [-(3 + \frac{1}{10}) + (-\frac{3}{10} - \frac{7}{10})] = -(\frac{17}{5} + \frac{5}{5}) - [(-\frac{30}{10} + \frac{1}{10}) + (-\frac{10}{10})] = \\ -\frac{22}{5} - (\frac{31}{10} - \frac{10}{10}) = -\frac{22}{5} - \frac{21}{10} = -\frac{44}{10} - \frac{21}{10} = -\frac{63}{10}.$$

$$\text{δ) } \mathbf{\Delta} = (3 - \frac{1}{4}) : (\frac{3}{2} - \frac{1}{4}) - \frac{(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) : (\frac{1}{2} + \frac{5}{4})}{(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}) \cdot (-3 - \frac{1}{6})} = (\frac{12}{4} - \frac{1}{4}) : (\frac{6}{4} - \frac{1}{4}) - \frac{(\frac{6}{8} - \frac{1}{8}) : (\frac{2}{4} + \frac{5}{4})}{(\frac{8}{6} - \frac{1}{6}) \cdot (-\frac{18}{6} - \frac{1}{6})} = \\ = \frac{11}{4} : \frac{5}{4} - \frac{\frac{5}{8} : \frac{7}{4}}{\frac{7}{6} \cdot (-\frac{19}{6})} = \frac{11}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{36}{36}} = \frac{11}{5} - \frac{\frac{20}{56}}{\frac{133}{36}} = \frac{11}{5} + \frac{20 \cdot 36}{56 \cdot 133} = \frac{11}{5} + \frac{20 \cdot 9}{14 \cdot 133} = \\ = \frac{11}{5} + \frac{10 \cdot 9}{7 \cdot 133} = \frac{11}{5} + \frac{90}{931} = \frac{11 \cdot 931}{5 \cdot 931} + \frac{90 \cdot 5}{5 \cdot 931} = \frac{10241 + 450}{4655} = \frac{10691}{4655}.$$

- 2** Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta + 5$  είναι αντίθετοι και οι αριθμοί  $\gamma$  και  $\delta$  είναι αντίστροφοι, να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων.

$$\mathbf{A} = 3(\alpha + 4) - (4 - \gamma) \cdot \delta + 3(\beta + 1) + 4\delta.$$

$$\mathbf{B} = -(\alpha - 2\beta) + 3(\alpha + \gamma) + 10 + (\delta - 3)\gamma + 2006.$$

**Λύση**

Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta + 5$  είναι αντίθετοι άρα:  $\alpha + (\beta + 5) = 0$ , οπότε  $\alpha + \beta = -5$   
Οι αριθμοί  $\gamma$  και  $\delta$  είναι αντίστροφοι άρα:  $\gamma \cdot \delta = 1$ .

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε το άθροισμα  $\alpha + \beta$  και το γινόμενο  $\gamma \cdot \delta$

Έτσι έχουμε:

$$\mathbf{A} = 3(\alpha + 4) - (4 - \gamma) \delta + 3(\beta + 1) + 4\delta = 3\alpha + 12 - 4\delta + \gamma\delta + 3\beta + 3 + 4\delta = \\ = 3\alpha + 3\beta + 15 + \gamma\delta = 3(\alpha + \beta + 5) + \gamma\delta = 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

$$\mathbf{B} = -(\alpha - 2\beta) + 3(\alpha + \gamma) + 10 + (\delta - 3)\gamma + 2006 = \\ = -\alpha + 2\beta + 3\alpha + 3\gamma + 10 + \delta\gamma - 3\gamma + 2006 = 2\alpha + 2\beta + 10 + \delta\gamma + 2006 = \\ = 2(\alpha + \beta + 5) + \delta\gamma + 2006 = 2 \cdot 0 + 1 + 2006 = 2007.$$

- 3** Αν  $\alpha, \beta$  είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με εμβαδόν 40 m και  $\gamma, \delta$  οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου με περίμετρο 28m να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$\mathbf{A} = 3(\gamma + 2\delta) - 2(\alpha + 10)\beta - 3\delta + 20(\beta + 100)$$

$$\mathbf{B} = (4\beta - 1)\alpha + 2(\gamma + \delta - 15) + \alpha + 2003$$

### Λύση

Το ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $\alpha, \beta$  και έχει εμβαδόν  $40m^2$  άρα  $\alpha \cdot \beta = 40$

Το άλλο ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $\gamma$  και  $\delta$  και έχει περίμετρο 28 άρα:

$$2\gamma + 2\delta = 28, \text{ οπότε } \gamma + \delta = 14.$$

Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε το γινόμενο  $\alpha\beta$  και το άθροισμα  $\gamma + \delta$

$$\mathbf{A} = 3(\gamma + 2\delta) - 2(\alpha + 10)\beta - 3\delta + 20(\beta + 100) = 3\gamma + 6\delta - 2\alpha\beta - 20\beta - 3\delta + 20\beta + 2000$$

$$3\gamma + 3\delta - 2\alpha\beta + 2000 = 3(\gamma + \delta) - 2\alpha\beta + 2000 = 3 \cdot 14 - 2 \cdot 40 + 2000 = 42 - 80 + 2000 = 1962.$$

$$\mathbf{B} = (4\beta - 1)\alpha + 2(\gamma + \delta - 15) + \alpha + 2003 = 4\beta\alpha - \alpha + 2\gamma + 2\delta - 30 + \alpha + 2003 = 4\beta\alpha + 2(\gamma + \delta) - 30 + 2003 = 4 \cdot 40 + 28 - 30 + 2003 = 160 + 28 - 30 + 2003 = 2161.$$

**4**

Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$  ώστε οι παραστάσεις:

Αν  $\mathbf{A} = 3|-2+5|+3|-4-2| - 7$ ,  $\mathbf{B} = \alpha + 3(4 - 2\alpha) - 4$  να είναι

**α)** Αντίθετοι αριθμοί **β)** Αντίστροφοι αριθμοί.

### Λύση

Θα υπολογίσουμε πρώτα τις παραστάσεις  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{A} = 3|-2+5|+3|-4-2| - 7 = 3|-3|+3|-6| - 7 = 3 - 3 + 3 \cdot 6 - 7 = 18 - 7 = 11.$$

$$\mathbf{B} = \alpha + 3(4 - 2\alpha) - 4 = \alpha + 12 - 6\alpha - 4 = 8 - 5\alpha.$$

**α)** Για να είναι **αντίθετοι** πρέπει:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$  ή  $11 + (8 - 5\alpha) = 0$  ή

$$11 + 8 - 5\alpha = 0 \text{ ή } -5\alpha = -19 \text{ ή } \alpha = \frac{19}{5}.$$

**β)** Για να είναι **αντίστροφοι** πρέπει:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 1$  ή  $11 \cdot (8 - 5\alpha) = 1$  ή

$$\text{ή } 88 - 55\alpha = 1 \text{ ή } -55\alpha = 1 - 88 \text{ ή } \alpha = +\frac{87}{55}.$$

**Κεφάλαιο 1** **5** Αν  $\alpha + \beta = 3$  και  $\gamma + \delta = +4$ , να υπολογίσετε τις παραστάσεις.

$$\mathbf{A} = 5 - (\beta - \delta) - (-\gamma + \alpha) + 2004, \quad \mathbf{B} = -(-3 - \alpha) + 2(\beta + \gamma) + 2\delta + \alpha$$

### Λύση

$$\mathbf{A} = 5 - (\beta - \delta) - (-\gamma + \alpha) + 2004 = 5 - \beta + \delta + \gamma - \alpha + 2004 = \\ -(\alpha + \beta) + \gamma + \delta + 5 + 2004 = -3 + 4 + 5 + 2004 = 2009.$$

$$\mathbf{B} = -(-3 - \alpha) + 2(\beta + \gamma) + 2\delta + \alpha = 3 + \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + \alpha = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta + 3 = \\ 2(\alpha + \beta) + 2(\gamma + \delta) + 3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 = 6 + 8 + 3 = 17.$$

**6** Να βρείτε τις θετικές ακέραιες ακέραιες τιμές του  $x$  ώστε ο αριθμός  $A = \frac{3}{X+2}$  να είναι ακέραιος.

### Λύση

Για να είναι ο  $A$  ακέραιος πρέπει :

$$x + 2 = 1 \quad \text{ή} \quad x + 2 = -1 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 3 \quad \text{ή} \quad x + 2 = -3 \quad \text{ή}$$

$x = -1$  απορρίπτεται, ή  $x = -3$  απορρίπτεται, ή  $x = 1$  δεκτή  
ή  $x = -5$  απορρίπτεται.

**7** **a)** Να απλοποιήσετε το κλάσμα:  $A = \frac{10 + 20 + 30 + \dots + 130}{5 + 10 + 15 + \dots + 65}$

**b)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$B = (60 + 57 + 54 + \dots + 3) - (59 + 56 + 53 + \dots + 2)$$

### Λύση

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε παραστάσεις που έχουν πολλά αθροίσματα τότε συνήθως δεν εκτελούμε τις πράξεις, αλλά προσπαθούμε με διάφορα τεχνάσματα να υπολογίσουμε τις παραστάσεις.

$$A = \frac{10 + 20 + 30 + \dots + 30}{5 + 10 + 15 + \dots + 65} = \frac{10(1 + 2 + 3 + \dots + 13)}{5(1 + 2 + 3 + \dots + 13)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\mathbf{B} = (60 + 57 + 54 + \dots + 3) - (59 + 56 + 53 + \dots + 2) = \\ (60 - 59) + (57 - 56) + (54 - 53) + \dots + (3 - 2) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 20 \cdot 1 = 20.$$

### Παρατήρηση:

Αν έχουμε να υπολογίσουμε ένα άθροισμα της μορφής:  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + v$

δηλαδή το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών φυσικών τότε μπορούμε να **Κεφάλαιο 1** χρησιμοποιήσουμε το γενικό τύπο:

$$1+2+3+4+\dots+v = \frac{v(v+1)}{2} \quad (1) \text{ π.χ.}$$

Να υπολογίσετε: **a)**  $1 + 2 + 3 + \dots + 40$

**β)**  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

**γ)**  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200$

### Λύση

**α)** Για  $v = 40$  και από τον τύπο (1) έχουμε:

$$1+2+3+\dots+40 = \frac{40(40+1)}{2} = \frac{40 \cdot 41}{2} = 20 \cdot 21 = 420.$$

**β)** Για  $v = 100$  και από τον τύπο (1) έχουμε :  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 =$

$$= \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

**γ)** Δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (1) οπότε δουλεύουμε ως εξής:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 200 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 2 \cdot 5050 = 10100.$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

1. Οι ακέραιοι αριθμοί συμβολίζονται με  $\mathbb{N}$ .
2. Κάθε αριθμός της μορφής  $\frac{\alpha}{\beta}$  με  $\beta \neq 0$  είναι ρητός.
3. Το άθροισμα δύο ομόσημων είναι θετικός.
4. Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα θετικό είναι θετικοί.
5. Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
6. Ο αριθμός  $0,3\overline{5}$  είναι άρρητος.
7. Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.
8. Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί έχουν αντίστροφο.
9. Ο αριθμός  $\sqrt{2}$  δεν μπορεί να παρασταθεί πάνω σε άξονα.
10. Αν ο αριθμός  $\frac{\alpha}{\beta}$ , είναι ακέραιος τότε και ο  $\frac{\beta}{\alpha}$  είναι ακέραιος ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ).
11. Υπάρχουν αριθμοί που έχουν αντίστροφο τον εαυτό τους.

## Κεφάλαιο 1

12. Το áθροισμα δύο áρρητων αριθμών είναι πάντα áρρητος.
13. Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός αριθμός.
14. Αν δύο αριθμοί  $\alpha, \beta$  με  $\alpha > \beta$  έχουν γινόμενο 0 και áθροισμα θετικό τότε  $\alpha > 0$ .
15. Αν  $\alpha \cdot \beta < 0$ , τότε οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  μπορεί να είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
16. Αν  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι τότε  $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ .
17. Ο αριθμός  $-x$  είναι αρνητικός.
18. Ο αριθμός  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  είναι ρητός.
19. Οι αριθμοί 1 και -1 είναι αντίστροφοι.
20. Αν  $\alpha \neq 0$  και  $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{\alpha^3}$  τότε οι αριθμοί  $\beta\gamma$  και  $\frac{1}{\alpha^2}$  είναι αντίστροφοι.

## B Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι αντίθετοι, τότε :

**a)** είναι ομόσημοι, **b)** έχουν ίσες απόλυτες τιμές **c)** έχουν γινόμενο τη μονάδα **d)** έχουν ίσα μέτρα και είναι ετερόσημοι.

2. Η τιμή της παράστασης  $A = (x - 1821)(x - 2004)(x - 2001) \cdot x$  για  $x = 0$  ισούται :

**a)** 0, **b)** 2006 **c)** -2004

3. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι αντίστροφοι τότε η παράσταση

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \alpha - \beta + 1 \text{ ισούται με}$$

**a)** 0, **b)** 1, **c)**  $\alpha + \beta$  **d)**  $-\alpha - \beta$  **e)** 1.

4. Αν ο αριθμός  $A = \frac{3}{X+2}$  είναι ακέραιος θετικός τότε η τιμή του  $x$  είναι :

**a)** 1, **b)** -8 **c)** 2 **d)** 0 **e)** 5

5. Αν δύο ετερόσημοι αριθμοί έχουν áθροισμα 0 τότε:

**a)** είναι αντίθετοι, **b)** είναι αντίστροφοι, **c)** έχουν γινόμενο 0  
**d)** έχουν γινόμενο 1.

6. Έστω  $\alpha, \beta$  είναι φυσικοί και οι παραστάσεις:

- i)**  $\alpha - \beta$  **ii)**  $2 \cdot \alpha + 3\beta$  **iii)**  $\alpha \cdot \beta$  **iv)**  $\alpha : \beta$

Ποιες από αυτές παριστάνουν πάντα φυσικό αριθμό;

- α)** η (i) και η (ii) **β)** η (i) και η (iii) **γ)** η (i) η (ii) και η (iii)  
**δ)** η (i) η (iii) και η (iv) **ε)** η (ii) και η (iii)

7. Αν  $\frac{5}{6} \cdot x = 0$ , τότε η παράσταση  $\frac{5}{6} - x$  είναι ίση με:

- α.** 0    **β.**  $\frac{5}{6}$     **γ.**  $-\frac{5}{6}$     **δ.** 1

### Γ. Ερωτήσεις συμπλήρωσης

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας X στην κατάλληλη θέση.

	-4	$\frac{3}{2}$	8	-0,3	$\sqrt{5}$	$\sqrt{16}$	$3, \bar{4}$	$\pi$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
Ακέραιος	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Ρητός	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Άρρητος	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνονται οι αριθμοί:  $+3, -2, \frac{3}{5}, 2, \bar{23}, \pi, \sqrt{3}, \sqrt{9}, \frac{2}{3}$

Να γράψετε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι.

2 Ποιοί από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι και ποιοί περιττοί;  
 $2v, 2v+1, 2v+3, 4v+1, 4v+3, v(v+1)$  όπου  $v$  φυσικός.

3 Να κάνετε τις πράξεις:

**α)**  $3 + 4 \cdot 6 - 36 : (-4) + 2$     **β)**  $-10 : (-4 \cdot -6) - [-(4 \cdot -2) + (1 \cdot -3)]$

**γ)**  $(-14) \cdot (-4) \cdot (3 - 3) \cdot (1935 - 678)$     **δ)**  $25 : |2-7| + [2 - 4(2 : 4) - 3]$

**Κεφάλαιο 1** **4** Av  $\alpha + \beta = 4$ ,  $\gamma\delta = -12$ , να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = 3\alpha + 3\beta, \quad \mathbf{B} = \alpha\delta\gamma + \beta\gamma\delta, \quad \mathbf{\Gamma} = \alpha(\gamma\delta - 2) - \gamma(\alpha\delta - 2) - 2\beta.$$

**5** Av  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι  $\alpha = 3\beta$ ,  $\beta = 16\gamma$  και  $\gamma = \frac{4}{5}$ , τότε να αποδείξετε ότι:

a)  $\alpha - \beta = -\frac{128}{5}$  b) οι αριθμοί  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{5\gamma}{12}$  είναι αντίστροφοι

γ) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

**6** Av  $\alpha + \beta + \gamma = 2001$  και  $\beta + 2\gamma = 6$  να υπολογίσετε τις παραστάσεις:  
 $\mathbf{A} = \alpha + 2\beta + 3\gamma, \quad \mathbf{B} = \alpha + 3\beta + 5\gamma$ .

**7** a) Να απλοποιήσετε το κλάσμα:  $\mathbf{A} = \frac{2+4+6+\dots+100}{5+10+15+\dots+250}$

b) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A} = (200 + 196 + 192 + \dots + 8 + 4) - (198 + 196 + 194 + \dots + 6 + 4 + 2)$$

(Διαγωνισμός E M E, Ευκλείδης - 1999)

**8** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\mathbf{A} = \frac{-[-(-2\alpha + \beta - 3\gamma) - (2\gamma - \alpha + \beta)] - (-3\alpha + 3\beta - \gamma + 2007)}{-(\alpha + 2\beta) - [\alpha - (-\beta - 2\gamma)] - (-3\beta - 2\gamma) + 1}$$

**9** Av  $\alpha, \beta$  είναι αριθμοί με  $\alpha + \beta = 4$  να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A} = \frac{100 - 3(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 2\beta) - 5 + 3[5\alpha - (-\beta + 2)]}{-2(2\alpha - \beta) - 4(3\beta - 1) - 2(-2\alpha - 5\beta)}$$

**10** Να αποδείξετε ότι: αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι αντίθετοι τότε και οι αριθμοί  $x = \alpha - 2(\beta + 4) + 2$  και  $\psi = 4(\alpha + 1) + 7\beta + 2$  είναι αντίθετοι.

**11** Av  $x = 850,35$  και  $\psi = -150,65$  να βρεθεί η τιμή της παράστασης:  
 $3x\psi - 3x(\psi - 1) - [x - (\psi + 7)] - 3\psi$

- 12** Να βρείτε τις θετικές τιμές του ακεραίου κ ώστε ο αριθμός  $A = \frac{3}{2k+1}$  να είναι ακέραιος.

- 13** Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν:  
 $\alpha - 2\beta = 5, 2\beta - \gamma = 7, \gamma - 2\delta = 5$  και  $\delta + 3 = 2$ , να υπολογίσετε το άθροισμα  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ .

## B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Αν  $\alpha$  είναι πραγματικός αριθμός και  $n \geq 2$ , τότε ο αριθμός  $\alpha^n$  λέγεται δύναμη με βάση το  $\alpha$  και εκθέτη το  $n$  και είναι ίσος με το γινόμενο  $n$  παραγόντων ίσων με τον αριθμό  $\alpha$ .

Δηλαδή:  $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{n \text{ παράγοντες}}$

**Ορίζονται ακόμη:**

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$2^3 : 2^{-2} = 2^{3-(-2)} = 2^5$
$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu$	$(3\psi)^3 = 3^3 \psi^3 = 27\psi^3$
$(\frac{\alpha}{\beta})^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$(\frac{2}{5})^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$
$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-3} = 2^9 = 512$
$(\frac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{\alpha})^\nu$	$(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2$

1. Αν σε μία δύναμη η βάση είναι θετική τότε το αποτέλεσμα είναι θετικό.
2. Αν σε μία δύναμη η βάση είναι αρνητική τότε το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον εκθέτη.
  - i) Αν ο εκθέτης είναι άρτιος το αποτέλεσμα είναι θετικό.
  - ii) Αν ο εκθέτης είναι περιττός το αποτέλεσμα είναι αρνητικό.
3. Δεν ορίζεται η δύναμη με βάση το 0 και εκθέτη αρνητικό ακέραιο ή μηδέν.
4. Ο συμβολισμός  $(-\alpha)^v$  σημαίνει νιοστή δύναμη του  $-\alpha$  ενώ ο συμβολισμός  $-\alpha^v$  σημαίνει ο αντίθετος του  $\alpha^v$ .
5. Σε μία αλγεβρική παράσταση η προτεραιότητα των πράξεων είναι:
  - i) Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
  - ii) Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις.
  - iii) Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

6. Ισχύουν i)  $1^v = 1$  για κάθε ακέραιο  $v$ .  
ii)  $(-1)^v = 1$  για κάθε άρτιο ακέραιο  $v$   
iv)  $(-1)^v = -1$  για κάθε περιττό ακέραιο  $v$ .
7. Προσοχή το  $0^0$  δεν ορίζεται.
8. Αν  $\alpha^v = \beta^v$  τότε δεν ισχύει πάντα  $\alpha = \beta$ .
9. i) Γεωμετρικά η δύναμη  $\alpha^2$  εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά  $\alpha$ .  
ii) Γεωμετρικά η δύναμη  $\alpha^3$  εκφράζει τον όγκο ενός κύβου με ακμή  $\alpha$ .
10. Από την ισότητα  $\alpha^x = \alpha^y$ ,  $\alpha \neq 0, 1, -1$  προκύπτει ότι  $x = y$ .

**1** Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

**α)**  $(-0,25)^{17} \cdot 8^{11}$     **β)**  $(-4)^{60} \cdot (-1,25)^{40}$     **γ)**  $12^{100} \cdot 1,5^{50} \cdot 6^{-150}$

### Λύση

**α) 1<sup>ος</sup> τρόπος** (προσπαθούμε να έχουμε ίδιους εκθέτες)

$$\begin{aligned} (-0,25)^{17} \cdot 8^{11} &= -0,25^{17} \cdot 8^{11} = -0,25^6 \cdot 0,25^{11} \cdot 8^{11} = -0,25^6 \cdot (0,25 \cdot 8)^{11} = \\ &= -0,25^6 \cdot 2^{11} = -0,25^6 \cdot 2^6 \cdot 2^5 = -(0,25 \cdot 2)^6 \cdot 2^5 = -0,5^6 \cdot 2^5 = -0,5 \cdot 0,5^5 \cdot 2^5 = \\ &= -0,5 \cdot (0,5 \cdot 2)^5 = -0,5 \cdot 1^5 = -0,5 \cdot 1 = -0,5. \end{aligned}$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος** (προσπαθούμε να έχουμε ίδιες βάσεις)

$$\begin{aligned} (-0,25)^{17} \cdot 8^{11} &= -\left(\frac{25}{100}\right)^{17} \cdot 8^{11} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{17} \cdot (2^3)^{11} = -\left(\frac{1}{2^2}\right)^{17} \cdot 2^{33} = -\frac{1}{2^{34}} \cdot 2^{33} = \\ &= -2^{33-34} = -2^{-1} = -\frac{1}{2} = -0,5. \end{aligned}$$

**β)**  $(-4)^{60} \cdot (-1,25)^{40} = 4^{60} \cdot 1,25^{40} = 4^{20} \cdot 4^{40} \cdot 1,25^{40} = 4^{20} \cdot (4 \cdot 1,25)^{40} = 4^{20} \cdot 5^{40} =$

$$4^{20} \cdot 5^{20} \cdot 5^{20} = (4 \cdot 5 \cdot 5)^{20} = 100^{20} = (10^2)^{20} = 10^{40}$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{\gamma)} 12^{100} \cdot 1,5^{50} \cdot 6^{-150} &= \frac{12^{100} \cdot 1,5^{50}}{6^{150}} = \frac{12^{100} \cdot 1,5^{50}}{6^{100} \cdot 6^{50}} = \left(\frac{12}{6}\right)^{100} \cdot \left(\frac{1,5}{6}\right)^{50} = 2^{100} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{50} = \\ &= 2^{100} \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{50} = 2^{100} \cdot \frac{1}{2^{100}} = \frac{2^{100}}{2^{100}} = 1. \end{aligned}$$

**2** Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = [(x^2 \psi^3)^{-2} \cdot (x \psi^3)^4] : (x^3 : \psi^{-1})^{-3} \quad \text{για } x = 2007 \text{ και } \psi = \frac{1}{2007}$$

### Λύση

$$\begin{aligned} A &= [(x^2 \cdot \psi^3)^{-2} \cdot (x \cdot \psi^3)^4] : (x^3 : \psi^{-1})^{-3} = (x^{-4} \cdot \psi^{-6} \cdot x^4 \cdot \psi^{12}) : (x^{-9} : \psi^3) = (x^{-4+4} \cdot \psi^{-6+12}) : \frac{\psi^{-9}}{\psi^3} = \\ &= x^0 \cdot \psi^6 \cdot \frac{\psi^3}{x^{-9}} = \frac{\psi^6 \cdot \psi^3}{x^{-9}} = \psi^9 \cdot x^9 = (\psi \cdot x) = \frac{1}{2007} \cdot 2007 = 1. \end{aligned}$$

**Κεφάλαιο 1** **3** Για τις διάφορες τιμές του φυσικού  $v$  να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

$$\mathbf{A} = (-1)^v + 1^v \quad \mathbf{B} = (-1)^{2v} + (-1)^{v+1} + (-1)^v$$

**Λύση**

$\mathbf{A} = (-1)^v + 1^v = (-1)^v + 1$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον φυσικό  $v$ .

**1<sup>η</sup> περίπτωση:** αν ο  $v$  είναι άρτιος τότε :  $A = 1 + 1 = 2$

**2<sup>η</sup> περίπτωση:** αν ο  $v$  είναι περιττός τότε  $A = -1 + 1 = 0$

$$\mathbf{B} = (-1)^{2v} + (-1)^{v+1} + (-1)^v = 1 + (-1)^{v+1} + (-1)^v$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το  $v$ .

**1<sup>η</sup> περίπτωση:** αν ο  $v$  είναι άρτιος, τότε ο  $v+1$  είναι περιττός οπότε:  
 $A = 1 + (-1) + 1 = 1$ .

**2<sup>η</sup> περίπτωση:** αν ο  $v$  είναι περιττός, τότε ο  $v+1$  είναι άρτιος οπότε:

$$\mathbf{B} = 1 + 1 + (-1) = 1$$

**4**

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathbf{A} = 2^{101} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{100} \quad \mathbf{B} = 27^9 \cdot 64^9 - 32^5 \cdot 6^{27}$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2^{101} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{100} = 2^2 \cdot 2^{99} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{99} \cdot 5 = \\ &= 4 \cdot (2 \cdot 5)^{99} + 10^{99} - (2 \cdot 5)^{99} \cdot 5 = 4 \cdot 10^{99} + 10^{99} - 5 \cdot 10^{99} = \\ &= 10^{99}(4 + 1 - 5) = 10^{99} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 27^9 \cdot 64^9 - 32^5 \cdot 6^{27} = (3^3)^9 \cdot (2^6)^9 - (2^5)^5 \cdot (2 \cdot 3)^{27} = \\ &= 3^{27} \cdot 2^{54} - 2^{25} \cdot 2^{27} \cdot 3^{27} = 3^{27} \cdot 2^{54} - 2^{52} \cdot 3^{27} = 3^{27} \cdot 2^{52} (2^2 - 1) = 3^{28} \cdot 2^{52} \end{aligned}$$

## A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν  $\alpha$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε  $(\alpha - 3)^0 = 1$ .
2. Αν  $\alpha > 0$  και ν άρτιος τότε  $(-\alpha)^v = \alpha^v$ .
3. Ισχύει η ισότητα  $3^{33} = (3^3)^3$ .
4. Αν ν είναι περιττός ακέραιος τότε  $(-1)^v + 1 = -1$ .
5. Ισχύει  $\alpha^{\mu+v} = \alpha^\mu + \alpha^v$ .
6. Ο αριθμός  $(-\alpha)^v$  όπου  $\alpha < 0$  και ν ακέραιος είναι πάντα θετικός.
7. Αν  $4^x = (\frac{1}{2})^x$  τότε  $x = 0$ .
8. Αν  $\alpha \neq 0$  τότε:  $\alpha^{3v} : \alpha^v = \alpha^{2v}$ .
9. Ισχύει  $(5+3)^3 = 5^3 + 3^3$ .
10. Ισχύει  $(4^3)^5 = (4^5)^3$ .
11. Ισχύει  $-2^4 = -(-2)^4$ .
12. Αν  $\alpha > 0$  τότε  $\alpha^{-v} < 0$ .
13. Ισχύει  $\alpha^5 + \alpha^5 = 2\alpha^{10}$ .
14. Ισχύει  $\alpha^8 : \alpha^4 = \alpha^2$ .
15. Ισχύει  $(-4)^5 \cdot (-4)^7 = 4^{12}$ .
16. Ισχύει  $\alpha^{\mu-v} = \frac{1}{\alpha^{v-\mu}}$ .
17. Οι αριθμοί  $\alpha^v$  και  $\alpha^{-v}$  είναι αντίστροφοι.
18. Ισχύει  $2^v = 2^{v+1} - 2^v$  όπου ν φυσικός.
19. Αν  $\alpha^v = \beta^v$  όπου ν φυσικός αριθμός τότε ισχύει πάντα  $\alpha = \beta$ .

**B. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:**

- 1.** Η δύναμη  $(-3)^{-2}$  είναι ίση με:  
**a.** -9, **b.** 9, **c.**  $-\frac{1}{9}$ , **d.**  $\frac{1}{9}$
- 2.** Αν  $(2^x)^2 = \frac{1}{64}$  τότε η τιμή του x είναι ίση με:  
**a.** 3, **b.** -3, **c.** 4, **d.** -6, **e.** 6
- 3.** Το μισό του  $8^{10}$  είναι:  
**a.**  $8^5$ , **b.**  $4^{10}$ , **c.**  $2^{29}$ , **d.**  $4^5$ , **e.**  $0,5 \cdot 8^{10}$
- 4.** Αν ο αριθμός  $(-6)^y$  είναι θετικός. Τότε ο ν είναι:  
**a.** περιττός, **b.** άρτιος, **c.** οποιοσδήποτε 0, **d.** αρνητικός.
- 5.** Η τιμή της παράστασης  $[( -3 )^0]^5$  είναι:  
**a.** 1, **b.** -1, **c.**  $3^5$ , **d.** -15
- 6.** Από την ισότητα  $3^v = (-3)^v$  όπου ν ακέραιος προκύπτει ότι ο ν είναι:  
**a.** άρτιος, **b.** περιττός, **c.** 0, **d.** οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.
- 7.** Η δύναμη  $(\alpha^a)^a$  όπου  $a \neq 0$  είναι ίση με:  
**a.**  $\alpha^{a^2}$ , **b.**  $\alpha^3$ , **c.**  $\alpha^{2a}$
- 8.** Αν ο ν είναι άρτιος τότε η δύναμη  $(-1)^v$  ισούται με:  
**a.**  $-1^v$ , **b.**  $-v$ , **c.** 1, **d.** v
- 9.** Από την ισότητα  $(x-3)^0 = 1$ , όπου x πραγματικός προκύπτει ότι:  
**a.** x = 0, **b.** x = 3, **c.** x  $\neq 3$ , **d.** οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.
- 10.** Η παράσταση  $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3$  είναι ίση με:  
**a.**  $3^{15}$ , **b.**  $5 \cdot 3^3$ , **c.**  $15^3$ , **d.**  $15^{15}$

**1** Να συγκρίνετε με το μηδέν τους παρακάτω αριθμούς:  
 $8^{-3}, -7^{-2}, (-3)^{-5}, -4^4, (-20)^5, (4)^0$

**2** Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τους αριθμούς:  
**α)**  $\alpha^4 \cdot \alpha^5$ , **β)**  $(-\alpha)^3 \cdot \alpha^4$ , **γ)**  $(-\alpha)^4 : \alpha^2$ , **δ)**  $\alpha^3 \cdot \beta^8 : \alpha^2 \cdot \beta^3$

$$\text{ε)} \frac{(0,5)^{-5} \cdot 8 \cdot (-2)^{-4}}{32 \cdot (\frac{1}{4})^{-2}} \quad \text{στ)} \frac{4^5 \cdot 81^2 \cdot 2 \cdot 3^3}{36^5}$$

**3** Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:  
 $\mathbf{A} = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77} \quad \mathbf{B} = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}, \quad \mathbf{Γ} = 2^{99} - 4^{49}, \quad \Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

**4** Να λύσετε τις εξισώσεις:  
**α)**  $8^x = 32$ , **β)**  $3^x \cdot 4^{2x+1} = 192$ , **γ)**  $8 \cdot 5^{3x-2} = 200$ , **δ)**  $2 \cdot 3^x = 54$

$$\text{ε)} \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{81}{4}, \quad \text{στ)} 3^{x+2} = 1$$

**5** Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:  
**α)**  $\alpha = 5^8$  και  $\beta = (5^3)^2$ , **β)**  $\alpha = 2^8$  και  $\beta = 8^2$ , **γ)**  $\alpha = 12^{35}$  και  $\beta = 7^{42}$   
**δ)**  $\alpha = 2^{15}$  και  $\beta = 32^4$ , **ε)**  $\alpha = 5^{35}$  και  $\beta = 7^{19} + 48 \cdot 7^{19}$ .

**6** **α)** Να λύσετε την εξίσωση:  $(x^{-5}) \cdot (x^2)^2 = -\frac{1}{3}$

**β)** Για την τιμή του  $x$  που βρήκατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  
 $\mathbf{A} = (x+2)^{2007} + (x+3)^{2008} + (x+4)^{2009}$

**7** Αν  $x = |-4 - (-3)|$  και  $\psi = |3 - 4|$  να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:  

$$\mathbf{A} = \frac{2^{3x-2} \cdot (2^{\psi-1})^3}{3^{x+1} \cdot 3^{2\psi-1}} : \frac{2^{x+1} - 2^\psi}{3^x + 3^{2\psi-1}}$$

**8** Αν ν άρτιος τότε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:  

$$\mathbf{A} = \frac{2 - (-1)^\nu}{4 - 3(-1)^{\nu+2}} - \frac{1 + (-1)^{\nu+1}}{2007} + \frac{1 + 4(-1)^{2\nu}}{3 - 2(-1)^{\nu+1}}$$

**9** Να γραφτεί η παράσταση  $\mathbf{A} = (3^2)^4 + 3^{11} : 27 + 3^3 : 3^{-5} - 2 \cdot 3^9$  ως δύναμη του 3.

**Κεφάλαιο 1****10**

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathbf{A} = 2^{2000} : [(25^{50} : 5^{99} - 3^{51} : 9^{25})^{1999}] + (2^{111})^{18} - 2 \cdot 2^{1997}$$

(Εξετάσεις Ρουμανίας 2000)

**11****a)** Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $2^{v+3} + 2 \cdot 2^v$  είναι πολλαπλάσιο του 10**b)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha = 4^{6v+2} - 10 \cdot 4^{6v} + 12$  είναι πολλαπλάσιο του 6**12**

Να υπολογίσετε τίς παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = (-1)^{2007} + [-5 - (-2^2 - 3)]5 - \{-[-2 - (-1^{2006} + 1)]\}^4$$

$$\mathbf{B} = [(-1)^{10} + (-1)^{11}] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10} - 20$$

**13**Αν ο  $v$  είναι φυσικός να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathbf{A} = (-1)^{2007} + (-1)^{v+2} + (1)^{2v+1}$$

**14**Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $\mathbf{A} = \frac{3^{v+2} + 5 \cdot 3^v - 4 \cdot 3^{v+1}}{4 \cdot 3^{v+1} + 3^v}$  είναι ανεξάρτητη του  $v$ .**15**

Να βρείτε τον αντίστροφο και τον αντίθετο κάθε μίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \frac{2^v + 2^{v-1}}{2^{v+1} - 2^v}, \quad \mathbf{B} = \frac{7^{v+2} - 35 \cdot 7^{v-1}}{7^v \cdot 11}$$

## Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Κεφάλαιο 1

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $x$  και συμβολίζεται με  $\sqrt{x}$  λέμε τον θετικό αριθμό α πού όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό  $x$ .

$$\text{π.χ. } \sqrt{9} = 3, \text{ αφού } 3^2 = 9$$

$$\text{Αν } x = 0 \text{ ορίζουμε: } \sqrt{0} = 0$$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει:  $\sqrt{x^2} = |x|$

Γενικά ισχύει: Αν  $x \geq 0$  τότε  $(\sqrt{x})^2 = x$

### Ιδιότητες των ριζών

α) Αν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$  τότε:  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

β) Αν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta > 0$  τότε:  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

### Απόδειξη

α) Υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους χωριστά.

- $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha \cdot \beta.$

- $(\sqrt{\alpha \cdot \beta})^2 = \alpha \cdot \beta.$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$  και  $\sqrt{\alpha \cdot \beta}$  έχουν το ίδιο τετράγωνο  $\alpha \cdot \beta$ , οπότε είναι ίσοι.

$$\text{Άρα } \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

β) Υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους χωριστά.

- $(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}})^2 = \frac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \frac{\alpha}{\beta}$

- $(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2 = \frac{\alpha}{\beta}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$  και  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  έχουν το ίδιο τετράγωνο  $\frac{\alpha}{\beta}$ , οπότε είναι ίσοι.

$$\text{Άρα } \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

**Κεφάλαιο 1 Άν α, β θετικοί αριθμοί τότε:**

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$$

καὶ

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha - \beta}, \quad \alpha > \beta > 0$$

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ένας πραγματικός αριθμός α λέγεται μη αρνητικός όταν  $\alpha \geq 0$ .
2. Η ισότητα  $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$  ισχύει όταν ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι 0 και ο άλλος θετικός ή 0.
3. Η υπόρριζη ποσότητα ενός ριζικού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός
4. Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι 0 ή θετικός.
5. Τετραγωνική ρίζα έχουν μόνο οι μη αρνητικοί αριθμοί.
6. Δεν μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση μεταξύ τετραγωνικών ριζών αν δεν έχουμε την ίδια υπόρριζη ποσότητα.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** **α) Άν α, β είναι δύο μη αρνητικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι:**

$$\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$$

**β) Άν  $\beta \geq 0$ , αποδείξτε ότι:**  $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = |\alpha| \sqrt{\beta}$

**Απόδειξη**

**α)**  $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$

**β)**  $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta} = |\alpha| \cdot \sqrt{\beta}$

- 2** **Να αποδειχθεί ότι:**

**α)**  $\sqrt{12} = 3 \cdot \sqrt{2}$ , **β)**  $\sqrt{50} - \sqrt{8} = 3 \cdot \sqrt{2}$

**Απόδειξη**

$$\alpha) \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\beta) \sqrt{50} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2} \cdot \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} = (5-2) \cdot \sqrt{2} = 3 \sqrt{2}$$

- Αναλύουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στα ριζικά, κατά τέτοιον τρόπο ώστε ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες να τετράγωνο θετικού ακεραίου.

**3 Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα πού έχουν άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.**

**Λύση**

$$\alpha) \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}. \quad \beta) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma) \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\delta) \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{5}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$\varepsilon) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{24}} = \sqrt{\frac{3}{24}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - (\sqrt{2})^2} = \\ = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 3 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

**Κεφάλαιο 1** **4** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}}}, \quad B = \sqrt{7 + 3\sqrt{1 + 8\sqrt{1}}}$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{3 + 6}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + 3}} = \\ &= \sqrt{14 + \sqrt{4}} = \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

$$B = \sqrt{7 + 3\sqrt{1 + 8\sqrt{1}}} = \sqrt{7 + 3\sqrt{1 + 8}} = \sqrt{7 + 3\sqrt{9}} = \sqrt{7 + 3 \cdot 3} = \sqrt{7 + 9} = \sqrt{16} = 4.$$

**5** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για να έχουν νόημα οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{x-3}, \quad B = \sqrt{4-2x}, \quad \Gamma = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x+1}.$$

**Λύση**

$A = \sqrt{x-3}$ , Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει :  $x-3 \geq 0$  ή  $x \geq 3$ .

$B = \sqrt{4-2x}$  Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει:  $4 - 2x \geq 0$  ή  $-2x \geq -4$  ή  $2x \leq 4$  ή  $x \leq 2$ .

$\Gamma = \sqrt{2-3x} + \sqrt{x+1}$ . Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει :  $2-3x \geq 0$  και  $x+1 \geq 0$  ή  $-3x \geq -2$  και  $x \geq -1$  ή  $x \leq \frac{2}{3}$  και  $x \geq -1$  άρα  $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$ .

**6** Να δείξετε ότι:

**a)** Η τετραγωνική ρίζα του  $4+2\sqrt{3}$  είναι ο  $\sqrt{3}+1$

**β)**  $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$

**Λύση**

**a)** Αρκεί να δείξουμε ότι:  $(\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = 3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3}$$

**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι:  $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = 3-2\sqrt{3}+1 = 4-2\sqrt{3}$$

A. Να χαρακτηρίσετε με τωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

1. Ισχύει  $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .
2. Αν  $\alpha \cdot \beta \geq 0$  τότε ισχύει  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ .
3. Ισχύει  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha, \beta$ .
4. Ισχύει  $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ .
5. Ισχύει  $\sqrt{0,36} = 0,18$ .
6.  $\sqrt{16\alpha^2} = 4\alpha$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .
7. Ισχύει  $\sqrt{(-4)^2} = -4$ .
8. Οι παραστάσεις  $\sqrt{\alpha^2}$  και  $(\sqrt{\alpha})^2$  είναι πάντοτε ίσες.
9. Ισχύει  $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^2}$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha, \beta$ .
10. Η ισότητα  $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$  ισχύει όταν  $\alpha \leq 0$ .
11. Ισχύει ότι  $\sqrt{\alpha^2 + \beta} = |\alpha| + \sqrt{\beta}$ .
12. Ισχύει ότι  $\sqrt{49} = \pm 7$ .
13. Ισχύει ότι  $\sqrt{4+9} = 2+3$ .
14. Ισχύει ότι  $\sqrt{98} + \sqrt{50} = \sqrt{100} + \sqrt{8}$ .
15. Η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι το 2 και το -2.
16. Η τετραγωνική ρίζα του -4 είναι το -2.
17. Η τετραγωνική ρίζα του 1 είναι το 1.
18. Ο αντίστροφος του  $\sqrt{7} - \sqrt{6}$  είναι ο  $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ .
19. Το 5 δεν έχει τετραγωνική ρίζα.
20. Ισχύει  $\sqrt{-4} = -2$ .

**B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

1. Ο αριθμός  $\sqrt{25 - 16}$  είναι ίσος με:  
**a.** 5-4, **b.** 3, **c.** 9, **d.** 2
2. Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 2 cm τότε το εμβαδόν του είναι ίσο με:  
**a.** 2, **b.**  $\sqrt{2}$ , **c.** 1 **d.**  $2 \cdot \sqrt{2}$ , **e.** 4
3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει υποτείνουσα 20 cm. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δίνει το εμβαδόν του.  
**a.**  $200 \text{ cm}^2$ , **b.**  $100 \text{ cm}^2$ , **c.**  $400 \text{ cm}^2$  **d.**  $\sqrt{200} \text{ cm}^2$ .
4. Η ισότητα  $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$  ισχύει όταν:  
**a.**  $\alpha \geq 0$ , **b.**  $\alpha = 0$  **c.**  $\alpha \leq 0$ . **d.** για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .
5. Η ισότητα  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$  ισχύει :  
**a.** όταν  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι. **b.** για κάθε  $\alpha, \beta$ . **c.** όταν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$
6. Η ισότητα  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  ισχύει:  
**a.** όταν  $\alpha, \beta$  ομόσημοι **b.**  $\alpha \geq 0$  και  $\beta > 0$  **c.**  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$ .

**Γ. Ερωτήσεις συμπλήρωσης****1. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.**

				Αθροισμα		Γινόμενο	
$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
4	49						
25	324						
169	196						

**1** Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} + \sqrt{7 + \sqrt{4}} - \sqrt{3 - \sqrt{4}}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{0,25} + \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{3,6}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{22}{11}} \cdot \sqrt{\frac{30}{15}} + \sqrt{\frac{20}{4}} \cdot \sqrt{\frac{10}{2}}$$

**2** Να βρείτε τις τιμές του  $x$ , ώστε να έχουν νόημα οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \sqrt{x+1}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{4-3x}, \quad \Gamma = \sqrt{9-3x} + \sqrt{x-2}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{3}{2}-x}$$

**3** Να δείξετε ότι ο αριθμός  $\sqrt{5}$  είναι η τετραγωνική ρίζα του  $+\sqrt{5}$

**4** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = 5\sqrt{\sqrt{16}} - \sqrt{20 \cdot \sqrt{25}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt{64}}$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{2}} \sqrt{\frac{8}{4}}, \quad \Gamma = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{24}$$

**5** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{24} + \frac{12}{\sqrt{6}} - 4\sqrt{(\sqrt{6}-3)^2}$$

**6** Αν είναι  $\mathbf{A} = \frac{2}{2-\sqrt{5}}, \quad \mathbf{B} = \frac{2}{2+\sqrt{5}}$  να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  και  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ .

**7** Να τρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i)  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}}, \quad \frac{2}{\sqrt{8}}, \quad \frac{4}{-\sqrt{5}}, \quad \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

ii)  $\frac{1}{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

**8** Να αποδείξετε ότι:

i)  $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

ii)  $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$

**Κεφάλαιο 1****9**

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i)  $\sqrt{3} + x = \sqrt{12} - x$ , ii)  $\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{27}$  iii)  $\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}$

iv)  $2x + \frac{2}{\sqrt{2}} = x + \sqrt{2}$

**10**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ABC$  πλευράς 12. Αν  $E$  είναι το μέσο της διαμέσου  $AD$ , να υπολογίσετε το μήκος  $BE$ .

**11**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα  $a$  και κάθετες πλευρές  $\beta, \gamma$ , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i)  $a\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \beta^2$

ii)  $\sqrt{\beta\sqrt{a^2 - \gamma^2}} + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \sqrt{\gamma\sqrt{a^2 - \beta^2}}$

**12**

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:  $4+\sqrt{5}$  και  $\frac{4-\sqrt{5}}{11}$  είναι αντίστροφοι.

**13**

Αν οι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι  $\alpha = 5+2\sqrt{2}$  cm και  $\beta = 5-2\sqrt{2}$  cm να βρείτε:

a) Την περίμετρο και το εμβαδόν του.

b) Την πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο.

**14**

Ένα ισοσκέλες ορθογώνιο τρίγωνο έχει εμβαδόν  $24 \text{ cm}^2$ . Σχηματίζουμε το τετράγωνο, που έχει πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου.

Να υπολογίσετε την διαγώνιο του τετραγώνου.

**15**

Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$  ( $AB = AC$ ), έχει περίμετρο 18 cm. Αν η βάση του είναι 8m, να υπολογίσετε:

a) Το ύψος  $AD$ .

b) Αν  $E$  είναι το μέσον του  $AD$  να βρείτε το μήκος  $GE$ .

**Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα**

**Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε έκφραση που περιέχει μόνο αριθμούς.

$$\text{π.χ. } 8 \cdot 3 + 4 \cdot 5, \quad 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 5.$$

**Αλγεβρική παράσταση** λέγεται κάθε έκφραση, από αριθμούς και μεταβλητές ή μόνο μεταβλητές, που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

Μία αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

$$\text{π.χ. } 3\psi + x^3, \quad \frac{2}{5}\alpha + \beta^5.$$

Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

**Μονώνυμα** λέγονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

$$\text{π.χ. } 5x, \quad a^3, \quad \sqrt{5}x\omega^4, \quad \frac{2}{5}\alpha\beta^6$$

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

**Στο μονώνυμο 3  $x^4\psi$ .**

**Το 3 είναι ο συντελεστής**

**Το  $x^4\psi$  είναι το κύριο μέρος**

Ο εκθέτης μιάς μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το **άθροισμα** των εκθετών των μεταβλητών του.

**Το μονώνυμο  $3x^4\psi$  είναι:**

- 4ον βαθμού**      ως προς  $x$   
**1ον βαθμού**      ως προς  $\psi$   
**5ον βαθμού**      ως προς  $x, \psi$

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**,

π.χ. τα μονώνυμα  $\frac{3}{4}x^2\psi, -6x^2\psi, x^2\psi$  είναι ομοια.

Τα ομοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα**, ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**, π.χ. τα μονώνυμα  $2x^5\psi^4$  και  $-2x^5\psi^4$ , είναι αντίθετα.

Μπορούμε επίσης και τους αριθμούς να τους θεωρούμε ως μονώνυμα και τους ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

**Παρατήρηση**

Για να βρούμε τον βαθμό ενός μονωνύμου, πρέπει ο συντελεστής του μονωνύμου να είναι διάφορος του μηδενός.

**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 1** Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  ώστε τα μονώνυμα  $(3\lambda-2)x^3\psi^2$  και  $(\lambda-2)x^3\psi^2$  **a)** να είναι ίσα, **b)** να είναι αντίθετα.

**Λύση**

**a)** Για να είναι ίσα πρέπει:  $3\lambda - 2 = \lambda - 2$  ή  $3\lambda - \lambda = -2 + 2$  ή  $2\lambda = 0$  ή  $\lambda = 0$

**b)** Για να είναι αντίθετα πρέπει:  $(3\lambda - 2) + (\lambda - 2) = 0$  ή  $3\lambda + \lambda = 2 + 2$  ή  $4\lambda = 4$  ή  $\lambda = 1$

- 2** Δίνεται το μονώνυμο  $(\alpha - 3)x^3$  να βρείτε τον βαθμό του.

**Λύση****1<sup>η</sup> περίπτωση:**

Αν  $\alpha - 3 = 0$  ή  $\alpha = 3$  τότε το μονώνυμο είναι το μηδενικό και δεν έχει βαθμό.

**2<sup>η</sup> περίπτωση:**

Αν  $\alpha - 3 \neq 0$  ή  $\alpha \neq 3$  τότε το μονώνυμο είναι 3<sup>ον</sup> βαθμού.

**A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

- 1.** Δύο μονώνυμα είναι όμοια όταν είναι ίδιου βαθμού.
- 2.** Ο βαθμός του μονωνύμου  $2007x^4\psi^3$  είναι ίσος με 7.
- 3.** Το μονώνυμο  $(\alpha - 4)x^5$  είναι 5<sup>ου</sup> βαθμού για κάθε τιμή του  $\alpha$ .
- 4.** Η παράσταση  $x^4\psi^2 + x^4\psi^2$  είναι μονώνυμο.
- 5.** Η παράσταση  $3x^{-2}\psi^3$  είναι μονώνυμο.
- 6.** Οι παραστάσεις  $4x^{-2}\psi^3$ ,  $6x^{-2}\psi^3$  είναι όμοια μονώνυμα.
- 7.** Η αλγεβρική παράσταση  $4\alpha^{\lambda+3}\beta^2$  είναι μονώνυμο για κάθε τιμή του ακεραίου  $\lambda$ .
- 8.** Τα αντίθετα μονώνυμα είναι ίδιου βαθμού.

**B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

- 1.** Τα μονώνυμα  $(3\alpha + 1)x^3\psi^{\alpha+2}$ ,  $-5x^3\psi^2$  είναι όμοια αν το  $\alpha$  είναι:  
**a.** -2, **b.** 0, **c.** 2, **d.** 4.
- 2.** Η παράσταση  $2x^2\psi^\kappa + 3x^\lambda\psi^3$  είναι μονώνυμο αν:  
**a.**  $\lambda = 2$ , **b.**  $\kappa = 3$  **c.**  $\lambda = 2$  ή  $\kappa = 3$  **d.**  $\lambda = 2$  και  $\kappa = 3$ .
- 3.** Αν η παράσταση  $2x^\kappa\psi^\nu$  είναι μονώνυμο. Τότε οι αριθμοί  $\kappa$ ,  $\nu$  είναι:  
**a.** ίσοι, **b.** φυσικοί, **c.** ακέραιοι, **d.** θετικοί.
- 4.** Ο βαθμός του μονωνύμου  $[2x^2(x\psi)^2]^3$  ως προς  $x$  είναι:  
**a.** 6<sup>ου</sup> βαθμού. **b.** 4<sup>ου</sup> βαθμού **c.** 7<sup>ου</sup> βαθμού **d.** 12<sup>ου</sup> βαθμού.
- 5.** Δίνεται το μονώνυμο  $A = 3x^2\psi^3$ . Η αλγεβρική τιμή του για  $x = -3$  είναι -27. Τότε η τιμή του  $\psi$  είναι:  
**a.** 1, **b.** -1, **c.** 27, **d.** -27.

**1** Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

- a)**  $-\frac{4}{3}x^2\psi^3$    **β)**  $4-3x^2\psi^3$    **γ)**  $3x^2\psi^{-3}$    **δ)**  $(4-\sqrt{5})x^3\psi^5$    **ε)**  $\frac{x^4 \cdot \psi^4}{8}$   
**στ)**  $\frac{x^5\psi^3}{\omega^2}$    **ζ)**  $\frac{x^4\psi^8}{\omega^{-4}}$    **η)**  $\frac{3}{4}\sqrt{x}\psi^4$

**2** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς ψ	Βαθμός ως προς x, ψ
$x\psi^4$					
$\frac{2x^4\psi^2}{3x^{-2}}$					
$(-\sqrt{3}-2)x^4$					
$(-\sqrt{5}x^3\psi)^2$					

**3** Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν την επιφάνεια και τον όγκο κύβου ακμής x. Να προσδιορίσετε το συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου για  $x = 5$ .

**4** Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω παράστασεις:

**α)**  $A = 3\alpha^{\lambda+2}\beta^3 + 6\alpha^5\beta^\lambda$

**β)**  $B = (\lambda-2)x^3\psi^2 + (\lambda+3)x^2\psi^3$

να είναι μονώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους για τις διάφορες μεταβλητές.

**5** Να γράψετε στην τελική τους μορφή τα μονώνυμα:

**α)**  $3x^4\psi^2 + (x^2\psi)^2$

**β)**  $(x\psi^2)^2x$

**γ)**  $(x^2\psi^3)^2 \cdot (x\psi)^3$

**6**

Δίνεται είναι ισοσκελές τραπέζιο με μικρή βάση x. Αν η μεγάλη βάση είναι **Κεφάλαιο 1** επταπλάσια της μικρής, οι μη παράλληλες πλευρές είναι πενταπλάσιες της μικρής τότε να υπολογίσετε:

- α)** το μονώνυμο που παριστάνει το ύψος.
- β)** το μονώνυμο που παριστάνει το εμβαδόν.
- γ)** το μονώνυμο που παριστάνει την περίμετρο.

### Πρόσθεση μονωνύμων

- α)** Αν τα μονώνυμα είναι όμοια τότε το άθροισμά τους είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
- β)** Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το άθροισμα τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μία αλγεβρική παράσταση.

### Γινόμενο μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

### Διαιρέση μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές και αφαιρούμε τους εκθέτες των μεταβλητών

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1.** Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- 2.** Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1**

### Να κάνετε τις πράξεις:

- α)**  $2x^2\psi - 4\psi x^2$ ,   **β)**  $2\alpha^3\beta^6 - 6(\alpha \beta^2)^3$ ,   **γ)**  $2x^3\psi - 3x + 6x^3\psi + 3x$ ,   **δ)**  $\frac{1}{4}x^5\psi - \frac{1}{2}x^5\psi$ ,
- ε)**  $3x^2\psi^4 + (2x\psi^2)^2$ ,   **στ)**  $\sqrt{8}x^2\psi^4 - \sqrt{2}(x\psi^2)^2$

### Λύση

$$\begin{aligned}\mathbf{a)} & 2x^2\psi - 4\psi x^2 = (2-4)x^2\psi = -2x^2\psi, \quad \mathbf{β)} 2\alpha^3\beta^6 - 6(\alpha\beta^2)^3 = 2\alpha^3\beta^6 - 6\alpha^3\beta^6 = \\ & = (2-6)\alpha^3\beta^6 = -4\alpha^3\beta^6, \quad \mathbf{γ)} 2x^3\psi - 3x + 6x^3\psi + 3x = (2+6)x^3\psi = 8x^3\psi\end{aligned}$$

$$\mathbf{δ)} \frac{1}{4}x^5\psi - \frac{1}{2}x^5\psi = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)x^5\psi = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right)x^5\psi = -\frac{1}{4}x^5\psi$$

**Κεφάλαιο 1**

**ε)**  $3x^2\psi^4 + (2x\psi^2)^2 = 3x^2\psi^4 + 4x^2\psi^4 = (3+4)x^2\psi^4 = 7x^2\psi^4$

**στ)**  $\sqrt{8} x^2\psi^4 - \sqrt{2} (x\psi^2)^2 = \sqrt{8} x^2\psi^4 - \sqrt{2} x^2\psi^4 = (\sqrt{8} - \sqrt{2}) x^2\psi^4 = (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) x^2\psi^4 = \sqrt{2} x^2\psi^4$

**2****Να βρείτε τα γινόμενα:**

**α)**  $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2$ , **β)**  $-3x^3\psi^2 \cdot (-2x\psi^3)$ , **γ)**  $6x^2 \cdot (-2x^6\psi^2) \cdot (5x^3\cdot\psi^4)$

**δ)**  $(2x)^3 \cdot 3x^2$

**Λύση**

**α)**  $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2 = 3x^4 \cdot 2x^5 \cdot 16x^2 = (3 \cdot 2 \cdot 16)(x^4 x^5 x^2) = 96x^{11}$

**β)**  $-3x^3\psi^2 \cdot (-2x\psi^3) = (-3) \cdot (-2) \cdot (x^3 \psi^2 x \psi^3) = 6x^4\psi^5$

**γ)**  $6x^2 \cdot (-2x^6\psi^2) \cdot (5x^3\psi^4) = 6(-2)5(x^2 x^6 x^3 \psi^2 \psi^6) = -60x^{10}\psi^8$

**δ)**  $(2x)^3 \cdot 3x^2 = 8x^3 \cdot 3x^2 = 24x^5$

**3****Να βρείτε τα πηλίκα:**

**α)**  $4x^3 : 2x$ , **β)**  $-2x^7\psi^4 : (-x\psi^3)$ , **γ)**  $x^2\psi^8 : (x^5\psi^6)$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \textbf{α)} 4x^3 : 2x &= 4x^3 \frac{1}{2x} = 2x^2, \quad \textbf{β)} -2x^7\psi^4 : \left(-\frac{1}{2}x\psi^3\right) = -2x^7\psi^4 \frac{-2}{x\psi^3} = \\ &= -2(-2) \frac{x^7\psi^4}{x\psi^3} = 4x^6\psi^3 \quad \textbf{γ)} \frac{3}{4}x^2\psi^8 : \left(\frac{2}{5}x^5\psi^6\right) = \frac{3x^2\psi^8}{4} \cdot \frac{5}{2x^5\psi^6} = \\ &= \frac{6x^7\psi^{14}}{20} = \frac{3}{10}x^7\psi^{14} \end{aligned}$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Το πηλίκο δύο αντίθετων μονώνυμων είναι πραγματικός αριθμός.
2. Η διαίρεση μεταξύ μονωνύμων γίνεται μόνο αν τά μονώνυμα είναι όμοια.
3. Αν δύο μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το γινόμενο δεν είναι μονώνυμο.
4. Το πηλίκο δύο όμοιων μονωνύμων είναι πραγματικός αριθμός.
5. Η διαίρεση δύο μονωνύμων γίνεται αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή.

6. Το áθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο.
7. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1** Να κάνετε τις πράξεις:

- α)**  $-8x^3\psi - 4\psi x^3 + 10x^3\psi$ , **β)**  $4x^2 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x^2$ , **γ)**  $6\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{32}x^2$   
**δ)**  $\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{5}x^2 + 2x^2$ , **ε)**  $\frac{6}{5}x^2 - 1,6x^2 + 3,4x^2$ , **στ)**  $3,45x\psi + 2,45\psi x$

**2** Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

- α)**  $-4x^6x^3$ , **β)**  $2x\psi^3(-2x^2)$ , **γ)**  $-3x\psi^2(-2\psi^3)$ , **δ)**  $-2x^3\psi(-4x\psi)(-5x\psi^2)$   
**ε)**  $(-\frac{3}{5}x\psi^2) \cdot (\frac{25}{6}x^2\psi)$ , **στ)**  $(\frac{1}{3}x\psi) \cdot (6x\psi^3)(-\frac{1}{2}x\psi^2)$

**3** Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

- α)**  $3\alpha^5 : (2\alpha^2)^2$ , **β)**  $4\alpha^5\beta^4 : (\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3)$ , **γ)**  $-x^2 : x^4$  **δ)**  $24x^3\psi^2 : (-2x\psi)^3$   
**ε)**  $x\psi^3\omega : (x\omega^2)^3$  **στ)**  $-27\alpha\beta^3(\gamma x)^2 : (-3\alpha x\beta\gamma)^2$

### 1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο, αλλά μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται **πολυώνυμο**.

$$\text{Π. χ. } 4x^3\psi - 7x\psi + 8x\psi^4$$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος του πολυωνύμου**.

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται:

- **διώνυμο**, αν έχει δύο όρους  $\pi.\chi. 4a^2 + b^3$
- **τριώνυμο**, αν έχει τρείς όρους  $\pi.\chi. 4x^2 - 2x + 5$

**Βαθμός** ενός πολυωνύμου, ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**. Ο αριθμός μηδέν, λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο** και δεν έχει βαθμό ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

Το πολυώνυμο  $4x^5\psi - 2x\psi^3 + 2x^7\psi^3$  είναι:

- |                         |                     |
|-------------------------|---------------------|
| $7^{\text{ου}}$ βαθμού  | ως προς $x$ ,       |
| $3^{\text{ου}}$ βαθμού  | ως προς $\psi$ ,    |
| $10^{\text{ου}}$ βαθμού | ως προς $x, \psi$ . |

Αν ένα πολυώνυμο έχει μόνο μία μεταβλητή τότε μπορούμε με συντομία να το γράψουμε:  $P(x)$  ή  $Q(x)$  ή  $A(x)$  κ.λ.π.

$$\text{Ετσι: } A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1, \quad P(x) = -\frac{4}{5}x^2 - 2x + \sqrt{2}.$$

Αν ένα πολυώνυμο με μια μεταβλητή μπορούμε να το γράψουμε έτσι ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλυτέρου βαθμού από τον επόμενό του, τότε λέμε ότι γράψουμε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.

$$\text{Π.χ. } P(x) = -4x^3 - 2x + 2.$$

**Αριθμητική τιμή** ενός πολυωνύμου  $P(x)$  για  $x = a$  και συμβολίζουμε με  $P(a)$  λέμε τον αριθμό που θα πάρουμε, αν στη θέση του  $x$  βάλουμε τον αριθμό  $a$  και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται.

**Ίσα πολυώνυμα** λέγονται τα πολυώνυμα τα οποία έχουν, όρους ίσα μονώνυμα.

**Αναγωγή ομοίων όρων** λέμε την εργασία κατά την οποία, αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, τότε μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους.

### Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων

Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών.

## 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

- **Πολλαπλασιασμός μονώνυμο με πολυώνυμο.**

Στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

**Έτσι:**

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

- **Πολλαπλασιασμός πολυώνυμο με πολυώνυμο**

Στηρίζεται στην ιδιότητα:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)\gamma + (\alpha + \beta)\delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$$

**Έτσι:**

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

**Πίζα ενός πολυωνύμου**  $P(x)$  λέμε τον πραγματικό αριθμό  $\rho$  του οποίου η αριθμητική τιμή είναι 0, δηλ. όταν ισχύει  $P(\rho) = 0$ .

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3ax^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8$

- a)** Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων
- b)** Να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του  $x$  και να βρεθεί ο βαθμός του.
- c)** Για  $a = 0$  να βρείτε την αριθμητική τιμή του για  $x = -2$ .

#### Λύση

**a)**  $P(x) = 3ax^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8 = (3a + 6)x^3 + 2x^2 + (-1-2)x + 8 = (3a + 6)x^3 + 2x^2 - 3x + 8$

**b)** Το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις γράφεται:

$$P(x) = (3a + 6)x^3 + 2x^2 - 3x + 8.$$

Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι παράσταση διακρίνουμε περιπτώσεις:

#### 1η περίπτωση:

Αν  $3a+6 \neq 0$  ή  $3a \neq -6$  ή  $a \neq -2$  τότε είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού.

#### 2η περίπτωση:

Αν  $3a+6 = 0$  ή  $3a = -6$  ή  $a = -2$  τότε είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού

**2**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 3x - 1$

- a)** Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο  $Q(x) = P(2x) + 2P(-x) + P(2)$
- b)** Να βρείτε το πολυώνυμο  $2P(x) - Q(x)$ .

#### Λύση

**a)**  $Q(x) = P(2x) + 2P(-x) + P(2) =$   

$$2(2x)^3 - 3(2x) - 1 + 2[2(-x)^3 - 3(-x) - 1] + 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 =$$
  

$$2 \cdot 8x^3 - 6x - 1 + 2(-2x^3 + 3x - 1) + 16 - 6 - 1 = 16x^3 - 6x - 1 - 4x^3 + 6x - 2 + 9 =$$
  

$$12x^3 + 6$$

**b)**  $2P(x) - Q(x) = 2(2x^3 - 3x - 1) - (12x^3 + 6) = 4x^3 - 6x - 2 - 12x^3 - 6 = -8x^3 - 6x - 8$

**3**

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = 2x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 6$  και  $Q(x) = (\lambda - 1)x^3 + x^2 + \gamma$  **Κεφάλαιο 1**

**α)** Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων.

**β)** Να βρείτε το  $\gamma$  ώστε  $P(0) - 1 = Q(0) + 7$ .

**γ)** Να βρείτε τους  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

### Λύση

**α)** Το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού, ενώ ο βαθμός του  $Q(x)$  εξαρτάται από το  $\lambda$ . Έτσι έχουμε: **i)** Αν  $\lambda - 1 = 0$  τότε είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού.

**ii)** Αν  $\lambda - 1 \neq 0$  ή  $\lambda \neq 1$  τότε είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού.

**β)**  $P(0) = 2 \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \alpha \cdot 0 + 6 = 6$   $Q(0) = (\lambda - 1) \cdot 0^3 + 0^2 + \gamma = \gamma$ . Άρα:  $P(0) - 1 = Q(0) + 7$  ή  $6 - 1 = \gamma$  ή  $\gamma = 5$

**γ)** Για να είναι ίσα πρέπει:  $2 = \lambda - 1$  και  $\beta = 1$  και  $\alpha = 0$  και  $\gamma = 6$

Άρα  $\lambda = 3$  και  $\beta = 1$  και  $\alpha = 0$  και  $\gamma = 6$ .

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

### A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν  $P(x) = 2x^2(x^4 - 1)$  τότε  $P(-x) = P(x)$ .
2. Το πολυώνυμο  $P(x) = -2$  είναι μηδενικού βαθμού.
3. Το πολυώνυμο  $P(x) = 0$  είναι μηδενικού βαθμού.
4. Το πολυώνυμο  $P(x)$  και  $P(2x)$  είναι ίδιου βαθμού.
5. Αν ένα πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού τότε το πολυώνυμο  $P^2(x)$  είναι 6<sup>ο</sup> βαθμού.
6. Το πολυώνυμο  $P(x) = 0 \cdot x^3 - 2x + 5$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού.
7. Ο βαθμός του πολυωνύμου  $P(x) = (3x^2 - x)8(x^2 - 1) + x^{10} - 3$  είναι 18.
8. Αν δύο πολυώνυμα δεν έχουν βαθμό τότε είναι ίσα.
9. Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού και το  $Q(x)$  είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού τότε το πολυώνυμο  $P(x) \cdot Q(x)$  είναι 6<sup>ο</sup> βαθμού.

**Κεφάλαιο 1**

- 10.** Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού και το  $Q(x)$  είναι 4<sup>ο</sup> βαθμού τότε το πολυώνυμο  $P(x) - Q(x)$  είναι 4<sup>ο</sup> βαθμού.
- 11.** Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού και το  $Q(x)$  είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού τότε το πολυώνυμο  $2P(x) - 4Q(x)$  είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού.

**B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση**

- 1.** Αν για το πολυώνυμο  $P(x)$  ισχύει:  $(x^3+2)P(x) + 3 = x^5 - 2x + 1$  τότε το  $P(x)$  είναι:  
**a.** τρίτου βαθμού, **b.** τετάρτου βαθμού, **c.** δευτέρου βαθμού  
**d.** πρώτου βαθμού, **e.** κανένα από τα προηγούμενα.
- 2.** Αν  $x^2 = x + 3$ , τότε  $x^3 =$   
**a.**  $x+6$ , **b.**  $x^2+2x+3$ , **c.**  $4x+3$ , **d.**  $4x^2+3$  **e.**  $x^2+7$

E.M.E. 1993

- 3.** Αν  $x = \frac{1}{6}$  τότε η παράσταση  $(2 - \frac{1}{2x}) \cdot (3 - \frac{1}{3x})$  ισούται με:  
**a.** -12, **b.** -1, **c.**  $\frac{25}{2}$ , **d.** 1, **e.** 12

E.M.E 1992

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

- 1** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^6 - 2x + \sqrt{x}, \quad B = -x^3 - 2x + x^2 - 1, \quad \Gamma = x^{-2} + 4x + 7,$$

$$\Delta = 0, \quad E = \frac{3}{5},$$

- a)** Ποιές από τις παραστάσεις αυτές παριστάνουν πολυώνυμα.  
**β)** Να τις διατάξετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.  
**γ)** Ποιος είναι ο βαθμός του κάθε πολυωνύμου

- 2** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α)**  $(3x^2 - 2x)(4x^3 + 4x)$ , **β)**  $(x^4 - 2x + 2)(x^5 - 2x)$ , **γ)**  $(x - 3)(x - 2)x$   
**δ)**  $(\alpha^2 - 3 \cdot \alpha + 1) \cdot (\alpha - 2) + (\alpha^3 - 2 \cdot \alpha)(\alpha^2 - \alpha)$

- 3** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 4x^2 - 2\alpha \cdot x + 3$

- α)** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε  $P(-2) = -1 - \alpha$ .  
**β)** Για  $\alpha = -4$  να λύσετε την εξίσωση  $P(0) + 4x - 2P(1) = 3x$

**4**

Av  $P(x) = 2x^3 - x + 1$  και  $Q(x) = x - 3$  να βρείτε τα πολυώνυμα

- a)**  $-P(x) \cdot 2Q(x)$    **b)**  $2P(x) \cdot [2Q(x) - x + 2]$    **c)**  $[2P(x)-1] \cdot [Q(x)-2]$

**5**

Av  $P(x) = 2x(-x^2 + 3x)(x - 2)$ , και  $Q(x) = \alpha(x^4 + 1) + \beta x^3 + \gamma x^2 + x + 1$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$ , δ ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

**6**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^2$ .

- a)** Να προσδιορίσετε τον βαθμό του.  
**b)** Να βρείτε το πολυώνυμο  $Q(x) = P(P(x)) - 1$ .

**7**

Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο αν αφαιρεθεί από το  $5x^2 - 2x + 1$  θα προκύψει το πολυώνυμο  $4x^2 - 3x + 5$ .

**8**

Δίνεται το πολυώνυμο  $A(x) = \kappa \cdot x^2 - \lambda x + 3$

- a)** Av  $A(x) + A(-x) = 8x + 3$  να βρείτε το  $\lambda$   
**b)** Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε να υπολογίσετε το  $\kappa$  όταν  $A(1) = 10$

**9**

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός  $\alpha$ , ώστε το πολυώνυμο

$P(x) = 9x^3 - 3x + 8x - 27$  να παίρνει τη μορφή

$Q(x) = \alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ .

**10**

Για την παραγωγή  $x$  μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα, μία εταιρία έχει κόστος  $K(x) = 500x + 50000$  ευρώ. Τις  $x$  μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει η εταιρεία στην τιμή  $T(x) = 2000 - 2x$  ευρώ ανά μονάδα.

- a)** Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει το κέρδος από την πώληση  $x$  μονάδων από το προϊόν την εβδομάδα  
**b)** Να βρείτε το κόστος όταν δεν παράγει προϊόν και να το δικαιολογήσετε.  
**c)** Να βρείτε το κέρδος αν πουλήσει 100 μονάδες την εβδομάδα.

## 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι :

**a) Τετράγωνο αθροίσματος**

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Απόδειξη:**

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Το δεύτερο μέρος της ισότητας  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  λέγεται ανάπτυγμα του  $(\alpha + \beta)^2$ .

**b) Τετράγωνο διαφοράς**

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Απόδειξη:**

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**c) Κύβος αθροίσματος - διαφοράς**

i)  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ii)  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

**Απόδειξη:**

i)  $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^3$ .

ii)  $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

**d) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

**Απόδειξη:**

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

**e) Διαφορά κύβων - Άθροισμα κύβων**

i)  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

ii)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

**Απόδειξη:**

- i)  $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3$
- ii)  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1. Δεν είναι σωστό να πούμε ότι ότι μία ταυτότητα έχει άπειρες λύσεις.
2. Ισχύει η ισότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , όταν ένας τουλάχιστον από τους  $\alpha, \beta$  είναι 0.
3. Αν έχουμε  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  τότε  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$ .

**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1** Να βρείτε τα αναπτύγματα

a)  $(x + 3)^2$  b)  $(3\psi - 2)^2$  c)  $(\psi^2 + 3\psi)^2$  d)  $(4x - \sqrt{3})^2$

**Λύση**

Σύμφωνα με τις ταυτότητες  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  και  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

a)  $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ .

b)  $(3\psi - 2)^2 = (3\psi)^2 - 2 \cdot 3\psi \cdot 2 + 2^2 = 9\psi^2 - 12\psi + 4$

c)  $(\psi^2 + 3\psi)^2 = (\psi^2)^2 + 2\psi \cdot 3\psi + (3\psi)^2 = \psi^4 + 6\psi^2 + 9\psi^2 = \psi^4 + 15\psi^2$

d)  $(4x - \sqrt{3})^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 16x^2 - 8x + 3$

**2** Αν η παρακάτω ισότητα είναι ταυτότητα

$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) = \alpha^8 - \beta^8$ .

Να εξετάσετε αν ισχύει για  $\beta = \frac{1}{2007}$  και  $\alpha = 2007$

**Λύση**

Επειδή η ισότητα:  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha + \beta) = \alpha^8 - \beta^8$  είναι ταυτότητα

θα ισχύει για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$  άρα θα ισχύει για  $\alpha = 2007$  και  $\beta = \frac{1}{2007}$

**A. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:**

**a)**  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

**b)**  $(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

**B. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:**

$$(2\alpha + \beta + 3\gamma)^2, (3\alpha - 3\beta - 4\gamma)^2$$

### Λύση

**A. a)**  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) =$   
 $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

**b)**  $(\alpha - \beta - \gamma)^2 = (\alpha - \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma - \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 =$   
 $= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma.$

**B. Από τις προηγούμενες ταυτότητες έχουμε:**

$$(2\alpha + \beta + 3\gamma)^2 = (2\alpha)^2 + \beta^2 + (3\gamma)^2 + 2 \cdot 2\alpha\beta + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3\gamma + 2\beta \cdot 3\gamma =$$

$$= 4\alpha^2 + \beta^2 + 9\gamma^2 + 4\alpha\beta + 12\alpha\gamma + 6\beta\gamma.$$

$$(3\alpha - 3\beta - 4\gamma)^2 = (3\alpha)^2 + (-3\beta)^2 + (-4\gamma)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot (-3\beta) + 2 \cdot 3\alpha \cdot (-4\gamma) + 2 \cdot (-3\beta) \cdot (-4\gamma) =$$

$$= 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 16\gamma^2 - 18\alpha\beta - 24\alpha\gamma + 24\beta\gamma$$

**A. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες**

**a)**  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$  και  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

**b)** Αν  $\alpha + \beta = 6$  και  $\alpha\beta = 5$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων  
 $\mathbf{A} = \alpha^2 + \beta^2, \quad \mathbf{B} = \alpha^3 + \beta^3, \quad \mathbf{\Gamma} = \alpha^4 + \beta^4$

### Λύση

**a)** Ξεκινάμε από το β μέλος:

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$$

**b)** Από a) έχουμε :

$$\mathbf{A} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 \cdot 5 = 36 - 10 = 26.$$

$$\mathbf{B} = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - 3 \cdot 5 \cdot 6 = 216 - 90 = 226.$$

$$\mathbf{\Gamma} = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 26^2 - 2(\alpha\beta)^2 =$$

$$676 - 2 \cdot 5^2 = 676 - 50 = 626.$$

5

**Να γίνουν οι πράξεις**

**α)**  $(3\alpha - \beta)^2 - 3(4\alpha + 5)(4\alpha - 5)$    **β)**  $(3x - \psi)(3x + \psi) - (x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2)$

**Λύση**

**α)**  $(3\alpha - \beta)^2 - 3(4\alpha + 5)(4\alpha - 5) = (3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \beta + \beta^2 - [(4\alpha)^2 - 52] =$   
 $9\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 - 16\alpha^2 + 25 = 7\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 + 25$

**β)**  $(3x - \psi)(3x + \psi) - (x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2) = (3x)^2 - \psi^2 - (x^3 - \psi^3) =$   
 $9x^2 - \psi^2 - x^3 + \psi^3$

6

**Να αποδείξετε ότι:**

**α)**  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

**β)**  $(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4$

**γ)**  $(3\kappa + 2)^2 - (2\kappa + 3)^2 = 5 \cdot (\kappa - 1)(\kappa + 1).$

**Λύση**

**α)**  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$   
 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$

**β)** Από α) Άν βάλουμε όπου  $\alpha = 2007$  και  $\beta = \frac{1}{2007}$  τότε  
 $(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4 \cdot 2007 \cdot \frac{1}{2007} = 4.$

**γ)**  $(3\kappa + 2)^2 - (2\kappa + 3)^2 = [3\kappa + 2 - (2\kappa + 3)][3\kappa + 2 + (2\kappa + 3)] =$   
 $(3\kappa + 2 - 2\kappa - 3)(3\kappa + 2 + 2\kappa + 3)(\kappa - 1)(5\kappa + 5) = 5(\kappa - 1)(\kappa + 1)$

7

**Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $x, \psi$  που ικανοποιούν τις ισότητες:**

**α)**  $x^2 + \psi^2 + 6x + 9\psi = \psi - 25$ ,   **β)**  $2x^2 + \psi^2 + 2x\psi + 4x + 4 = 0$

**Λύση**

**α)**  $x^2 + \psi^2 + 6x + 9\psi = \psi - 25 \quad \text{ή} \quad x^2 + \psi^2 + 6x + 9\psi - \psi + 25 = 0 \quad \text{ή}$   
 $x^2 + 6x + \psi^2 + 8\psi + 25 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 6x + 9 + \psi^2 + 8\psi + 16 = 0$   
 $\quad \text{ή} \quad (x + 3)^2 + (\psi + 4)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 3 = 0 \quad \text{και} \quad \psi + 4 = 0 \quad \text{ή} \quad x = -3 \quad \text{και} \quad \psi = -4.$

**β)**  $2x^2 + \psi^2 + 2x\psi + 4x + 4 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x^2 + \psi^2 + 2x\psi + 4x + 4 = 0 \quad \text{ή}$   
 $x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x\psi + \psi^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (x + 2)^2 + (x + \psi)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 2 = 0$   
 $\quad \text{και} \quad x + \psi = 0 \quad \text{ή} \quad x = -2 \quad \text{και} \quad \psi = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2 \quad \text{και} \quad \psi = -2.$

## A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ισχύει:  $(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4$ .
2. Ισχύει:  $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$ .
3. Δεν ισχύει ποτέ η ισότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .
4. Ισχύει:  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ .
5. Αν  $x + \frac{1}{x} = 4$  τότε  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16$ .
6. Ισχύει  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$ .
7. Αν ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ .
8. Αν  $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$  τότε  $\alpha = \beta$ .
9. Ισχύει ότι  $(3\alpha\beta - \beta)^2 = \beta(3\alpha - 1)^2$ .
10. Αν  $\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)^2 = 0$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ .
11. Ισχύει  $-(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$ .
12. Ισχύει  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ .
13. Ισχύει πάντα  $(\alpha - \beta)^3 = -(\beta - \alpha)^3$ .
14. Ισχύει  $(x - \psi)^2 = x^2 - 2x(-\psi) + (-\psi)^2$ .

## B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν  $\alpha - \beta = 6$  τότε η παράσταση  $K = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 3$  ισούται με:  
 α. 0 β. 39, γ. 36 δ. 33 ε. 81
2. Αν  $x + \psi = 20$  και  $x^2 - \psi^2 = 80$  τότε η τιμή της παράστασης  $\Lambda = \psi - x$  είναι ίση με:  
 α. 4, β. -4 γ. 1 δ. 10 ε. κανένα από τα προηγούμενα.

3. Η παράσταση  $(\alpha - 3)^2$  είναι ίση με:  
**α.**  $\alpha^2 + 9$ , **β.**  $\alpha^2 - 6\alpha + 9$ , **γ.**  $(\alpha + 3)(\alpha - 3)$  **δ.**  $\alpha^2 - 9$
4. Αν  $x - \frac{1}{x} = 3$ , τότε η παράσταση  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  ισούται με:  
**α.** 9, **β.** 11, **γ.** 7, **δ.** -9, **ε.** -11
5. Αν  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$  και  $\alpha^3 - \beta^3 = 20$  τότε η παράσταση  $\alpha - \beta$  ισούται:  
**α.** 2, **β.** -2, **γ.** 4 **δ.** -4 **ε.** καμία από τις παραπάνω.
6. Αν  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$ , τότε οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι:  
**α.** αντίθετοι, **β.** ετερόσημοι, **γ.** αντίστροφοι, **δ.** Ό ένας θα είναι πάντα μηδέν, **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.
7. Σε ένα παραλληλόγραμμο το μήκος του είναι  $x + 4$ ,  $x > 4$  και το εμβαδόν είναι  $x^2 - 16$ , τότε το αντίστοιχο ύψος είναι:  
**α.**  $x + 5$ , **β.**  $x - 4$ , **γ.**  $x + 4$ , **δ.**  $x^2 - 16$ , **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.
8. Η παράσταση  $\alpha^2 - \alpha\beta + \gamma^2$  είναι τέλειο τετράγωνο όταν:  
**α.**  $\gamma = \beta$ , **β.**  $\gamma = 2\beta$ , **γ.**  $\gamma = \beta^2$  **δ.**  $\gamma = \frac{\beta^2}{4}$ , **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.
9. Αν  $x + \psi = 4$  και  $x\psi = 3$  τότε η παράσταση  $x^3 + \psi^3$  είναι ίση με:  
**α.** 28, **β.** 36, **γ.** 64, **δ.** 16, **ε.** τίποτα από τα παραπάνω.
10. Η παράσταση  $(\alpha + \beta - \gamma)^2$  είναι ίση με:  
**α.**  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma$ , **β.**  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$   
**γ.**  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma + 2\alpha\beta$ , **δ.**  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$
11. Η παράσταση  $2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2$  είναι ίση με:  
**α.**  $(\alpha - \beta)^2$  **β.**  $-(\beta - \alpha)^2$  **γ.**  $-(\alpha + \beta)^2$  **δ.**  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

**1** Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

- α)**  $(2x+3x^2)^2$ , **β)**  $(\frac{2}{3}x^2 - 4x)^2$ , **γ)**  $(-3x^3+2x)^2$ , **δ)**  $(4x^2\psi+2x\psi^2)^2$   
**ε)**  $(-3x-2x^3\psi)^2$  **στ)**  $(\frac{1}{\alpha} + \alpha)^2$

**2** Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

- α)**  $(\alpha+2\beta)^3$ , **β)**  $(2\alpha^2+3\alpha\beta^3)^3$ , **γ)**  $(3\alpha-2\beta^2)^3$ , **δ)**  $(\frac{3}{4}\alpha^2-4\alpha)^3$   
**ε)**  $(2x-\frac{2}{x})^3$  **στ)**  $(\sqrt{3}-2)^3$

**3** Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

- α)**  $(4x - \psi) \cdot (4x + \psi)$ , **β)**  $(3x^2 - \psi)(3x^2 + \psi)$ , **γ)**  $(x - \psi + 2z)(x + \psi - 2z)$   
**δ)**  $(4x - x^3)(4x + x^3)$  **ε)**  $(x - \psi)(-x - \psi)(x^2 + \psi^2)$ .

**4** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- α)**  $(2x)^3 - 8$ , **β)**  $27x^3 - 64\psi^3$ , **γ)**  $8x^3 + 64$  **δ)**  $64 - (2x)^3$   
**ε)**  $(3\alpha + 2\beta)^3 - (3\alpha)^3$

**5** Να κάνετε τις πράξεις:

- α)**  $(2x + 3)^2 - (3x - 1)(3x + 1)$ , **β)**  $(3\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + 2\beta)^2 + 3\alpha(\beta - 1) + 3\alpha$   
**γ)**  $(1 - x)(1 + x) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)$  **δ)**  $(x - 2)^2 - (1 - 2x)^2 + (3x - 1)(3x + 1)$

**6** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ . Να βρείτε:

- α)**  $P(x - 10)$ , **β)**  $P(3 - 2x)$ , **γ)**  $P(-x + 1) - 2x$

**7** Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανεξάρτητα του  $x$ .

$$P(x) = (x^3 - 1)^2 + (x^3 + 1)^2 - 2(x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

$$Q(x) = (x^2 + 1)^3 + 3(x^2 + 1)^2(1 - x^2) + 3(x^2 + 1)(1 - x^2)^2 + (1 - x^2)^3.$$

**8** Άν  $\alpha + \beta = 3$  και  $\alpha\beta = -4$  να υπολογίσετε:

- α)**  $\alpha^2 + \beta^2$ , **β)**  $\alpha^3 + \beta^3$

**9** Αν  $\alpha + \beta = 5$  και  $\alpha\beta = 4$  να υπολογίσετε:  
**α)**  $\alpha^2 + \beta^2$ , **β)**  $\alpha^3 + \beta^3$ , **γ)**  $\alpha^4 + \beta^4$

**10** Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 3$  και  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 27$  να υπολογίσετε:  
**α)**  $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ , **β)**  $3\alpha\beta + 3\beta\gamma + 3\alpha\gamma - 2007$

**11** Αν  $\alpha + \beta = 6$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 26$  να υπολογίσετε:  
**α)**  $\alpha\beta$ , **β)**  $\alpha^3 + \beta^3$

**12** Αν  $x + \frac{1}{x} = 2$  να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:  
**α)**  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , **β)**  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  **γ)**  $x^4 + \frac{1}{x^4}$

**13** Αν  $x - \frac{1}{x} = 2$ ,  $x > 0$ , να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:  
**α)**  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , **β)**  $(x + \frac{1}{x})^2$ , **γ)**  $x + \frac{1}{x}$

**14** Να αποδείξετε ότι:  
**α)**  $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)(\alpha^8 + 1) = \alpha^{16} - 1$   
**β)**  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2 = 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2$   
**γ)**  $(\frac{\alpha + \beta}{\alpha})^2 - (\frac{\alpha - \beta}{\alpha})^2 = \frac{4\beta}{\alpha}$

**15** Να βρεθούν οι αριθμοί  $x, \psi$  ώστε να ισχύει:  
**α)**  $x^2 + 2x + 1 + \psi^2 + 4\psi + 4 = 0$ , **β)**  $x^2 + \psi^2 + 6x + 8\psi + 25 = 0$ ,  
**γ)**  $4x^2 + \psi^2 + 4x + 2\psi = -2$

**16** **α)** Να κάνετε τις πράξεις:  $\alpha^2 - (\alpha - 2) \cdot (\alpha + 2)$   
**β)** Να δείξετε ότι:  $2007^2 - 2005 \cdot 2009 = 4$

**17** Να δείξετε ότι:  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^6 - 64$

- Κεφάλαιο 1** **18** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:  $K = 2007^2 + 2007^2 \cdot 2008 + 2008^2 + 2007$  είναι τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.
- 19** Να γράψετε ως μία δύναμη τις παραστάσεις:  
**a)**  $27\alpha^3 + 27\alpha^2x + 9\alpha^2x + x^3$   
**b)**  $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2$
- 20** Αν,  $\alpha = \sqrt{3} - 1$ ,  $\beta = \sqrt{3} + 1$ , τότε να υπολογίσετε:  
**a)**  $\alpha\beta$ , **b)**  $\alpha^2 + \beta^2$ , **c)**  $\alpha^2 - \beta^2$
- 21** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:  
**a)**  $(x + \dots)^2 = \dots + 2x + \dots$ , **b)**  $(x - 2)^2 = \dots + \dots - \dots$ ,  
**c)**  $(\dots + \dots)^2 = 4x^2 + \dots + 9y^2$ , **d)**  $(\dots - \dots)^2 = x^2 + \dots - 2$
- 22** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:  
**a)**  $\dots - \dots = (2x - \psi^2)(\psi^2 + 2x)$ , **b)**  $(x^4 - 1) = (\dots - \dots)(\dots + \dots)(\dots + \dots)$ ,  
**c)**  $\dots - \dots = (x - \psi)(x^2 + \dots + \dots)$ , **d)**  $x^3 + \dots = (\dots + 2)(\dots - 2x + \dots)$
- 23** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:  
**a)**  $(x + \dots)^3 = \dots + \dots + \dots + 8$ , **b)**  $(\dots - 2)^3 = \psi^3 \dots - \dots + \dots -$
- 24** Να δείξετε ότι ο αριθμός  $3^9 + 1$  είναι πολλαπλάσιο του 28.
- 25** Για ποιες τιμές των  $\kappa, \lambda$  ισχύουν πάντα οι ισότητες:  
**a)**  $(x - \psi)^2 = x^\kappa - 2x\psi + \psi^{\lambda+1}$ , **b)**  $(x - \psi)(x + \psi) = x^{\kappa+3} - \psi^{4-\lambda}$
- 26** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Αν  $\beta + \gamma = \sqrt{20}$  και  $\alpha = 4$  να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.
- 27** Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός αριθμός.

**Παραγοντοποίηση** ή ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων λέγεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μία παράσταση, που είναι άθροισμα, σε γινόμενο.

Όταν μία παράσταση δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση, τότε λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Έτσι όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννοούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιάς αλγεβρικής παράστασης είναι:

### α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

### Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i)  $8x^2\psi - 20x\psi^2 + 12x^2\psi^2$  ii)  $\alpha(\kappa - \lambda) + 3\beta(\lambda - \kappa)$  iii)  $4(3x - 1) + x(2 - 6x)$

#### Λύση

i)  $8x^2\psi - 20x\psi^2 + 12x^2\psi^2 = 4x\psi(8x - 5\psi + 3x\psi)$

ii)  $\alpha(\kappa - \lambda) + 3\beta(\lambda - \kappa) = \alpha(\kappa - \lambda) - 3(\kappa - \lambda) = (\kappa - \lambda)(\alpha - 3)$

iii)  $4(3x - 1) + x(2 - 6x) = 4(3x - 1) - 2x(3x - 1) = (3x - 1)(4 - 2x) = 2(3x - 1)(2 - x)$

### β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Όταν οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες με το ίδιο πλήθος όρων κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- Κάθε ομάδα να έχει κοινό παράγοντα.
- Όταν βγάλουμε κοινό παράγοντα από κάθε ομάδα, να παρουσιάζεται το ίδιο πολυώνυμο μέσα στην κάθε παρένθεση για όλες τις ομάδες.

### Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i)  $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$  ii)  $x\psi - 5x - 5\psi + 25$  iii)  $2x^2 + 6x\psi + 4\psi^2$

## Κεφάλαιο 1 Λύση

i)  $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6 = 4x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 + 3)$   
ii)  $x\psi - 5x - 5\psi + 25 = x(\psi - 5) - 5(\psi - 5) = (\psi - 5)(x - 5)$   
iii)  $2x^2 + 6x\psi + 4\psi^2 = 2x^2 + 2x\psi + 4x\psi + 4\psi^2 = 2x(x + \psi) + 4\psi(x + \psi) =$   
 $= (x + \psi)(2x + 4\psi) = 2(x + \psi)(x + 2\psi)$

### γ) Διαφορά τετραγώνων

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ταυτότητα

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποήσουμε μία παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων.

### Παραδείγματα

#### Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i)  $9x^2 - 16$  ii)  $(2x - 1)^2 - 49$  iii)  $x^2 - 5$

### Λύση

i)  $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$   
ii)  $(2x - 1)^2 - 49 = [(2x - 1) - 7][(2x - 1) + 7] = (2x - 1 - 7)(2x - 1 + 7) =$   
 $(2x - 8)(2x + 6) = 2(x - 4)2(x + 3) = 4(x - 4)(x + 3)$   
iii)  $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

### δ) Διαφορά ή άθροισμα κύβων

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποήσουμε μία παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα κύβων.

### Παραδείγματα

#### Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i)  $x^3 - 8$  ii)  $x^3 + 27$  iii)  $27x^3 - 8\alpha^3$

### Λύση

i)  $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$   
ii)  $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$   
iii)  $27x^3 - 8\alpha^3 = (3x)^3 - (2\alpha)^3 = (3x - 2\alpha)[(3x)^2 + 3x2\alpha + (2\alpha)^2] =$   
 $(3x - 2\alpha)(9x^2 + 6ax + 4a^2)$

**ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου**

Αντή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2, \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (**τέλειο τετράγωνο**).

**Παραδείγματα**

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i)  $\alpha^2 + 6\alpha + 9$  ii)  $16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2$  iii)  $-\alpha^2 + 2\alpha - 1$

**Λύση**

i)  $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2 \cdot 3\alpha + 3^2 = (\alpha + 3)^2$

ii)  $16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha)^2 - 2 \cdot 4\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)^2$

iii)  $-\alpha^2 + 2\alpha - 1 = -(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = -(\alpha - 1)^2$

**στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής  $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ .**

Ένα τριώνυμο της μορφής  $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$  παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

**Παραδείγματα**

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα

i)  $x^2 - 7x + 6$  ii)  $x^2 + 3x + 2$  iii)  $-2x^2 + 8x - 6$

**Λύση**

i) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο  $x^2 - 7x + 6$ , αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 6 και άθροισμα -7. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι: το -1 και το -6.

Άρα έχουμε  $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

ii) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο  $x^2 + 3x + 2$ , πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς με άθροισμα 3 και γινόμενο 2. Οι αριθμοί θα είναι ομόσημοι (έχουν γινόμενο θετικό). Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι: το 1 και το 2 .

## Κεφάλαιο 1

Αρα έχουμε  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

iii) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο  $-2x^2 + 8x - 6$ , βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $-2$ , ώστε ο συντελεστής του  $x^2$  να γίνει  $1$ , οπότε έχουμε  $-2x^2 + 8x - 6 = -2(x^2 - 4x + 3)$

Στη συνέχεια θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο :  $x^2 - 4x + 3$ . Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο  $3$  και άθροισμα  $-4$ . Οι αριθμοί αυτοί είναι : το  $-1$  και το  $-3$ . Οπότε  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ .

Αρα έχουμε  $-2x^2 + 8x - 6 = -2(x^2 - 4x + 3) = -2(x - 1)(x - 3)$

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### 1 Να παραγοντοποίσετε τις παραστάσεις:

- a)  $4\alpha + 8\beta$  b)  $6\alpha^2 + 24\alpha^3 + 2\alpha$  γ)  $4\alpha^2 - 2\alpha + 2$  δ)  $\alpha^4 + \alpha^3$  ε)  $\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha$   
στ)  $\alpha^2(x - 3\psi) - (x - 3\psi)$ , ζ)  $\alpha x + \alpha\psi - \lambda\psi - \lambda x$  η)  $9x^4 - 15x^2 + 25$

#### Λύση

- α)  $4\alpha + 8\beta = 4(\alpha + 2\beta)$   
β)  $6\alpha^2 + 24\alpha^3 + 2\alpha = 2\alpha(3\alpha + 12\alpha^2 + 1)$   
γ)  $4\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 2(2\alpha^2 - \alpha + 1)$   
δ)  $\alpha^4 + \alpha^3 = \alpha(\alpha + 1)$   
ε)  $\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - \frac{3}{2})$   
στ)  $\alpha^2(x - 3\psi) - (x - 3\psi) = (x - 3\psi)(\alpha^2 - 1) = (x - 3\psi)(\alpha - 1)(\alpha + 1)$   
ζ)  $\alpha x + \alpha\psi - \lambda\psi - \lambda x = \alpha(x + \psi) - \lambda(x + \psi) = (x + \psi)(\alpha - \lambda)$   
η)  $9x^4 - 15x^2 + 25 = (3x^2 - 5)^2$

### 2 α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A = 3x^3 - 3x$ β) Να λυθεί η εξίσωση : $3x^3 = 3x$

#### Λύση

- α)  $A = 3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1)$   
β)  $3x^3 = 3x \Rightarrow 3x^3 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$  ή  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$  ή  $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ .

**A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

- 1.** Ισχύει  $x^2 - 2 = (x - 2)(x + 2)$ .
- 2.** Ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ .
- 3.** Ισχύει  $\alpha^2 - \beta^2 = -(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)$ .
- 4.** Ισχύει  $\psi(\alpha + \beta) - \alpha - \beta = (\alpha + \beta)(\psi + 1)$ .
- 5.** Ισχύει  $\alpha(\kappa - \lambda) + \beta(\lambda - \kappa) = (\alpha - \beta)(\kappa - \lambda)$ .
- 6.** Ισχύει  $1 - x^2 = (x - 1)(x + 1)$ .

**B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

- 1.** Η παράσταση  $x^3 - 5x^2 + 6x$  είναι ίση με:  
**α.**  $x(x - 2)(x - 3)$ , **β.**  $x(x + 2)(x + 3)$ , **γ.**  $x(x - 2)(x + 3)$ ,  $x(x + 2)(x - 3)$
- 2.** Η τιμή της παράστασης  $K = \frac{15,23^2 - 5,23^2}{20,46}$  είναι:  
**α.** 10, **β.** 100, **γ.** 2, **δ.** 5.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

- 1** Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
- α)**  $3x^2 + 6x$  **β)**  $4x^3 - 4x^2$  **γ)**  $3x^2 - 3$  **δ)**  $5x^3 - 10x^2 - 5x$  **ε)**  $4x^2\psi - 12x\psi$   
**στ)**  $3(x - \psi) - \alpha(\psi - x) - x + \psi$  **ζ)**  $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$
- 2** Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
- α)**  $(\alpha + 1)^2 - \alpha - 1$  **β)**  $x^3 + x^2 + x + 1$  **γ)**  $(x - 4)(\alpha + \beta) - x + 4$  **δ)**  $x^2 - 2x\psi + \psi^2$   
**ε)**  $25x^2 - 10x\psi + \psi^2$  **στ)**  $(x + \psi)^2 - 6(x + \psi) + 9$
- 3** Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
- α)**  $4 - \alpha^2$  **β)**  $16 - \alpha^2$  **γ)**  $x^2 - 5$  **δ)**  $x^3 - x$  **ε)**  $18x^2 - 8\psi^2$   
**στ)**  $\alpha^4 - 1$  **ζ)**  $9(x + \psi)^2 - 16(x - \psi)^2$
- 4** Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
- α)**  $x^2 - 3$  **β)**  $x^2 - 5$  **γ)**  $x^4 - x$  **δ)**  $x^3 - 5x^2 + 7x - 35$  **ε)**  $x^3 - 4x$

**Κεφάλαιο 1**

**5**

Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:

- α)**  $(x^2 - 4)^2 - (x + 3)(x + 2)^2$    **β)**  $(2x - 6)(x^2 - 9) - (4x - 12)(x - 3)^2$   
**γ)**  $4x^2 - 4x + 1 - 9\psi^2$    **δ)**  $\alpha^2 + 2\alpha\beta - x^2 + 2x\psi + \beta^2 - \psi^2$   
**ε)**  $\alpha(\beta - 2) - 4(\beta - 2) - (2 - \beta)^2$    **στ)**  $x^3 + 8 - x(x + 2)$   
**ζ)**  $x^3 - 27 - (x - 3)$

**6**

Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:

- α)**  $(2\alpha + \beta)(x - 1) - (1 - x)(\alpha + \beta)$ ,   **β)**  $(\alpha + \beta)(x + \psi) - vx - v\psi$ ,  
**γ)**  $(\alpha^2 - \beta^2)(x + \psi) - (x^2 - \psi^2)(\alpha - \beta)$

**7**

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

- α)**  $x^2 - 3x + 2$ ,   **β)**  $x^2 - 7x + 6$ ,   **γ)**  $3x^2 - 2x - 1$ ,   **δ)**  $-x^2 + 7x + 6$ ,   **ε)**  $x^2 - 4x + 4$

**8**

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

- α)**  $x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3\sqrt{3}$    **β)**  $x^2 + (3\kappa + \lambda)x + 3\kappa\lambda$    **γ)**  $x^2 + (4 - \sqrt{5})x - 4\sqrt{5}$

**9**

Να παραγοντοποιήσετε:

- α)**  $x^2 - 2x - 3 + \alpha(x + 1)$ ,   **β)**  $x^2 + \alpha x + 5x - \alpha - 6$ ,   **γ)**  $x^2 + x\psi - 7x - 4\psi + 12$

**10**

Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:

- α)**  $x^3 - 4x^2 + 3x$ ,   **β)**  $x^3 - 6x^2 + 8x$ ,   **γ)**  $2x^3 - 10x^2 + 12x$ ,   **δ)**  $\frac{x \cdot \psi}{10} + \frac{x^2}{25} + \frac{\psi^2}{16}$

**11**

Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:

- α)**  $8x^3 - 27\psi^3$ ,   **β)**  $x^3 - 8\psi^3$ ,   **γ)**  $x^3 + 1$ ,   **δ)**  $54x^3 + 16\psi^3$   
**ε)**  $\alpha^6 - 1$ ,   **στ)**  $16x^4 + 2x$

**12**

- α)** Να κάνετε γινόμενο την παράσταση:  $A = x^3 - 5x^2 + 6x$

- β)** Να λύσετε  $A = 0$

**13**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α)**  $x^2 - 100 = 0$ ,   **β)**  $16x^3 - x = 0$ ,   **γ)**  $x \cdot (x + 2)^2 = 9x$ ,   **δ)**  $(x - 3)^3 = (x - 3)$ ,  
**ε)**  $x^2(x - 1) - x + 1 = 0$ ,   **στ)**  $x^2(x - 2) - 4x + 8 = 0$

**14**

- α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση  $A = \alpha^2 - 4 + 4\alpha\beta + 4\beta^2$

- β)** Να υπολογίσετε την παράσταση  $(\frac{\alpha^2 - 4 + 4\alpha\beta + 4\beta^2}{\alpha + 2\beta - 2} - \alpha - 2\beta - 3)^{2007}$

**15**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- $A = \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 16$ ,    $B = 4\alpha^2 - 4 - 4\alpha\beta + \beta^2$     $\Gamma = x^2 - 4x\psi - 5\psi^2$   
 $\Delta = 3\alpha^2 - 4\alpha + 1 - 2\alpha\beta - \beta^2$

**16** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = x^4 + 4\psi^4, \quad \mathbf{B} = x^4 + 4, \quad \mathbf{\Gamma} = x^4 + 9 - 7x^2, \quad \Delta = x^4 + \psi^4 - 3x^2\psi^2$$

$$\mathbf{E} = x^4 + \psi^4 + x^2\psi^2Z = x^2 + 4x\psi - 5\psi^2$$

**17** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = x^3 - 7x + 6, \quad \mathbf{B} = 2x^3 - 5x + 3, \quad \mathbf{\Gamma} = x^3 - 4x + 3, \quad \Delta = x^3 + 2x^2 - 1$$

**18** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)**  $x^{v+3} - x^v$    **β)**  $x^{\mu+2} - x^\mu$    **γ)**  $x^{v+1} - x^{\mu+2}$    **δ)**  $x^{v+3} - x^{\mu+2} - x^{\kappa+2}$

**19** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)**  $(x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4$    **β)**  $\alpha^2 + \beta - \beta^2 - \alpha + (\alpha - \beta)^2$    **γ)**  $(x-1)^2 - 6(x-1) + 9$

**20** Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

**α)**  $2007 \cdot 1321 - 2007 \cdot 321$    **β)**  $995^2 - 25$    **γ)**  $998 \cdot 1002 + 1$    **δ)**  $401 \cdot 399$

**ε)**  $2007^2 - 2006 \cdot 2008$

## 1.7 Διαιρεση πολυωνύμων

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς  $\Delta$  (**διαιρετέος**) και  $\delta$  (**διαιρέτης**) με  $\delta \neq 0$  και κάνουμε τη διαιρεση  $\Delta : \delta$ , τότε βρίσκουμε δύο άλλους μοναδικούς φυσικούς αριθμούς  $\pi$  (**πηλίκο**) και  $\nu$  (**υπόλοιπο**), για τους οποίους ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu \quad \text{με} \quad 0 \leq \nu < \delta$$

Αν  $\nu = 0$ , τότε  $\Delta = \delta \cdot \pi$  και τότε λέμε ότι η διαιρεση είναι τέλεια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο δ διαιρεί τό δ ή ότι ο δ είναι παράγοντας του Δ.

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα  $\Delta(x)$  (**διαιρετέος**) και  $\delta(x)$  (**διαιρέτης**) με  $\delta(x) \neq 0$  και κάνουμε την διαιρεση  $\Delta(x) : \delta(x)$ , τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων  $\pi(x)$  (**πηλίκο**) και  $\nu(x)$  (**υπόλοιπο**), για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \pi(x) + \nu(x) \quad (\text{Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαιρεσης}),$$

όπου το  $\nu(x)$  ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

**Στο παρακάτω παράδειγμα περιγράφεται η διαδικασία της διαιρεσης δύο πολυνομών.**

Έστω δίνονται τα πολυνόμια  $\Delta(x) = 6x^5 + 3x^2 - 13x^4 + 4x^3 + 2x - 1$  και  $\delta(x) = -2x^2 + 3x^3 - x$  θα κάνουμε την διαιρεση  $\Delta(x) : \delta(x)$

- Γράφουμε τα πολυνόμια του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής  $x$  και κάνουμε το σχήμα της διαιρεσης:

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline 3x^3 - 2x^2 - x \end{array}$$

- Διαιρούμε τον πρώτο όρο  $6x^5$  του διαιρετέου με τον πρώτο όρο  $3x^3$  του διαιρέτη ( $\frac{6x^5}{3x^3} = 2x^2$ ). Το αποτέλεσμα  $2x^2$  είναι ο **πρώτος όρος του πηλίκου**.

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline 3x^3 - 2x^2 - x \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε τον  $2x^2$  με τον διαιρέτη ( $3x^3 - 2x^2 - x$ ) και το γινόμενο  $2x^2 \cdot (3x^3 - 2x^2 - x) = 6x^5 - 4x^4 - 2x^3$  το αφαιρούμε από τον διαιρετέο. Θέτουμε κάτω από τον διαιρετέο το γινόμενο που βρήκαμε με αντίθετα πρόσημα των όρων του έτσι, ώστε οι ομοιόβαθμες δυνάμεις να είναι η μία κάτω από την άλλη, κάνουμε την πρόσθεση.

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ -6x^5 + 4x^4 + 2x^3 \\ \hline -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

Το πολυνόμιο  $v_1 = -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  λέγεται **πρώτο μερικό υπόλοιπο**

- Στη συνέχεια διαιρούμε τον πρώτο όρο  $-9x^4$  του υπολοίπου  $v_1$  με τον πρώτο  $3x^3$  του διαιρέτη ( $\frac{-9x^4}{3x^3} = -3x$ ).

Το αποτέλεσμα  $-3x$  είναι ο **δεύτερος όρος του πηλίκου**.

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ -6x^5 + 4x^4 + 2x^3 \\ \hline -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε το  $-3x$ , που είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου, με τον διαιρέτη  $3x^3 - 2x^2 - x$  και το γινόμενο  $-3x(3x^3 - 2x^2 - x) = -9x^4 + 6x^3 + 3x^2$  το αφαιρούμε από το υπόλοιπο  $v_1$ .

$$\begin{array}{r}
 6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\
 -6x^5 + 4x^4 + 2x^3 \\
 \hline
 -9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\
 -9x^4 - 6x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 2x - 1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} 3x^3 - 2x^2 - x \\ \hline 2x^2 - 3x \end{array} \right.$$

Το πολυώνυμο  $v_2 = 2x - 1$  λέγεται **δεύτερο μερικό υπόλοιπο**.

Η διαίρεση δεν συνεχίζεται όταν καταλήξουμε σε υπόλοιπο που να είναι ίσο με μηδέν (**τέλεια διαίρεση**) ή να έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του διαιρέτη (**ατελής διαίρεση**).

Οπότε η διαίρεση δεν μπορεί να συνεχισθεί.

Έτσι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$6x^5 - 13x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (3x^3 - 2x^2 - x)(2x^2 - 3x) + 2x - 1.$$

$$(\text{Διαιρέτεος}) = (\text{Διαιρέτης}) \cdot (\text{πηλίκο}) + (\text{υπόλοιπο})$$

Στην ευκλείδεια διαίρεση όταν το υπόλοιπο είναι μηδέν τότε:

$(\text{Διαιρέτεος}) = (\text{Διαιρέτης}) \cdot (\text{πηλίκο})$  και τα πολυώνυμα  $\delta(x)$  και  $\pi(x)$  λέγονται παράγοντες ή διαιρέτες του πολυωνύμου  $\Delta(x)$ .

**Γενικά:**

Ένα πολυώνυμο  $\delta$  είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου  $\Delta$ , αν η διαίρεση  $\Delta : \delta$  είναι τέλεια, δηλαδή αν υπάρχει πολυώνυμο  $\pi$ , τέτοιο ώστε να ισχύει  $\Delta = \delta \cdot \pi$ .

1

- a)** Να γίνει η διαίρεση  $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6) : (x^2 - 2x - 3)$
- b)** Να γίνει γινόμενο η παράσταση  $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$

**Λύση**

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad \begin{array}{r} x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \\ -x^4 + 2x^3 + 3x^2 \\ \hline -x^3 \quad \quad \quad +7x + 6 \\ x^3 \quad \quad \quad -2x^2 -3x \\ \hline -2x^2 + 4x + 6 \\ 2x^2 \quad \quad \quad -4x -6 \\ \hline 0 \end{array} & \left| \begin{array}{c} x^2 - 2x - 3 \\ \hline x^2 - x - 2 \end{array} \right. \end{array}$$

**β)** Από το α) ερώτημα αν γράψουμε την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$$(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x - 2) \quad (1)$$

Η παράσταση  $(x^2 - 2x - 3)$  αναλύεται ως εξής:

Θα βρούμε δύο αριθμούς οι οποίοι έχουν: άθροισμα -2 και γινόμενο -3  
Οι αριθμοί αυτοί είναι: οι -3 και 1. Οπότε  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ .

Ομοίως η παράσταση  $(x^2 - x - 2)$  αναλύεται ως εξής:

Θα βρούμε δύο αριθμούς οι οποίοι έχουν: άθροισμα -1 και γινόμενο -2.  
Οι αριθμοί αυτοί είναι: οι -2 και 1. Οπότε  $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

Άρα η (1) μας δίνει  $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6) = (x + 1)(x - 3)(x + 1)(x - 2)$  (2).

**γ)**  $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0$ . Για να λύσουμε μία εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου πρέπει να γίνει γινόμενο. Οπότε από (2) έχουμε.

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad (x + 1)(x - 3)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0 \quad \text{άρα} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

- 2** Να βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$  το οποίο όταν διαιρεθεί με το  $x^2 - 2x$  δίνει πηλίκο  $4x + 1$  και υπόλοιπο  $v(x) = 8x - 5$ .

Κεφάλαιο 1

### Λύση

Σύμφωνα με τη Ευκλείδεια διαίρεση θα έχουμε:

$$P(x) = (x^2 - 2x)(4x + 1) + 8x - 5 = 4x^3 + x^2 - 8x - 2x + 8x - 5 = 4x^3 + x^2 - 2x + 5$$

- 3** Αν  $P(x) = x^2 + 2x - 1$ , να γίνει η διαίρεση  
[ $P(x) - 2P(x + 1) + 3P(x - 2) + 24$ ] :  $(x + 2)$

### Λύση

$$P(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) - 1 = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 4x + 2.$$

$$P(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) - 1 = x^2 - 4x + 4 + 2x - 4 - 1 = x^2 - 2x - 1.$$

Άρα ο διαιρετέος είναι:

$$\begin{aligned} P(x) - 2P(x + 1) + 3P(x - 2) + 24 &= x^2 + 2x + 1 - 2(x^2 + 4x + 2) + 3(x^2 - 2x - 1) + 24 \\ &= x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 8x - 4 + 3x^2 - 6x - 3 + 24 = 2x^2 - 12x + 16 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 12x + 16 & x + 2 \\ -2x^2 - 4x & \hline 0 & 2x - 16 \\ \hline -16x + 16 & \\ 16x + 32 & \hline 48 & \end{array}$$

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

#### A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή (Λ)

- 1.** Αν ο διαιρετέος είναι 3<sup>ο</sup> βαθμού και ο διαιρέτης 2<sup>ο</sup> τότε το υπόλοιπο θα είναι σίγουρα 1<sup>ο</sup> βαθμού.
- 2.** Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x^2 - 9$  τότε:  $P(-3) = P(3) = 0$ .
- 3.** Αν το  $x + 3$  δεν είναι παράγοντας του  $P(x)$  τότε  $P(-3) \neq 0$ .
- 4.** Το υπόλοιπο μιάς διαίρεσης έχει πάντα βαθμό.
- 5.** Σε μία Ευκλείδεια διαίρεση ο βαθμός του πηλίκου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του διαιρέτη.

## Κεφάλαιο 1

6. Σε μία Ευκλείδεια διαιρεση η διαφορά των βαθμών του διαιρετέου και του διαιρέτη μας δίνει το βαθμό του υπολοίπου.

### B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = (x-3)(x^3 + 2x - 1) + 7$ . Το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $P(x)$  με το  $x-3$  είναι:  
**a. 0   b. -1   c. 3   d. 7   e. -7**
2. Το υπόλοιπο της διαιρεσης  $(3x^3 - 2x + 5) : (x - 1)$  είναι:  
**a. 6   b. 7   c. -3   d. 5**
3. Το πηλίκο της διαιρεσης  $(x^3 - 5x^2 + 4x - 3) : (x - 2)$  είναι:  
**a. 1<sup>ου</sup> βαθμού   b. 2<sup>ου</sup> βαθμού   c. 3<sup>ου</sup> βαθμού.**
4. Το πολυώνυμο  $P(x)$  αν διαιρεθεί με το  $(x^3 - 5x + 2)$  δίνει υπόλοιπο 3. Το  $P(2)$  είναι ίσο με:  
**a. 3   b. 0   c. -3   d. 10**
5. Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  το διαιρέσουμε με ένα σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο τότε το υπόλοιπο είναι:  
**a. μηδενικού βαθμού   b. σταθερό πολυώνυμο   c. έχει βαθμό το βαθμό του  $P(x)$    d. είναι πρώτου βαθμού.**

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαιρεσης σε κάθε περίπτωση  
**a)  $(x^3 - 5x^2 + 7x - 2) : (x - 2)$ ,   b)  $(5x^2 + 16x + 3) : (x + 2)$ ,  
c)  $[(x^2 - 1)(x + 1) - 5] : (x-3)$ ,   d)  $(2x^4 + 4x^3 - 5x + 2) : (x^2 - 1)$   
e)  $x^6 : (x - 2)^2$**
2. Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = (x^3 - 4x) \cdot (3x^2 - 3) - 4x + 5$ .  
**i)      Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων  
a)       $P(x) : (x^3 - 4x)$    b)  $P(x) : (3x^2 - 3)$   
ii)     Να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 5 - 4x$ .**

- 3**
- α)** Να κάνετε την διαίρεση  $(x^5 + 1) : (x + 1)$  και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $10^5 + 1$  είναι πολλαπλάσιο του 11.
  - β)** Να κάνετε την διαίρεση  $(x^5 - 1) : (x - 1)$  και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $20^5 - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 19.
- 4**
- α)** Να κάνετε τη διαίρεση  $(2x^3 - 7x^2 + 11x - 4) : (x^2 - 3x + 4)$ .
  - β)** Να παραγοντοποιήσετε:  $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4$ .
- 5**
- α)** Να κάνετε τη διαίρεση  $(2x^3 - 7x^2 + 6) : (2x - 1)$
  - β)** Να γράψετε την Ευκλείδεια διαίρεση.
  - γ)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση  $2x^3 - 7x^2 + \frac{3}{2}$
- 6**
- Έστω το πολυνόμιο  $P(x)$  το οποίο όταν διαιρεθεί με το  $(x^2 - 3x - 2)$  δίνει πτηλίκο το  $x^2 - 2x$  και υπόλοιπο  $3x + 2$ . Να υπολογίσετε το  $P(-2)$ .
- 7**
- Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $3x^3 - 2x - 1$  είναι  $3x - 1$  να υπολογίσετε το  $P(1)$ .
- 8**
- Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε το πολυνόμιο  $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1$  να διαιρείται ακριβώς με το πολυνόμιο  $x^2 + 1$ .
- 9**
- Δίνεται το πολυνόμιο  $Q(x) = (\alpha^2 + \beta)x^3 + (\beta^2 + \alpha)x^2 + (\alpha + \beta)x - 2$ .  
Αν η τιμή του πολυωνύμου  $Q(x)$  για  $x = 1$  είναι ίση με -4 τότε:
- α)** Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .
  - β)** Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου  $Q(x)$ .
  - γ)** Να βρεθεί το πολυνόμιο  $P(x) = Q(Q(x))$ .

## 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

Αν δύο ή περισσότερες αλγεβρικές παραστάσεις έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τότε:

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιό** τους ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** τους ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Όταν έχουμε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις με θετικούς ακέραιους συντελεστές τότε:

Ως αριθμητικό παράγοντα του Ε.Κ.Π., θα θεωρούμε το Ε.Κ.Π. των παραγόντων των παραστάσεων και ως αριθμητικό παράγοντα του Μ.Κ.Δ. θα θεωρούμε το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.

### Παραδείγματα

Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ.

**a)** Των μονωνύμων  $12x^3\psi\omega$ ,  $20x^4\psi^2\omega^3$ ,  $16x^2\psi^3\omega^2$

**b)** Των πολυωνύμων:  $A = 6x^2 - 6x$ ,  $B = 4x^2 - 8x + 4$ ,  $\Gamma = 3x^2 - 3$

### Λύση

**a)** Οι συντελεστές 12, 20, 16 έχουν Ε.Κ.Π. = 240 και Μ.Κ.Δ. = 4, άρα τα μονώνυμα έχουν Ε.Κ.Π. =  $240 x^4\psi^3\omega^3$  και Μ.Κ.Δ. =  $4 x^2\psi\omega$

**b)** 1) Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$A = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$B = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2$$

$$\Gamma = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

2) Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων. Οι αριθμητικοί παράγοντες είναι: 6, 4, 3 και έχουν: Ε.Κ.Π. = 12 και Μ.Κ.Δ. = 1

3) Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων.

Τα πολυώνυμα A, B, Γ έχουν Ε.Κ.Π. =  $12x(x-1)2(x+1)$  και Μ.Κ.Δ. =  $1 \cdot (x-1)$

- 1** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης A, το Ε.Κ.Π. τους από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
a) $x(x+1)$ , $2x^3(x+1)^2$	1. $x^4(x+1)^3$
β) $x^4(x-1)$ , $x^3(x^2-1)$	2. $2x^3(x+1)^2$
γ) $x(x+1)^3$ , $x^4(x+1)$	3. $x^4(x-1)(x+1)$
	4. $x^4(x-1)$

- 2** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων A και B.

B \ A	2x	$3x(x-2)$	$9(x-1)^2$
$18x$			
$x^2 - 4$			
$3x^2(x^2 - 1)$			

- 3** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης A, το Μ.Κ.Δ. τους από τη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
a) $3x(x-1)$ , $6x^2(x-1)^3$	1. $x-2$
β) $2x(x^2-1)$ , $4(x-1)^3$	2. $3x(x-1)$
γ) $(x^2-4)$ , $3x(x-2)^2$	3. $3x$
δ) $15x^5$ , $3x(x-1)^3$	4. $2(x-1)$

- 4** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων A, B.

B \ A	$3x(x-1)^3$	$4x^2$	$x^5$
$9x(x^2-1)$			
$6x(x-1)^3$			
$x^4(x-1)^5$			

**1** Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

**a)**  $2x^2\psi^3\omega^2, 4x^3\psi^2\omega, 6x\psi^2\omega^3$

**b)**  $6(x\psi)^2x\psi, (2x)^2x\psi^3, 8x\psi^3$

**c)**  $4\alpha^2\beta\gamma, 8\alpha^4\beta, 12\beta\gamma^3$

**2** Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

**a)**  $6(x^2 - \psi^2), 3(x - \psi), x^3 - \psi^3$

**b)**  $x^4 - 4x^2 + 9(4 - x^2), x^3 + 4x^2 + 4x - 3(x + 2)^2$

**c)**  $x^2 + x, x^2 - 1, x^3 - x$

**3** Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

**a)**  $x^2 - 3x + 2, x^2 - 4x + 3, x^2 - 5x + 6$

**b)**  $x^2 - 4x + 4, x^2 + x - 6, x^2 - 4$

**c)**  $(x - 1)(x - 1), (x + 1)(x - 1)^2, (x + 1)^2(x - 1)$

**4** Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

**a)**  $\alpha^2 - 2\alpha, \alpha^2 - 4\alpha + 4, \alpha^3 - 4\alpha$

**b)**  $\alpha^3 - 8, \alpha^2 - 4, \alpha^2 - 5\alpha + 6$

## 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Μία αλγεβρική που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

Για να έχει νόημα (να ορίζεται) μια αλγεβρική παράσταση, πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή οι μεταβλητές θα πρέπει να παίρνουν τέτοιες τιμές, ώστε να μη μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Για να απλοποιήσουμε μια ρητή παράσταση θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι γινόμενα και να έχουν κοινό παράγοντα.

Αν σε μια ρητή παράσταση ο αριθμητής ή ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο, τότε για να απλοποιήσουμε

- Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και,
- διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

**α)**  $\frac{3x-3}{4x^2-4}$    **β)**  $\frac{x^2-4x+3}{x^3-1}$

### Λύση

**α)** Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης και έχουμε:

$$\frac{3x-3}{4x^2-4} = \frac{3(x-1)}{4(x^2-1)} = \frac{3(x-1)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{3}{4(x+1)}$$

**β)** Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της παράστασης. Ο αριθμητής είναι τριώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού, θα βρούμε δύο αριθμούς που μας δίνουν άθροισμα -4 και γινόμενο 3. Οι αριθμοί αυτοί είναι: οι -3 και -1.

Ο παρονομαστής θα αναλυθεί σύμφωνα με την ταυτότητα:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \text{ και έχουμε:}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

**α)**  $\frac{3}{x-2}$    **β)**  $\frac{7x-1}{x+1}$    **γ)**  $\frac{4x-2}{x^2-1}$    **δ)**  $\frac{3x-1}{x^2+1}$    **ε)**  $\frac{x-1}{x^2-1}$    **στ)**  $\frac{x}{x^2-x}$

**2** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

**α)**  $\frac{3x}{\psi-1}$    **β)**  $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{2x}{x-1}$    **γ)**  $\frac{3x-5}{x^3-x}$    **δ)**  $\frac{x^2-x}{x^2-4}$

**3** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)**  $\frac{2x}{3x^2}$    **β)**  $\frac{3x\psi^2}{x^3\psi}$    **γ)**  $\frac{3x^2-3x}{x^2-1}$    **δ)**  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$    **ε)**  $\frac{x^2-1}{x^3-1}$

**Κεφάλαιο 1****4**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)**  $\frac{6x}{3x^2 - x}$    **β)**  $\frac{x^2 + 3x\omega}{x^2 - 9\psi^2}$    **γ)**  $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^3 - 6x^2}$    **δ)**  $\frac{\alpha^2 - 25}{2\alpha + 10}$

**5**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)**  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$    **β)**  $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 8x + 16}$    **γ)**  $\frac{x^3 + x^2}{x^2 - x}$    **δ)**  $\frac{\alpha^2 - a\beta}{\alpha^2 - 2a\beta + \beta^2}$   
**ε)**  $\frac{\alpha^4 - 27\alpha}{\alpha^2 - 3\alpha}$    **στ)**  $\frac{\alpha x + \beta x + \alpha\psi + \beta\psi}{(\alpha + \beta)(x + \psi)}$

**6**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 6x + 8x}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

$$B = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) : \frac{x^4 - 1}{x^4 - x^3}$$

$$\Gamma = \frac{x^2\psi^2 - \psi^4}{x^3 + \psi^3} : \frac{x\psi^2 - \psi^3}{x^2 - x\psi + \psi^2}$$

**7**

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}}{\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}}, B = \frac{\frac{\alpha^4 - \beta^4}{(\alpha + \beta)^2}}{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}}$$

### Πολλαπλασιασμός - Διαιρεση παραστάσεων

#### Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες:

$$\text{α) } \alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \text{ και } \text{β) } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

Με τον ίδιο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις.

#### Διαιρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

#### Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα  $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ , ως γνωστόν, εκφράζει το πηλίκο  $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$  που είναι ίσο με  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ .

και επομένως ισχύει  $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$ . Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

#### Παραδείγματα

##### 1. Να βρεθούν τα γινόμενα

$$\text{α) } (4x^2-4) \cdot \frac{2x}{3x+3} \quad \beta) \quad \frac{x^2-2x}{4x+8} \cdot \frac{x^2-4}{x}$$

#### Λύση

$$\text{α) } (4x^2-4) \cdot \frac{2x}{3x+3} = \frac{(4x^2-4) \cdot 2x}{3x+3} = \frac{4(x^2-1) \cdot 2x}{3(x+1)} = \frac{4(x-1)(x+1) \cdot 2x}{3(x+1)} =$$

$$= \frac{4(x-1) \cdot 2x}{3}$$

## Κεφάλαιο 1

$$\text{β)} \frac{x^2 - 2x}{4x+8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x^2 - 4)}{(4x+8) \cdot x} = \frac{x(x-2) \cdot (x-2)(x+2)}{4(x+2) \cdot x} = \frac{(x-2)^2}{4}$$

**2.** Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{α)} \frac{x^2 - 4}{x} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} \quad \text{β)} \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 3\alpha}}{\frac{1}{\alpha^3 - 9\alpha}}$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} \text{α)} \frac{x^2 - 4}{x} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} &= \frac{x^2 - 4}{x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x^2 - x)}{x \cdot (x^2 - 4x + 4)} = \\ &= \frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot x(x-1)}{x(x-2)^2} = \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \end{aligned}$$

$$\text{β)} \frac{\frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 3\alpha}}{\frac{1}{\alpha^3 - 9\alpha}} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^3 - 9\alpha)}{\alpha^2 - 3\alpha} = \frac{(\alpha - 1)\alpha(\alpha^2 - 9)}{\alpha(\alpha - 3)} = \frac{(\alpha - 1)\alpha(\alpha - 3)(\alpha + 3)}{\alpha(\alpha - 3)} = (\alpha - 1)(\alpha + 3)$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1** Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{α)} \frac{5-x}{x+5} \cdot \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}, \quad \text{β)} \frac{(\alpha + 2)^2}{\alpha x - \alpha \psi} : \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{\alpha^2 x - \alpha^2 \psi}, \quad \text{γ)} \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha \beta} : \frac{3\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta}$$

**2** Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\begin{aligned} \text{α)} \frac{x^2 - 16}{8} : \frac{x+4}{32}, \quad \text{β)} \frac{10x^2 - 5x}{1 - 4x + 4x^2} : \frac{25x}{8x^2 - 2}, \quad \text{γ)} \frac{x+2}{x-1} : \left( \frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \right), \\ \text{δ)} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 8} : \frac{x+3}{x^2 + 2x + 4}, \quad \text{ε)} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4} : \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

**3** Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{α)} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{β)} \left[ \frac{x+2}{x^2 - 1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \quad \text{γ)} \left[ \frac{x-1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x-2} \right] : \frac{x^3 + 1}{x^3 - 8}$$

$$2\alpha + 2\beta$$

**1** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2007 - \frac{6 - 10x + 2(4x - \psi - 3)}{3(x - z) + 3(\psi + z)} - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2\psi$$

αν είναι  $x + \psi = 2007$

**2** Αν για τον αριθμό  $x$  ισχύει η ισότητα  $x^2 + x + 1 = 0$

Να αποδείξετε ότι:

- α)**  $x \neq 0$
- β)**  $x^3 = 1$
- γ)**  $x^{2005} + x^{2006} + x^{2007} = 0$

**3** Αν  $A = x(x - 4)$  και  $B = (x - 6)(x + 2)$  να δείξετε ότι:

- α)**  $B = A - 12$
- β)** Ο αριθμός  $A \cdot B + 36$  είναι τέλειο τετράγωνο.
- γ)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση  $x(x - 6)(x - 4)(x + 2) + 36$

**4** Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α)**  $(x^2 - 1)^{2008} + (2 - 2x)^{2006} + (x^2 - x)^2 = 0$
- β)**  $(x^3 + 3x^2 + 3x)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) + 1 = 0$

**5** Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με 10 cm και είναι 14 cm μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

**6** Να βρείτε όλους τους αριθμούς  $x$  και  $\psi$  για τους οποίους ισχύει:  
 $2006^{x^2+\psi^2-2x-2\psi+2} + 2007^{(x-1)^4+(\psi-1)^2} = 2$

**7** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x - 1$ .

- α)** Να λυθεί η εξίσωση  $P(0) + P(-1) + P(1) + P(-x) = x$
- β)** Να υπολογισθεί ο  $\lambda$ , αν είναι γνωστό ότι είναι:

$$\lambda P\left(\frac{1}{2}\right) - 2P\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 3 - \frac{\lambda}{2}$$

**Κεφάλαιο 1**

**8** Αν  $\alpha = \frac{\lambda}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right)$  και  $\beta = \frac{\lambda}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right)$ , δείξτε ότι:  $\alpha^2 - \beta^2 = \lambda^2$ .

**9** Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές  $\alpha, \beta$  και υποτείνουσα 10. Κατασκευάζουμε στο εξωτερικό του τριγώνου τρία τετράγωνα με πλευρές τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Αν το συνολικό εμβαδόν είναι  $224\text{cm}^2$ , να βρείτε:

**a)** Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.

**b)** Τις πλευρές  $\alpha, \beta$  του τριγώνου.

**10** Αν  $\alpha - \beta = 1$  δείξτε ότι:

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^8 + \beta^8) = \alpha^{16} - \beta^{16}$$

**11** Αν  $x \neq 0$  και  $x + \frac{1}{x} = 1$  να αποδείξετε ότι:

**a)**  $x^2 - x + 1 = 0$    **b)**  $x^3 = -1$    **c)**  $x^{2001} + x - 2004 = 0$ .

**12** Να αποδείξετε:

**a)**  $v^2 - (v + 1)(v - 1) = 1$

**b)** Να δείξετε ότι  $6,78695^2 - 7,78695 \cdot 5,78695 = 1$

**13** Αν  $\alpha + \beta = -\frac{3}{14}$  και  $\alpha \cdot \beta = -\frac{5}{98}$  να υπολογίσετε:

**a)**  $\alpha^2 + \beta^2$

**b)**  $(2\alpha - 1)^2 + (1 - 2\beta)^2 + 28(\alpha + \beta)$

**14** Να γραφεί ο αριθμός  $A = 2007^2 + 4015$  ως τέλειο τετράγωνο.

**Θέμα 1**

- α)** Τι λέγεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ ;
- β)** Τι λέμε μονώνυμο και τι πολυώνυμο;
- γ)** Αν η ακμή ενός κύβου είναι  $x + 2$  να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  εκφράζει τον όγκο του.
- δ)** Αν είναι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$  να δείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους  $\alpha, \beta$  είναι μηδέν

**Θέμα 2**

- α)** Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου είναι  $2x^2 + 7x + 3$ . Αν το μήκος του είναι  $2x + 1$  να προσδιορίσετε το πλάτος ως συνάρτηση του  $x$ .
- β)** Αν  $\alpha - \beta = 2$  και  $\alpha^2 + \beta^2 = 20$  να υπολογίσετε:  
**i)**  $\alpha \cdot \beta$    **ii)**  $\alpha^3 - \beta^3$
- γ)** Να παραγοντοποιήσετε:  
**i)**  $x^3(\alpha - \beta) + 27(\beta - \alpha)$   
**ii)**  $(3x - 2\psi + 3)^2 + 6x - 4\psi + 7$
- δ)** Αν για κάθε  $x$  είναι  $3x^2 + 5x + 3 = A + B(x - 1) + \Gamma(x - 1)^2$  να υπολογίσετε τους  $A, B, \Gamma$ .

**Θέμα 3**

Να κάνετε τις πράξεις

**α)** 
$$\frac{2\alpha+3}{2\alpha-2} - \frac{3\alpha-2}{3\alpha+3} - \frac{5}{6\alpha^2-6}$$

**β)** Αν  $\alpha - \beta = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{2007}$$

**γ)** Αν  $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2}$  και  $\alpha\beta\gamma = 10$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2(\alpha + \frac{\gamma}{2})^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

**Θέμα 4**

**α)** Αν μεταξύ των πλευρών  $\alpha, \beta, \gamma$  τριγώνου  $ABC$  ισχύει  $\frac{\beta}{\alpha + \gamma} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = 0$  να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**β)** Να απλοποιήσετε τα κλασματα

**i)** 
$$\frac{3+6+9+\dots+300}{2+4+6+\dots+200}, \quad \text{ii)} \frac{3x+6x+9x+\dots+300x}{2x+4x+\dots+200x}$$

**Θέμα 1**

- a)** Τι λέμε αναγωγή ομοίων όρων και με ποια ιδιότητα γίνεται;
- b)** Να γράψετε πέντε από τις ταυτότητες που ξέρετε και να αποδείξετε τις τρείς.
- γ)** Να συμπληρώσετε τις ισότητες
- i)**  $(x - \dots)^2 = \dots - \dots + 4$
- ii)**  $(\dots - \dots)^2 = \dots + 25 - 10\alpha$
- δ)** Αν  $P(x) = x^2 - 3x + 1$  να υπολογίσετε  $P(\sqrt{2} - 1)$

**Θέμα 2**

- a)** Να αποδειχθεί ότι η τετραγωνική ρίζα του  $14 + 6\sqrt{5}$  είναι ο αριθμός  $3 + \sqrt{5}$
- b)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 $A = x^4 - x^2$ ,  $B = x^3 + 2x^2 - x - 2$  και  $A - B$
- γ)** Να αποδείξετε ότι:
- i)** Ο αριθμός  $\kappa^2 + 7\kappa$  είναι άρτιος, όπου  $\kappa$  είναι ακέραιος.
- ii)** Ο αριθμός :  $\kappa^2 - \lambda^2 + 1$  είναι περιττός, όπου  $\kappa, \lambda$  περιττοί ακέραιοι.

**Θέμα 3**

Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του σχήματος .

$$\begin{array}{c|c} & 3 - x \\ \hline 3 + x & \end{array}$$

- a)** Να γράψετε ένα πολυώνυμο  $P(x)$  το οποίο να εκφράζει το εμβαδόν του.
- $3 + x$
- β)** Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το  $x$ .
- γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  το εμβαδόν του δεν ξεπερνά το 9.
- δ)** Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο;

Έστω το πολυνόμιο  $P(x)$  το οποίο έχει βαθμό 3. Αν διαιρέσουμε το  $P(x)$  με το  $x^2 - x$  βρίσκουμε υπόλοιπο  $3x + 1$ .

**a)** Να υπολογίσετε τα  $P(0)$  και  $P(1)$

**b)** Έστω  $2x - 3$  είναι το υπόλοιπο και  $\pi(x)$  το πηλίκο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $3x^2 - x - 1$  να βρείτε το βαθμό του πηλίκου.

### Λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου

#### 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς.

A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.

#### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

	-3	$\frac{1}{2}$	6	0, 3	-0,8	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	3,14	$\pi$	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος	X		X				X			
Ρητός	X	X	X	X	X		X	X		X
Άρρητος						X			X	

2

**a)**  $-3+7=4$ , **β)**  $-6+6=0$ , **γ)**  $-2-9=-11$ , **δ)**  $(-2) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$  **ε)**  $0 \cdot (-\frac{2}{7}) = 0$

**στ)**  $(-\frac{4}{5}) \cdot (-\frac{5}{4}) = 1$ , **ζ)**  $(-6) : (-\frac{12}{5}) = (-6) \cdot (-\frac{5}{12}) = \frac{5}{2}$ , **η)**  $(-\frac{8}{5}) : (+4) = (-\frac{8}{5}) \cdot (\frac{1}{4}) = -\frac{2}{5}$ , **θ)**  $(-\frac{4}{3}) : (+\frac{4}{3}) = -1$

3

**α)**  $(-3 \cdot 2 - 5)x = (-6 - 5)x = -11x$ , **β)**  $-3 \cdot (2 - 5x) = -6 + 15x$ , **γ)**  $-3 \cdot (2 - 5)x = -3(-3)x = 9x$ , **δ)**  $-3, -2x$  **ε)**  $6 + 3\psi + 2x + x\psi$  **στ)**  $3x, 2$

4

i)	ii)
β)	δ)

<b>α)</b>	<b>β)</b>	<b>γ)</b>	<b>δ)</b>
<b>Σ</b>	<b>Λ</b>	<b>Λ</b>	<b>Σ</b>

**Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα**

- 1.** **α)**  $2 + 3 \cdot 4 - 12 : (-4) + 1 = 2 + 12 + 3 + 1 = 18$ , **β)**  $2 + 3 \cdot (4 - 12) : (-4 + 1) = 2 + 3 \cdot (-8) : (-3) = 2 + (-24) : (-3) = 2 + 8 = 10$  **γ)**  $-3 \cdot (-2) - 5 + 4 : (-2) - 6 = 6 - 5 - 2 - 6 = -7$  **δ)**  $-8 : (-3 + 5) - 4 \cdot (-2 + 6) = -8 \cdot (+2) - 4 \cdot (+4) = -4 - 16 = -20$
- 2.**  $-(5 - 4) - (+2) + (-6 + 4) - (-7) = -(+1) - (+2) + (-2) - (-7) = -1 - 2 - 2 + 7 = 2$   
 $4 - (-2 + 6 - 3) + (-9 + 6) = 4 + 2 - 6 + 3 - 9 + 6 = 4 + 2 + 3 + 6 - 6 - 9 = 0$   
 $14 + (-6 + 5 - 3) - (-4 - 1) \cdot (-2) = 14 + (-4) - (-5) \cdot (-2) = 14 + (-4) - (+10) = 14 - 4 - 10 = 0$   $(-3) \cdot (-2) + 4 - (+5) - (-1) : (-1) = +6 + 4 - (+5) - (+1) = +6 + 4 - 5 - 1 = 4$   
 Άρα το έτος είναι το 2004 (έγιναν οι ολυμπιακοί αγώνες)
- 3.**  $OA = 5 \text{ Km}$ , άρα  $OB = 20 \text{ Km}$  και  $OG = 25 \text{ Km}$  και  $BG = 45 \text{ Km}$   
 Άρα διήνυσε  $OB + BG = 20 + 45 = 65 \text{ Km}$ .  
 Μετακινήθηκε από την αρχική του θέση κατά 25 Km

**4.**

$$\text{α)} \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{β)} -\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{6}\right) = + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} + \frac{10}{6} - \frac{11}{6} = -1$$

$$\text{γ)} -5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{10}{3} = -\frac{10}{2} + \frac{8}{3} = -\frac{30}{6} + \frac{16}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{δ)} \left(1 - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{2} - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{10} - \frac{8}{10}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{15} + \frac{10}{15}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) - \frac{3}{5} : \left(+\frac{4}{15}\right) = \frac{15}{20} - \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{20} - \frac{45}{20} = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}$$

5.

$$\text{α) } \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6}}{\frac{18}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{20}{6}} = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{β) } \frac{-2 \cdot 3 - \frac{1}{4}}{-2 \cdot (3 - \frac{1}{4})} = \frac{-6 - \frac{1}{4}}{-2(\frac{12}{4} - \frac{1}{4})} = \frac{-\frac{24}{4} - \frac{1}{4}}{-2(\frac{11}{4})} = \frac{-\frac{25}{4}}{-\frac{22}{4}} = \frac{25}{22}$$

$$\text{γ) } -7 + \frac{-3 - \frac{1}{3}}{-2 + \frac{1}{3}} = -7 + \frac{-\frac{9}{3} - \frac{1}{3}}{-\frac{6}{3} + \frac{1}{3}} = -7 + \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{5}{3}} = -7 + 2 = -5$$

6. Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία είναι:

$$\frac{1 + (-3) + 0 + 2 + 1 + (-2) + (-5) + 0 + (-3) + (-1)}{10} = \frac{4 + (-14)}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$7. \text{ α) } 12 + 5 - 20, \text{ β) } -8 + 9 - 1, \text{ γ) } \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + \frac{10}{4} \quad \text{δ) } -0,35 - 6,15 + 8,5$$

$$8. \text{ α) } 8 - (\alpha - \beta) + (\alpha - 5 - \beta) = 8 - \alpha + \beta + \alpha - 5 - \beta = 8 - 5 = 3$$

$$\text{β) } 2 - (\alpha + \beta - \gamma) - (4 + \gamma - \beta) - (-2 - \alpha) = 2 - \alpha - \beta + \gamma - 4 - \gamma + \beta + 2 + \alpha = 0$$

$$\text{γ) } -2(\alpha - 3) + \alpha(-7 + 9) - 3(+2) = -2\alpha + 6 + \alpha(+2) - 6 = -2\alpha + 6 + 2\alpha - 6 = 0$$

$$9. \text{ A} = 4 - (x - \omega) - (\psi - \varphi) = 4 - x + \omega - \psi + \varphi = 4 - (x + \psi) + \omega + \varphi = 4 - (-5) + (-7) = 4 + 5 - 7 = 2$$

$$\text{B} = -(-5 - x + \varphi) + (-8 + \psi) - (\omega - 4) = 5 + x - \varphi - 8 + \psi - \omega + 4 = 9 - 8 + x + \psi - (\omega + \varphi) = 1 + (-5) - (-7) = 1 - 5 + 7 = 3.$$

10. Δίνεται ότι:  $2(\alpha + \beta) = 56$  áρα  $\alpha + \beta = 28$  και  $2(\gamma + \delta) = 32$  áρα  $\gamma + \delta = 16$ .

$$\text{Α} = \alpha - (9 - 2\gamma) - (15 - \beta - 2\delta) = \alpha - 9 + 2\gamma - 15 + \beta + 2\delta =$$

$$\alpha + \beta + 2(\gamma + \delta) - 9 - 15 = 28 + 32 - 9 - 15 = 36$$

$$11. \boxed{-7} + \boxed{2} + \boxed{5} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{-6} + \boxed{-3} + \boxed{9} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{-5} + \boxed{1} + \boxed{4} = \mathbf{0}$$

## Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών.

## Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)	ζ)
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

2. **α)**  $(-1)^6 = 1$ , **β)**  $3^{-2} \neq 9$ , **γ)**  $-4^2 = -16$ , **δ)**  $(\frac{5}{2})^{-1} = \frac{2}{5}$ , **ε)**  $5^{-2} \neq -\frac{1}{25}$   
**στ)**  $(\frac{2}{5})^0 \neq 0$ , **ζ)**  $(-\frac{1}{2})^5 \neq \frac{1}{32}$  **η)**  $(7+2)^2 \neq 7^2 + 2^2$

3.

α	β	γ	δ
5	6	1	4

4.

I)	II)	III)
γ)	δ)	β)

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)**  $2^{-5} \cdot 2^8 = 2^{-5+8} = 2^3$ , **β)**  $3^4 : 3^{-2} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6$ , **γ)**  $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$   
**δ)**  $(5^2)^{-4} = 5^8$ , **ε)**  $3^{-2} \cdot (-3)^4 = 3^{-2} \cdot 3^4 = 3^{-2+4} = 3^2$ , **στ)**  $\frac{(-6)^6}{2^6} = (-\frac{6}{2})^6 = (-3)^6 = 3^6$   
**ζ)**  $4^2 : 3^4 = (2^2)^2 : 3^4 = 2^4 : 3^4 = (\frac{2}{3})^4$ , **η)**  $27 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5} = 3^3 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^5} = 3^{3+4-5} = 3^2$
2. **α)**  $(2^2)^3 \cdot 2^8 = 2^{-6} \cdot 2^8 = 2^{-6+8} = 2^2 = 4$ , **β)**  $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4} = (-3)^{2-4} = (-3)^{-2} = (\frac{1}{-3})^2 = \frac{1}{9}$   
**γ)**  $(0,75)^{-2} \cdot \frac{3}{4}^2 = ((\frac{75}{100})^{-2} \cdot (\frac{3}{4})^2) = (\frac{3}{4})^{-2} \cdot (\frac{3}{4})^2 = (\frac{4}{3})^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 = (\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4})^2 = 1$   
**δ)**  $36^3 : (-12)^3 = ((\frac{36}{-12})^3 = (-3)^3 = -27$

**ε)**  $(2,5)^4 \cdot (-4)^4 = (-4 \cdot 2,5)^4 = (-10)^4 = 10^4 = 10.000$

**στ)**  $4^{12} : 2^{20} = (2^2)^{12} : 2^{20} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16,$

**ς)**  $(-\frac{2}{3})^{12} \cdot (\frac{2}{3})^{-14} = (\frac{2}{3})^{12} \cdot (\frac{2}{3})^{-14} = (\frac{2}{3})^{12-14} = (\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4},$

**η)**  $(0,01)^3 \cdot 10^5 = (10^{-2})^3 \cdot 10^5 = 10^{-6} \cdot 10^5 = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$

**3.** **α)**  $(x^2)^3 \cdot 5x^4 = x^6 \cdot 5x^4 = 5x^{10},$  **β)**  $(x\psi^3)^2 \cdot x^3\psi = x^2\psi^6 x^3\psi = x^5\psi^7$

**γ)**  $(-2x)^2 \cdot (-2x^2) = 4x^2 \cdot (-2x^2) = -8x^4,$  **δ)**  $(-\frac{2}{3}x)^3 : x^2 = -\frac{8}{27}x^3 : x^2 = -\frac{8}{27}x,$  **ε)**  $(-3x^2)^3 \cdot (-2x^3)^2 = -27x^6 \cdot 4x^6 = -108x^{12}.$

**στ)**  $\frac{3}{-2}x^3 : (-\frac{3}{2}x)^2 = -\frac{3}{2}x^3 : \frac{9}{4}x^2 = (-\frac{3}{2} : \frac{9}{4}) \cdot (x^3 : x^2) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot x = -\frac{2}{3}x.$

**4.**

$$\mathbf{A} = 3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8(2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 4 + 4 - 1 \cdot 2 - 8(\frac{1}{2} - 1) - 2 \cdot 9 = 12 + 4 - 2 - 8(-\frac{1}{2}) - 18 = 12 + 4 - 2 + 4 - 18 = 0$$

$$\mathbf{B} = (-4)^2 \cdot 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4 = 16 \cdot 2 - 5 - (-3) \cdot 4 - 16 = 8 - 5 + 12 - 16 = -1$$

$$\Gamma = (2,5)^2 \cdot (1,25)^3 \cdot (-4)^2 \cdot (-8)^3 = (-2,5 \cdot 4)^2 \cdot (-1,25 \cdot 8)^3 = (-10)^2 \cdot (10)^3 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$

$$\Delta = 25^7 \cdot 8^4 : (5^7 \cdot 40^4) = \frac{25^7 \cdot 8^4}{5^7 \cdot 40^4} = (\frac{25}{5})^7 \cdot (\frac{8}{40})^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$$

- 5.** Αν α είναι η πλευρά του τετραγώνου τότε  $E = \alpha^2$ . Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του αυτή θα γίνει  $3 \cdot \alpha$  και το εμβαδόν του θα είναι  $E' = (3 \cdot \alpha)^2 = 9\alpha^2$ , δηλ το εμβαδόν μεγαλώνει εννιά φορές.

### Γ. Ρίζες

#### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.**

**α)**  $3\sqrt{3} + \sqrt{3} = (3+1)\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$  **β)**  $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (5-3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

**γ)**  $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (1+4-5)\sqrt{5} = 0\sqrt{5} = 0,$  **δ)**  $\sqrt{1 \cdot 12 \cdot 3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

**ε)**  $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3,$  **στ)**  $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 3\sqrt{2 \cdot 8} = 3\sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

**Κεφάλαιο 1**

**2.**

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\sigma\tau$
3	2	1	3	3	2

**3.**

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$
4	1	2	1
9	16	3	4
64	36	8	6

Άθροισμα	
$\sqrt{\alpha + \beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
$\sqrt{5}$	3
5	7
10	14

Γινόμενο	
$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
2	2
12	12
48	48

Πηλίκο	
$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
2	2
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

**4.**

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\sigma\tau$	$\zeta$
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$

**5. Ναι**

1.

$$\begin{aligned}
 \text{α)} & 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (3-7+2)\sqrt{5} = -2\sqrt{5}, \text{ β)} 5\sqrt{7} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + 4\sqrt{3} = \\
 & = (5-2)\sqrt{7} + (4-8)\sqrt{3} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}, \text{ γ)} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}} - \sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{\frac{12}{7}} = \\
 & = \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{5}{4} - \frac{6}{7} = \frac{35}{28} - \frac{24}{28} = \frac{11}{28}, \text{ δ)} \sqrt{\frac{14}{5}} \cdot \sqrt{\frac{10}{7}} + \sqrt{\frac{21}{2}} \cdot \sqrt{\frac{14}{3}} = \\
 & = \sqrt{\frac{14}{5} \cdot \frac{10}{7}} + \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{14}{3}} = \sqrt{2 \cdot 2} + \sqrt{7 \cdot 7} = 2+7=9.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \text{α)} & 3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{3 \cdot 2} - 6\sqrt{8} = 3\sqrt{2} - \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - 6\sqrt{4 \cdot 2} = \\
 & = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6 \cdot 2\sqrt{2} = (3-5+4-12)\sqrt{2} = -10\sqrt{2} \\
 \text{β)} & \sqrt{27} - \sqrt{20} + \sqrt{12} - \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{5} = \\
 & = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5} = \\
 & = (3+2)\sqrt{3} + (-2-1)\sqrt{5} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}, \text{ γ)} \sqrt{3} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{48} + \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{5}} = \\
 & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{16 \cdot 3} + \frac{\sqrt{4 \cdot 30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \\
 & = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (3-4+2)\sqrt{6} = \sqrt{6}. \\
 \text{δ)} & \sqrt{3,6} \cdot \sqrt{4,9} - \sqrt{0,8} \cdot \sqrt{0,2} = \sqrt{\frac{36}{10} \cdot \frac{49}{10}} - \sqrt{\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10}} = \frac{6 \cdot 7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{38}{10} = 3,8
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \text{α)} & \sqrt{12 + \sqrt{16}} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4, \text{ β)} \sqrt{86 + 2\sqrt{52 - \sqrt{9}}} = \sqrt{86 + 2\sqrt{52 - 3}} = \\
 & = \sqrt{86 + 2\sqrt{49}} = \sqrt{86 + 2 \cdot 7} = \sqrt{86 + 14} = \sqrt{100} = 10, \text{ γ)} \sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3\sqrt{9}}}} = \\
 & = \sqrt{6\sqrt{12\sqrt{3 \cdot 3}}} = \sqrt{6\sqrt{12 \cdot 3}} = \sqrt{6\sqrt{36}} = \sqrt{6 \cdot 6} = 6
 \end{aligned}$$

	μήκος	πλάτος	περίμετρος	Εμβαδόν
ΑΒΓΔ	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	10
ΕΖΗΘ	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	16
ΚΛΜΝ	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	18

Μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το ΚΛΜΝ (είναι τετράγωνο )

α)  $\sqrt{2}(\sqrt{18} + \sqrt{8}) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2}) = \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 10$

β)  $\sqrt{6}(\sqrt{2}7 - \sqrt{3}) = \sqrt{6}(\sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3}) = \sqrt{6}(3\sqrt{3} - \sqrt{3}) = \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot (\sqrt{3})^2 \sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}, \gamma) (\sqrt{75} + \sqrt{45} - \sqrt{300}) : \sqrt{15} =$   
 $= \sqrt{75} : \sqrt{15} + \sqrt{45} : \sqrt{15} - \sqrt{300} : \sqrt{15} = \sqrt{\frac{75}{15}} + \sqrt{\frac{45}{15}} - \sqrt{\frac{300}{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{20} =$   
 $= \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} = \sqrt{3} - \sqrt{5}, \delta) (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5}) =$   
 $= (\sqrt{7})^2 + \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 = 7 - 5 = 2.$

α)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \beta) \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}.$

γ)  $\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \delta) \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{6})\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} =$   
 $= \frac{2(\sqrt{3})^2 + \sqrt{18}}{3} = \frac{2 \cdot 3 + \sqrt{9 \cdot 2}}{3} = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{3} = 2 + \sqrt{2}$

α)  $\sqrt{5} + x = 3\sqrt{5} - x \quad \text{ή} \quad x + x = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} \quad \text{ή} \quad 2x = 2\sqrt{5} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{5}$

β)  $\sqrt{6}x = \sqrt{24} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{\frac{24}{6}} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{4} \quad \text{ή} \quad x = 2$

γ)  $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{32} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{2 \cdot 32} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{64} \quad \text{ή} \quad x = 8$

δ)  $3\sqrt{3} - x = \sqrt{27} \quad \text{ή} \quad -x = \sqrt{27} - 3\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad -x = \sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{3} \quad \text{ή}$   
 $\quad \text{ή} \quad -x = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad -x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0$

8.

$$(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

9. Το τετράγωνο ΒΘΙΕ έχει πλευρά  $BE = BG + GE$ . Η  $BG$  είναι η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν  $50 \text{ m}^2$ , άρα η πλευρά  $BG = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ . Η  $GE$  είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδό  $8 \text{ m}^2$ , άρα η πλευρά  $GE$  θα είναι  $GE = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ . Άρα  $BE = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$  και το εμβαδόν θα είναι  $E = (7\sqrt{2})^2 = 7^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 49 \cdot 2 = 98 \text{ m}^2$ .

10. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:  $BG^2 = AB^2 + AG^2$  ή  $BG^2 = 32 + 62$  ή  $BG^2 = 9 + 36$  ή  $BG^2 = 45$  ή  $BG = \sqrt{45}$  ή  $BG = 3\sqrt{5}$

Ομοίως στο ορθογώνιο  $ADE$ :  $\Delta E^2 = AD^2 + AE^2$  ή  $\Delta E^2 = 22 + 12$  ή

$$\Delta E^2 = 5 \text{ ή } \Delta E = \sqrt{5}$$

Άρα  $BG = 3\Delta E$ .

11. α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο εφαρμόζω το πυθαγόρειο θεώρημα.

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} \Leftrightarrow AD = \sqrt{2^2 + 1^2} \text{ ή } AD = \sqrt{5}$$

$$\text{Περίμετρος} = AB + BG + GA = 2 + 4 + 4.$$

$$\beta) \Sigma \text{ωστές είναι} : 4 + 2\sqrt{20} \text{ και } 2(2 + \sqrt{20})$$

## 1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Μονώνυμα είναι : **α), δ), ε), στ)**
2. Όμοια είναι : **1) τα: α), στ), η) 2) τα β), δ), ζ), ι)  
3) γ), ε), θ)**
- 3.

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς ψ	Βαθμός ως προς x,ψ
$5x\psi^4$	5	$x\psi^4$	1 <sup>ου</sup>	4 <sup>ου</sup>	5 <sup>ου</sup>
$-x\psi^2$	-1	$x\psi^2$	1 <sup>ου</sup>	2 <sup>ου</sup>	3 <sup>ου</sup>
$\frac{1}{7}x^2\psi^5$	$\frac{1}{7}$	$x^2\psi^5$	2 <sup>ου</sup>	5 <sup>ου</sup>	7 <sup>ου</sup>
$-\sqrt{3}x^4$	$-\sqrt{3}$	$x^4$	4 <sup>ου</sup>	μηδενικου	4 <sup>ου</sup>

4. Ισο είναι το μονώνυμο  $\frac{1}{3}x\psi\omega^3$ . Αντίθετο είναι το μονώνυμο  $\frac{1}{3}x\psi\omega^3$
5. Οριζόντια : **1. Αλγεβρική παράσταση, 2. Σταθερά, 3. Μηδέν  
4. Συντελεστής, 5. Ισα, 6. Μονάδα, 7. Κύριο μέρος, 8. Μονώνυμο.**

Κάθετα: **1. Μηδενικό, 2. Βαθμός, 3. Ακέραια, 4. Αντίθετα, 5. Όμοια.  
6. Τιμή, 7. Μηδέν, 8. Αφαίρεση.**

### Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)**  $-2(-2) \cdot 1^3 + (-2)^2 \cdot 1 - 4 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 4 = 4 + 4 - 4 = 4$ , **β)**  $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2}(-2)^3 = 2 \cdot 4 + \frac{-8}{2} = 8 - 4 = 4$
2. Το μονώνυμο είναι:  $-\frac{5}{7}\alpha^2\beta^3$
3. **α)**  $v=0$  **β)**  $v=3$  **γ)**  $3 \cdot 2^v \cdot (-1)^2 = 48$  ή  $3 \cdot 2^v = 48$  ή  $2^v = \frac{48}{3}$  ή  $2^v = 16$  ή  $v=4$
4. **α)**  $\kappa = 3, v = 2$ , **β)**  $\lambda = 4, \kappa = 3, v = 2$ , **γ)**  $\lambda = -4, \kappa = 3, v = 2$

5.  $E = 4\pi\rho^2, V = \frac{4}{3}\pi\rho^3, E = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi, V = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000\pi}{3}$

6. Έστω  $x$  αγώνες κέρδισε τότε:  $2 \cdot x + (9-x) \cdot 1$

7. Το τετράγωνο έχει πλευρά  $BG$ . Οπότε έχει εμβαδό  $E = BG^2$ .  
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $ABG$  έχουμε:  
 $BG^2 = AG^2 + AB^2$  ή  $BG^2 = 52 + x^2$ . Άρα  $E = 25 + x^2$ .  
Για  $x = 12$ ,  $E = 25 + 122$  ή  $E = 169$  τετραγωνικές μονάδες.

## Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

<b>α)</b>	<b>β)</b>	<b>δ)</b>	<b>ε)</b>
<b>Σ</b>	<b>Λ</b>	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>

2. **α)**  $-5x^2 + 2x^2 = -3x^2$ , **β)**  $-5x^2 \cdot 2x^3 = -10x^5$ , **γ)**  $3x - 2\psi + 2x = 5x - 2\psi$ , **δ)**  $4x^2\psi - \psi x^2 = 3x^2\psi$   
**ε)**  $2x\psi \cdot \psi^2 = 2x\psi^3$ , **στ)**  $6x\psi : 3x\psi = 2x^2$  **ζ)**  $5x^4\omega^3(-2x^2\omega) = -10x^6\omega^4$ , **η)**  $\frac{-1}{-3x\psi^2} \frac{2x^3\psi}{\psi} = \frac{4x^2}{\psi}$ , **θ)**  $3x^2\psi - 7x^2\psi$ .

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1.

**α)**  $-7x^2\psi + 4x^2\psi = (-7+4)x^2\psi = -3x^2\psi$ , **β)**  $4\alpha x^2 - 6\alpha x^2 + \alpha x^2 = (4-6+1)\alpha x^2 = -\alpha x^2$

**γ)**  $6x^3 - \frac{9}{2}x^3 = (6 - \frac{9}{2})x^3 = \frac{3}{2}x^3$ , **δ)**  $0,25\alpha\beta - 0,35\alpha\beta + 0,5\alpha\beta = (0,25 - 0,35 + 0,5)\alpha\beta = 0,4\alpha\beta$

**ε)**  $\frac{2}{5}x\psi^2\omega^4 - 1,2x\psi^2\omega^4 = (\frac{2}{5} - 1,2)x\psi^2\omega^4 = (0,4 - 1,2)x\psi^2\omega^4 = -0,8x\psi^2\omega^4$

**στ)**  $-3\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^2 = (-3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2})x^2 = 0x^2 = 0$

2.

**α)**  $-3x \cdot 5x^2 = -15x^3$ , **β)**  $6x^2 \cdot \frac{3}{4}x^3 = 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot x^3 = \frac{9}{2}x^5$  **γ)**  $2x\psi^3 \cdot (-3x^2\psi) =$

$2 \cdot (-3) \cdot x\psi^3 x^2\psi = -6x^3\psi^4$ , **δ)**  $-3x^2\psi \cdot (-2x\psi^4\omega) = -3 \cdot (-2)x^2\psi x\psi^4\omega = 6x^3\psi^5\omega$ ,

**ε)**  $-\frac{1}{3}\alpha\beta^3 \cdot 4\alpha\beta^3 = -\frac{1}{3} \cdot 4\alpha\beta^3\alpha\beta^3 = -\frac{4}{3}\alpha^2\beta^6$ , **στ)**  $\frac{4}{3}x^3\alpha^2 \cdot (-\frac{1}{4}x\alpha^3) =$

$$\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)x^3\alpha^2 x\alpha^3 = -\frac{1}{3}x^4\alpha^5$$

**ζ)**  $(-\frac{2}{5}x\psi^3) \cdot (-3x^2\omega) \cdot (-\frac{5}{6}\psi\omega^5) = (-\frac{2}{5}) \cdot (-3) \cdot (-\frac{5}{6})x\psi^3 x^2\omega\psi\omega^5 = -x^3\psi^4\omega^6$

**η)**  $(-\frac{1}{3}\alpha^2\beta) \cdot (-0,4\alpha\beta^3) \cdot (-\frac{15}{2}\alpha^2\beta^2) = (-\frac{1}{3}) \cdot (-0,4) \cdot (-\frac{15}{2})\alpha^2\beta\alpha\beta^3\alpha^2\beta^2 = -\alpha^5\beta^6$

3.

**α)**  $12\alpha^3 \cdot (-3\alpha) = -4\alpha^2$ , **β)**  $8x^2\psi : (2x\psi^2) = \frac{4x}{\psi}$ ,

**γ)**  $(-\frac{1}{3}\alpha^3\beta^5) : (\frac{6}{5}\alpha^2\beta^2) = -\frac{5}{18}\alpha\beta^3$

**δ)**  $(0,84x^2\omega^5) : (-0,12x\omega^3) = -7x\omega^2$ , **ε)**  $(-x^3\alpha^4\omega) : (-\frac{1}{4}x^2\alpha) = 4x\alpha^3\omega$ ,

**στ)**  $(0,5\alpha^3\beta^7) : (-\frac{7}{10}\alpha^2\beta^2) = -\frac{5}{7}\alpha\beta^5$

4.

**α)**  $(-\frac{1}{3}x^2\psi)^2 \cdot (6x\psi^3) = \frac{1}{9}x^4\psi^2 \cdot 6x\psi^3 = \frac{2}{3}x^5\psi^5$ , **β)**  $(-2x^2\psi^3)^3 : (-8x^3\psi^4) =$   
 $= -8x^8\psi^9 : (-8x^3\psi^4) = x^5\psi^5$ , **γ)**  $(-2x\psi^4\omega^3)^2 \cdot (-x^2\psi)^3 = 4x^2\psi^8\omega^6 \cdot (-x^6\psi^3) = -4x^8\psi^{11}\omega^6$

5. **α)**  $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$  είναι μονώνυμο, **β)**  $x \cdot \psi + x \cdot \psi = 2x\psi$  είναι μονώνυμο, **γ)**  $x^2 + x\psi$  δεν είναι μονώνυμο,

**δ)**  $2x \cdot 2x + \frac{\pi x^2}{2} = 4x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = (4 + \frac{\pi}{2})x^2$  είναι μονώνυμο. **ε)**  $2x \cdot \psi + \frac{\pi x^2}{2}$  δεν είναι μονώνυμο.

6. Τα κίτρινα τρίγωνα έχουν εμβαδόν:  $E_1 = E_{\Delta AE} + E_{\Delta EB} =$

**Κεφάλαιο 1**

$$\frac{1}{2} AE \cdot A\Delta + \frac{1}{2} EB \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} AE \cdot \psi + \frac{1}{2} EB \cdot \psi = \frac{1}{2} \psi(AE+EB) = \frac{1}{2} \psi \cdot AB = \frac{1}{2} \psi \cdot x$$

Το πράσινο τρίγωνο έχει εμβαδό  $E_2 = E_{\Delta E\Gamma} = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot \psi = \frac{1}{2} x \cdot \psi$ .  
Άρα τα εμβαδά είναι ίσα.

### 1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

#### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Πολυώνυμα είναι: το **β)** και το **γ)**
2. είναι 2ου βαθμού ως προς x τα: **α)** και **γ)**
3. **Ναι**
4. **γ)**
5. **α)** Το πολυώνυμο  $A(x) + B(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού.  
**β)** Μπορεί να είναι 1<sup>ου</sup> βαθμού ή 2<sup>ου</sup> βαθμού ή να είναι το σταθερό (μηδενικού βαθμού)

#### Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)**  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 10$  **β)**  $Q(x) = 2x^3 - 6x + 1$  **γ)**  $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 7$   
**δ)**  $B(x) = -x^4 + x - 5$
2. **α)**  $A = -2 \cdot 2 \cdot (-1)^2 + (-1)^3 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -4 \cdot 1(+1) + (-1) + 2 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = -4 - 1 + 16 - 2 = 9$   
**β)**  $\psi^3 - 3x\psi^2 + 2x^3$ . Ο βαθμός ως προς x, ψ είναι 3.
3. **α)**  $P(-3) = 2(-3)^2 + 2(-3) - 9 = 2 \cdot 9 + (-6) - 9 = 18 - 6 - 9 = 3$ ,  $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 9 = 2 \cdot 4 + 4 - 9 = 8 + 4 - 9 = 3$ . **β)**  $P(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 9 = -5$ ,  $P(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 9 = 18 + 6 - 9 = 15$   
Άρα  $3P(1) + P(2) = 3(-5) + 15 = 0$ .

**Κεφάλαιο 1**

**4.**

α) Περιμ. =  $2 \cdot 100 + 2 \cdot \frac{2\pi x}{2} = 200 + 2\pi x$  m.  $E_{μβ} = 100 \cdot 2x + 2 \cdot \frac{\pi x^2}{2} = 200x + \pi x^2$

β) Δίνεται ότι  $2x=60$  άρα  $x=30$  οπότε  $\Pi_{ερ.} = 200 + 2\pi \cdot 30 = 200 + 60\pi = 200 + 60 \cdot 3,14 = 200 + 188,4 = 388,4$  m.  $E_{μβ} = 200 \cdot 30 + \pi \cdot 30^2 = 6000 + 3,14 \cdot 900 = 6000 + 2826 = 8826$  m<sup>2</sup>

**5.**

α)  $(2x^2 - x) - (x^3 - 5x^2 + x - 1) = 2x^2 - x - x^3 + 5x^2 - x + 1 = -x^3 + 7x^2 - 2x + 1$

β)  $-3x^2\psi - (2x\psi - \psi x^2) + (3x\psi - \psi^3) = -3x^2\psi - 2x\psi + \psi x^2 + 3x\psi - \psi^3 = -2x^2\psi + x\psi - \psi^3$

γ)  $(2\alpha^2 - 3\alpha\beta) - (\beta^2 + 4\alpha\beta) - (\alpha^2 + \beta^2) = 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2 - 4\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - 7\alpha\beta - 2\beta^2$

δ)  $2\omega^2 - [4\omega - 3 - (\omega^2 + 5\omega)] = 2\omega^2 - (4\omega - 3 - \omega^2 - 5\omega) = 2\omega^2 - 4\omega + 3 + \omega^2 + 5\omega = 3\omega^2 + \omega + 3$

ε)  $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1) - (\frac{1}{6}x + x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 1 - \frac{1}{6}x - x^2 + \frac{1}{3} =$

$(\frac{1}{2} - 1)x^2 + (-\frac{3}{4} - \frac{1}{6})x + 1 + \frac{1}{3} =$

$= (\frac{1}{2} - \frac{2}{2})x^2 + (-\frac{9}{12} - \frac{2}{12})x + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{12}x + \frac{4}{3}$

στ)  $(0,4x^3 + 2,3x^2) + (3,6x^3 - 0,3x^2 + 4) = 0,4x^3 + 2,3x^2 + 3,6x^3 - 0,3x^2 + 4 = 4x^3 + 2x^2 + 4$

**6.**

α)  $A(x) - B(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4 - (-3x^3 + 5x - 2) = 2x^3 - x^2 + x - 4 + 3x^3 - 5x + 2 = 5x^3 - x^2 - 4x - 2$

β)  $A(x) + \Gamma(x) = 2x^3 - x^2 + x - 4 + 4x^2 - 3x + 8 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

γ)  $\Gamma(x) - [A(x) + B(x)] = 4x^2 - 3x + 8 - [2x^3 - x^2 + x - 4 + (-3x^3 + 5x - 2)] =$   
 $= 4x^2 - 3x + 8 - (2x^3 - x^2 + x - 4 - 3x^3 + 5x - 2) = 4x^2 - 3x + 8 - 2x^3 + x^2 - x + 4 + 3x^3 - 5x + 2 =$   
 $x^3 + 5x^2 - 9x + 14$

7. α)  $(-7x^2 - 4x + 3) + (x^2 - 4x + 3) = -6x^2 - 8x + 7$

β)  $(-x^3 + 5x + 8) - (-2x^3 + x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 5x + 9$

$2x^2 + 2x - 3$	$7x^2 + 3x - 4$	$6x^2 - 2x + 1$
$9x^2 - 3x + 2$	$3x^2 + x - 1$	$3x^2 + 5x - 7$
$4x^2 + 4x - 5$	$5x^2 - x - 1$	$6x^2$

8. Είναι  $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x) =$

$-5x^2 + 4x - 3 - x^2 + 2x - 1 + 3x^2 + x = -3x^2 + 7x - 4$  και  $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ .

Οπότε για να είναι ίσα πρέπει:

$\alpha = -3, \beta = 7$  και  $\gamma = -4$

- 9.** Ο ποδηλάτης διανύει την απόσταση AB με σταθερή επιτάχυνση  $a = 2\text{m/sec}^2$  και το δρόμο BG για 10 sec με σταθερή ταχύτητα. Ο ποδηλάτης στο σημείο B θα έχει ταχύτητα:  $v = 2t$ .

Κεφάλαιο 1

Άρα η ζητούμενη απόσταση θα δίνεται:  $\frac{1}{2}a \cdot t^2 + 10 \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 + 10 \cdot 2t = t^2 + 20t$ .  
Για  $t = 5$  έχουμε:  $5^2 + 20 \cdot 5 = 125\text{m}$ .

## 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
5	7	1	3	6

2.

$\alpha$	$\beta$
$\Lambda$	$\Sigma$

3. **α)**  $x(2x + 4) = 2x^2 + 4x$ , **β)**  $3x^2(x\psi - 2) = 3x^3\psi - 6x^2$   
**γ)**  $(x + 5)(2x + 3) = 2x^2 + 3x + 10x + 15$   
**δ)**  $(x^2 + \psi)(x - \psi^2) = x^3 - x^2\psi^2 + \psi x - \psi^3$
4. **i)**  $\gamma$    **ii)**  $\delta$ )
5. **α)**  $\delta$ )

### Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)**  $-3x^2\psi(-5x + 2\psi) = 15x^3\psi - 6x^2\psi^2$ , **β)**  $4x(2x^2 - x + 2) - 8x = 8x^3 - 4x^2 + 8x$   
 $- 8x = 8x^3 - 4x^2$ .  
**γ)**  $-5x(2x - 3) - 3x(2 - 3x) = -10x^2 + 15x - 6x + 9x^2 = -x^2 + 9x$ ,  
**δ)**  $2x\psi(x^2 - 3\psi^2) - 4x(x^2\psi - 2\psi^3) = 2x^3\psi - 6x\psi^3 - 4x^3\psi + 8x\psi^3 = -2x^3\psi + 2x\psi^3$ .
2. **α)**  $(2\alpha - 3\beta)(-4\alpha + 2\beta) = -8\alpha^2 + 4\alpha\beta + 12\alpha\beta - 6\beta^2 = -8\alpha^2 + 16\alpha\beta - 6\beta^2$   
**β)**  $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) - 8 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 8 - 8 = x^3$ ,  
**γ)**  $3x^2(-2x + 3)(5 - x) = (-6x^3 + 9x^2)(5 - x) = -30x^3 + 6x^4 + 45x^2 - 9x^3 =$   
 $6x^4 - 39x^3 + 45x^2$ , **δ)**  $(4 - 3x)(5 - 2x) - 6x(x - 4) = 20 - 8x - 15x + 6x^2 - 6x^2 + 24x = x + 20$ , **ε)**  $(2x^2 - 3x - 4)(-3x^2 + x) = -6x^4 + 2x^3 + 9x^3 - 3x^2 + 12x^2 - 4x =$   
 $-6x^4 + 11x^3 + 9x^2 - 4x$ , **στ)**  $(3x^2 - 2x\psi - 5\psi^2)(4\psi - x) =$   
 $12x^2\psi - 3x^3 - 8x\psi^2 + 2x^2\psi - 20\psi^3 + 5\psi^2x = -3x^3 + 14x^2\psi - 3x\psi^2 - 20\psi^3$
3. **α)**  $(3x - 2)(x^2 - x)(4x - 3) = (3x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 2x)(4x - 3) = (3x^3 - 5x^2 + 2x)(4x - 3) = 12x^4 - 9x^3 - 20x^3 + 15x^2 + 8x^2 - 6x = 12x^4 - 29x^3 + 23x^2 - 6x$ ,  
**β)**  $-2x(x^2 - x + 1)(x - 2) - (x - 1)(2x - 3)(x + 2) =$   
 $(-2x^3 + 2x^2 - 2x)(x - 2) - (2x^2 - 3x - 2x + 3)(x + 2) =$

**Κεφάλαιο 1**

$$\begin{aligned} -2x^4 + 4x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 4x - (2x^2 - 5x + 3)(x + 2) = \\ -2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - (2x^3 + 4x^2 - 5x^2 - 10x + 3x + 6) = \\ -2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 2x^3 - 4x^2 + 5x^2 + 10x - 3x - 6 = -2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{y)} (-2x + \psi)(x^2 - 3x\psi) - (3x - \psi)(4x + \psi)(-2x - 3\psi) = \\ -2x^3 + 6x^2\psi + \psi x^2 - 3x\psi^2 - (12x^2 + 3x\psi - 4x\psi - \psi^2)(-2x - 3\psi) = \\ -2x^3 + 7\psi x^2 - 3x\psi^2 - (12x^2 - x\psi - \psi^2)(-2x - 3\psi) = \\ -2x^3 + 7\psi x^2 - 3x\psi^2 + 24x^3 + 36x^2\psi - 2x^2\psi - 3x\psi^2 - 2\psi^2x - 3\psi^3 = \\ 22x^3 + 41x^2\psi - 8x\psi^2 - 3\psi^3 \end{aligned}$$

4. **a)**  $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) - x^2(x^2 - 8) - 16 =$   
 $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - 16x^2 - 16x + 4x^2 + 16x + 16 - x^4 + 8x^2 - 16 = 0$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{b)} (3\alpha + 8\beta)(\beta - \alpha) - (\alpha + 2\beta)(\beta - 3\alpha) = \\ 3\alpha\beta - 3\alpha^2 + 8\beta^2 - 8\alpha\beta - \alpha\beta + 3\alpha^2 - 2\beta^2 + 6\alpha\beta = 6\beta^2 \end{aligned}$$

5. **a)**  $P(x) \cdot Q(x) = (-2x^2 + 5x - 3)(4x - 5) = -8x^3 + 10x^2 + 20x^2 - 25x - 2x + 15$   
 $= -8x^3 + 30x^2 - 37x + 15$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{b)} P(x) \cdot [-3Q(x) + 11x - 12] = (-2x^2 + 5x - 3) \cdot [-3(4x - 4) + 11x - 5] = (-2x^2 + 5x - 3) \cdot (-12x + 12 + 11x - 5) = (-2x^2 + 5x - 3)(-x + 7) = 2x^3 - 14x^2 \\ - 5x^2 + 35x + 3x - 21 = 2x^3 - 19x^2 + 38x - 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{y)} [P(x) - 2] \cdot [Q(x) + 3] = (-2x^2 + 5x - 3 - 2)(4x - 5 + 3) = \\ (-2x^2 + 5x - 5)(4x - 2) = -8x^3 + 4x^2 + 20x - 10x - 20x + 10 = \\ -8x^3 + 4x^2 - 10x + 10 \end{aligned}$$

6. Είναι  $P(x) = 3x(-2x + 4)(x - 1) = (-6x^2 + 12x)(x - 1) = -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x$   
 $= -6x^3 + 18x^2 - 12x$ .  
 $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  άρα:  $\alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12, \delta = 0$

7. Το εμβαδόν του σχήματος είναι:  $x \cdot 2x + x \cdot 2x + (\psi + 2x)(\psi - 2x) =$   
 $2x^2 + 2x^2 + \psi^2 - 2x\psi + 2x\psi - 4x^2 = \psi^2$ . Άρα το τετράγωνο θα έχει πλευρά  
 ίση με  $\psi$ .

8. Το οικόπεδο έχει εμβαδό  $E = x(x + 5) = x^2 + 5x$ . Το μήκος θα γίνει:  
 $x + 5 - 3 = x + 2$  και το πλάτος  $x - 1$ . Άρα το εμβαδόν είναι  
 $E1 = (x + 2)(x - 1) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$   
 Άρα το εμβαδό ελαττώνεται κατά:  $x^2 + 5x - (x^2 + x - 2) = x^2 + 5x - x^2 - x + 2 = 4x + 2$  τετρ. μέτρα.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. α) είναι β) δεν είναι γ) είναι δ) είναι ε) δεν είναι

2.

i)	ii)	iii)
δ)	γ)	γ

3.

a)	β)	γ)	δ)
Λ	Σ	Λ	Λ

4.

i)	ii)
γ)	δ)

5.

a)	β)	γ)	δ)
Λ	Λ	Σ	Σ

6.

i)	ii)	iii)	iv	v
γ)	β)	δ)	γ)	δ)

7.

α	β	γ	δ	ε	στ
4	5	1	2	7	8

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. α)  $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ , β)  $(\psi+5)^2 = \psi^2 + 10\psi + 25$ , γ)  $(2\omega+1)^2 = (2\omega)^2 + 2 \cdot 2\omega \cdot 1 + 1 = 4\omega^2 + 4\omega + 1$ , δ)  $(\kappa+2\lambda)^2 = \kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot 2\lambda + (2\lambda)^2 = \kappa^2 + 4\kappa\lambda + 4\lambda^2$ , ε)  $(3\psi+2\beta)^2 = (3\psi)^2 + 2 \cdot 3\psi \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9\psi^2 + 12\beta\psi + 4\beta^2$ , στ)  $(x^2+1)^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1$ .  
 ζ)  $(\psi^2+\psi)^2 = (\psi^2)^2 + 2\psi^2\psi + \psi^2 = \psi^4 + 2\psi^3 + \psi^2$   
 η)  $(2x^2+3x)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x + (3x)^2 = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$ , θ)  $(x+\sqrt{2})^2 = x^2 + 2x\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ , i)  $(\sqrt{x} + \sqrt{\psi})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{\psi} + (\sqrt{\psi})^2 = x + 2\sqrt{x\psi} + \psi$ , ia)  $(\alpha + \frac{1}{2})^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ , iβ)  $(\omega + \frac{4}{\omega})^2 = \omega^2 + 2 \cdot \omega \cdot \frac{4}{\omega} + (\frac{4}{\omega})^2 = \omega^2 + 8 + \frac{16}{\omega^2}$ .

**Κεφάλαιο 1**

2. **a)**  $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$ , **β)**  $(\psi - 5)^2 = \psi^2 - 2 \cdot 5\psi + 5^2 = \psi^2 - 10\psi + 25$  **γ)**  $(3\omega - 1)^2 = (3\omega)^2 - 2 \cdot 3\omega \cdot 1 + 1^2 = 9\omega^2 - 6\omega + 1$ ,  
**δ)**  $(2\kappa - \lambda)^2 = (2\kappa)^2 - 2 \cdot 2\kappa \cdot \lambda + \lambda^2 = 4\kappa^2 - 4\kappa\lambda + \lambda^2$ ,  
**ε)**  $(3\psi - 2\beta)^2 = (3\psi)^2 - 2 \cdot 3\psi \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 9\psi^2 - 12\psi\beta + 4\beta^2$ ,  
**στ)**  $(x^2 - 2)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = x^4 - 4x^2 + 4$ , **ζ)**  $(\psi^2 - \psi)^2 = (\psi^2)^2 - 2\psi^2\psi + \psi^2 = \psi^4 - 2\psi^3 + \psi^2$ ,  
**η)**  $(2x^2 - 5x)^2 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 5x + (5x)^2 = 4x^4 - 20x^3 + 25x^2$ ,  
**θ)**  $(x - \sqrt{3})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x + 3$  **ι)**  $(\sqrt{x} - \sqrt{\psi})^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\psi + (\sqrt{\psi})^2 = x - 2\sqrt{x}\psi + \psi$   
**ια)**  $(\alpha - \frac{3}{2})^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 = \alpha^2 - 3\alpha + \frac{9}{4}$ , **ιβ)**  $(\omega - \frac{2}{\omega})^2 = \omega^2 - 2\omega \frac{2}{\omega} + \frac{4}{\omega^2} = \omega^2 - 4 + \frac{4}{\omega^2}$ .  
3. **a)**  $(\sqrt{3} + 1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$  **β)**  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + 5 = 11 + 2\sqrt{30}$ , **γ)**  $(\sqrt{2} - 3)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + 3^2 = 2 - 6\sqrt{2} + 9 = 11 - 6\sqrt{2}$ , **δ)**  $(1 - \sqrt{7})^2 = 1 - 2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 1 - 2\sqrt{7} + 7 = 8 - 2\sqrt{7}$ .
4. **a)**  $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$  **β)**  $(\psi - 4)^2 = \psi^2 - 8\psi + 16$   
**γ)**  $(4x - \alpha)^2 = 16x^2 - 8\alpha x + \alpha^2$  **δ)**  $(x^2 - 2\omega)^2 = x^4 - 4x^2\omega + 4\omega^2$
5. **a)**  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ,  
**β)**  $(\psi + 4)^3 = \psi^3 + 3\psi^2 \cdot 4 + 3\psi \cdot 4^2 + 4^3 = \psi^3 + 12\psi^2 + 48\psi + 64$ ,  
**γ)**  $(2\alpha + 1)^3 = (2\alpha)^3 + 3 \cdot (2\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\alpha \cdot 1^2 + 1^3 = 8\alpha^3 + 3 \cdot 4\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 6\alpha + 1$ , **δ)**  $(3\alpha + 2\beta)^3 = (3\alpha)^3 + 3 \cdot (3\alpha)^2 \cdot 2\beta + 3 \cdot 3\alpha(2\beta)^2 + (2\beta)^3 = 27\alpha^3 + 3 \cdot 9\alpha^2 \cdot 2\beta + 9\alpha \cdot 4\beta^2 + 8\beta^3 = 27\alpha^3 + 54\alpha^2 + 36\alpha\beta^2 + 8\beta^3$ ,  
**ε)**  $(x^2 + 3)^3 = (x^2)^3 + 3 \cdot (x^2)^2 \cdot 3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^3 = x^6 + 9x^4 + 9x^2 + 27$ ,  
**στ)**  $(\psi^2 + \psi)^3 = (\psi^2)^3 + 3(\psi^2)^2 \cdot \psi + 3\psi^2\psi^2 + \psi^3 = \psi^6 + 3\psi^4\psi + 3\psi^4 + \psi^3 = \psi^6 + 3\psi^5 + 3\psi^4 + \psi^3$  **ζ)**  $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$   
**η)**  $(\psi - 5)^3 = \psi^3 - 3 \cdot \psi^2 \cdot 5 + 3\psi \cdot 5^2 - 5^3 = \psi^3 - 15\psi^2 + 75\psi - 125$   
**θ)**  $(3\alpha - 1)^3 = (3\alpha)^3 - 3(3\alpha)^2 + 3 \cdot 3\alpha \cdot 1^2 - 1^3 = 27\alpha^3 - 3 \cdot 9\alpha^2 + 9\alpha - 1 = 27\alpha^3 - 27\alpha^2 + 9\alpha - 1$  **ι)**  $(2x - 3\psi)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3\psi + 3 \cdot 2x(3\psi)^2 - (3\psi)^3 = 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 3\psi + 6x \cdot 9\psi^2 - 27\psi^3 = 8x^3 - 36x^2\psi + 54x\psi^2 - 27\psi^3$  **ια)**  $(\psi^2 - 2)^3 = (\psi^2)^3 - 3(\psi^2)^2 \cdot 2 + 3\psi^2 \cdot 2^2 - 2^3 = \psi^6 - 6\psi^4 + 12\psi^2 - 8$  **ιβ)**  $(\omega^2 - 2\omega)^3 = (\omega^2)^3 - 3(\omega^2)^2 \cdot 2\omega + 3\omega^2(2\omega)^2 - (2\omega)^3 = \omega^6 - 4\omega^5 + 3\omega^2 \cdot 4\omega^2 - 8\omega^3 = \omega^6 - 4\omega^5 + 12\omega^4 - 8\omega^3$
6. **a)**  $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ , **β)**  $(\psi - 2)(\psi + 2) = \psi^2 - 2^2 = \psi^2 - 4$ , **γ)**  $(3 - \omega)(3 + \omega) = 3^2 - \omega^2 = 9 - \omega^2$ , **δ)**  $(x + 4)(4 - x) = (4 + x)(4 - x) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$   
**ε)**  $(x - \psi)(-x - \psi) = -(x - \psi)(x + \psi) = -(x^2 - \psi^2)$  **στ)**  $(2x + 7\psi)(2x - 7\psi) = (2x)^2 - (7\psi)^2 = 4x^2 - 49\psi^2$

$$\text{η) } (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - \sqrt{2}^2 = x^2 - 2, \quad \text{θ) } (\sqrt{x} + \sqrt{\psi})(\sqrt{x} - \sqrt{\psi}) = \\ = \sqrt{x}^2 - \sqrt{\psi}^2 = x - \psi$$

7.  $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1) = \\ x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 + (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 - 10(x^2 - 1^2) = \\ x^2 - 6x + 9 + 9x^2 + 6x + 1 - 10x^2 + 10 = 20$

8. α)  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4) = \\ (\alpha^4 - \beta^4)(\alpha^4 + \beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$   
 β)  $9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001 = (10 - 1)(10 + 1)(10^2 + 1^2)(10^4 + 1^4) = \\ 10^8 - 1^8 = 100000000 - 1$

9. α)  $\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{β) } \frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \\ = \frac{6 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{6 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{6 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$   
 γ)  $\frac{5}{3+\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{5 \cdot (3-\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot (3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$   
 δ)  $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{12 \cdot (2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})} = \frac{12 \cdot (2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2} = \\ = \frac{12 \cdot (2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{4 \cdot 3 - 6} = \frac{12 \cdot (2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{6} = 2(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$

10. α)  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27 \quad \text{β) } (\psi + 2)(\psi^2 - 2\psi + 4) = \psi^3 + 2^3 = \\ \psi^3 + 8 \quad \text{γ) } (2\omega + 1)(4\omega^2 - 2\omega + 1) = (2\omega)^3 + 13 = 8\omega^3 + 1, \\ \delta) (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2) = 1^3 - \alpha^3 = 1 - \alpha^3$

11. α)  $(x - 4)^2 + (2x + 5)^2 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 + (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = \\ x^2 - 8x + 16 + 4x^2 + 20x + 25 = 5x^2 + 12x + 41, \quad \text{β) } (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 3)(x^2 + 3) = \\ = x^4 - 2x^2 + 1 - (x^4 - 9) = x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + 9 = -2x^2 + 10$   
 γ)  $(x + \psi)^2 - (x - 2\psi)(x + 2\psi) + (2x - \psi)^2 = x^2 + 2x\psi + \psi^2 - [x^2 - (2\psi)^2] + (2x) \\ 2 - 2 \cdot 2x \cdot \psi + \psi^2 = x^2 + 2x\psi + \psi^2 - x^2 + 4\psi^2 + 4x^2 - 4x\psi + \psi^2 = 4x^2 - 2x\psi + 5\psi^2.$   
 δ)  $(3x - 4)^2 + (3x + 4)^2 - 2(3x - 4)(3x + 4) =$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 + (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 - 2[(3x)^2 - 4^2] = \\ 9x^2 - 24x + 16 + 9x^2 + 24x + 16 - 2(9x^2 - 16) = 18x^2 + 3^2 - 18x^2 - 32 = 64$$

$$\text{ε) } (2\alpha+1)^3 + (2\alpha-1)^3 = (2\alpha)^3 + 3 \cdot (2\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\alpha \cdot 1^2 + 1^3 + (2\alpha)3 - 3(2\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\alpha \cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 16\alpha^3 + 12\alpha$$

$$\text{στ) } (\alpha+2)^3 - (\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4) = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot 2 + 3 \cdot \alpha \cdot 2^2 + 2^3 - (\alpha^3 + 2^3) = \\ \alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 - \alpha^3 - 8 = 6\alpha^2 + 12\alpha$$

$$\text{ζ) } (\alpha^2 + \alpha)^3 - (\alpha^2 - \alpha)^3 = (\alpha^2)^3 + 3(\alpha^2)^2 \cdot \alpha + 3\alpha \cdot 2^2 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 - [(\alpha^2)^3 - 3(\alpha^2)^2 \cdot \alpha + 3\alpha^2 \cdot \alpha^2 - \alpha^3] = \\ \alpha^6 + 3\alpha^5 + 3\alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^6 + 3\alpha^5 - 3\alpha^4 + \alpha^3 = 6\alpha^5 + 2\alpha^3 \quad \text{η) } (4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1) = \\ (4\alpha)^3 - 3 \cdot (4\alpha)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 4\alpha \cdot 1 + 1^3 - \alpha[(8\alpha)^2 - 1] =$$

$$64\alpha^3 - 3 \cdot 16\alpha^2 + 12\alpha + 1 - \alpha(64\alpha^2 - 1) = 64\alpha^3 - 48\alpha^2 + 12\alpha + 1 - 64\alpha^3 + \alpha = -48\alpha^2 + 13\alpha + 1$$

- Κεφάλαιο 1** **12.**
- a)**  $(x-2\psi)^2 - (2x-\psi)^2 + 3x^2 = x^2 - 2x \cdot 2\psi + (2\psi)^2 - [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \psi + \psi^2] + 3x^2 = x^2 - 4x\psi + 4\psi^2 - (4x^2 - 4x\psi + \psi^2) + 3x^2 = x^2 - 4x\psi + 4\psi^2 - 4x^2 + 4x\psi - \psi^2 + 3x^2 = 3\psi^2$
- b)**  $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot 3\alpha\beta + (3\beta)^2 + (3\alpha)^2 - (2\beta)^2 - [(\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha\beta + \beta^2] = \alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 + 9\alpha^2 - 4\beta^2 - (9\alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 + 9\alpha^2 - 4\beta^2 - 9\alpha^2 + 6\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$
- γ)**  $(x-1)(x+1)^3 - 2x(x-1)(x+1) = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 2x(x^2 - 1) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - 2x^3 + 2x = x^4 - 1$
- δ)**  $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$
- ε)**  $(\alpha - 4)^2 + (2\alpha - 3)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 4 + 4^2 + (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2 = \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 5\alpha^2 - 20\alpha + 25.$
- στ)**  $(2x^2 + 2x)^2 + (2x + 1)^2 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot 2x + (2x)^2 + (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
- 13.**
- a)**  $x\psi = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4, \quad \text{β)} x^2 - \psi^2 = (x - \psi)(x + \psi) = (3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot 6 = 12\sqrt{5} \quad \text{γ)} x^2 + \psi^2 = (x + \psi)^2 - 2x\psi = (3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5})^2 - 2 \cdot 4 = 6^2 - 8 = 36 - 8 = 28.$
- δ)**  $x^3 + \psi^3 = (x + \psi)(x^2 + \psi^2 - x\psi) = (3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5})(28 - 4) = 6 \cdot 24 = 144.$
- 14.**
- a)**  $(\alpha + \frac{5}{\alpha})^2 - (\alpha - \frac{5}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{5}{\alpha} + (\frac{5}{\alpha})^2 - [\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{5}{\alpha} + (\frac{5}{\alpha})^2] = \alpha^2 + 10 + \frac{2 \cdot 5}{\alpha^2} - \alpha^2 + 10 - \frac{2 \cdot 5}{\alpha^2} = 20.$
- β)** Αν βάλουμε όπου  $\alpha = 2005$  τότε  $(2005 + \frac{5}{2005})^2 - (2005 - \frac{5}{2005})^2 = 20$
- 15.** Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο άρα  $B\Gamma^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = (4x+1)^2 + (3x+2)^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x + 1 + (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = 16x^2 + 8x + 1 + 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow B\Gamma^2 = 25x^2 + 20x + 5$ . Αρκεί να δείξουμε ότι :  $B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2$ .  $\Gamma\Delta^2 + B\Delta^2 = 1^2 + (5x+2)^2 = 1 + (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 = 1 + 25x^2 + 20x + 4 = 25x^2 + 20x + 5 = B\Gamma^2$
- 16.** Έστω  $\alpha, \beta$  είναι οι δύο αριθμοί τότε :
- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$  Πρέπει να δείξουμε ότι :
- $$\frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} = 4.$$
 Πράγματι
- $$\frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha\beta} = 4$$

**17. a)** 
$$\frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2)}{2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2}{2} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma}{2} = \beta\gamma.$$

**b)** Από a) 
$$\frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2} = \beta\gamma$$
. Άρα  $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 - (\beta - \gamma)^2}{2} =$ 

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2 - 2^2}{2} = \frac{96}{4} = 24 \text{ cm}^2$$

- 18.** Το ένα οικόπεδο έχει διαστάσεις:  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$ , άρα έχει εμβαδόν  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$   
Το άλλο οικόπεδο έχει εμβαδόν  $\alpha^2 - \beta^2$ . Άρα τα δύο οικόπεδα έχουν ίδιο εμβαδόν.

## 1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Γινόμενο είναι: α), γ), στ), ζ)

2. a)  $8x+16 = 8 \cdot (x+2)$ , b)  $3\alpha\psi - \psi^2 = \psi \cdot (3\alpha - \psi)$ , γ)  $6x^2 + 12x = 6x(x+2)$

δ)  $-4x^2 + 8x = -4x(x-2)$ , ε)  $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x+1)$  στ)  $(x-1)^2 - (x-1) = (x-1)(x-2)$

3. γ)

4.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ

5. Σωστό

6. a)  $\alpha^3 - 2^3 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4)$ , b)  $\alpha^3 + 3 = (\alpha + 3)(\alpha^2 - 3\alpha + 3^2) = (\alpha + 3)(\alpha^2 - 3\alpha + 9)$

γ)  $(2x)^3 - 1 = (2x-1)[(2x)^2 + 2x + 1] = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$ , δ)  $1 + (5\psi)^3 =$

$(1+5\psi)[1^2 - 1 \cdot 5\psi + (5\psi)^2] = (1+5\psi)(1-5\psi+25\psi^2)$

7.

α)	β)	γ)	δ)
Λ	Σ	Λ	Σ

8. a)  $(x^2 + 6x + 9) = (x+3)^2$ , b)  $4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = (2\alpha - 1)^2$ , γ)  $\psi^4 - 2\psi^2 + 1 = (\psi^2 - 1)^2$

δ)  $25 + 10x^3 + x^6 = (5+x^3)^2$

9. Ο κύκλος έχει εμβαδό  $E = \pi r^2$ . Δίνεται ότι  $E = \pi\alpha^2 + 2\pi\alpha + \pi = \pi(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = \pi(\alpha + 1)^2$ .

Οπότε  $r^2 = (\alpha + 1)^2$  άρα  $r = \alpha + 1$ . Οπότε σωστή είναι η γ)

**Κεφάλαιο 1 10.**

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha$	$\beta$	$(x + \alpha)(x + \beta)$
$x^2 + 3x + 2$	2	3	1	2	$(x + 1)(x + 2)$
$x^2 - 3x + 2$	2	-3	-1	-2	$(x - 1)(x - 2)$
$x^2 + 5x - 6$	-6	5	6	-1	$(x + 6)(x - 1)$
$x^2 + 5x + 6$	6	5	2	3	$(x + 2)(x + 3)$
$x^2 - x - 2$	-2	-1	-2	1	$(x - 2)(x + 1)$
$x^2 + x - 2$	-2	1	2	-1	$(x + 2)(x - 1)$

11. **a)**  $x^2 + (\alpha + 2)x + 2\alpha = (x + \alpha)(x + \beta)$  **b)**  $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3})$

### Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **a)**  $3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$ , **β)**  $2x - 8 = 2(x - 4)$ , **γ)**  $8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$ , **δ)**  $-9x^2 - 6x = -3x(3x + 2)$   
**ε)**  $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 = 4\alpha\beta(2\alpha + \beta)$ , **στ)**  $2x^2 - 2x\psi + 2x = 2x(x - \psi + 1)$ , **ζ)**  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta - 1)$   
**η)**  $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta = 2\alpha^2(\alpha - 2 + 3\beta)$ , **θ)**  $\sqrt{2}x\psi - \sqrt{1}8\psi + \sqrt{8}\psi = \sqrt{2}x\psi - 3\sqrt{2}\psi + 2\sqrt{2}\psi^2 = \sqrt{2}\psi(x - 3 + 2\psi)$ .

2. **a)**  $x(\alpha - \beta) + \psi(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x + \psi)$ , **β)**  $\alpha(x + \psi) + \beta(x + \psi) = (x + \psi)(\alpha + \beta)$   
**γ)**  $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2) = (x - 2)[(3x - 1) - (x + 4)] = (x - 2)(3x - 1 - x - 4) = (x - 2)(2x - 5)$   
**δ)**  $\alpha^2(\alpha - 2) - 3(2 - \alpha) = \alpha^2(\alpha - 2) + 3(\alpha - 2) = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3)$ , **ε)**  $4x(x - 1) - x + 1 = 4x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(4x - 1)$ , **στ)**  $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2 = 2x(x - 3)[x - 3(x - 3)] = 2x(x - 3)(x - 3x + 9) = 2x(x - 3)(-2x + 9)$

3. I) **a)**  $x^2 + x = x(x + 1)$ , **β)**  $2\psi^2 - 5\psi = \psi(2\psi - 5)$ , **γ)**  $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = \omega(\omega - 3) + 2(\omega - 3) = (\omega - 3)(\omega + 2)$ , **δ)**  $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = \alpha(3\alpha + 1 - 4) = \alpha(3\alpha - 3) = 3\alpha(\alpha - 1)$   
II) **a)**  $x^2 + x = 0 \quad \text{ή} \quad x \cdot (x + 1) = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -1$ , **β)**  $2\psi^2 = 5\psi \quad \text{ή}$   
**γ)**  $2\psi^2 - 5\psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi(2\psi - 5) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad 2\psi - 5 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = \frac{5}{2}$

**γ)**  $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0 \quad \text{ή} \quad (\omega - 3)(\omega + 2) = 0 \quad \text{ή} \quad \omega - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 3 \quad \text{ή} \quad \omega = -2$   
**δ)**  $\alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad 3\alpha(\alpha - 1) = 0 \quad \text{ή} \quad 3\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1$

4. **a)**  $x^2 + x\psi + \alpha x + \alpha\psi = x(x + \psi) + \alpha(x + \psi) = (x + \psi)(x + \alpha)$ , **β)**  $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$ , **γ)**  $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = x^2(x - 5) + 4(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 4)$ , **δ)**  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 2)$ , **ε)**  $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha = 4x(x - 2) - \alpha(x - 2) = (x - 2)(4x - \alpha)$ , **στ)**  $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha = 9\beta(\alpha - 2\beta) - 5(\alpha - 2\beta) = (\alpha - 2\beta)(9\beta - 5)$   
**ζ)**  $12x^2 - 8x\psi - 15x + 10\psi = 4x(3x - 2\psi) - 5(3x - 2\psi) = (3x - 2\psi)(4x - 5)$   
**η)**  $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = x^2(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = (x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$   
**θ)**  $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = \sqrt{2}x(\sqrt{3}x + 2) - (\sqrt{3}x + 2) = (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{2}x - 1)$

- 5.** **a)**  $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = 7\alpha^2 + 7\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 7\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(7\alpha + 3\beta)$   
**β)**  $5x^2 - 8x\psi + 3\psi^2 = 5x^2 - 5x\psi - 3x\psi + 3\psi^2 = 5x(x - \psi) - 3\psi(x - \psi) = (x - \psi)(5x - 3\psi)$   
**γ)**  $3x^2 - x\psi - 2\psi^2 = x^2 + 2x^2 - x\psi - 2\psi^2 = x^2 - x\psi + 2x^2 - 2\psi^2 = x(x - \psi) + 2(x^2 - \psi^2) = x(x - \psi) + 2(x - \psi)(x + \psi) = (x - \psi)[x + 2(x + \psi)] = (x - \psi)(x + 2x + 2\psi) = (x - \psi)(3x + 2\psi)$
- 6.** **a)**  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = \alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1)$   
**β)**  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$  ή  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = 0$ . Από α) έχουμε  $(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1) = 0$  ή  
 ή  $\alpha + \beta = 0$  ή  $\alpha\beta - 1 = 0$  ή  $\alpha + \beta = 0$  ή  $\alpha\beta = 1$  άρα οι αριθμοί α, β είναι  
 αντίθετοι ή αντίστροφοι.
- 7.** **a)**  $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x = 2\alpha(\alpha - 1) + \beta(\alpha - 1) + x(\alpha - 1) = (\alpha - 1)(2\alpha + \beta + x)$   
**β)**  $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma = 2\beta(\alpha - 2) + 5(\alpha - 2) + 2\gamma(\alpha - 2) = (\alpha - 2)(2\beta + 5 + 2\gamma)$
- 8.** **a)**  $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$ , **β)**  $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$ , **γ)**  $\alpha^2 - 9\beta^2 = (\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta)$ , **δ)**  $4x^2 - 25\alpha^2 = (2x)^2 - (5\alpha)^2 = (2x - 5\alpha)(2x + 5\alpha)$ , **ε)**  $\alpha^2\beta^2 - 4 = (\alpha\beta)^2 - 2^2 = (\alpha\beta - 2)(\alpha\beta + 2)$ , **στ)**  $36\omega^2 - (\omega + 5)^2 = (6\omega)^2 - (\omega + 5)^2 = [6\omega - (\omega + 5)][6\omega + (\omega + 5)] = (6\omega - \omega - 5)(6\omega + \omega + 5) = (5\omega - 5)(7\omega + 5) = 5(\omega - 1)(7\omega + 5)$ , **ζ)**  $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = [2(x + 1)]^2 - [3(x - 2)]^2 = [2(x + 1) - 3(x - 2)][2(x + 1) + 3(x - 2)] = (2x + 2 - 3x + 6)(2x + 2 + 3x - 6) = (-x + 8)(5x - 4)$ , **η)**  $\frac{1}{x^2} - 16 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4^2 = \left(\frac{1}{x} - 4\right)\left(\frac{1}{x} + 4\right)$   
**θ)**  $x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$  i)  $x^2 - 2\psi^2 = x^2 - (\sqrt{2}\psi)^2 = (x - \sqrt{2}\psi)(x + \sqrt{2}\psi)$ .
- 9.** **a)**  $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x^2 - 4^2) = 2(x - 4)(x + 4)$ , **β)**  $28 - 7\psi^2 = 7(4 - \psi^2) = 7(2 - \psi)(2 + \psi)$   
**γ)**  $2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$ , **δ)**  $5\alpha x^2 - 80\alpha = 5\alpha(x^2 - 16) = 5\alpha(x - 4)(x + 4)$   
**ε)**  $2(x - 1)^2 - 8 = 2[(x - 1)^2 - 4] = 2[(x - 1) - 2][(x - 1) + 2] = 2(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 2(x - 3)(x + 1)$
- 10.**  $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \gamma^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ . Οπότε **α)**  $\gamma^2 = (53 - 28)(53 + 28) \Rightarrow \gamma^2 = 25 \cdot 81 \Rightarrow \gamma = 5 \cdot 9 \Rightarrow \gamma = 45$ , **β)**  $\gamma^2 = (0,37 - 0,12)(0,37 + 0,12) \Rightarrow \gamma^2 = 0,25 \cdot 0,49 \Rightarrow \gamma = 0,5 \cdot 0,7 \Rightarrow \gamma = 0,35$ ,  
**γ)**  $\gamma^2 = (26\lambda - 10\lambda) \cdot (26\lambda + 10\lambda) \Rightarrow \gamma^2 = 16\lambda \cdot 36\lambda \Rightarrow \gamma^2 = 16 \cdot 36 \cdot \lambda^2 \Rightarrow \gamma = 4 \cdot 6 \cdot \lambda \Rightarrow \gamma = 24\lambda$ .
- 11.** **a)**  $x^2 - 49 = 0$  ή  $x^2 - 7^2 = 0$  ή  $(x - 7)(x + 7) = 0$  ή  $x - 7 = 0$  ή  $x + 7 = 0$  ή  $x = 7$  ή  $x = -7$   
**β)**  $9x^3 - 4x = 0$  ή  $x(9x^2 - 4) = 0$  ή  $x[(3x)^2 - 2] = 0$  ή  $x(3x - 2)(3x + 2) = 0$  ή  
 ή  $x = 0$  ή  $3x - 2 = 0$  ή  $3x + 2 = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x = \frac{2}{3}$  ή  $x = -\frac{2}{3}$ .  
**γ)**  $x(x + 1)^2 = 4x$  ή  $x(x + 1)^2 - 4x = 0$  ή  $x[(x + 1)^2 - 2^2] = 0$  ή  $x(x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = 0$  ή  
 ή  $x(x - 1)(x + 3) = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x - 1 = 0$  ή  $x + 3 = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x = 1$  ή  $x = -3$   
**δ)**  $(x + 2)^3 = x + 2$  ή  $(x + 2)^3 - (x + 2) = 0$  ή  $(x + 2)[(x + 2)^2 - 1] = 0$  ή  $(x + 2)(x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = 0$   
 ή  $(x + 2)(x + 1)(x + 3) = 0$  ή  $x + 2 = 0$  ή  $x + 1 = 0$  ή  $x + 3 = 0$  ή  $x = -2$  ή  $x = -1$  ή  $x = -3$

**Κεφάλαιο 1**

- 12.** **a)**  $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 3^2) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$   
**b)**  $\psi^3 + 8 = \psi^3 + 2^3 = (\psi+2)(\psi^2 - 2\psi + 2^2) = (\psi+2)(\psi^2 - 2\psi + 4)$   
**γ)**  $\omega^3 + 64 = \omega^3 + 4^3 = (\omega+4)(\omega^2 - 4\omega + 4^2) = (\omega+4)(\omega^2 - 4\omega + 16)$   
**δ)**  $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)[(2x)^2 + 2x \cdot 1 + 1^2] = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$ ,  
**ε)**  $27\psi^3 + 1 = (3\psi)^3 + 1^3 = (3\psi+1)[(3\psi)^2 - 3\psi \cdot 1 + 1^2] = (3\psi+1)(9\psi^2 - 3\psi + 1)$ .

- 13.** **a)**  $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 2^3) = 3(x-2)(x^2 + 2x + 2^2) = 3(x-2)(x^2 + 2x + 4)$   
**b)**  $16\alpha^4 + 2\alpha = 2\alpha(8\alpha^3 + 1) = 2\alpha[(2\alpha)^3 + 1] = 2\alpha(2\alpha+1) \cdot (4\alpha^2 - 2\alpha + 1)$   
**γ)**  $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - \rho^3) = \frac{4}{3}\pi(R-\rho)(R^2 + R\rho + \rho^2)$   
**δ)**  $\alpha^4\beta + \alpha\beta^4 = \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

- 14.** **a)**  $(x^3 - 27) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$  **β)**  $8x^3 + \psi^3 = (2x+\psi)(4x^2 - 2x\psi + \psi^2)$   
**γ)**  $\alpha^3 - 8\beta^3 = (\alpha-2\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 4\beta^2)$  **δ)**  $\alpha^3 + 125\beta^3 = (\alpha+5\beta)(\alpha^2 - 5\alpha\beta + 25\beta^2)$

- 15.** **a)**  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ , **β)**  $\psi^2 + 4\psi + 4 = (\psi+2)^2$ , **γ)**  $\omega^2 - 6\omega + 9 = (\omega-3)^2$ ,  
**δ)**  $\alpha^2 + 10\alpha + 25 = (\alpha+5)^2$ , **ε)**  $1 - 4\beta + 4\beta^2 = (1-2\beta)^2$ , **στ)**  $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x+1)^2$   
**ζ)**  $4\psi^2 - 12\psi + 9 = (2\psi-3)^2$ , **η)**  $16x^2 + 8x\psi + \psi^2 = (4x+\psi)^2$ , **θ)**  $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha-\beta)^2$ , **i)**  $(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 1 = (\alpha+\beta-1)^2$ , **ia)**  $\frac{\psi^2}{9} - 2\psi + 9 = \left(\frac{\psi}{3} - 3\right)^2$ ,  
**ιβ)**  $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

- 16.** **a)**  $3x^2 + 24x + 48 = 3(x^2 + 8x + 16) = 3(x+4)^2$ , **β)**  $-\psi^2 + 4\psi - 4 = -(\psi^2 - 4\psi + 4) = -(\psi-2)^2$   
**γ)**  $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2 = 2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 2(\alpha-2\beta)^2$ , **δ)**  $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha = \alpha(4\alpha^2 + 12\alpha + 9) = \alpha(2\alpha+3)^2$

- 17.** **a)**  $E = x \cdot x + 2x \cdot \psi + \psi \cdot \psi = x^2 + 2x\psi + \psi^2$   
**β)** Έστω  $\alpha$  είναι η πλευρά του τετραγώνου τότε  $\alpha^2 = x^2 + 2x\psi + \psi^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \alpha^2 = (x+\psi)^2 \Rightarrow \alpha = x+\psi$ .

- 18.**  
 $E = E_{A\Gamma\Delta} + E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot \Delta E + \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} A\Gamma(\Delta E + AB) = \frac{1}{2}(x+1)(x+x+2) =$   
 $= \frac{1}{2}(x+1)(2x+2) = \frac{1}{2} \cdot 2(x+1)(x+1) = (x+1)^2$ . Αν  $\alpha$  είναι η πλευρά του  
τετραγώνου τότε  $\alpha^2 = (x+1)^2$ .  $\alpha = x+1$ .

19. **a)**  $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ , **β)**  $\psi^2-4\psi+3=(\psi-1)(\psi-3)$ ,  
**γ)**  $(\omega^2+5\omega+6)=(\omega+2)(\omega+3)$   
**δ)**  $\alpha^2+6\alpha+5=(\alpha+5)(\alpha+1)$  **ε)**  $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$  **στ)**  $\psi^2-\psi-12=(\psi+3)(\psi-4)$   
**ζ)**  $\omega^2-9\omega+18=(\omega-6)(\omega-3)$  **η)**  $\alpha^2+3\alpha-10=(\alpha+5)(\alpha-2)$
20. **α)**  $x^2+(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=(x+2)(x+\sqrt{3})$  **β)**  $x^2+(2\alpha+3\beta)x+6\alpha\beta=(x+2\alpha)(x+3\beta)$   
**γ)**  $x^2+(3-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}=(x+3)(x-\sqrt{2})$
21. **α)**  $2\omega^2+10\omega+8=2(\omega^2+5\omega+4)=2(\omega+1)(\omega+4)$  **β)**  $3\alpha^2-12\alpha-15=3(\alpha^2-4\alpha-5)=3(\alpha+1)(\alpha-5)$  **γ)**  $\alpha x^2-7\alpha x+6\alpha=\alpha(x^2-7x+6)=\alpha(x-1)(x-6)$ .
22. **α)**  $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821 = 1453 \cdot (1821 - 821) = 1453 \cdot 1000 = 1453000$   
**β)**  $801^2 + 199 \cdot 801 = 801(801 + 199) = 801 \cdot 1000 = 801000$   
**γ)**  $998^2 - 4 = 998^2 - 2^2 = (998-2)(998+2) = 996 \cdot 1000 = 996000$   
**δ)**  $999 \cdot 1001 + 1 = (1000-1)(1000+1) + 1 = 1000^2 - 1^2 + 1 = 1000000 - 1 + 1 = 1000000$   
**ε)**  $999^2 + 2 \cdot 999 + 1 = (999+1)^2 = 1000^2 = 1000000$   
**στ)**  $97^2 + 6 \cdot 97 + 9 = (97+3)^2 = 100^2 = 10000$
23. **α)**  $x^2\psi^2-4\psi^2-x^2+4=\psi^2(x^2-4)-(x^2-4)=(x^2-4)(\psi^2-1)=(x-2)(x+2)(\psi-1)(\psi+1)$ .  
**β)**  $x^4-1+x^3-x=(x^2)^2-1+x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1)+x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ .  
**γ)**  $x^3(x^2-1)+1-x^2=x^3(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(x^3-1)=(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$   
**δ)**  $(x^2+9)^2-36x^2=(x^2+9)^2-(6x)^2=(x^2+9-6x)(x^2+9+6x)=(x-3)^2 \cdot (x+3)^2$   
**ε)**  $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta=(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)$   
**στ)**  $x^2-2x\psi+\psi^2-\omega^2=(x-\psi)^2-\omega^2=(x-\psi-\omega)(x-\psi+\omega)$   
**ζ)**  $1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=1-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=1^2-(\alpha-\beta)^2=(1-\alpha+\beta)(1+\alpha-\beta)$   
**η)**  $\psi^2-x^2-10\psi+25=\psi^2-10\psi+25-x^2=(\psi-5)^2-x^2=(\psi-5-x)(\psi-5+x)$   
**θ)**  $2(x-1)(x^2-4)-5(x-1)(x-2)^2=2(x-1)(x-2)(x+2)-5(x-1)(x-2)^2=(x-1)(x-2)[2(x+2)-5(x-2)]=(x-1)(x-2)(2x+4-5x+10)=(x-1)(x-2)(-3x+14)$   
**ι)**  $(\psi^2-4)^2-(\psi+2)^2=(\psi^2-4-\psi-2)(\psi^2-4+\psi+2)=(\psi^2-\psi-6)(\psi^2+\psi-2)=(\psi+2)(\psi-3)(\psi-1)(\psi+2)$   
**ια)**  $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)==[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2][(\alpha+\beta)^2-\gamma^2]=(\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$   
**ιβ)**  $(x^2+9)(\alpha^2+4)-(ax+6)^2=x^2\alpha^2+4x^2+9\alpha^2+36-\alpha^2x^2-12ax-36=4x^2+9\alpha^2-12ax=(2x-3a)^2$
24.  $E=x\psi-x-2\psi+2=x(\psi-1)-2(\psi-1)=(\psi-1)(x-2)$ . Άρα η διάσταση x θα μειωθεί κατά μία μονάδα ενώ η διάσταση ψ κατά δύο μονάδες.

## 1.7 Διαίρεση Πολυνομών.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

i)	ii)	iii)
δ)	γ)	β)

2.

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	5
7	5	2
9	6	3

3.

α)	β)	γ)	δ)	ε)
Σ	Λ	Λ	Σ	Σ

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. a)

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 - 3x + 6 \\
 - 2x^3 - 4x^2 \\
 \hline
 -3x^2 - 3x + 6 \\
 x^2 + 6x \\
 \hline
 3x + 6 \\
 - 3x - 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\text{Άρα } 2x^3 + x^2 - 3x + 6 = (x + 2)(2x^2 - 3x + 3)$$

β)

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - x^2 - 10x + 5 \\
 - 6x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -3x^2 - 10x + 5 \\
 3x^2 + x \\
 \hline
 -9x + 5 \\
 9x + 3 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

$$\text{Αριθμητική} \quad 6x^3 - x^2 - 10x + 5 = (3x + 1)(2x^2 - x - 3) + 8$$

γ)

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - x^2 + 2x - 7 \\
 -6x^4 + 6x^3 \\
 \hline
 6x^3 - x^2 + 2x - 7 \\
 -6x^3 + 6x^2 \\
 \hline
 5x^2 + 2x - 7 \\
 -5x^2 + 5x \\
 \hline
 7x - 7 \\
 -7x + 7 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\text{Αριθμητική} \quad 6x^4 - x^2 + 2x - 7 = (x - 1)(6x^3 + 6x^2 + 5x + 7)$$

δ)

$$\begin{array}{r}
 4x^3 + 5x - 8 \\
 -4x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 2x^2 + 5x - 8 \\
 -2x^2 + x \\
 \hline
 6x - 8 \\
 -6x + 3 \\
 \hline
 -5
 \end{array}$$

$$\text{Αριθμητική} \quad 4x^3 + 5x - 8 = (2x - 1)(2x^2 + x + 3) - 5$$

ε)

$$\begin{array}{r}
 x^5 - x^4 + 3x^2 + 2 \\
 -x^5 + x^4 - 2x^3 \\
 \hline
 -2x^3 + 3x^2 + 2 \\
 2x^3 - 2x^2 + 4x \\
 \hline
 x^2 + 4x + 2 \\
 -x^2 + x - 2 \\
 \hline
 5x
 \end{array}$$

$$\text{Αριθμητική} \quad x^5 - x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 - x + 2)(x^3 - 2x + 1) + 5x$$

**Κεφάλαιο 1**

**στ)**

$$\begin{array}{r|l} 9x^4 - x^2 + 2x - 1 & -3x^2 - x + 1 \\ -9x^4 + 3x^3 - 3x^2 & \hline 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \\ -3x^3 + x^2 - x & \hline -3x^2 + x - 1 \\ 3x^2 - x + 1 & \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Άριθμος } 9x^4 - x^2 + 2x - 1 = (3x^2 - x + 1)(3x^2 + x - 1)$$

**δ)**

$$\begin{array}{r|l} 8x^4 - 6x^2 - 9 & 2x^2 - 3 \\ -8x^4 + 12x^2 & \hline 6x^2 - 9 \\ -6x^2 + 9 & \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Άριθμος } 8x^4 - 6x^2 - 9 = (2x^2 - 3)(4x^2 + 3)$$

**η)**

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 - 4 & 3x^2 - 1 \\ -3x^5 + x^3 & \hline -x^3 - 4 \\ x^3 - \frac{1}{3}x & \hline x^3 - \frac{1}{3}x \\ -\frac{1}{3}x - 4 & \hline \end{array}$$

$$\text{Άριθμος } 3x^5 - 2x^3 - 4 = (3x^2 - 1)(x^3 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}x - 4$$

2. α)

$$\begin{array}{r|l} 6x^2+22x+12 & \\ -6x^2-4x & 3x+2 \\ \hline 18x+12 & \\ -18x-12 & 2x+6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+10x^2+2x+20 & x+3 \\ -2x^3-6x^2 & \\ \hline 4x^2+2x+20 & \\ -4x^2-12x & \\ \hline -10x+20 & \\ 10x+30 & \\ \hline 50 & \end{array}$$

3. Αν  $P(x)$  είναι το πολυώνυμο τότε θα ισχύει:

$$P(x) = (x^2 - x + 1) \cdot (2x + 3) + 3x + 2 =$$

$$2x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 + 3x + 2 = 2x^3 + x^2 + 2x + 5$$

4. Αρκεί να δείξουμε ότι η διαίρεση  $Q(x)$ :  $P(x)$  είναι τέλεια δηλ  $v = 0$   
α)

$$\begin{array}{r|l} 6x^3-7x^2+9x-18 & 2x-3 \\ -6x^3+9x^2 & \\ \hline 2x^2+9x-18 & \\ -2x^2+3x & \\ \hline 12x-18 & \\ -12x+18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

β)

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^3+6x^2+4x+1 & x+1 \\ -x^4-x^3 & \\ \hline 3x^3+6x^2+4x+1 & \\ -3x^3-3x^2 & \\ \hline 3x^2+4x+1 & \\ -3x^2-3x & \\ \hline x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

5. α) Να γραφεί αυτός ο πίνακας:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-x^2+5x-3 & x^2+x+1 \\ -2x^4-2x^3+2x^2 & 2x^2-2x+3 \\ \hline -2x^3+x^2+5x-3 & \\ 2x^3+2x^2-2x & \\ \hline 3x^2+3x-3 & \\ -3x^2-3x+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

## Κεφάλαιο 1

**β)** Από την Ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$$x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 2x + 1) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)^2$$

- 6. α)** Θα κάνουμε την διαίρεση  $(x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^3+6x^2+4x+1 & x+1 \\ \hline -x^4-x^3 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \hline 3x^3+6x^2+4x+1 & \\ -3x^3-3x^2 & \\ \hline 3x^2+4x+1 & \\ -3x^2-3x & \\ \hline x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα από την Ευκλείδεια διαίρεση ο  $x + 1$  είναι παράγοντας

$$\begin{aligned} \textbf{β)} \quad & x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = \\ & (x + 1) [(x^3 + 1) + 3x(x + 1)] = (x + 1)[(x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x(x + 1)] = \\ & (x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) = (x + 1)(x + 1)^3(x + 1)^4 \end{aligned}$$

- 7.** Από την ταυτότητα  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ . Άρα ο άλλος παράγοντας είναι ο  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ .

- 8. α)** Το υπόλοιπο είναι:  $v(x) = 4x^2 - 6x + 7$ .

**β)** Επειδή το πολυώνυμο  $4x^2 - 6x + 7$  είναι 2<sup>ο</sup> βαθμού δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης. Οπότε:

$$4x^2 - 6x + 7 = 4x^2 - 20 + 20 - 6x + 7 = 4(x^2 - 5) - 6x + 27.$$

### Οπότε

$$P(x) = (x^3 + 2)(x^2 - 5) + 4(x^2 - 5) - 6x + 27 = (x^2 - 5)(x^3 + 2 + 4) - 6x + 27 = (x^2 - 5)(x^3 + 6) - 6x + 27.$$

Άρα το υπόλοιπο είναι  $v(x) = -6x + 27$

9.

$$\begin{array}{r}
 6x^3 + \alpha \\
 -6x^3 + 6x^2 \\
 \hline
 6x^2 + \alpha \\
 -6x^2 + 6x \\
 \hline
 6x + \alpha \\
 -6x + 6 \\
 \hline
 \alpha + 6
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c} x-1 \\ \hline 6x^2 + 6x + 6 \end{array} \right.$$

Για να είναι η διαιρεση τέλεια πρέπει  $\alpha + 6 = 0$  ή  $\alpha = -6$

10.  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ .

Οπότε θα κάνουμε τη διαιρεση  $(2x^3 - x^2 - 4x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \\
 -2x^3 + 4x^2 - 2x \\
 \hline
 3x^2 - 6x + 3 \\
 -3x^2 + 6x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x + 3 \end{array} \right.$$

Αρα ο άλλος παράγοντας είναι ο  $2x + 3$

11. Το ένα πλακάκι τύπου Α εχει εμβαδόν  $x^2$ , το πλακάκι του τύπου Β έχει εμβαδό  $x \cdot \psi$  και το πλακάκι τύπου Γ έχει εμβαδόν  $\psi^2$ . Επειδή το δάπεδο έχει πλάτος  $5x+4\psi$ , αν εκτελέσουμε τη διαιρεση  $45x^2 + 56x\psi + 16\psi^2 : (5x+4\psi)$  βρίσκουμε πηλίκο  $9x+4\psi$  που είναι και το μήκος του. Αρα το δωμάτιο έχει εμβαδόν  $45x^2 + 56x\psi + 16\psi$ .

## 1.8 Ε.Κ.Π. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
4	2	1

2.

A B	$4x^3$	$2x(x-1)$	$9(x-1)^2$
$6x^2$	$12x^3$	$6x^2(x-1)$	$18x^2(x-1)^2$
$x^2(x-1)$	$4x^3(x-1)$	$2x^2(x-1)$	$9x^2(x-1)^2$
$8x^5$	$8x^5$	$8x^5(x-1)$	$72x^5(x-1)^2$

3.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
2	4	3

4.

A B	$3x^2$	$x^4(x-2)^2$	$6(x-2)^3$
$6x(x-2)^2$	$3x$	$x^3(x-2)$	$6(x-2)^2$
$2x^3(x-2)$	$x^2$	$x(x-2)^2$	$2(x-2)$
$3x^3(x-2)^3$	$3x^2$	$x^3(x-2)^2$	$3(x-2)^3$

1. **α)** Ε.Κ.Π.  $72x^3\psi^3\omega^4$  **β)** Ε.Κ.Π.  $30\alpha x^2\psi^3\omega^2$  **γ)** Ε.Κ.Π.  $24x^2\psi^3(x - \psi)(x + \psi)^2$   
Μ.Κ.Δ.  $6x^2\psi\omega^2$  Μ.Κ.Δ. 5 Μ.Κ.Δ.  $x(x + \psi)$
  
2. **α)** Ε.Κ.Π.  $12(x + \psi)(x - \psi)^3$  **β)**  $(\alpha - 1)(\alpha - 2), (\alpha - 2)(\alpha + 2), \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2)$   
Μ.Κ.Δ.  $2(x - \psi)$  Ε.Κ.Π.  $\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 2)$ , Μ.Κ.Δ.  $(\alpha - 2)$   
**γ)**  $\alpha^2(\alpha - 1), \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 1), \alpha(\alpha - 1)^2$   
Ε.Κ.Π.  $\alpha^2(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)$ , Μ.Κ.Δ.  $\alpha(\alpha - 1)$

### 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

#### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

a)	β)	γ)	δ)	ε)
6	3	4	1	5

2.

a)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ

3. **α)**  $x - 2$ , **β)**  $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ , **γ)**  $x + 1$ , **δ)**  $x$ , **ε)**  $2(\alpha + \beta)$ , **στ)**  $(x + 2)^2$
4. Όχι διότι πρέπει και  $x \neq 0$ .

### Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1. **α)**  $x \neq 4$ , **β)**  $\psi \neq \frac{5}{2}$ , **γ)**  $\omega \neq -1$ , **δ)**  $x \neq 0$  και  $x \neq 3$ .
2. **α)**  $\frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$ , **β)**  $\frac{3\psi^2}{12\psi} = \frac{\psi}{4}$ , **γ)**  $\frac{2x\omega^2}{8x^2\omega} = \frac{\omega}{4x}$ , **δ)**  $\frac{5a^2\beta\gamma^3}{10\alpha\beta^2\gamma} = \frac{\alpha\gamma^2}{2\beta}$ ,  
**ε)**  $\frac{x+4}{4+x} = 1$ , **στ)**  $\frac{\psi - 1}{1 - \psi} = -1$ , **ζ)**  $\frac{\omega - 2}{(2 - \omega)^2} = \frac{1}{\omega - 2}$ , **η)**  $\frac{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)} = 1$

$$\text{a) } \frac{6x}{2x^2 + 4x} = \frac{6x}{2x(x+2)} = \frac{3}{x+2}, \quad \text{β) } \frac{3\psi - 9}{\psi^2 - 9} = \frac{3(\psi-3)}{(\psi-3)(\psi+3)} = \frac{3}{\psi+3},$$

$$\text{γ) } \frac{x^2 + x\omega}{\omega^2 + x\omega} = \frac{x(x+\omega)}{\omega(\omega+x)} = \frac{x}{\omega}, \quad \text{δ) } \frac{5\alpha^2 - 20}{(\alpha-2)^2} = \frac{5(\alpha^2-4)}{(\alpha-2)^2} = \frac{5(\alpha-2)(\alpha+2)}{(\alpha-2)^2} = \frac{5(\alpha+2)}{\alpha-2},$$

$$\text{ε) } \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \frac{x+4}{x}, \quad \text{στ) } \frac{\psi^2 - 1}{\psi^2 + 2\psi + 1} = \frac{(\psi-1)(\psi+1)}{(\psi+1)^2} = \frac{\psi-1}{\psi+1}$$

$$\text{ζ) } \frac{6x^2 + 3x\omega}{4x^2 - \omega^2} = \frac{3x(2x+\omega)}{(2x-\omega)(2x+\omega)} = \frac{3x}{2x-\omega}, \quad \text{η) } \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha^3 - \beta^3} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}$$

4. a)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x+1}{x+2}, \quad \text{β) } \frac{\psi^2 - 5\psi + 4}{\psi^2 - 6\psi + 8} =$   
 $= \frac{(\psi-1)(\psi-4)}{(\psi-2)(\psi-4)} = \frac{\psi-1}{\psi-2}, \quad \text{γ) } \frac{\omega^3 - 2\omega^2 + \omega}{\omega^3 - \omega} = \frac{\omega(\omega^2 - 2\omega + 1)}{\omega(\omega^2 - 1)} =$   
 $= \frac{\omega(\omega-1)^2}{\omega(\omega-1)(\omega+1)} = \frac{\omega-1}{\omega+1}.$

5.

$$\text{α) } \frac{x(x-1) + 4(x-1)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+4}{x+3}, \quad \text{β) } \frac{\psi(\psi-3) + \psi^2 - 9}{4\psi^2 - 9} =$$
  
 $= \frac{\psi(\psi-3) + (\psi-3)(\psi+3)}{(2\psi-3)(2\psi+3)} = \frac{(\psi-3)(\psi+\psi+3)}{(2\psi-3)(2\psi+3)} = \frac{\psi-3}{2\psi-3}$

$$\text{γ) } \frac{(2\omega+1)^2 - (\omega+2)^2}{\omega^4 - 1} = \frac{(2\omega+1-\omega-2)(2\omega+1+\omega+2)}{(\omega^2-1)(\omega^2+1)} = \frac{(\omega-1)(3\omega+3)}{(\omega-1)(\omega+1)(\omega^2+1)} =$$
  
 $= \frac{3(\omega-1)(\omega+1)}{(\omega-1)(\omega+1)(\omega^2+1)} = \frac{3}{\omega^2+1}, \quad \text{δ) } \frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2 - 4(\alpha+1)}{\alpha^3 + \alpha^2} =$   
 $= \frac{(\alpha+1)[(\alpha-2)^2 - 4]}{\alpha^2(\alpha+1)} = \frac{(\alpha-2-2)(\alpha-2+2)}{\alpha^2} = \frac{(\alpha-4)\alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha-4}{\alpha}.$

6. Η απόσταση AB είναι : AB = 5 · t. Η απόσταση BG έχει μήκος

$$BG = \frac{1}{2} 4 \cdot t^2 = 2t^2. \quad \text{Η μέση ταχύτητα είναι: } \frac{5t + 2t^2}{2t} = \frac{5t}{2t} + \frac{2t^2}{2t} = \frac{5}{2} + t \text{ m/sec}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

a)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)	ζ)	η)
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

2. α)  $2x$ , β)  $x\psi$ , γ)  $4x$ , δ)  $\frac{x-1}{x+2}$ , ε)  $\frac{x+2}{x-1}$ , στ)  $\psi$

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

1.

α)  $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{\psi} = \frac{1}{x\psi}$ , β)  $\frac{9x}{4\psi} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3}{4\psi}$ , γ)  $12x^2 \cdot \frac{1}{9x} = \frac{4x}{3}$ , δ)  $\frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2} = \frac{\alpha}{\beta}$   
 ε)  $(-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega} = -\frac{3\omega}{2}$ , στ)  $(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}) \cdot (-\frac{4}{\alpha^2}) = \frac{6}{\alpha}$

2.

α)  $8x : \frac{6}{x} = 8x \cdot \frac{x}{6} = \frac{4x^2}{3}$ , β)  $\frac{1}{\psi^2} : (-\frac{3}{\psi}) = \frac{1}{\psi^2} \cdot (-\frac{\psi}{3}) = -\frac{1}{3\psi}$ ,  
 γ)  $(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}) : 3\alpha^2 = -\frac{\alpha^2}{\beta^3} \cdot \frac{1}{3\alpha^2} = -\frac{1}{3\beta^3}$ , δ)  $(-\frac{x^3}{2\omega}) : (-\frac{x^2}{4\omega^2}) = -\frac{x^3}{2\omega} \cdot (-\frac{4\omega^2}{x^2}) = 2\omega x$ .

3.

α)  $\frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3} = \frac{2(x+3) \cdot 4x}{x^2(x+3)} = \frac{8}{x}$ , β)  $\frac{\psi-5}{\psi+2} \cdot \frac{2+\psi}{5-\psi} = \frac{-(5-\psi)(\psi+2)}{(\psi+2)(5-\psi)} = -1$ ,  
 γ)  $\frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2} = \frac{(x-\omega)x^3\omega^2}{x^2\omega^3(x-\omega)(x+\omega)} = \frac{x}{\omega(x+\omega)}$ , δ)  $\frac{\alpha^2-4}{\alpha^2+\alpha-6} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha^2+2\alpha} =$   
 $= \frac{(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha-2)(\alpha+3)\alpha(\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha}$ , ε)  $\frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x} = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)x(x+3)} =$   
 $= \frac{x+1}{x-2}$ , στ)  $\frac{4\psi^2-9}{4\psi^2-12\psi+9} \cdot \frac{\psi^2+3\psi}{2\psi^2+3\psi} = \frac{(2\psi-3)(2\psi+3)\psi(\psi+3)}{(2\psi-3)^2 \cdot \psi(2\psi+3)} = \frac{\psi+3}{2\psi+3}$

**Κεφάλαιο 1** 4.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15} = \frac{x+4}{5} \cdot \frac{15}{x+4} = \frac{3(x+4)}{x+4} = 3, \quad \text{b)} \frac{2\psi-1}{\psi+1} : \frac{1-2\psi}{1+\psi} = \\
 & = \frac{2\psi-1}{\psi+1} \cdot \frac{1+\psi}{1-2\psi} = \frac{-(1-2\psi)}{\psi+1} \cdot \frac{1+\psi}{1-2\psi} = -1, \quad \text{c)} \left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2) = \\
 & = \left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{\omega+2} = -\frac{1}{\omega}, \quad \text{d)} \frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta} = \frac{\alpha+1}{\beta^2} \cdot \frac{\beta}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\beta(\alpha+1)} \\
 \text{e)} & \frac{x+\psi}{x^2-x\psi} : \frac{x^2+x\psi}{x-\psi} = \frac{x+\psi}{x(x-\psi)} \cdot \frac{x-\psi}{x(x+\psi)} = \frac{1}{x^2} \\
 \text{στ)} & \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x-2} = 1
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2}\right) : \frac{8x-8}{x+2} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4(x+1)}{x+2} \cdot \frac{x+2}{8(x-1)} = \frac{x-2}{2(x-1)} \\
 \text{b)} & \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right) = \frac{x+2}{x-1} : \left[\frac{2(x+3)}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3}\right] = \frac{x+2}{x-1} : \frac{2(x+2)}{x-1} = \\
 & = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2(x+2)} = \frac{1}{2}, \quad \text{c)} \left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1}\right) \cdot \frac{x+2}{x+3} = \left(\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2x+6}\right) \cdot \frac{x+2}{x+3} = \\
 & = \frac{x+2}{2(x+3)} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+2)^2}{2(x+3)^2}
 \end{aligned}$$

**B. Ερωτήσεις κατανόησης**

1.

a)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

2. στο β) το σωστό είναι:  $\frac{x+3}{x+1}$
3. a)  $\frac{x}{x+6}$ , β)  $\frac{6}{x+6}$ , γ)  $\frac{x}{x+1}$ , δ)  $\frac{6}{x+2}$ , ε)  $\frac{1}{x}$  στ)  $\frac{8}{x}$

## Προτεινόμενες ασκήσεις και προβλήματα

Κεφάλαιο 1

**1.**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} &= \frac{\psi}{x\psi} + \frac{x}{x\psi} = \frac{\psi+x}{x\psi}, \quad \text{b)} \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \\
 &= \frac{3x-2x-2}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}, \quad \gamma) \frac{1}{\psi^2} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\psi^2} - \frac{\psi}{\psi^2} = \frac{1-\psi}{\psi^2}, \quad \delta) \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2+1} = \\
 &= \frac{\omega^2+1}{\omega^2(\omega^2+1)} - \frac{2\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)} = \frac{\omega^2+1-2\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)} = \frac{1-\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)}
 \end{aligned}$$

**2.**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3} &= \frac{2x}{2(x-3)} - \frac{3}{x-3} = \frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} = 1. \\
 \text{b)} \frac{\psi-6}{\psi^2+2\psi} - \frac{4}{\psi+2} &= \frac{\psi-6}{\psi(\psi+2)} - \frac{4\psi}{\psi(\psi+2)} = \frac{\psi-6-4\psi}{\psi(\psi+2)} = \frac{3(\psi+2)}{\psi(\psi+2)} = \frac{3}{\psi} \\
 \text{γ)} \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4} &= \frac{3(\omega+2)}{(\omega-2)(\omega+2)} - \frac{4}{2(\omega-2)} = \frac{3}{\omega-2} - \frac{2}{\omega-2} = \\
 &= \frac{1}{\omega-2}, \quad \text{δ)} \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2} = \frac{1}{2(x+6)} + \frac{x}{(6-x)(6+x)} = \\
 &= \frac{6-x}{2(x+6)(6-x)} + \frac{2x}{2(6-x)(6+x)} = \frac{6+x}{2(x+6)(6-x)} = \frac{1}{2(6-x)} \\
 \text{ε)} \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega} &= \frac{9x}{x(x-\omega)} + \frac{3\omega}{\omega(\omega-x)} = \frac{9}{x-\omega} - \frac{3}{x-\omega} = \frac{6}{x-\omega} \\
 \text{στ)} \frac{\alpha+7}{\alpha^2+4\alpha+3} - \frac{3}{\alpha+1} &= \frac{\alpha+7}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \frac{3(\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha+3)} = \frac{-2\alpha-2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} = \\
 &= \frac{-2(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)} = \frac{-2}{\alpha+3}.
 \end{aligned}$$

**3.**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} &= \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1, \quad \text{b)} \frac{\psi-2+\frac{1}{\psi}}{\psi-\frac{1}{\psi}} = \\
 &= \frac{\frac{\psi^2-2\psi+1}{\psi}}{\frac{\psi^2-1}{\psi}} = \frac{\psi^2-2\psi+1}{\psi^2-1} = \frac{(\psi-1)^2}{(\psi-1)(\psi+1)} = \frac{\psi-1}{\psi+1}, \quad \text{γ)} \frac{\omega+1+\frac{1}{\omega}}{1-\frac{1}{\omega^3}} = \\
 &= \frac{\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega}}{\frac{\omega^3-1}{\omega^3}} = \frac{\omega^3(\omega^2+\omega+1)}{\omega(\omega^3-1)} = \frac{\omega^3(\omega^2+\omega+1)}{\omega(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)} = \frac{\omega^2}{\omega-1}.
 \end{aligned}$$

**Κεφάλαιο 1**

$$\text{δ)} \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \beta}} = \frac{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}} = \frac{\beta - \alpha}{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)} = \frac{1}{\beta + \alpha}$$

4.

$$\text{a)} \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = \\ = \frac{(x-2)^2 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 - 4x + 4 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x}.$$

$$\text{β)} \frac{3}{x+2\psi} - \frac{2}{x-2\psi} + \frac{2x+16\psi}{x^2-4\psi^2} = \frac{3}{x+2\psi} - \frac{2}{x-2\psi} + \frac{2x+16\psi}{(x-2\psi)(x+2\psi)} = \\ = \frac{3(x-2\psi) - 2(x+2\psi) + 2x+16\psi}{(x+2\psi)(x-2\psi)} = \frac{3x-6\psi-2x-4\psi+2x+16\psi}{(x+2\psi)(x-2\psi)} = \frac{3x+6\psi}{(x+2\psi)(x-2\psi)} = \\ = \frac{3(x+2\psi)}{(x+2\psi)(x-2\psi)} = \frac{3}{x-2\psi}, \text{ γ)} \frac{\psi^2-6}{\psi^2-5\psi+6} - \frac{2}{\psi-2} + \frac{3}{\psi-3} = \\ = \frac{\psi^2-6}{(\psi-2)(\psi-3)} - \frac{2(\psi-3)}{(\psi-2)(\psi-3)} + \frac{3(\psi-2)}{(\psi-2)(\psi-3)} = \frac{\psi^2-6-2(\psi-3)+3(\psi-2)}{(\psi-2)(\psi-3)} \\ = \frac{\psi^2+\psi-6}{(\psi-2)(\psi-3)} = \frac{(\psi-2)(\psi+3)}{(\psi-2)(\psi-3)} = \frac{\psi+3}{\psi-2}.$$

$$\text{δ)} \frac{x^2}{x-\psi} + \frac{\psi^2}{x+\psi} - \frac{2x\psi^2}{x^2-\psi^2} = \frac{x^2}{x-\psi} + \frac{\psi^2}{x+\psi} - \frac{2x\psi^2}{(x-\psi)(x+\psi)} \\ = \frac{x^2(x+\psi) + \psi^2(x-\psi) - 2x\psi^2}{(x-\psi)(x+\psi)} = \\ = \frac{x^3 + x^2\psi + \psi^2x - \psi^3 - 2x\psi^2}{(x-\psi)(x+\psi)} = \frac{(x-\psi)(x^2 + x\psi + \psi^2) + x^2\psi - x\psi^2}{(x-\psi)(x+\psi)} = \\ = \frac{(x-\psi)(x^2 + x\psi + \psi^2) + x\psi(x-\psi)}{(x-\psi)(x+\psi)} = \frac{(x-\psi)(x^2 + 2x\psi + \psi^2)}{(x-\psi)(x+\psi)} = \\ = \frac{(x+\psi)^2}{(x+\psi)} = x+\psi$$

5.

$$\text{α)} \left( \frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left( 1 + \frac{1}{4x-3} \right) = \left[ \frac{(x+3)(2x-1) - x(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} \right] \left( \frac{4x-3+1}{4x-3} \right) = \\ = \left[ \frac{2x^2 - x + 6x - 3 - 2x^2 - x}{(2x+1)(2x-1)} \right] \left( \frac{4x-2}{4x-3} \right) = \left[ \frac{4x-3}{(2x+1)(2x-1)} \right] \frac{2(2x-1)}{4x-3} = \frac{2}{2x+1}$$

$$\text{β)} \left[ \frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2} = \left[ \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2-3} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} + \frac{(x-3)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2-3} = \frac{(x+3)(x-1) + (x-3)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2-3} = \\
 & = \frac{(x+3)(x-1) + (x-3)(x+1)}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2-3} = \frac{x^2 - x + 3x - 3 + x^2 + x - 3x - 3}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2-3} = \\
 & \frac{2(x^2-3)}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2-3} = \frac{2}{x+1}, \text{ γ) } (1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}) (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}) = (\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}) [\frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\beta(\alpha - \beta)} + \\
 & \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\beta(\alpha - \beta)}] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2}{\beta(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\beta}, \text{ δ) } (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1) : (\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}) = \\
 & = (\frac{\alpha^2}{\alpha\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha\beta} - \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}) : (\frac{\alpha^3}{\alpha\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha\beta}) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta} : \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \\
 & = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha^3 + \beta^3} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)} = \frac{1}{\alpha + \beta}.
 \end{aligned}$$

6.  $\frac{x^3 - \psi^3}{x - \psi} + x\psi = \frac{(x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2)}{x - \psi} + x\psi = x^2 + x\psi + \psi^2 + x\psi =$   
 $= x^2 + 2x\psi + \psi^2 = (x + \psi)^2.$

β) Για  $x=56$  και  $\psi = 44$  η παραπάνω ταυτότητα δίνει :

$$\frac{56^3 - 44^3}{56 - 44} + 5 \cdot 4 \cdot 4 = (56 + 44)^2 = 100^2 = 10000$$

7. α)  $A^2 + B^2 = \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^2 + \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 2x^2 + 1} + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} =$   
 $= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1.$

β) Για  $x=100$   $A = \frac{200}{100^2 + 1} = \frac{200}{10001}$ ,  $B = \frac{100^2 - 1}{100^2 + 1} = \frac{9999}{10001}$ .

Από α)  $A^2 + B^2 = 1$ , άρα έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες,

$$\frac{200}{10001}, \frac{9999}{10001} \text{ και υποτείνουσα } 1.$$

1.

$$\text{Υπολογίζω το λόγο } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{-\frac{3}{2}} = -2, \text{ οπότε}$$

$$K = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(1 + \frac{-3}{2}\right)^{-2} + 4\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^{-1} + [(-2 - 2004)^{2004}]^0 =$$

$$= -\frac{27}{8} - \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{2}\right)^{-2} + 4\left(-\frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1} + (-2006)^0 = -\frac{27}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 4\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} + 1 =$$

$$= -\frac{27}{8} - (-2)^2 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{27}{8} - 4 - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{81}{24} - \frac{96}{24} - \frac{64}{24} + \frac{24}{24} = -\frac{217}{24}$$

2. **a)** Επειδή ο ακέραιος  $2v+1$  είναι περιττός θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} + (\beta - \alpha - 3\gamma)^{2v+1} = \\ & = (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} + [-(\alpha - \beta + 3\gamma)]^{2v+1} = \\ & = (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} + (-1) 2v + 1 (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} = \\ & = (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} - (\alpha - \beta + 3\gamma)^{2v+1} = 0 \end{aligned}$$

**b)** Επειδή ο ακέραιος  $2v$  είναι άρτιος θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & (x - \psi - \omega)^{2v} - (\psi + \omega - x)^{2v} = (x - \psi - \omega)^{2v} - [-(x - \psi - \omega)]^{2v} = \\ & = (x - \psi - \omega)^{2v} - (-1) 2v (x - \psi - \omega)^{2v} = (x - \psi - \omega)^{2v} - (x - \psi - \omega)^{2v} = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x^2 - 6x\psi + \psi^2}{x^2 + \psi^2} = \frac{4\frac{x^2}{\psi^2} - 6\frac{x\psi}{\psi^2} + \frac{\psi^2}{\psi^2}}{\frac{x^2}{\psi^2} + \frac{\psi^2}{\psi^2}} = \frac{4\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 - 6\frac{x}{\psi} + 1}{\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + 1} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1+3+1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{5}{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = \frac{20}{5} = 4, \quad B = \frac{2x^3 - 2x\psi^2 + 3\psi^3}{x^2\psi + \psi^3} = \frac{2\frac{x^3}{\psi^3} - 2\frac{x\psi^2}{\psi^3} + 3\frac{\psi^3}{\psi^3}}{\frac{x^2\psi}{\psi^3} + \frac{\psi^3}{\psi^3}} = \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{\psi}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{\psi}\right) + 3}{\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + 1} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2\left(-\frac{1}{8}\right) + 1 + 3}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-\frac{1}{4} + 4}{\frac{5}{4}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{4} + \frac{16}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = 3 \end{aligned}$$

4. **a)**  $P(1 - x) = -2(1 - x)^2 + 2(1 - x) + 800 = -2(1 - 2x + x^2) + 2 - 2x + 800 = -2 + 4x - 2x^2 + 2 - 2x + 800 = -2x^2 + 2x + 800 = P(x).$

**Κεφάλαιο 1**

**b)** Για  $x = 100$   $P(100) = P(-99)$

$$P(100) = -2 \cdot 100^2 + 2 \cdot 100 + 800 = -2 \cdot 10000 + 200 + 800 = -20000 + 1000 = -19000 = P(-99)$$

5. **a)** Κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και καταλήγουμε στο ζητούμενο.

**b)** Από α) όταν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  το β μέλος είναι 0, οπότε και το α μέλος είναι 0.  
Έτσι έχουμε :  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0$   $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ .

**γ)** Αν  $\alpha = x - \psi$ ,  $\beta = \psi - \omega$ ,  $\gamma = \omega - x$ , τότε  $\alpha + \beta + \gamma = x - \psi + \psi - \omega + \omega - x = 0$   
Οπότε από β)  $(x - \psi)^3 + (\psi - \omega)^3 + (\omega - x)^3 = 3(x - \psi)(\psi - \omega)(\omega - x)$

6.

**a)**  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-\frac{1}{3})^2 - 2(-\frac{7}{3}) = \frac{1}{9} + \frac{14}{3} = \frac{1}{9} + \frac{42}{9} = \frac{43}{9}$

**b)**  $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 9\beta^2 + 6\beta + 1 + 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha^2 + \beta^2) + 15(\alpha + \beta) + 2 = 9(\frac{43}{9}) + 15(-\frac{1}{3}) + 2 = 43 - 5 + 2 = 40$

7. **a)**  $x^4 - 2\psi^2 = x^2(\psi^2 - 2)$   $x^4 - 2\psi^2 = x^2\psi^2 - 2x^2 \wedge x^4 - 2\psi^2 - x^2\psi^2 + 2x^2 = 0 \wedge$   
 $x^2(x^2 + 2) - \psi^2(x^2 + 2) = 0 \wedge (x^2 - \psi^2)(x^2 + 2) = 0 \wedge x^2 - \psi^2 = 0 \wedge x^2 + 2 = 0$   
(αδύνατη)  $\wedge (x - \psi)(x + \psi) = 0 \wedge x - \psi = 0 \wedge x + \psi = 0 \wedge x = \psi \wedge x = -\psi$ .

**b)**  $x^3 + \psi^3 = x^2\psi + x\psi^2 \wedge x^3 + \psi^3 - x^2\psi - x\psi^2 = 0 \wedge x^2(x - \psi) - \psi^2(x - \psi) = 0$   
 $\wedge (x - \psi)(x^2 - \psi^2) = 0 \wedge (x - \psi)(x - \psi)(x + \psi) = 0 \wedge x = \psi \wedge x = -\psi$ .

8. **a)**  $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ ,  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

**b)**  $A = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x-1)(x+3)} =$   
 $= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x+3)} + \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+3)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} =$   
 $= \frac{3x+3}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{3}{(x-1)(x+3)}$ .

9. **a)**  $A = x(x + 3) = x^2 + 3x$ ,  $B = (x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$   
 $= A + 2$

**β)** Από α)  $B = A + 2$ , αν πολλαπλασιάσουμε με A έχουμε:

$$AB = A^2 + 2A \quad \text{ή} \quad AB + 1 = A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2$$

**γ)**  $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = AB + 1 = (A + 1)^2 = [x(x+3)+1]^2$

**10. a)**  $E = 16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi = \pi(16x^4 + 8x^2 + 1) = \pi(4x^2 + 1)^2$ .

Ξέρουμε ότι  $E = \pi\rho^2$ .

$$\text{Άρα } \rho^2 = (4x^2 + 1)^2 \text{ οπότε } \rho = 4x^2 + 1.$$

**β)** Οι δύο κύκλοι θα έχουν άθροισμα εμβαδών:  $\pi(4x)^2 + \pi(4x^2 - 1)^2 = 16\pi x^2 + \pi(16x^4 - 8x^2 + 1) = 16\pi x^2 + 16\pi x^4 - 8\pi x^2 + \pi = 16\pi x^4 + 8\pi x^2 + \pi$ .

Άρα σύμφωνα με το α) ο κύκλος θα έχει  $\rho = 4x^2 + 1$

**11. a)**  $\kappa^2 + \kappa = \kappa(\kappa + 1)$ . Οι αριθμοί  $\kappa$ ,  $\kappa + 1$  είναι διαδοχικοί άρα ο ένας θα είναι άρτιος, οπότε το γινόμενο  $\kappa(\kappa + 1)$  θα είναι άρτιος αριθμός.

**β)**  $(\kappa + 1)^3 - \kappa^3 = \kappa^3 + 3\kappa^2 + 3\kappa + 1 - \kappa^3 = 3\kappa^2 + 3\kappa + 1 = 3(\kappa^2 + \kappa) + 1 = 3\kappa(\kappa + 1) + 1$ . (1)

Ο αριθμός  $\kappa(\kappa + 1)$  είναι άρτιος άρα έχει την μορφή  $2\lambda$  (όπου  $\lambda$  ακέραιος).

Άρα  $(1) = 3 \cdot 2\lambda + 1 = 6\lambda + 1$ . Άρα  $(\kappa + 1)^3 - \kappa^3 = 6\lambda + 1$ .

Άρα το υπόλοιπο είναι 1.

**γ)** Έστω  $\alpha, \beta$  είναι δύο περιττοί ακέραιοι τότε:  $\alpha = 2\kappa + 1$ ,  $\beta = 2\lambda + 1$ ,  $\kappa, \lambda$  ακέραιοι.

$$\alpha^2 - \beta^2 = (2\kappa + 1)^2 - (2\lambda + 1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 - (4\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 4(\kappa^2 + \kappa) - 4(\lambda^2 + \lambda).$$

Οι αριθμοί  $\kappa^2 + \kappa$ ,  $\lambda^2 + \lambda$  είναι άρτιοι, άρα  $\kappa^2 + \kappa = 2\mu$ ,  $\lambda^2 + \lambda = 2\nu$ , όπου  $\mu, \nu$  ακέραιοι. Οπότε  $4(\kappa^2 + \kappa) - 4(\lambda^2 + \lambda) = 4 \cdot 2\mu - 4 \cdot 2\nu = 8(\mu - \nu) = \piολ8$

**12. a)**

$x^6 - 1$ $-x^6 + x^5$ $\hline$ $x^5 - 1$ $-x^5 + x^4$ $\hline$ $x^4 - 1$ $-x^4 + x^3$ $\hline$ $x^3 - 1$ $-x^3 + x^2$ $\hline$ $x^2 - 1$ $-x^2 + x$ $\hline$ $x - 1$ $-x + 1$ $\hline$ $0$	$x-1$ $\hline$ $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
---	---

Αριθ  $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ . Οπότε για  $x = 7$  έχουμε:  
 $7^6 - 1 = (7 - 1)(7^5 + 7^4 + 7^3 + 7^2 + 7 + 1) = 6 \cdot (7^5 + 7^4 + 7^3 + 7^2 + 7 + 1) = \piολ6$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x+1 \\ \hline x^5 - x^4 & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ -x^4 + 1 & \\ \hline x^4 + x^3 & \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline -x^2 + 1 & \\ x^2 + x & \\ \hline x + 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Αριθ  $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$   
 $21^5 + 1 = (23)^5 + 1 = 8^5 + 1 = (8 + 1)(8^4 - 8^3 + 8^2 - 8 + 1) = 9 \cdot (8^4 - 8^3 + 8^2 - 8 + 1) = \piολ9$

## 13.

a) από το β μέλος  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)}$

b) Για  $x=2$   $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

Για  $x=3$   $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Για  $x=4$   $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Για  $x=2008$   $\frac{1}{2007 \cdot 2008} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}$

Αν προσθέσουμε τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2007 \cdot 2008} = 1 - \frac{1}{2008} = \frac{2008}{2008} - \frac{1}{2008} = \frac{2007}{2008}.$$





A close-up photograph of a person's hand holding a pen, poised to write on a piece of paper. The paper contains various mathematical drawings and calculations, including a network graph with nodes and edges, some handwritten numbers like '55', and a ruler scale with markings. The lighting is warm and focused on the hand and the paper.

# Κεφάλαιο 2ο



## 2.1 Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$

Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο λέγεται η εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει την μορφή:

$\alpha \cdot x + \beta = 0$  όπου  $\alpha, \beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ο  $x$  είναι ο **άγνωστος** της εξίσωσης. Ο  $\alpha$  λέγεται **συντελεστής του αγνώστου** και ο  $\beta$  **σταθερός όρος**.

**Ρίζα** ή **λύση** της εξίσωσης λέμε τον αριθμό με τον οποίο αν αντικαταστήσουμε τον  $x$  στην εξίσωση, προκύπτει ισότητα που αληθεύει.

**Επίλυση** μιας εξίσωσης λέμε την διαδικασία με την οποία βρίσκουμε την λύση της.

Μία εξίσωση λέγεται **ταυτότητα** ή **αόριστη** όταν αληθεύει για κάθε τιμή του  $x$ .

Μία αόριστη εξίσωση έχει την μορφή:  $0 \cdot x = 0$ .

Μία εξίσωση λέγεται **αδύνατη** όταν δεν έχει καμία λύση.

Μία αδύνατη εξίσωση έχει τη μορφή:  $0 \cdot x = \alpha$  όπου  $\alpha \neq 0$

### Πώς λύνουμε την εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ . (1)

1. Αν  $\alpha \neq 0$  τότε η (1) έχει μοναδική λύση την  $x = \frac{\beta}{\alpha}$
2. Αν  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$  τότε η (1) γίνεται  $0 \cdot x = \beta$  που είναι αδύνατη
3. Αν  $\alpha = \beta = 0$  τότε η (1) γίνεται  $0 \cdot x = 0$  που είναι αόριστη.

Για να λύσουμε μία εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού ακολουθούμε την εξής σειρά:

- 1) Κάνουμε τις πράξεις και βγάζουμε τις παρενθέσεις
- 2) Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- 3) Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- 4) Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου (αν είναι διάφορος του μηδενός). Αν ο συντελεστής είναι 0, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη ή είναι αόριστη.

Αν η εξίσωση περιέχει κλάσματα τότε:

- α)** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών. **β)** Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

Στην συνέχεια ακολουθούμε την παραπάνω σειρά.

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο σύνολο R:

$$\text{a)} \frac{x}{4} - \frac{5x+8}{6} = \frac{2x-9}{3}, \text{ b)} \frac{1}{5} - \frac{x+1}{10} = \frac{2-x}{10}$$

**Λύση**

a) Ε.Κ.Π : 12, οπότε έχουμε :  $12 \cdot \frac{x}{4} - 12 \cdot \frac{5x+8}{6} = 12 \cdot \frac{2x-9}{3}$  ή  $3x - 2(5x+8) = 4(2x-9)$  ή  
ή  $3x - 10x - 16 = 8x - 36$  ή  $3x - 10x - 8x = 16 - 36$  ή  $-15x = -20$  ή  $x = \frac{-20}{-15}$  άρα  $x = \frac{5}{3}$

b) Ε.Κ.Π. : 10, οπότε έχουμε :  $10 \cdot \frac{1}{5} - 10 \cdot \frac{x+1}{10} = 10 \cdot \frac{2-x}{10}$  ή  $2 - (x+1) = 2 - x$  ή  
ή  $2 - x - 1 = 2 - x$  ή  $-x + x = 2 - 2 + 1$  άρα  $0x = 1$  αδύνατη.

2. Να λύσετε στο σύνολο N τις εξισώσεις:

$$\text{a)} 3(x-2) = 4(x-1) - 5 \quad \text{b)} \frac{4x-2}{3} + \frac{x-1}{2} = 6x+3$$

**Λύση**

a)  $3(x-2) = 4(x-1) - 5$  ή  $3x - 6 = 4x - 4 - 5$  ή  $3x - 4x = -4 - 5 + 6$  ή  $-x = -3$  ή  $x = 3$  δεκτή.

b)  $\frac{4x-2}{3} + \frac{x-1}{2} = 6x+3$  ή  $6 \cdot \frac{4x-2}{3} + 6 \cdot \frac{x-1}{2} = 6 \cdot (6x+3)$  ή

$2(4x-2) + 3(x-1) = 6(6x+3)$  ή  $8x - 4 + 3x - 3 = 36x + 18$  ή  $8x + 3x - 36x = 4 + 3 + 18$  ή

$-25x = 25$  ή  $x = -1$  απορρίπτεται διότι ο  $-1$  δεν είναι φυσικός. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο N .

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

#### A. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση  $3x + 2 = 0$  είναι αδύνατη στο σύνολο N .
2. Η εξίσωση  $0 \cdot x = 0$  έχει μόνο δύο λύσεις.
3. Η εξίσωση  $3x = 0$  είναι αδύνατη
4. Η εξίσωση  $0x = 0$  έχει λύση μόνο το 0.
5. Η εξίσωση  $3x = 3$  είναι ταυτότητα.

6. Οι εξισώσεις  $-3x + 6 = 0$  και  $7x - 14 = 0$  είναι ισοδύναμες .
7. Η εξίσωση  $x = x$  είναι ταυτότητα .
8. Η εξίσωση  $\lambda x = \lambda$  έχει μοναδική λύση την  $x=1$
9. Αν η εξίσωση  $\alpha \cdot x + \beta = 0$  έχει άπειρες λύσεις, τότε η εξίσωση  $\beta \cdot x + \alpha = 0$  έχει άπειρες λύσεις.
10. Η εξίσωση  $\alpha \cdot x = -5$  με  $\alpha \neq 0$  είναι αδύνατη.
11. Η εξίσωση  $\alpha \cdot x = 5$  έχει πάντα λύση.
12. Η εξίσωση  $0 \cdot x = (\alpha^2 + 3)^0$  είναι αδύνατη.
13. Η εξίσωση  $\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{27} = 0$  έχει ρίζα τον αριθμό 3 .
14. Αν η εξίσωση  $\alpha \cdot x = \beta^2$  είναι αδύνατη τότε και η εξίσωση  $\beta \cdot x = \alpha^2$  είναι αδύνατη.
15. Η εξίσωση  $\alpha \cdot x = \beta$  έχει πάντα λύση
16. Η εξίσωση  $\alpha \cdot x = \beta$  έχει μοναδική λύση όταν  $\alpha \neq 0$ , χωρίς να εξετάσουμε τι είναι το  $\beta$ .
17. Η εξίσωση  $0 \cdot x = (\alpha^2 + 1)$  είναι πάντα αδύνατη
18. Η εξίσωση  $4(2x - 1) = 5(x - 1) + 1 - 3x$  είναι αόριστη

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση  $5x+2 = x+4(x+\frac{1}{2})$  είναι:  
**α.** Αδύνατη   **β.** Αόριστη   **γ.** έχει μοναδική λύση   **δ.** έχει λύση μόνο το 0
2. Η εξίσωση  $4 \cdot x = 0$  έχει λύση:  
**α.**  $x = -4$    **β.**  $x = \frac{1}{4}$    **γ.**  $x = 4$  .   **δ.**  $x = 0$    **ε.**  $x = -\frac{1}{4}$
3. Η εξίσωση  $\alpha x = 0$  είναι ταυτότητα:  
**α.** Όταν  $\alpha = 0$    **β.** Όταν  $\alpha = 1$    **γ.** Όταν  $\alpha \neq 0$    **δ.** Για κάθε τιμή του  $\alpha$ .

**Κεφάλαιο 2**

4. Αν η εξίσωση  $(\alpha + 3) \cdot x = 3$  είναι αδύνατη, τότε το  $\alpha$  είναι ίσο με:  
**α.** 3   **β.** -3   **γ.** 0   **δ.** 2
5. Αν το 2 είναι λύση της εξίσωσης  $3x - 2 + \alpha = 0$  τότε η τιμή του  $\alpha$  είναι:  
**α.** -4   **β.** 0   **γ.** 4   **δ.** -2
6. Η εξίσωση  $4x - 3 = 5$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:  
**α.**  $2x - 1 = 5$    **β.**  $3x - 2 = 4$    **γ.**  $x - 3 = 4$    **δ.**  $2x - 5 = 7$
7. Η εξίσωση  $x + x - 1 + x - 2 + \dots + x - 19 = 290$  έχει λύση τον αριθμό:  
**α.** 14   **β.** 24   **γ.** 34   **δ.** 44   **ε.** 54
8. Η εξίσωση  $\alpha x = \beta$  έχει μοναδική λύση όταν:  
**α.**  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$    **β.**  $\alpha = 0$  και  $\beta \neq 0$    **γ.**  $\alpha \neq 0$    **δ.**  $\alpha \neq 0$  και  $\beta = 0$ .
9. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 είναι ίσο με το αριθμό ελαττωμένο κατά το πηλίκο της διαιρέστης του  $32 : 8$ . Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις αποδίδει το πρόβλημα:  
**α.**  $3x + 2 = x - 4$ ,   **β.**  $3x + 2 = x - 3$ ,   **γ.**  $4x + 2 = x - 4$ ,   **δ.**  $4x - 4 = x - 2$
10. Αν οι εξισώσεις  $(\lambda - 1)x = \lambda + 5$  και  $\lambda^2x + \lambda = x + 2$  είναι συγχρόνως αδύνατες, τότε η τιμή του  $\lambda$  είναι:  
**α.** 1,   **β.** -1,   **γ.** 2,   **δ.** 0
11. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . Η εξίσωση είναι αόριστη όταν:  
**α.**  $\lambda = 1$ ,   **β.**  $\lambda = -1$ ,   **γ.**  $\lambda = 0$    **δ.** για κάθε τιμή του  $\lambda$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

1. Δίνεται η εξίσωση:  $4(3x - 2) - 4x = 3(x - 1) + 5$   
 Να εξετάσετε αν το  $x = 2$  είναι ρίζα της.  
 Εξετάστε αν ο αριθμός  $x = 3^{2007}$  είναι ρίζα της εξίσωσης.
2. Να λυθούν στο σύνολο Q οι παρακάτω εξισώσεις:  
**α)**  $3-2(x-3)-x-1=3(x-6)+2$    **β)**  $\frac{3x-2}{4} - \frac{x-1}{2} = \frac{4x-1}{3}$    **γ)**  $\frac{3x-2}{3} - \frac{4x-1}{4} = x-3$
3. Να λύσετε στο σύνολο R τις εξισώσεις: **α)**  $2x = 5x$ ,   **β)**  $2(x - 1) = 2x - 2$ ,  
**γ)**  $0x = 1$    **δ)**  $\frac{3x-1}{2} + \frac{4x+2}{3} = 3x$    **ε)**  $4x - \frac{-3x+2}{5} = \frac{x-1}{2}$

4. Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις:

**α)**  $2(3-|x|) = 4$    **β)**  $4(|x|-2) - 4 = 4$    **γ)**  $|x| - (3-|x|) = 1$

5. Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις και να γίνει η επαλήθευση:

**α)**  $\frac{x-1}{3} = 2-3(x-3)+\frac{x}{2}$    **β)**  $\frac{7x+4}{5} = x+\frac{3x-5}{2}$    **γ)**  $\frac{8-x}{6} + \frac{3x-5}{3} = \frac{x+6}{2} - \frac{x}{3}$

**δ)**  $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x-14$    **ε)**  $\frac{3-x}{4} - \frac{x-2}{3} = x - \frac{2x-1}{6}$

6. Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις:

**α)**  $\frac{x-1}{4} - [\frac{x+2}{3} - (\frac{5-x}{12} + 1) - 3] = 1$    **β)**  $3\{x - \frac{3x-1}{4} - [1 - 2(x - \frac{3+x}{5})]\} = 5x - 2$

**γ)**  $\frac{1}{2} [8 - \frac{x}{2} - 2(\frac{x}{2} + 5)] - [6 - \frac{3x}{2} + 3(x - 5)] + 5 = 0$

7. Αν α είναι η λύση της εξίσωσης  $\frac{x-3}{3} + \frac{2}{3} - 3x = -11$  να υπολογίσετε την

τιμή της παράστασης  $A = (\alpha-3)^{2008} + \frac{3\alpha-2}{5} + 2^{\alpha-2}$

8. Δίνεται η παράσταση:

$$A(x) = \frac{x+2}{3} - 4x$$

**α)** Να υπολογίσετε την παράσταση  $A(x+3)$

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $A(x+3) = 0$

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) + 1 = A(x) - x$

9. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$$(3x - 2)^{2007} + 5(x^3 - 1) = 1 \quad \text{και} \quad 2(x - 1) - 3 = -2 - (2x - 1)$$

10. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x+5}{3} - 4 = -\frac{x+3}{2} \quad (1)$$

**α)** Να λυθεί η (1)

**β)** Να βρείτε τους αριθμούς α και β από τις παρακάτω ισότητες:

$$2\beta = 7 + x \quad \text{και} \quad 3\alpha = 24 + \beta, \quad \text{όπου } x \text{ είναι η λύση της (1)}$$

## Προβλήματα

- 1.** Ένας πατέρας είναι σήμερα 47 ετών και έχει δύο παιδιά ηλικίας 10 και 5 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι ίση με το άθροισμα των ηλικιών των δύο παιδιών .
- 2.** Ένα τέστ περιλαμβάνει 40 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση στην οποία δίνεται σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, ενώ κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται σ' αυτήν λάθος απάντηση βαθμολογείται αρνητικά με 2 μονάδες. Ο Νίκος πήρε 165 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;
- 3.** Να βρεθεί ο αριθμός που πρέπει να αφαιρέσουμε από τους αριθμητές των κλασμάτων  $\frac{17}{3}$  και  $\frac{19}{4}$ , ώστε αυτά να γίνουν ίσα.
- 4.** Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 703. Αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο, παίρνουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 3. Να βρείτε τους δύο αριθμούς.
- 5.** Για ένα εμπόρευμα με συντελεστή ΦΠΑ 19% πληρώσαμε συνολικά 1428 ευρώ . Ποια είναι η τιμή του εμπορεύματος χωρίς ΦΠΑ;
- 6.** Από τους μαθητές μιάς τάξης το  $\frac{1}{3}$  πηγαίνει σχολείο με τα πόδια, το  $\frac{1}{4}$  χρησιμοποιεί ποδήλατο, το  $\frac{1}{6}$  πηγαίνει με το λεωφορείο και 9 μαθητές πηγαίνουν στο σχολείο με το αυτοκίνητο των γονιών τους.  
Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

## 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Κεφάλαιο 2

**Εξίσωση δευτέρου βαθμού** (ή δευτεροβάθμια εξίσωση) με έναν άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που έχει έναν άγνωστο και η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου είναι το 2.

Η λύση μιάς εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού εξαρτάται από την μορφή της εξίσωσης. Η γενική μορφή μιάς εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού με άγνωστο x είναι:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ με } a \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και σταθερός όρος. Οι συντελεστές σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned}x^2 + 8 &= 0 : \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 8 \\-2x^2 - 8 - 3x &= 0 : \alpha = -2, \beta = -3, \gamma = -8 \\4x + 3x^2 &= 0 : \alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 0\end{aligned}$$

### Πώς λύνουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού

**A.** Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Θυμόμαστε ότι ισχύει: Αν  $\alpha \cdot \beta = 0$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$

**Αν η εξίσωση είναι ελλειπής.**

- 1)** Αν  $\gamma = 0$  δηλ. έχει την μορφή:  $ax^2 + bx = 0$ , με  $a \neq 0$ . Οπότε η εξίσωση λύνεται ως εξής:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ ή } x(ax + b) = 0 \text{ ή } x=0 \text{ ή } ax+b=0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x=-\frac{b}{a}$$

#### Παράδειγμα:

Να λυθούν: **a)**  $x^2 + 3x = 0$ , **b)**  $x^2 = 6x$ .

#### Λύση

**a)**  $x^2 + 3x = 0$  ή  $x(x + 3) = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x + 3 = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x = -3$ .

**b)**  $x^2 = 6x$  ή  $x^2 - 6x = 0$  ή  $x(x - 6) = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x - 6 = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x = 6$

- 2)** Αν  $\beta = 0$  τότε η εξίσωση έχει την μορφή:  $ax^2 + c = 0$ , με  $a \neq 0$

**1ος τρόπος:** Κάνουμε γινόμενο (αν γίνεται) την  $ax^2 + c$ .

#### Παράδειγμα:

Να λυθούν **a)**  $x^2 - 4 = 0$ , **b)**  $4x^2 - 20 = 0$

#### Λύση

**a)**  $x^2 - 4 = 0$  ή  $x^2 - 2^2 = 0$   $(x - 2)(x + 2) = 0$  ή  $x - 2 = 0$  ή  $x + 2 = 0$  ή  $x = 2$  ή  $x = -2$

## Κεφάλαιο 2

**β)**  $4x^2 - 20 = 0 \quad \text{ή} \quad 4(x^2 - 5) = 0 \quad \text{ή} \quad 4(x^2 - \sqrt{5}^2) = 0 \quad \text{ή} \quad 4(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \quad \text{ή}$   
 $x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \sqrt{5} = 0 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{5}$

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Την μεταφέρουμε στην μορφή:  $x^2 = κ$  και έχουμε:

- Αν  $κ > 0$ , τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = \sqrt{κ}$  και  $x = -\sqrt{κ}$ .
- Αν  $κ < 0$ , τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν  $κ = 0$  τότε  $x = 0$  (διπλή).

### Παράδειγμα:

Να λυθούν

**α)**  $3x^2 = 27 \quad \text{β)}$   $5x^2 - 20 = 0$ .

### Λύση

**α)**  $3x^2 = 27 \quad \text{ή} \quad x^2 = \frac{27}{3} \quad \text{ή} \quad x^2 = 9 \quad \text{ή} \quad x = \pm \sqrt{9} \quad \text{ή} \quad x = \pm 3$

**β)**  $5x^2 - 20 = 0 \quad \text{ή} \quad 5x^2 = 20 \quad \text{ή} \quad x^2 = 4 \quad \text{ή} \quad x = \pm 2$

Αν η εξίσωση είναι πλήρης οπότε γίνεται γινόμενο ως εξής:

$$(x + κ) \cdot (x + λ) = 0 \text{ π.χ. Να λυθεί η εξίσωση: } x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Επειδή  $-1 + 6 = 5$  και  $-1 \cdot 6 = -6$  θα έχουμε  $(x-1) \cdot (x+6) = 0$  ή  $x - 1 = 0$  ή  $x + 6 = 0$  άρα  $x = 1$  ή  $x = -6$ .

**1)** Αν η εξίσωση είναι της μορφής  $x^2 + βx + γ = 0$  τότε βρίσκουμε δύο ακέραιους  $κ, λ$  για τους οποίους ισχύει:  $κ + λ = β$  και  $κ \cdot λ = γ$

**2)** Αν η εξίσωση είναι της μορφής  $α \cdot x^2 + βx + γ = 0$  ή  $α \neq 0$  τότε εφαρμόζουμε τη συμπλήρωση τετραγώνου ως εξής:

**α)** Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με  $4α$ , όπου  $α$  ο συντελεστής του  $x^2$ .

**β)** Μεταφέρουμε στο  $β'$  μέλος το σταθερό όρο και στο  $α'$  μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής  $α^2 + 2αβ - α^2 - 2αβ$ .

**γ)** Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το  $β'^2$

**δ)** Σχηματίζεται μία από τις ταυτότητες:

$$α^2 + 2αβ + β^2 = (α + β)^2$$

$$α^2 - 2αβ + β^2 = (α - β)^2$$

**Παράδειγμα:**

Να λύσετε:  $x^2 - 6x + 8 = 0$

**Λύση**

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{ή} \quad 4x^2 - 24x + 32 = 0 \quad \text{ή} \quad (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 6 = -32 \quad \text{ή} \quad (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot$$

$$6 + 6^2 = 6^2 - 32 \quad \text{ή} \quad (2x + 6)^2 = 4$$

$$\text{Άρα} \quad 2x+6 = \sqrt{4} \quad \text{ή} \quad 2x+6 = -\sqrt{4}$$

$$2x+6=2 \quad \text{ή} \quad 2x+6=-2$$

$$2x=-4 \quad \text{ή} \quad 2x=-8$$

$$x=-2 \quad \text{ή} \quad x=-4$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****A. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

- 1.** Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  είναι 2ου βαθμού.
- 2.** Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  είναι 2ου βαθμού.
- 3.** Η εξίσωση  $x^2 - \alpha x = 0$  δεν είναι αδύνατη.
- 4.** Η εξίσωση  $x^2 - 4x = 0$  έχει μία λύση την  $x = 4$ .
- 5.** Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού με ένα θετικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει τις ίδιες ρίζες.
- 6.** Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού με έναν αρνητικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες.
- 7.** Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  έχει ρίζα το 1 τότε  $\alpha + \beta + \gamma = 0$
- 8.** Η εξίσωση  $x^2 - 2007 = 0$  έχει δύο λύσεις αντίθετες.

Αν έχουμε την εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  τότε με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων έχουμε:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  ή  
 $4\alpha \cdot \alpha x^2 + 4\alpha \cdot \beta x + 4\alpha \cdot \gamma = 0$  ή  $4\alpha^2 x^2 + 4\alpha \beta x + 4\alpha \gamma = 0$  ή  
 $(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta = -4\alpha \gamma$  ή  $(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha x \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha \gamma$  ή  
 $(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha \gamma$ .

Αν συμβολίσουμε την παράσταση  $\beta^2 - 4\alpha \gamma$  με το γράμμα  $\Delta$ , τότε η εξίσωση γράφεται:

$(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$  και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε έχουμε:  $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$  ή  $2\alpha x + \beta = \pm \sqrt{\Delta}$  ή  $2\alpha x = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$

$$\text{ή } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις  $x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$  και  $x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε έχουμε:  $(2\alpha x + \beta)^2 = 0$  ή  $2\alpha x + \beta = 0$  ή  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Η παράσταση  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha \gamma$  λέγεται **διακρίνουσα** γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . Τα παραπάνω συμπεράσματα περιέχονται στον πίνακα:

Αν $\Delta > 0$	$\Delta$ δύο ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Αν $\Delta = 0$	Αδύνατη
Αν $\Delta < 0$	Μία διπλή ρίζα $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

## Παραδείγματα:

Να λυθούν οι εξισώσεις:

**α)**  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ ,    **β)**  $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

### Λύση

**α)** Είναι  $\alpha=3$ ,  $\beta=-4$ ,  $\gamma=1$  οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 1 > 0$ . Άρα η εξισωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 1}{2}$ , δηλ. είναι  $x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ , ή  $x = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ .

**β)** Είναι  $\alpha=-2$ ,  $\beta=-4$ ,  $\gamma=6$  οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (6) = 16 + 48 = 64 > 0$ . Άρα η εξισωση έχει δύο λύσεις, τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 \pm 8}{-4}$ , δηλ. είναι  $x = \frac{4+8}{-4} = -3$ , ή  $x = \frac{4-8}{-4} = 1$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Με την βοήθεια της διακρίνουσας μπορούμε να παραγοντοποίσουμε ένα τριώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού ως εξής:

Αν θέλουμε να κάνουμε γινόμενο το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  τότε βρίσκουμε την διακρίνουσα της εξισωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  (1) και έχουμε:

1. Αν  $\Delta > 0$  τότε η (1) θα έχει δύο ρίζες άνισες τις  $\rho_1$ ,  $\rho_1$  και το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

2. Αν  $\Delta = 0$  τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα την  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$  και το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

3. Αν  $\Delta < 0$  τότε η (1) είναι αδύνατη και το τριώνυμο δεν γίνεται γινόμενο.

## A. Ερωτήσεις του τύπου σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει δύο ρίζες άνισες όταν  $\Delta \geq 0$ .
2. Η εξίσωση  $3x - x^2 + 1 = 0$  έχει  $\Delta = -11$ .
3. Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει πάντα δύο λύσεις άνισες, αν  $\alpha$  και  $\gamma$  είναι ετερόσημοι.
4. Η εξίσωση  $x^2 - \alpha x = 0$  δεν είναι αδύνατη.
5. Μία εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού έχει πραγματικές ρίζες όταν  $\Delta < 0$
6. Αν  $\beta = 0$  και  $\gamma > 0$  τότε η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  δεν έχει λύση.
7. Η εξίσωση  $x^2 - 4x = 0$  έχει μία λύση την  $x = 4$ .
8. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού με ένα θετικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει τις ίδιες ρίζες.
9. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν αρνητικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες.
10. Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  έχει ρίζα το 1 τότε  $\alpha + \beta + \gamma = 0$
11. Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  έχει ρίζα το 0 τότε  $\gamma = 0$
12. Κάθε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες.
13. Αν  $\kappa \neq 1$ , τότε η εξίσωση  $x^2 - 4x + \kappa - 1 = 0$  μπορεί να έχει ρίζα το 0.
14. Αν η εξίσωση  $x^2 - 4x + \lambda - 5 = 0$  έχει διπλή ρίζα τότε  $\lambda = 9$
15. Η εξίσωση  $\alpha x^2 - x - \alpha = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , έχει πάντοτε δύο άνισες ρίζες στο R.
16. Το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$  γίνεται πάντα γινόμενο.

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση  $x^2 - 3ax + 4a^2 = 0$  με  $a \neq 0$  έχει:  
**α.** Δύο ρίζες άνισες πραγματικές **β.** Καμία ρίζα **γ.** Δύο ρίζες ίσες  
**δ.** Δύο ρίζες πραγματικές.
2. Η εξίσωση  $x(x^2 - 1) = 0$  έχει λύσεις:  
**α.** 0, 1, -1 **β.** 0, 1 **γ.** 0, -1 **δ.** είναι αδύνατη
3. Αν η εξίσωση  $x^2 - \beta x + \gamma = 0$  δεν έχει ρίζες, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει επίσης ρίζες:  
**α.**  $x^2 - \beta x - \gamma = 0$ , **β.**  $-x^2 + \beta x + \gamma = 0$  **γ.**  $\gamma x^2 - \beta x + 1 = 0$ ,  $\gamma \neq 0$   
**δ.**  $\gamma x^2 + \beta x - 1 = 0$   $\gamma \neq 0$
4. Αν η εξίσωση  $x^2 - 4x + 4\lambda = 0$  έχει δύο ρίζες άνισες τότε για το  $\lambda$  ισχύει:  
**α.**  $\lambda < 1$  **β.**  $\lambda > 1$  **γ.**  $\lambda > 3$  **δ.**  $\lambda \leq 1$
5. Αν η εξίσωση  $x^2 - 6x + \lambda = 0$  έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τότε η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του  $\lambda$  είναι:  
**α.** 9 **β.** 8 **γ.** -9 **δ.** -8
6. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης :  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  τότε η παράσταση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  είναι ίση με:  
**α.**  $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$  **β.**  $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$  **γ.**  $-\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις  
**α)**  $3x^2 - 27 = 0$  **β)**  $4x^2 - 16 = 0$  **γ)**  $x^2 - 5 = 0$  **δ)**  $x^2 - 9 = 0$  **ε)**  $x^2 - 1 = 0$   
**στ)**  $x^2 + 6 = 0$  **ζ)**  $x^2 + 8 = 0$  **η)**  $3x^2 + 48 = 0$
2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις  
**α)**  $3x^2 - 2x = 0$  **β)**  $16x - x^2 = 0$  **γ)**  $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$  **δ)**  $-x^2 = x$  **ε)**  $x^2 = x$   
**στ)**  $3x^2 = 6x$  **ζ)**  $x = 2x^2$  **η)**  $7x = -14x^2$
3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις  
**α)**  $3x^2 - 1 = 2(x^2 + 12)$  **β)**  $3x^2 - 4x = -8x$  **γ)**  $(x-2)(x+2) + (1-2x)(1+2x) = 0$   
**δ)**  $-x^2 = 10x + 25$  **ε)**  $7x = x^2 - 18$  **στ)**  $x^2 = x-1$  **ζ)**  $3x^2 = 2x - 4$

**Κεφάλαιο 2**

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
  - a)  $(2x-3)^2 = (x-1)(x+4) + 9x$    b)  $9(\alpha^2 - 2) - 8\alpha = 4\alpha(2\alpha-1) + 14$
  - γ)  $(\lambda+2)(7\lambda-1) = (4\lambda+5)(5\lambda-3)$    δ)  $\frac{7}{4} - (3x-1)^2 = \frac{3}{2}(4x-1)$
5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
  - a)  $\frac{2x^2+1}{3} + \frac{x+1}{4} = (x+2)^2$    b)  $\frac{x(x+2)}{3} + \frac{x(x-1)}{4} = \frac{x^2+2}{6} + \frac{1}{2}$
  - γ)  $\frac{x^2+5}{9} - \frac{x-2}{4} = \frac{2(1-x)}{3}$    δ)  $\frac{4x^2+1}{5} - \frac{x+1}{2} = \frac{x^2+1}{4} - x$
6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
  - a)  $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$    b)  $x^3 = 2x^2 + 3x$    γ)  $x^2(x-2) - 2x(2-x) + x - 2 = 0$
  - δ)  $x^2(3-x) + x(x-3) + 6(x-3) = 0$    ε)  $(x+2)^3 + x^2 - 4 = 0$
7. Να λύσετε τις εξισώσεις
  - a)  $x^2 + (2\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} + 4 = 0$    b)  $x^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$
  - γ)  $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$    δ)  $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{12} = 0$
8. Να λύσετε τις εξισώσεις
  - a)  $-2x^2 + 4,6x - 2,4 = 0$    b)  $0,002x^2 + 4,004x - 1,01 = 0$    γ)  $x - \sqrt{x} - 20 = 0$
  - δ)  $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$    ε)  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
9. Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 - 2x + 4\lambda = 0$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση
  - α) Να έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές
  - β) Να έχει δύο ρίζες ίσες
  - γ) Να μην έχει πραγματικές ρίζες.
10. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση  $x^2 - 3x + \lambda^2 + 7\lambda = 0$  να έχει ρίζα τον αριθμό  $-2$ .
11. Δίνεται η εξίσωση  $(x + \lambda)^2 - 2(\lambda - x) = 7$ . Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα το  $2$ ;
12. Αν κ είναι ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - 3x - 5 = 0$  να βρείτε την τιμή των παραστάσεων  
 $A = \kappa^2 - 3\kappa$   
 $B = \kappa^2 - 3\kappa + 10$

- 13.** Να βρεθεί ο λ R, ώστε η εξίσωση  $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0$  να έχει ρίζα το 2.  
Μετά να αποδειχθεί ότι η ρίζα είναι διπλή .
- 14.** Να βρεθούν οι τιμές του λ R ώστε η εξίσωση:  
 $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + 3x - 2007 = 0$  να είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού.
- 15.** Να λύσετε την εξίσωση :  $x^2 - 6x - \frac{3\Delta}{4} = 0$  (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της (1)
- 16.** Να λύσετε την εξίσωση :  $x^2 - \Delta x + 2\Delta = 0$  (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της (1)
- 17.** Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα με την βοήθεια της διακρίνουσας .  
**α)**  $6x^2 - x - 1$     **β)**  $x^2 - x - 2$     **γ)**  $2x^2 - x - 1$     **δ)**  $4x^2 - 4x + 1$     **ε)**  $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$   
**στ)**  $2x^2 + 4x + 3$     **ζ)**  $3x^2 - 4x + 1$
- 18.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :  
 $A = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$ ,    $B = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2x^2 - x - 1}$      $\Gamma = \frac{3x^2 + 19x - 14}{6x^2 - x - 2}$
- 19.** Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 4x + \lambda - 1$ . Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε:  
**α)** Το παραπάνω τριώνυμο να αναλύεται σε γινόμενο.  
**β)** Το παραπάνω τριώνυμο να μην αναλύεται.  
**γ)** Το παραπάνω τριώνυμο να είναι τέλειο τετράγωνο.
- 20.** Να παραγοντοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:  
**α)**  $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$     **β)**  $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

## 2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι  $x + 1$ . Αν οι κάθετες πλευρές είναι  $7-x$  και  $x$ . Να υπολογίσετε το  $x$ .
  
2. **a)** Μία ομάδα από 6 παιδιά διοργανώνει αγώνες σκάκι, στους οποίους κάθε παιδί θα παίξει μία μόνο φορά με κάθε ένα από τα υπόλοιπα παιδιά. Να βρείτε πόσοι αγώνες θα διεξαχθούν.  
**b)** Μπορείτε να βρείτε πόσοι αγώνες θα γίνουν όταν είναι:  
 10 παιδιά, 20 παιδιά και γενικά  $n$  παιδιά.  
**γ)** Αν διεξαχθούν 465 αγώνες, στους οποίους κάθε παιδί θα παίξει με όλα τα υπόλοιπα μόνο μία φορά να βρείτε πόσα παιδιά συμμετέχουν.
  
3. Σε ένα τρίγωνο η βάση του είναι κατά 5 cm μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το τρίγωνο έχει εμβαδό  $12 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε τη βάση αυτή και το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.
  
4. Να βρείτε έναν θετικό αριθμό τέτοιο ώστε:  
 Το πενταπλάσιο του αριθμού να είναι ίσο με το τετράγωνο του αριθμού
  
5. Οι πλευρές δύο κύβων διαφέρουν κατά 2 cm ενώ οι όγκοι τους διαφέρουν κατά  $152 \text{ cm}^3$ . Να βρείτε τις πλευρές.
  
6. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαστάσεις του είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Αν το εμβαδόν του είναι 110cm, να βρείτε τις διαστάσεις του.
  
7. Μία επιχείρηση αποφάσισε να μοιράσει 4000 ευρώ σε 90 εργαζόμενους . Αν κάθε άνδρας πήρε τόσα ευρώ όσες ήταν οι γυναίκες και κάθε γυναίκα πήρε τόσα ευρώ όσοι ήταν οι άνδρες, να βρείτε το πλήθος των ανδρών και των γυναικών.

- 8.** Από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 24 m, ρίχνουμε προς τα κάτω μία πέτρα με αρχική ταχύτητα  $v_0 = 2 \text{ m/sec}$ . Σε πόσο χρόνο θα φθάσει στο έδαφος;
- Δίνονται  $S = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$  και  $g = 10 \text{ m/sec}^2$
- 9.** Αν αφαιρέσουμε τον αριθμό που εκφράζει το μήκος της μιάς πλευράς ενός τετραγώνου από τον αριθμό που εκφράζει το εμβαδόν του, βρίσκουμε 42. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.
- 10.** Μία επιχείρηση παραγωγής ψυγείων έχει ημερήσιο κόστος παραγωγής

$$K(x) = 90 + 2x$$

όπου x ο αριθμός των ψυγείων που παράγει. Αν η επιχείρηση κάνει ημερήσιες εισπράξεις  $E(x) = x^2 - 18x - 210$  να βρείτε τον τύπο που δίνει το ημερήσιο κέρδος  $P(x)$ .

Πόσα ψυγεία πρέπει να παράγει η επιχείρηση, ώστε η επιχείρηση να μην έχει ούτε κέρδη ούτε ζημιές.

- 11.** Η ταχύτητα ενός κινητού δίνεται  $v(t) = t^3 - 5t^2 + 4t$
- a)** Ποια είναι η ταχύτητα για τα  $t = 2 \text{ sec}$
- b)** Για ποιες τιμές του t έχουμε  $v = 0$
- 12.** Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν ίσους όγκους. Αν η βάση του παραλληλεπιπέδου είναι ορθογώνιο με διαστάσεις 4 cm, 9 cm και έχει ύψος ίσο με την ακμή του κύβου, να βρείτε τις διαστάσεις των δύο στερεών.

## 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

**Κλασματική εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή.

Για να ορίζεται μία κλασματική εξίσωση θα πρέπει οι παρονομαστές όλων των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

Για να λύσουμε μία κλασματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Βρίσκουμε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. και κάνουμε τις απλοποιήσεις.
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Απορρίπτουμε από τις ρίζες που βρίσκουμε εκείνες που μηδενίζουν τους παρονομαστές της αρχικής εξίσωσης.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{a) } \frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \quad \text{b) } \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

#### Λύση

$$\text{a) Έχουμε: a) } \frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \quad \text{b) } \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι Ε.Κ.Π. =  $(x - 2)(x + 2)$ .

**Πρέπει:**

$$(x - 2)(x + 2) \neq 0 \text{ ή } x - 2 \neq 0 \text{ και } x + 2 \neq 0 \text{ ή } x \neq 2 \text{ και } x \neq -2.$$

Έχουμε τώρα διαδοχικά:

$$\text{(1) ή } (x-2)(x+2) \cdot \frac{15}{x-2} - (x-2)(x+2) \cdot \frac{4}{x+2} = (x-2)(x+2) \cdot \frac{5}{(x-2)(x+2)} \text{ ή} \\ \text{ή } 15(x+2) - 4(x-2) = 5 \text{ ή } 15x + 30 - 4x + 8 = 5 \text{ ή } 15x - 4x = 5 - 8 - 30 \text{ ή}$$

$$\text{ή } 11x = -33 \text{ ή } \frac{11x}{11} = \frac{-33}{11} \text{ άρα } x = -3.$$

**β)** Οι παρονομαστές είναι γινόμενο οπότε θα βρούμε το Ε.Κ.Π.  $x^2(x+1)^2$ . **Κεφάλαιο 2**

Πρέπει:  $x^2(x+1)^2 \neq 0$   $x^2 \neq 0$  και  $(x+1)^2 \neq 0$   $x \neq 0$  και  $x \neq -1$

Έχουμε τώρα διαδοχικά

$$x^2(x+1)^2 \cdot \frac{2}{x+1} - x^2(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = x^2(x+1)^2 \cdot \frac{2}{x} - x^2(x+1)^2 \cdot \frac{3}{(x+1)^2} \text{ ή}$$

$$2x^2(x+1) - (x+1)^2 = 2(x+1)^2x - 3x^2 \text{ ή } 2x^3 + 2x^2 - (x^2 + 2x + 1) = 2(x^2 + 2x + 1)x - 3x^2 \text{ ή}$$

$$2x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3x^2 \text{ ή } 4x = -1 \text{ αρα } x = -\frac{1}{4}$$

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

#### A. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$  έχει ρίζα το 1.
2. Οι εξισώσεις  $x^2 - 4 = 0$  και  $\frac{4 - x^2}{2 - x}$  είναι ισοδύναμες.
3. Η εξίσωση  $\frac{3x - 1}{4} - \frac{4x - 3}{2} = \frac{x}{3}$  είναι κλασματική.
4. Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης  $\frac{3}{3+x} + \frac{x}{x} = 2$

#### B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Η εξίσωση  $\frac{x^3 - 4x}{2 - x}$  έχει ρίζες:  
**α.** 0 και 2, **β.** 0, 2 και -2 **γ.** 0 ή -2 **δ.** 2 και -2
2. Η εξίσωση  $\frac{x^3(x^2 - 1)}{x(x-1)} = 0$  στο σύνολο N έχει ρίζες:  
**α.** -1, **β.** 0, **γ.** 0, 1, -1 **δ.** αδύνατη .
3. Η εξίσωση  $\frac{x^2 - 1}{\frac{x-1}{x+2}} = 0$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή:  
**α.** 1 **β.** -2 **γ.** -1 **δ.** -1 και -2

1. Να λύσετε στο σύνολο R τις εξισώσεις:

α)  $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4}$  β)  $\frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-4}$

γ)  $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$  δ)  $\frac{x}{x^2-64} = \frac{1}{x+8}$

2. Να λύσετε στο σύνολο Q τις εξισώσεις:

α)  $\frac{2x-1}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = \frac{x-1}{x+2}$  β)  $\frac{6x}{x^2-9} = \frac{4}{x+3} - \frac{3}{3-x}$

γ)  $\frac{x+2}{x^2-5x+6} + \frac{2x-1}{2x^2-4x} = \frac{2}{3-x}$  δ)  $\frac{2x}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x^2-x} - \frac{3x-1}{2x^2+x} = 2$

3. Να λύσετε στο σύνολο N τις εξισώσεις:

α)  $\frac{2x}{x^2-1} = 2 - \frac{x}{1-x}$  β)  $\frac{1}{4x-x^2-4} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-5x+6}$

γ)  $\frac{4x+2}{3x+2} = \frac{6x^2+4}{9x^2-4} + \frac{x+1}{2-3x}$  δ)  $\frac{9}{x+4} + 9 = 2x$

4. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{\alpha+1}{x^2-x} - \frac{x+2\beta+1}{x^2+x} = \frac{\beta x}{x^2-1}$ , όπου α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

5. Να βρείτε τον αριθμό στον οποίο αν προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αντιστρόφου του, βρίσκουμε το 4.

6. Να βρείτε δύο αριθμούς που το άθροισμά τους είναι 12 ενώ το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι

7. Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 120 ευρώ. Επειδή όμως μεταξύ των ατόμων που πήραν μέρος στο γεύμα ήταν και 3 φιλοξενούμενοι, οι υπόλοιποι αναγκάστηκαν να πληρώσουν 9 ευρώ επιπλέον, ο καθένας. Πόσα άτομα πήραν μέρος στο γεύμα.

8. Ένας εργάτης Α, για να τελειώσει ένα έργο, χρειάζεται 3 μέρες περισσότερο από έναν εργάτη Β. Αν εργαστούν μαζί και οι δύο τελειώνουν το έργο σε δύο ημέρες. Σε πόσες μέρες τελειώνει το έργο ο κάθε εργάτης μόνος του.

9. Σε μία εκδρομή οι γυναίκες ήταν κατά 5 λιγότερες από τους άνδρες. Οι άνδρες πλήρωσαν συνολικά 180 ευρώ, οι δε γυναίκες 80 ευρώ. Να βρείτε πόσοι ήταν οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες, αν κάθε άνδρας πλήρωσε 4 ευρώ περισσότερα από κάθε γυναίκα.

- 10.** Ένα τρένο διανύει 300 Km με σταθερή ταχύτητα .Αν η ταχύτητά του αυξηθεί κατά 5 Km / h, τότε το τρένο θα διανύσει τα 300 Km σε 2 h γρηγορότερα. Ποια είναι η ταχύτητα του τρένου;

## 2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  τότε μπορεί να ισχύουν:

- α)** Ο  $\alpha$  να είναι μεγαλύτερος από τον  $\beta$  και γράφουμε  $\alpha > \beta$  όταν η διαφορά  $\alpha - \beta > 0$ .
- β)** Ο  $\alpha$  να είναι μικρότερος από τον  $\beta$  και γράφουμε  $\alpha < \beta$  όταν η διαφορά  $\alpha - \beta < 0$ .
- γ)** Ο  $\alpha$  να είναι ίσος με τον  $\beta$  και γράφουμε  $\alpha = \beta$  όταν η διαφορά  $\alpha - \beta = 0$  .

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν δύο αριθμοί είναι τοποθετημένοι σε άξονα τότε μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα.
2. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το 0 .
3. Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος από το 0 .
4. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό .

### Πώς συγκρίνουμε δύο αριθμούς

Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, τότε βρίσκουμε την διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:

- Αν  $\alpha - \beta > 0$  τότε  $\alpha > \beta$
- Αν  $\alpha - \beta < 0$  τότε  $\alpha < \beta$
- Αν  $\alpha - \beta = 0$  τότε  $\alpha = \beta$

### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν στα μέλη προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό η φορά της ανίσωσης διατηρείται.

Γενικά ισχύει: Αν  $\alpha > \beta$  τότε **α)**  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$  και **β)**  $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

**Απόδειξη**

**a)** Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών  $\alpha + \gamma$ ,  $\beta + \gamma$ . Έτσι έχουμε:  
 $\alpha + \gamma - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$ . Είναι όμως  $\alpha > \beta$ , οπότε  $\alpha - \beta > 0$ .

Δηλαδή η διαφορά  $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$  είναι θετικός αριθμός, οπότε  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

**b)** Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών  $\alpha - \gamma$ ,  $\beta - \gamma$ . Έτσι έχουμε:  
 $\alpha - \gamma - (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma - \beta + \gamma = \alpha - \beta$ . Είναι όμως  $\alpha > \beta$ , οπότε  $\alpha - \beta > 0$ .

Δηλαδή η διαφορά  $(\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$  είναι θετικός αριθμός, οπότε  $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

- 2.** Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με ένα θετικό αριθμό τότε η φορά της ανίσωσης διατηρείται.

Γενικά ισχύει: Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > 0$  τότε **a)**  $\alpha\gamma > \beta\gamma$  και **b)**  $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

**Απόδειξη**

**a)** Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών  $\alpha\gamma$ ,  $\beta\gamma$ . Έτσι έχουμε:  
 $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$  (1). Είναι όμως  $\gamma > 0$  και  $\alpha - \beta > 0$ , αφού  $\alpha > \beta$ . Άρα οι αριθμοί  $\gamma$  και  $\alpha - \beta$  είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλ  $\gamma(\alpha - \beta) > 0$ . Άρα από την ισότητα (1) η διαφορά  $\alpha\gamma - \beta\gamma$  είναι θετικός αριθμός, οπότε  $\alpha\gamma > \beta\gamma$

**b)** Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών  $\frac{\alpha}{\gamma}$ ,  $\frac{\beta}{\gamma}$ . Έτσι έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \text{ (1).} \quad \text{Είναι όμως } \gamma > 0 \text{ και } \alpha - \beta > 0, \text{ αφού } \alpha > \beta.$$

Άρα οι αριθμοί  $\gamma$  και  $\alpha - \beta$  είναι θετικοί, οπότε έχουν πηλίκο θετικό, δηλ,

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} > 0$$

Άρα από την ισότητα (1) η διαφορά  $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}$  είναι θετικός αριθμός, οπότε  $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

- 3.** Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιάς ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε η φορά της ανίσωσης αλλάζει.

Γενικά ισχύει: Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma < 0$  τότε  $\alpha\gamma < \beta\gamma$  και  $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

- 4.** Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Από τις προηγούμενες ιδιότητες ισχύει και η μεταβατική ιδιότητα:  
Αν  $\alpha > \beta$  και  $\beta > \gamma$  τότε  $\alpha > \gamma$

- 5.** Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Γενικά ισχύει ότι:

Αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha\gamma > \beta\delta$

### Απόδειξη

Είναι  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > 0$ , οπότε σύμφωνα με τη 2) ιδιότητα  $\alpha\gamma > \beta\gamma$  (1)

Είναι  $\gamma > \delta$  και  $\beta > 0$ , οπότε  $\beta\gamma > \beta\delta$  (2), από τις (1) και (2) και από τη μεταβατική ιδιότητα  $\alpha\gamma > \beta\delta$ .

### Ακόμη ισχύουν:

- α)** Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.
- β)** Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.
- γ)** Το γινόμενο και το πηλίκο ομόσημων αριθμών είναι θετικός.
- δ)** Το γινόμενο και το πηλίκο ετερόσημων είναι αρνητικός
- ε)** Για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\alpha^2 \geq 0$ .

Επομένως: Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  
 $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , τότε  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$ .

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- α)** Δεν αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.
- β)** Δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.
- γ)** Όταν πολλαπλασιάζουμε ανισότητες κατά μέλη όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι θετικοί.

1. Αν  $x < 2\psi$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

- a)**  $3(x - 2\psi)$  και  $2(x - 4\psi)$   
**b)**  $2(3 - \psi)$  και  $3(-x + 5) + 2x$

### Λύση

- a)** Βρίσκω την διαφορά των αριθμών και την συγκρίνω με το 0.

$$3(x - 2\psi) - 2(x - 4\psi) = 3x - 6\psi - 2x + 8\psi = x - 2\psi < 0 \text{ διότι από την υπόθεση } x < 2\psi.$$

Άρα  $3(x - 2\psi) < 2(x - 4\psi)$

- b)** Βρίσκω την διαφορά των αριθμών και τη συγκρίνω με το 0.

$$2(3 - \psi) - [3(-x + 5) + 2x] = 6 - 2\psi + 3x - 15 - 2x = -9 + x - 2\psi < 0 \text{ διότι} \\ \text{έχουμε άθροισμα αρνητικών. Άρα } 2(3 - \psi) < 3(-x + 5) + 2x$$

2. **a)** Αν  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι με  $\alpha > \beta$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

- b)** Αν  $\alpha > 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  (Πότε ισχύει η ισότητα;)

- γ)** Αν  $\alpha < 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$  (Πότε ισχύει η ισότητα;)

### Λύση

- a)** οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι άρα  $\alpha\beta > 0$ . Πολλαπλασιάζω τα δύο μέλη της  $\alpha > \beta$  με  $\frac{1}{\alpha\beta} > 0$  και έχουμε  $\alpha > \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \alpha > \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

- b)** Αρκεί να δείξω ότι η διαφορά  $\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2$  είναι μη αρνητικός αριθμός.

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha^2 + 1 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \geq 0, \text{ διότι } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (είναι τετράγωνο ενός αριθμού) και } \alpha > 0. \text{ Η ισότητα ισχύει όταν } \alpha - 1 = 0 \text{ δηλαδή } \alpha = 1.$$

- γ)** Αρκεί να δείξω ότι η διαφορά  $\alpha + \frac{1}{\alpha} - (-2)$  δεν είναι θετικός αριθμός.

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - (-2) = \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 = \frac{\alpha^2 + 1 + 2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} \leq 0, \text{ διότι } (\alpha + 1)^2 \geq 0 \text{ (είναι τετράγωνο ενός αριθμού) και } \alpha < 0. \text{ Η ισότητα ισχύει όταν } \alpha + 1 = 0 \text{ δηλαδή } \alpha = -1.$$

3. Αν  $1 \leq x < 2$  και  $3 < \psi \leq 5$  να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων :

- a)**  $x + 2\psi$    **b)**  $-3x + 4\psi$    **γ)**  $\frac{x}{\psi}$    **δ)**  $3x - 4\psi$

**α)** Είναι  $1 \leq x < 2$  (1) και  $3 < \psi \leq 5$ , άρα  $2 \cdot 3 < 2 \cdot \psi \leq 2 \cdot 5$  ή  $6 < 2\psi \leq 10$  (2).

Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$1 + 6 < x + 2\psi < 2 + 10 \quad \text{ή} \quad 7 < x + 2\psi < 12$$

**β)** Είναι  $1 \leq x < 2$ , άρα  $-2 \cdot 1 \geq -2 \cdot x > -2 \cdot 2$  ή  $-4 < -2x \leq -2$  (1). Επίσης  $3 < \psi \leq 5$ , άρα  $4 \cdot 3 < 4 \cdot \psi \leq 4 \cdot 5$  ή  $12 < 4\psi \leq 20$  (2). Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$-4 + 12 < -2x + 4\psi \leq -2 + 20 \quad \text{ή} \quad 8 < -2x + 4\psi \leq 18 .$$

**γ)** Είναι  $1 \leq x < 2$  (1) και  $3 < \psi \leq 5$ , άρα  $\frac{1}{3} > \frac{1}{\psi} \geq \frac{1}{5}$  ή  $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\psi} < \frac{1}{3}$  (2).

Τις (1) και (2) τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, οπότε:

$$1 \cdot \frac{1}{5} \leq x \cdot \frac{1}{\psi} < 2 \cdot \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{5} \leq \frac{x}{\psi} < \frac{2}{3} .$$

**δ)** Είναι  $1 \leq x < 2$ , άρα  $3 \cdot 1 \leq 3x < 3 \cdot 2$  ή  $3 \leq 3x < 6$  (1). Επίσης  $3 < \psi \leq 5$ , άρα  $-4 \cdot 3 > -4\psi \geq -4 \cdot 5$  ή  $-12 < -4\psi \leq -20$  (2). Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$3 - 12 \leq 3x - 20 < 6 - 12 \quad \text{ή} \quad -17 \leq 3x - 20 < -6 .$$

**4.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

**α)**  $4 - \frac{3}{2}x > \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6}(4x-3) \quad \beta) \quad (x+1)^2 - (x-1)^2 < 0$

### Λύση

**α)** Έχουμε:  $4 - \frac{3}{2}x > \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6}(4x-3) \quad \text{ή} \quad 24 \cdot 4 - 24 \cdot \frac{3}{2}x > 24 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6}(4x-3) \quad \text{ή}$   
 $\quad \quad \quad 96 - 12 \cdot 3x > 3 \cdot 13 - 4 \cdot (4x-3) \quad \text{ή} \quad 96 - 36x > 39 - 16x + 12 \quad \text{ή} \quad -36x + 16x > 39 + 12 - 96 \quad \text{ή}$   
 $\quad \quad \quad \text{ή} \quad -20x > -45 \quad \text{ή} \quad \frac{-20x}{-20} < \frac{-45}{-20} \quad \text{ή} \quad x < \frac{9}{4}$

**β)**  $(x+1)^2 - (x-1)^2 < 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) < 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 < 0$   
 $\quad \quad \quad \text{ή} \quad 4x < 0 \quad \text{ή} \quad x < 0 .$

## A. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
2. Αν  $\alpha > -2$  και  $x > \psi$  τότε ισχύει  $\alpha x > -2\psi$
3. Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha \beta > \gamma \delta$
4. Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha - \gamma > \beta - \delta$
5. Η λόση της ανίσωσης  $0x > 3$  είναι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 3
6. Αν  $\alpha^2 > 0$  τότε  $\alpha > 0$
7. Αν  $\alpha^3 > 0$  τότε  $\alpha > 0$
8. Αν  $\alpha < 1$  και  $\beta < 1$  τότε  $\alpha\beta < 1$
9. Αν  $\alpha < \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ .
10. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ , τότε  $\alpha < \beta$ .
11. Αν  $\alpha > \beta$ , τότε  $\alpha^2 > \beta^2$
12. Αν  $\alpha \cdot \beta > 0$ , τότε  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί.
13. Αν  $\alpha > \beta$  και  $\alpha > \gamma$ , τότε  $\beta > \gamma$
14. Αν  $\alpha+x > \beta+\psi$ , τότε  $\alpha > \beta$
15. Αν  $\alpha \geq \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$
16. Αν ο αριθμός  $x$  είναι το πολύ 5, τότε  $x \leq 5$
17. Αν ο αριθμός  $x$  είναι τουλάχιστον 8 τότε  $x \geq 8$
18. Αν ο αριθμός  $x$  δεν υπερβαίνει το 5 τότε  $x < 5$
19. Η ανίσωση  $-2x > -5x$  αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**20.** Η ανίσωση  $0 \cdot x < 3$  είναι αδύνατη .

**21.** Αν  $x > 1$  τότε  $2x-1 < 0$

**22.** Αν  $x > 0$  τότε  $x > 2x$

**23.** Αν  $x < 0$  τότε  $x > 2x$

**24.** Αν  $\alpha < \beta < 0$  τότε  $\alpha^2 > \beta^2$

**25.** Αν  $\frac{\alpha}{\beta} < 0$  τότε  $\alpha \cdot \beta > 0$

**26.** Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta \geq 0$  τότε  $\alpha \cdot \beta < 0$

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

**1.** Η λύση της ανίσωσης  $-2x < 4$  είναι:

- α.** 0, -2   **β.** Όλοι οι αριθμοί μικρότεροι του -2   **γ.** Όλοι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του -2.

**2.** Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, για τον οποίο ισχύει  $-3x > -7$ :

- α.** -2   **β.** 2   **γ.** 0   **δ.** 1   **ε.** -1

**3.** Αν  $x < 1$  τότε ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι λανθασμένη:

- α.**  $1 + x < 2$    **β.**  $x-2 < -1$    **γ.**  $3-x > 2$    **δ.**  $3x < 3$    **ε.**  $x^2 < 1$ .

**4.** Αν  $x(\psi - 1) < 0$  και  $x > 0$ , τότε ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή.

- α.**  $\psi = 1$    **β.**  $\psi < 0$    **γ.**  $\psi < 1$    **δ.**  $\psi > 0$    **ε.**  $\psi > 1$

**5.** Αν  $v \in N^*$  τότε:

$$\text{α. } \frac{v+1}{v} < 1 \quad \text{β. } \frac{v+1}{v} > 1 \quad \text{γ. } \frac{v+1}{v} < \frac{1}{2}$$

1. Αν  $1 < x < 2$ , να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:  
**a)**  $(1-x)(x-2)(x+3) \times$  **b)**  $(x+2)(x-\frac{1}{2})(x-3)(2-x)$
2. Αν  $\alpha < \beta$ , να συγκριθούν οι αριθμοί:  
**a)**  $5\alpha - 5x$  και  $5\beta - 5x$  **b)**  $\frac{3\alpha + 4x}{-5}$  και  $\frac{3\beta + 4x}{-5}$
3. Να αποδείξετε ότι, αν  $\alpha > \beta > \gamma$ , τότε:  
**a)**  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(2\alpha - \beta) > 0$  **b)**  $3\alpha - \beta + \gamma > 2\beta + \gamma$
4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει:  $0 < \alpha < \beta$ , να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:  
**a)**  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$  και 1 **b)**  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  και 1
5. Αν  $0 < x < 1$  και  $-2 < \psi < -1$ , να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:  
**a)**  $-x$  **b)**  $-3\psi$  **c)**  $x + \psi$  **d)**  $x - \psi$  **e)**  $2x - 3\psi$
6. Αν  $0 < x < \psi$  τότε:  
**a)** Να δείξετε ότι:  $\frac{x-10}{x} < \frac{\psi-10}{\psi}$   
**b)** Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα κλάσματα  $\frac{1997}{2007}, \frac{1998}{2008}, \frac{1999}{2009}$
7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:  
**a)**  $4 - \frac{3}{2}x > \frac{3}{8} - \frac{1}{6}(4x-12)$  **b)**  $7(2x-3) - \frac{3(x-2)-1}{4} > \frac{x}{3} - 2$   
**c)**  $\frac{3-2x}{6} > \frac{2x-1}{4}$  **d)**  $\frac{x-1}{4} < \frac{3x-5}{-2}$
8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:  
**a)**  $\frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}$  και  $2-x > 2x-8$   
**b)**  $(x+1)^2 > x(x+1)$  και  $4x(x-1) \geq (2x-1)^2$
9. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:  
 $-2(x-3) \geq 4(x-6)+5$  και  $\frac{5(x-2)}{2} + 3 > \frac{3x+1}{2}$

10. Να βρεθούν οι τιμές του  $x$ , για τις οποίες ισχύει:

$$\text{Ⓐ) } x-1 \leq 2(1-2x) < 4-x \quad \text{Ⓑ) } \frac{3x+2}{4} \leq x-1 \leq \frac{2-x}{3}$$

11. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του  $\lambda$ , για τις οποίες το κλάσμα  $\frac{2\lambda - 1}{4}$  να περιλαμβάνεται μεταξύ -2 και 3.

12. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που επαληθεύει το σύστημα των ανισώσεων:

$$5x - \frac{3-2x}{2} > \frac{7x-5}{2} + x \quad (1) \text{ και } \frac{7x-2}{3} - 2x < 5 - \frac{x-2}{4} \quad (2)$$

13. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{Ⓐ) } 3x + 4 = 2(x - 3) \text{ και } 3(2x - 4) \leq 3 - 5(5 - x)$$

$$\text{Ⓑ) } (4x - 1)(x - 3) = 0 \text{ και } 3x - 7 \leq -4x$$

14. **Ⓐ**) Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος  $x$  που επαληθεύει την ανίσωση

$$14,6 - \frac{2 \cdot 5 - x}{10} < 11,6 - \frac{2 \cdot 0 - 2x}{10}$$

- Ⓑ**) Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος  $x$  που επαληθεύει την ανίσωση

$$\frac{x-3}{2} - \frac{4x+2}{3} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

15. Τρείς διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο από το 17. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

16. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που το διπλάσιο του αυξημένο κατά 8 υπερβαίνει το 53.

17. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που το τριπλάσιο του αυξημένο κατά 10 δεν υπερβαίνει το μισό του.

18. Ένας πλασιέ βιβλίων αμείβεται με 20 ευρώ για κάθε εγκυκλοπαίδεια που πουλάει. Τα ημερήσια έξοδά του είναι 35 ευρώ. Να υπολογίσετε πόσες εγκυκλοπαίδειες ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ σε 10 ημέρες.

19. Ένας πατέρας ρωτήθηκε πόσα παιδιά έχει και απάντησε: "Έχω 30 ευρώ. Αν δώσω από 8 ευρώ σε κάθε παιδί τότε δεν μου φθάνουν τα χρήματα που έχω. Αν όμως δώσω από 7 ευρώ σε κάθε παιδί, τότε περισσεύουν και χρήματα." Πόσα παιδιά είχε;

20. Έστω η παράσταση  $A = 3x - 5$ . Να βρείτε τις τιμές του  $x$  ώστε η παράσταση  $A$

**Ⓐ**) να παίρνει το πολύ την τιμή 10

**Ⓑ**) να παίρνει τουλάχιστον την τιμή 5

**Ɣ**) να υπερβαίνει το 0

**Ⓓ**) να παίρνει μη αρνητικές τιμές.

**1** Το áθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών το βρίσκουμε με τον τύπο:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**a)** Να βρείτε το πλήθος ν αν το áθροισμα αυτό είναι: 105.

**b)** Να βρείτε το μικρότερο ν αν το áθροισμα αυτό είναι μεγαλύτερο του 10.

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $x+x+1+x+2+\dots+x+10 = 66$  όπου x φυσικός.

**2** Δίνεται η εξίσωση  $ax = a - 5$ , όπου a είναι ακέραιος.

**a)** Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του a.

**b)** Να βρεθούν οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης.

**3** Τρίγωνο ABC έχει πλευρές AB = x, AC = x + 2 και BC = 10.

Αν ισχύει ότι  $(x+2)^2 - x^2 = 28$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

**4** Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β που ικανοποιούν τη σχέση:  $\alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + 4\beta + 5 = 0$ .

## 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα 1

- A. **a)** Τι λέμε επίλυση μιάς εξίσωσης;  
**β)** Τι λέμε διακρίνουσα;  
**γ)** Ποια εξίσωση λέγεται κλασματική;  
**δ)** Ποιες εξισώσεις λέγονται ισοδύναμες;
- B. **a)** Να λυθεί η εξίσωση:  $x^2 - 4x = -3$ . (1)  
**β)** Αν λη μικρότερη τιμή που βρήκατε από το (a) ερώτημα να λύσετε την εξίσωση.

### Θέμα 2

Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{3}{x+1}$ ,  $B = \frac{2}{3x-3}$ ,  $\Gamma = \frac{x-3}{2(x^2-1)}$

**a)** Να βρείτε για ποιές τιμές του x ορίζεται η κάθε μία.

**β)** Να λύσετε την εξίσωση:  $\Gamma = A + \frac{1}{2}B$ .

**Θέμα 3**

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-4(x+4) \leq 3(x+1)+4 \text{ και } \frac{5(x-2)}{2} + 3 < \frac{3x+1}{2}$$

- α)** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις
- β)** Να βρεθούν οι κοινές ακέραιες λύσεις

**Θέμα 4**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 4\lambda x + 4\lambda^2 - 1 = 0$  (1)

- α)** Να λυθεί η εξίσωση (1)
- β)** Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της (1) να βρείτε το  $\lambda$  αν ισχύει  $-1 < \rho_1 \leq 3$  και  $-1 < \rho_2 \leq 3$ .

**2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης****Θέμα 1**

- A.**
  - α)** Ποια εξίσωση λέγεται αδύνατη ποια είναι η μορφή της.
  - β)** Ποια εξίσωση λέγεται 2<sup>ου</sup> βαθμού, ποια είναι η γενική της μορφή
  - γ)** Πώς λύνουμε μία εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με διακρίνουσα
- B.**
  - α)** Πώς γίνεται παραγοντοποίηση ένα τριώνυμο με την βοήθεια της διακρίνουσας
  - β)** Ποια εξίσωση ονομάζεται πλασματική

**Θέμα 2**

Αν  $1 \leq x \leq 4$  και  $3 \leq \psi \leq 7$ , να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές παραστάσεων:

$$\text{α)} 2x+3\psi \quad \text{β)} 2x-5\psi \quad \text{γ)} \frac{x}{\psi} \quad \text{δ)} \frac{3x-1}{2\psi-3}$$

**Θέμα 3**

Δίνονται οι εξισώσεις:  $3x + 6 = 9$  (1),  $x^2 - 4ax + 3 = 0$  (2)

- α)** Να βρείτε την τιμή του  $a$  ώστε οι εξισώσεις να έχουν κοινή λύση

**β)** Για την τιμή του α που βρήκατε από το α) ερώτημα να βρείτε την άλλη λύση της (2).

#### Θέμα 4

**α)** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{2x}{3x-9} + \frac{1}{x} = \frac{3}{3x-x^2}$

**β)** Ένας έμπορος πλήρωσε 3000 ευρώ και προμηθεύτηκε βιβλία. Πούλησε ορισμένα από αυτά και εισέπραξε 1800 ευρώ κερδίζοντας από το κάθε βιβλίο 3 ευρώ. Επειδή του έμειναν αδιάθετα ακόμα 100 βιβλία, αναγκάστηκε να τα πουλήσει στην τιμή που τα προμηθεύτηκε. Να βρείτε σε ποια τιμή πούλησε ο έμπορος τα τελευταία 100 βιβλία.

### Λύσεις 2ου Κεφαλαίου

#### 2.1 Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

##### Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α	β	γ	δ
1	3	2	1

2.

α)	β)	γ)	δ)	ε)
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

### Προτεινόμενες ασκήσεις

1. **α)**  $-3(x+2) - 2(x-1) = 8 + x$  ή  $-3x - 6 - 2x + 2 = 8 + x$  ή  $-3x - 2x - x = 8 + 6 - 2$   
ή  $-6x = 12$  άρα  $x = -2$   
**β)**  $4\psi - 2(\psi - 3) = 2\psi + 1$  ή  $4\psi - 2\psi + 6 = 2\psi + 1$  ή  $4\psi - 2\psi - 2\psi = 1 - 6$  ή  
 $0\psi = -5$  αδύνατη  
**γ)**  $5(-\omega + 2) - 4 = 6 - 5\omega$  ή  $-5\omega + 10 - 4 = 6 - 5\omega$  ή  $-5\omega + 5\omega = 6 - 10 + 4$  ή  
 $0\omega = 0$  ταυτότητα

**δ)**  $(2x+1)^2 + 5 = 4(x^2 - 10)$  ή  $4x^2 + 4x + 1 + 5 = 4x^2 - 40$  ή  $4x^2 - 4x^2 + 4x = -40 - 1 - 5$  ή  
 $\text{ή } 4x = -46 \text{ ή } x = -\frac{46}{4} \text{ ή } x = -\frac{23}{2}$ .

**2.**

**a)**  $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = x - \frac{1}{3}$  ή  $6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{x+3}{6} = 6 \cdot x - 6 \cdot \frac{1}{3}$  ή  $3 \cdot (x-1) - (x+3) = 6x - 2$  ή  
 $\text{ή } 3x - 3 - x - 3 = 6x - 2 \text{ ή } 3x - x - 6x = 3 + 3 - 2 \text{ ή } -4x = 4 \text{ ή } x = -1$

**β)**  $\frac{\psi + 5}{5} - \frac{\psi}{2} = 1 - \frac{3\psi}{10}$  ή  $10 \cdot \frac{\psi + 5}{5} - 10 \cdot \frac{\psi}{2} = 1 \cdot 10 - 10 \cdot \frac{3\psi}{10}$  ή  $2(\psi + 5) - 5\psi = 10 - 3\psi$   
 $\text{ή } 2\psi + 10 - 5\psi = 10 - 3\psi \text{ ή } 2\psi - 5\psi + 3\psi = 10 - 10 \text{ ή } 0\psi = 0 \text{ ταυτότητα.}$

**γ)**  $\frac{2(\omega - 1)}{3} - \frac{\omega + 1}{2} = \frac{\omega - 5}{6}$  ή  $6 \cdot \frac{2(\omega - 1)}{3} - 6 \cdot \frac{\omega + 1}{2} = 6 \cdot \frac{\omega - 5}{6}$  ή  
 αδύνατη

**δ)**  $0,2(3x - 4) - 5(x - 0,4) = 0,4(1 - 10x)$  ή  $0,6x - 0,8 - 5x + 2 = 0,4 - 4x$  ή  
 $\text{ή } 0,6x - 5x + 4x = 0,8 - 2 + 0,4 \text{ ή } -0,4x = -0,8 \text{ άρα } x = 2$

**3.** Αν  $x$  είναι ο αριθμός τότε  $3x - 5 = \frac{x}{2} + 10$  ή  $2(3x - 5) = 2(\frac{x}{2} + 10)$  ή  
 $\text{ή } 6x - 10 = x + 20 \text{ ή } 6x - x = 20 + 10 \text{ ή } 5x = 30 \text{ ή } x = 6$

**4.** Έστω είχε  $x$  ευρώ τότε:  $x + \frac{x}{2} + 10 = 100$  ή  $2x + 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot 10 = 2 \cdot 100$  ή  
 $\text{ή } 2x + x + 20 = 200 \text{ ή } 3x = 180 \text{ ή } x = 60$ . Άρα είχε 60 ευρώ.

**5.** Έστω ένας μαθητής σκέφτηκε τον αριθμό  $x$  τότε:

$$(2x+10): 2 - x = \frac{2x+10}{2} - x = \frac{2(x+5)}{2} - x = x+5-x = 5$$

δηλ. έχουμε ταυτότητα.

**6.** Έστω ο ποδηλάτης θα κινηθεί  $x$  ώρες, η φίλη του θα κινηθεί  $x-1$  ώρες.  
 Τότε  $16x + 12(x - 1) = 44$  ή  $16x + 12x - 12 = 44$  ή  $28x = 44 + 12$  ή  
 $\text{ή } 28x = 56 \text{ δηλ. } x = 2 \text{ ώρες.}$

## Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Λ	$\Sigma$	$\Sigma$	Λ	$\Sigma$	$\Sigma$

2.

α)	β)	γ)	
$\Sigma$	Λ	$\Sigma$	$\Sigma$

3. Η απλοποίηση με x γίνεται εφόσον  $x \neq 0$ .

## Προτεινόμενες ασκήσεις

1.

α)  $(x-4)(x+1) = 0 \quad \text{ή} \quad x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x+1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -1$

β)  $\psi(\psi+5) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi+5 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = -5$

γ)  $(3-\omega)(2\omega+1) = 0 \quad \text{ή} \quad 3-\omega = 0 \quad \text{ή} \quad 2\omega+1 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 3 \quad \text{ή} \quad \omega = -\frac{1}{2}$ .

δ)  $7x(x-7) = 0 \quad \text{ή} \quad 7x = 0 \quad \text{ή} \quad x-7 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 7$

ε)  $3\psi\left(\frac{\psi}{3}-2\right) = 0 \quad \text{ή} \quad 3\psi = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\psi}{3}-2\right) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\psi}{3} = 2 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 6$

στ)  $\left(\frac{1}{2}-\omega\right)(2\omega-1) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}-\omega = 0 \quad \text{ή} \quad 2\omega-1 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{2}$  (διπλή).

2.

α)  $x^2 = 7x \quad \text{ή} \quad x^2-7x = 0 \quad \text{ή} \quad x(x-7) = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x-7 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 7$

β)  $-\psi^2 = 9\psi \quad \text{ή} \quad -\psi^2-9\psi = 0 \quad \text{ή} \quad -\psi(\psi+9) = 0 \quad \text{ή} \quad -\psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi+9 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = -9$

γ)  $2\omega^2-72 = 0 \quad \text{ή} \quad 2(\omega^2-36) = 0 \quad \text{ή} \quad 2(\omega-6)(\omega+6) = 0 \quad \text{ή} \quad \omega-6 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega+6 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 6 \quad \text{ή} \quad \omega = -6$

δ)  $-2t^2-18 = 0 \quad \text{ή} \quad -2t^2 = 18 \quad \text{ή} \quad t^2 = -9$  αδύνατη.

ε)  $-0,2\varphi^2+3,2 = 0 \quad \text{ή} \quad -0,2\varphi^2 = -3,2 \quad \text{ή} \quad \varphi^2 = \frac{-3,2}{0,2} \quad \text{ή} \quad \varphi^2 = 16 \quad \text{ή} \quad \varphi = -4 \quad \text{ή} \quad \varphi = +4$

στ)  $\frac{z^2}{6}-0,5z = 0 \quad \text{ή} \quad 6 \cdot \frac{z^2}{6}-6 \cdot 0,5z = 0 \quad \text{ή} \quad z^2-3z = 0 \quad \text{ή} \quad z(z-3) = 0 \quad \text{ή} \quad z = 0 \quad \text{ή} \quad z-3 = 0 \quad \text{ή} \quad z = 0 \quad \text{ή} \quad z = 3$

## 3.

**a)**  $(2x-1)^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (2x-1-1)(2x-1+1) = 0 \quad \text{ή} \quad (2x-2) \cdot 2x = 0 \quad \text{ή} \quad 2x-2 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x = 0 \quad \text{ή}$   
 $\quad \text{ή} \quad 2x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 0$

**b)**  $3(x+2)^2 = 12 \quad \text{ή} \quad (x+2)^2 = 4 \quad \text{ή} \quad x+2 = 2 \quad \text{ή} \quad x+2 = -2 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -4$

**γ)**  $(x+1)^2 = 2x \quad \text{ή} \quad x^2 + 2x + 1 = 2x \quad \text{ή} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 = -1 \quad \text{αδύνατη}$

**δ)**  $\frac{(x-9)^2}{3} = 27 \quad \text{ή} \quad 3 \cdot \frac{(x-9)^2}{3} = 3 \cdot 27 \quad \text{ή} \quad (x-9)^2 = 81 \quad \text{ή} \quad x-9 = 9 \quad \text{ή} \quad x-9 = -9 \quad \text{ή} \quad x = 18 \quad \text{ή}$   
 $x = 0$

**ε)**  $(3x-1)^2 - 4x^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (3x-1)^2 - (2x)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (3x-1-2x)(3x-1+2x) = 0 \quad \text{ή} \quad (x-1)(5x-1) = 0 \quad \text{ή}$   
 $\quad \text{ή} \quad x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad 5x-1 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{5}.$

**στ)**  $(x+\sqrt{3})^2 - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad (x+\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2 = 0 \quad \text{ή} \quad (x+\sqrt{3} - \sqrt{3})(x+\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0 \quad \text{ή}$   
 $x(x+2\sqrt{3}) = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x+2\sqrt{3} = 0 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -2\sqrt{3}$

## 4.

**a)**  $(3x+1)^2 = 5(3x+1) \quad \text{ή} \quad (3x+1)^2 - 5(3x+1) = 0 \quad \text{ή} \quad (3x+1)(3x+1-5) = 0 \quad \text{ή} \quad (3x+1)(3x-4) = 0$   
 $\quad \text{ή} \quad 3x+1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{3}, \quad \text{ή} \quad x = \frac{4}{3}$

**β)**  $0,5(1-\psi)^2 = 18 \quad \text{ή} \quad (1-\psi)^2 = \frac{18}{0,5} \quad \text{ή} \quad (1-\psi)^2 = 36 \quad \text{ή} \quad 1-\psi = 6 \quad \text{ή} \quad 1-\psi = -6 \quad \text{ή} \quad \psi = -5$   
 $\quad \text{ή} \quad \psi = 7$

**γ)**  $(2\omega^2+1)(\omega^2-16) = 0 \quad \text{ή} \quad (2\omega^2+1)(\omega-4)(\omega+4) = 0 \quad \text{ή} \quad 2\omega^2+1 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega-4 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega+4 = 0 \quad \text{ή}$   
 $\quad \text{ή} \quad \omega^2 = -1 \quad \text{αδύνατη}, \quad \omega = 4 \quad \text{ή} \quad \omega = -4$

## 5.

**a)**  $x(x-4) = -4 \quad \text{ή} \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{ή} \quad (x-2)^2 = 0 \quad \text{ή} \quad x-2 = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad (\deltaιπλή)$

**β)**  $\psi^2 + \psi - 12 = 0 \quad \text{ή} \quad (\psi-3)(\psi+4) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi-3 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi+4 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 3 \quad \text{ή} \quad \psi = -4$

**γ)**  $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0 \quad \text{ή} \quad (\omega+3)(\omega-5) = 0 \quad \text{ή} \quad \omega+3 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega-5 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = -3 \quad \text{ή} \quad \omega = 5$

**δ)**  $2t^2 - 7t + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad 16t^2 - 56t + 48 = 0 \quad \text{ή} \quad (4t)^2 - 2 \cdot 4t \cdot 7 = -48 \quad \text{ή} \quad (4t)^2 - 2 \cdot 4t \cdot 7 + 7^2 = 7^2 - 48$   
 $\quad \text{ή} \quad (4t-7)^2 = 1 \quad \text{άρα} \quad 4t-7 = 1 \quad \text{ή} \quad 4t-7 = -1 \quad \text{δηλ} \quad t = 2 \quad \text{ή} \quad t = \frac{3}{2}.$

**ε)**  $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi \quad \text{ή} \quad 3\varphi^2 - 4\varphi + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 36\varphi^2 - 48\varphi + 12 = 0 \quad \text{ή} \quad (6\varphi)^2 - 2 \cdot 6\varphi \cdot 4 = -12 \quad \text{ή}$   
 $\quad (6\varphi)^2 - 2 \cdot 6\varphi \cdot 4 + 4^2 = 4^2 - 12 \quad \text{ή} \quad (6\varphi-4)^2 = 4 \quad \text{άρα} \quad 6\varphi-4 = 2 \quad \text{ή} \quad 6\varphi-4 = -2 \quad \text{δηλ} \quad \varphi = 1 \quad \text{ή} \quad \varphi = \frac{1}{3}$

**στ)**  $5z^2 - 3z - 8 = 0 \quad \text{ή} \quad 100z^2 - 60z - 160 = 0 \quad \text{ή} \quad (10z)^2 - 2 \cdot 10z \cdot 3 = 160 \quad \text{ή}$

$(10z)^2 - 2 \cdot 10z \cdot 3 + 3^2 = 160 + 3^2 \quad \text{ή} \quad (10z-3)^2 = 169 \quad \text{άρα} \quad 10z-3 = 13 \quad \text{ή} \quad 10z-3 = -13$

$\delta\eta\lambda z = \frac{8}{5} \quad \text{ή} \quad z = -1$

**Κεφάλαιο 2****6.**

**a)**  $25x^2 + 10x + 1 = 0$  ή  $(5x+1)^2 = 0$  ή  $5x+1 = 0$  ή  $x = -\frac{1}{5}$  (διπλή)

**b)**  $\psi^2(\psi-2) + 4\psi(\psi-2) + 4\psi - 8 = 0$  ή  $\psi^2(\psi-2) + 4\psi(\psi-2) + 4(\psi-2) = 0$  ή  
 $\psi(\psi-2)(\psi^2 + 4\psi + 4) = 0$  ή  $(\psi-2)(\psi+2)^2 = 0$  ή  $\psi-2 = 0$  ή  $\psi+2 = 0$  ή  $\psi = 2$  ή  $\psi = -2$   
(διπλή)

**γ)**  $\omega^2 + 2006\omega - 2007 = 0$  ή  $(\omega-1)(\omega+2007) = 0$  ή  $\omega-1 = 0$  ή  $\omega+2007 = 0$  ή  
 ή  $\omega = 1$  ή  $\omega = -2007$

**7.**

**a)**  $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$  ή  $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$  ή  $x-\alpha = 0$  ή  $x-\beta = 0$  ή  $x = \alpha$  ή  $x = \beta$

**b)**  $x^2 - (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0$  ή  $(x+1)(x-\sqrt{3}) = 0$  ή  $x+1 = 0$  ή  $x-\sqrt{3} = 0$  ή  $x = -1$  ή  
 $x = \sqrt{3}$

**8.****Οριζόντια:**

1. 12 , 15

2. 0 , 32

3. 10, 1

4. 25, 32

**Κάθετα:**

1. 10

2. 15

3. 30

4. 12

5. 12

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****1.**

α	β	γ	δ
2	3	1	4

**2.**

α)	β)	γ)
Λ	Σ	Λ

**3. Οι β) και δ)**

1.

Εξίσωση	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$x(x-1) = -2$	$x^2 - x + 2 = 0$	1	-1	2
$3x^2 + 4 = 2(x + 2)$	$3x^2 - 2x + 0 = 0$	3	-2	0
$(x-1)^2 = 2(x^2 - x)$	$-x^2 + 0x + 1 = 0$	-1	0	1

2.

a)  $x^2 - x - 2 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = -2$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$ , δηλ είναι  $x = \frac{1+3}{2} = 2$  ή  $x = \frac{1-3}{2} = -1$

b)  $4\psi^2 + 3\psi - 1 = 0$ . Είναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = -1$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $\psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm 5}{8}$  δηλ είναι  $\psi = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$  ή  $\psi = \frac{-3-5}{8} = -1$

c)  $-2\omega^2 + \omega + 6 = 0$ . Είναι  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 6$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 1 + 48 = 49 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4}$  δηλ είναι  $\omega = \frac{-1+7}{-4} = -\frac{3}{2}$  ή  $\omega = \frac{-1-7}{-4} = 2$

d)  $2z^2 - 3z + 1 = 0$ . Είναι  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -3$ ,  $\gamma = 1$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$  δηλ είναι  $z = \frac{3+1}{4} = 1$  ή  $z = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

e)  $-25t^2 + 10t - 1 = 0$ . Είναι  $\alpha = -25$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = -1$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4 \cdot (-25) \cdot (-1) = 100 - 100 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες τις  $t = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-10}{2 \cdot (-25)} = \frac{1}{5}$  (διπλή)

f)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ . Είναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = -12$ ,  $\gamma = 9$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες τις  $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$  (διπλή)

**Κεφάλαιο 2**

¶)  $3x^2 + 18x + 27 = 0$ . Είναι  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 18$ ,  $\gamma = 27$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$   
 $= 18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27 = 324 - 324 = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες τις  $x = \frac{-\beta}{2\alpha} =$   
 $= \frac{-18}{2 \cdot 3} = -3$  (διπλή)

¶)  $x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -4$ ,  $\gamma = -5$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  
 $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$  δηλ. είναι  $x = \frac{4+6}{2} = 5$  ή  $x = \frac{4-6}{2} = -1$

Θ)  $x^2 - 3x + 7 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -3$ ,  $\gamma = 7$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

**3.**

$x^2 - 7x = 0$ . i) Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -7$ ,  $\gamma = 0$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$   
 $= (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 49 - 0 = 49 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$   
 $= \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 7}{2}$  δηλ. είναι  $x = \frac{7+7}{2} = 7$  ή  $x = \frac{7-7}{2} = 0$

ii)  $x^2 - 7x = 0$  ή  $x(x-7) = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x-7 = 0$  ή  $x = 0$  ή  $x = 7$

β)  $x^2 - 16 = 0$ . i) Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = -16$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$   
 $= 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 0 + 64 = 64 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$   
 $= \frac{0 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 8}{2} = \pm 4$  δηλ  $x = 4$  ή  $x = -4$

ii)  $x^2 - 16 = 0$  ή  $x^2 - 4^2 = 0$  ή  $(x-4)(x+4) = 0$  ή  $x-4 = 0$  ή  $x+4 = 0$  ή  $x = 4$  ή  $x = -4$

**4.**

$3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1$  ή  $3x^2 - 2x + 2 = 2x + 1$  ή  $3x^2 - 2x + 2 - 2x - 1 = 0$  ή  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ .

Είναι  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -4$ ,  $\gamma = 1$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 =$   
 $= 16 - 12 = 4 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} =$   
 $= \frac{4 \pm 2}{6}$ , δηλ  $x = \frac{4+2}{6} = 1$  ή  $x = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

β)  $(\psi+2)^2 + (\psi-1)^2 = 5(2\psi+3)$  ή  $\psi^2 + 4\psi + 4 + \psi^2 - 2\psi + 1 = 10\psi + 15$  ή

$\psi^2 + 4\psi + 4 + \psi^2 - 2\psi + 1 - 10\psi - 15 = 0$  ή  $2\psi^2 - 8\psi - 10 = 0$  ή  $\psi^2 - 4\psi - 5 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  
 $\beta = -4$ ,  $\gamma = -5$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $\psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$ , δηλ  
 $\psi = \frac{4+6}{2} = 5$  ή  $\psi = \frac{4-6}{2} = -1$

γ)  $(2\omega-3)^2 - (\omega-2)^2 = 2\omega^2 - 11 \quad \text{ή} \quad 4\omega^2 - 12\omega + 9 - (\omega^2 - 4\omega + 4) = 2\omega^2 - 11 \quad \text{ή}$

$$4\omega^2 - 12\omega + 9 - \omega^2 + 4\omega - 4 - 2\omega^2 + 11 = 0 \quad \text{ή} \quad \omega^2 - 8\omega + 16 = 0.$$

Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -8$ ,  $\gamma = 16$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$ .

Αρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες τις  $\omega = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$  (διπλή)

δ)  $\varphi(8-\varphi) - (3\varphi+1)(\varphi+2) = 1 \quad \text{ή} \quad 8\varphi - \varphi^2 - (3\varphi^2 + 6\varphi + \varphi + 2) = 1 \quad \text{ή} \quad 8\varphi - \varphi^2 - 3\varphi^2 - 6\varphi - \varphi - 2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad -4\varphi^2 + \varphi - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad 4\varphi^2 - \varphi + 3 = 0.$  Είναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 3$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1 - 48 = -47 < 0$ . Αρα είναι αδύνατη.

5.

α)  $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{x + 3}{5} = x - 2 \quad \text{ή} \quad 15 \frac{x^2 - 1}{3} - 15 \frac{x + 3}{5} = 15(x - 2) \quad \text{ή} \quad 5(x^2 - 1) - 3(x + 3) = 15(x - 2)$

$$\text{ή} \quad 5x^2 - 5 - 3x - 9 = 15x - 30 \quad \text{ή} \quad 5x^2 - 18x + 16 = 0. \quad \Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16 = 324 - 320 = 4 > 0$$

$$\text{Άρα } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 5} = \frac{18 \pm 2}{10}. \text{ Άρα } x = \frac{18 + 2}{10} = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{18 - 2}{10} = \frac{8}{5}$$

β)  $\frac{\psi^2}{3} - \frac{6\psi + 1}{4} = \frac{\psi - 2}{6} \cdot 2 \quad \text{ή} \quad 12 \cdot \frac{\psi^2}{3} - 12 \cdot \frac{6\psi + 1}{4} = 12 \cdot \frac{\psi - 2}{6} \cdot 2 \cdot 12 \quad \text{ή}$

$$4\psi^2 - 3(6\psi + 1) = 2(\psi - 2) \cdot 24 \quad \text{ή} \quad 4\psi^2 - 18\psi - 3 = 2\psi - 4 \cdot 24 \quad \text{ή} \quad 4\psi^2 - 20\psi + 25 = 0.$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0. \text{ Άρα έχουμε μία διπλή ρίζα } \psi = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-20}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{5}{2}$$

γ)  $0,5t^2 - 0,4(t+2) = 0,7(t-2) \quad \text{ή} \quad 5t^2 - 4(t+2) = 7(t-2) \quad \text{ή} \quad 5t^2 - 4t - 8 = 7t - 14 \quad \text{ή} \quad 5t^2 - 11t + 6 = 0$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 121 - 120 = 1 > 0. \text{ Άρα } t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 5} = \frac{11 \pm 1}{10}$$

$$\text{Άρα } t = \frac{11+1}{10} = \frac{6}{5} \quad \text{ή} \quad t = \frac{11-1}{10} = 1.$$

δ)  $\frac{\omega}{2}(\sqrt{3}\omega - 7) = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \omega(\sqrt{3}\omega - 7) = -2\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \sqrt{3}\omega^2 - 7\omega + 2\sqrt{3} = 0.$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 49 - 8 \cdot 3 = 25 > 0. \text{ Άρα } \omega = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{7 \pm 5}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Άρα } \omega = \frac{7+5}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{7-5}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Κεφάλαιο 2**

**6.**

**α)** Λύνω την εξίσωση  $x^2+4x-12 = 0$ .  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0$ , άρα  $x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$ , άρα  $x = \frac{-4 - 8}{2} = -6$  ή  $x = \frac{-4 + 8}{2} = 2$ .  
Άρα  $x^2+4x-12 = (x+6)(x-2)$ .

**β)** Λύνω την εξίσωση  $3\psi^2 - 8\psi + 5 = 0$ .  $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4 > 0$ , άρα  $\psi = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 2}{6}$ . Άρα  $\psi = \frac{8+2}{6} = \frac{5}{3}$  ή  $\psi = \frac{8-2}{6} = 1$ .  
Άρα  $3\psi^2 - 8\psi + 5 = 3(\psi-1)(\psi-\frac{5}{3})$

**γ)** Λύνω την εξίσωση  $-2\omega^2 + 5\omega - 3 = 0$ .  $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 25 - 24 = 1 > 0$ , άρα  $\omega = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm 1}{-4}$ . Άρα  $\omega = \frac{-5-1}{-4} = \frac{3}{2}$  ή  $\omega = \frac{-5+1}{-4} = 1$   
άρα,  $-2\omega^2 + 5\omega - 3 = -2(\omega-1)(\omega-\frac{3}{2})$

**δ)** Λύνω την εξίσωση  $x^2 - 16x + 64 = 0$ .  $\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 256 - 256 = 0$ , άρα  $x = \frac{-(-16)}{2} = 8$  (διπλή), άρα  $x^2 - 16x + 64 = (x-8)(x-8) = (x-8)^2$ .

**ε)** Λύνω την εξίσωση  $9\psi^2 + 12\psi + 4 = 0$ .  $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$ , άρα  $\psi = \frac{-12}{2 \cdot 9} = -\frac{2}{3}$  (διπλή), άρα  $9\psi^2 + 12\psi + 4 = 9(\psi + \frac{2}{3})^2$

**στ)** Λύνω την εξίσωση  $-\omega^2 + 10\omega - 25 = 0$ .  $\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-25) = 100 - 100 = 0$   
άρα  $\omega = \frac{-10}{-2} = 5$  (διπλή), άρα  $-\omega^2 + 10\omega - 25 = -(\omega-5)(\omega-5) = -(\omega-5)^2$ .

**7.**

**α)**  $\alpha x^2 - x + 1 - \alpha = 0$ . Βρίσκω την διακρίνουσα  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \alpha(1-\alpha) = 1 - 4\alpha + 4\alpha^2 = (1-2\alpha)^2$ .  
Άρα  $\Delta \geq 0$  οπότε η εξίσωση έχει μία τουλάχιστο λύση.  
**β)**  $\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geq 0$

**8.**

Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα άρα  $\Delta = 0$ .

$$\Delta = (-2\beta)^2 - 4(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma) = 4\beta^2 - 4(\alpha^2 - \gamma^2) = 4\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\gamma^2.$$

$$\text{Άρα } \Delta = 0 \Rightarrow 4\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\gamma^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 - \alpha^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2. \text{ Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.}$$

## 1.

**α)** Ισχύει  $E = \pi \cdot r^2$ . Άρα  $314 = \pi \cdot x^2$  ή  $x^2 = \frac{314}{\pi}$  ή  $x^2 = \frac{314}{3,14}$  ή  $x^2 = 100$  ή  $x = \pm 10$  η τιμή  $x = -10$  απορρίπτεται.

**β)**  $x^2 + x^2 = \delta^2$  ή  $2x^2 = (7\sqrt{2})^2$  ή  $2x^2 = 49 \cdot 2$  ή  $x^2 = 49$  ή  $x = \pm 7$ , η τιμή  $x = -7$  απορρ.

**γ)**  $E = x \cdot (x+1)$  ή  $20 = x^2 + x$  ή  $x^2 + x - 20 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -20$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2}$ . Άρα  $x = \frac{-1 - 9}{2} = -5$  απορρ.  
ή  $x = \frac{-1 + 9}{2} = 4$

**δ)**  $x^2 + (x+2)^2 = 10^2$  ή  $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$  ή  $2x^2 + 4x - 96 = 0$  ή  $x^2 + 2x - 48 = 0$

Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -48$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 14}{2}$ . Άρα  $x = \frac{-2 - 14}{2} = -8$  απορρ. ή  $x = \frac{-2 + 14}{2} = 6$

## 2.

**α)** Αν  $x > 0$  είναι ο αριθμός τότε  $\frac{1}{2}x^2 = 2x$  ή  $2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2 \cdot 2x$  ή  $x^2 - 4x = 0$  ή  $x(x-4) = 0$  ή  $x = 0$  απορ. ή  $x-4 = 0$  ή  $x = 4$

**β)** Αν  $x > 0$  είναι ο αριθμός τότε :  $x \cdot (x-2) = 24$  ή  $x^2 - 2x - 24 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = -24$ . οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100 > 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2}$

Άρα  $x = \frac{2+10}{2} = 6$  ή  $x = -\frac{8}{2} = -4$  απορρ.

**γ)** Αν  $x > 0$  είναι ο αριθμός τότε :  $2x^2 = 5x + 3$  ή  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ . Είναι  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -5$ ,  $\gamma = -3$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4}$ .

Άρα  $x = \frac{5+7}{4} = 3$  ή  $x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$  απορρ.

**Κεφάλαιο 2****3.**

Αν το μήκος της πλευράς της βάσης του είναι  $x$  τότε :  $V = E_{\text{βάσης}} \cdot \text{Υψος}$ .

$$\text{Άρα } 10 = x^2 \cdot 2,5 \text{ ή } x^2 = \frac{10}{2,5} \text{ ή } x^2 = 4 \text{ ή } x = 2 \text{ dm ή } x = -2 \text{ απορρ.}$$

**4.**

Αν  $x > 0$  είναι το πλάτος του, τότε το μήκος του είναι  $x+5$ . Τότε  $x \cdot (x+5) = 150$   
 $\text{ή } x^2 + 5x - 150 = 0. \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150) = 25 + 600 = 625 > 0. \text{Άρα } x = \frac{-5 \pm \sqrt{625}}{2} =$   
 $= \frac{-5 \pm 25}{2}, \text{ δηλ } x = \frac{-5 + 25}{2} = 10 \text{ ή } x = \frac{-5 - 25}{2} = -15 \text{ απορρ. Άρα το πλάτος}$   
 $\text{είναι } 10 \text{ m, το μήκος είναι } 15 \text{ m και η περίμετρος : } 10 + 10 + 15 + 15 = 50 \text{ m}$

**5.**

Έστω  $2\kappa+1$  είναι ο ένας περιττός και  $2\kappa+3$  είναι ο άλλος τότε :

$$(2\kappa+1)^2 + (2\kappa+3)^2 = 74 \text{ ή } 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 + 4\kappa^2 + 12\kappa + 9 = 74 \text{ ή } 8\kappa^2 + 16\kappa - 64 = 0 \text{ ή}$$

$$\kappa^2 + 2\kappa - 8 = 0. \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0. \text{Άρα } \kappa = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} =$$
 $= \frac{-2 \pm 6}{2} \text{ άρα } \kappa = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \text{ ή } \kappa = \frac{-2 - 6}{2} = -4. \text{Άρα οι αριθμοί είναι}$ 
 $\text{και } 7 \text{ ή } -5 \text{ και } -7.$

**6.**

Έστω  $x$  είναι ο αριθμός της μίας σελίδας, τότε της άλλης θα είναι  $x+1$ .

$$\text{Οπότε } x(x+1) = 506 \text{ ή } x^2 + x - 506 = 0. \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-506) = 1 + 2024 = 2025 > 0$$

$$\text{Άρα } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{2025}}{2} = \frac{-1 \pm 45}{2}. \text{Άρα } x = \frac{-1 + 45}{2} = 22$$

$$\text{ή } x = \frac{-1 - 45}{2} = -23 \text{ απορρ. Οπότε οι σελίδες είναι 22 και 23.}$$

**7.**

Αν  $v$  είναι οι ομάδες τότε η κάθε ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες  $(v-1)$  ομάδες  
 $\text{οπότε : } v(v-1) = 240 \text{ ή } v^2 - v - 240 = 0. \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 1 + 960 = 961 > 0$

$$\text{Άρα } v = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 31}{2}. \text{Άρα } v = \frac{1 + 31}{2} = 16 \text{ ή } v = \frac{1 - 31}{2} = -15 \text{ απορ. Άρα οι ομάδες είναι 16.}$$

**8.**

Η κάθε μία πλευρά θα είναι : 4+x, 6+x, 8+x. Άρα  $(8+x)^2 = (4+x)^2 + (6+x)^2$   
 ή  $64+16x+x^2 = 16+x^2+8x+36+x^2+12x$  ή  $x^2+4x-12 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 4$ ,  
 $\gamma = -12$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot (-12) = 16+48 = 64 > 0$   
 Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 8}{2}$ .  
 Άρα  $x = \frac{-4 + 8}{2} = 2$  ή  $x = \frac{-4 - 8}{2} = -6$  απορρ.

**9.**

Έστω  $x$  είναι η ηλικία του καθηγητή σήμερα τότε  $(x-5)(x+5) = 1200$  ή  
 $x^2 - 25 = 1200$  ή  $x^2 = 1225$  άρα  $x = 35$  ή  $x = -35$  απορρ. Άρα ο καθηγητής είναι  
 35 χρονών.

Έστω  $v$  είναι η ηλικία των παιδιών του τότε τότε  $v \cdot v = v+v$  ή  $v^2 = 2v$   
 $v^2 - 2v = 0$  ή  $v(v-2) = 0$  ή  $v = 0$  ή  $v = 2$ . Άρα τα παιδιά του είναι 2 χρονών

**10.**

Έστω το πλάτος είναι  $x$  cm τότε το μήκος του θα είναι  $x+6$ . Τότε  
 $E_{ΕΓΔ} = \frac{3}{8} E_{ΑΒΓΔ}$  ή  $\frac{1}{2} x \cdot x = \frac{3}{8} x(x+6)$  ή  $4x^2 = 3x^2 + 18x$  ή  $x^2 - 18x = 0$  ή  $x(x-18) = 0$   
 $x = 0$  ή  $x = 18$ . Άρα οι διαστάσεις είναι 18 cm, 24 cm

**11.**

Έστω το συντριβάνι έχει ακτίνα  $\rho$ . Το συντριβάνι έχει εμβαδό  $E = \pi\rho^2$ .  
 Ο κυκλικός δακτύλιος περιέχεται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους,  
 με ακτίνες  $\rho$ ,  $\rho+3$ . οπότε  $3\pi\rho^2 = \pi(\rho+3)^2 - \pi\rho^2$  ή  $3\pi\rho^2 = \pi(\rho^2 + 6\rho + 9) - \pi\rho^2$   
 $3\pi\rho^2 = \pi\rho^2 + 6\pi\rho + 9\pi - \pi\rho^2$  ή  $3\pi\rho^2 - 6\pi\rho - 9\pi = 0$ .  $\Delta = (-6\pi)^2 - 4 \cdot 3\pi \cdot (-9\pi) = 36\pi^2 + 108\pi^2$   
 $144\pi^2 > 0$  άρα  $\rho = \frac{6\pi \pm \sqrt{144\pi^2}}{2 \cdot 3\pi} = \frac{6\pi \pm 12\pi}{6\pi}$  άρα  $\rho = \frac{6\pi + 12\pi}{6\pi} = 3$  ή  
 $\rho = \frac{6\pi - 12\pi}{6\pi} = -1$  απορρ

**12.**

Έστω  $\rho$  είναι η ακτίνα της βάσης τότε  $E_{ολ} = E_{παραπλ} + 2E_{βάσης}$   
 $251,2 = 2\pi\rho \cdot 6 + 2\pi\rho^2$  ή  $2\pi\rho^2 + 12\pi\rho - 251,2 = 0$  ή  $2 \cdot 3,14\rho^2 + 12 \cdot 3,14\rho - 251,2 = 0$   
 $6,28\rho^2 + 37,68\rho - 251,2 = 0$  ή  $\rho^2 + 6\rho - 40 = 0$ .  $\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196 > 0$ .  
 $\rho = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2}$ , άρα  $\rho = \frac{-6 - 14}{2} = -10$  απορρ. ή  $\rho = \frac{-6 + 14}{2} = 4$

## 13.

Έστω η πτώση του σώματος διήρκησε  $t$  sec. Τότε  $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$  δηλ  $h = \frac{1}{2} \cdot 10 t^2$   
 $h = 5t^2$ . Οπότε  $KP = 5(t-2)^2$  δηλ  $\frac{4}{9}h = 5(t-2)^2$  ή  $\frac{4}{9}5t^2 = 5(t-2)^2$  ή  $20t^2 = 45(t-2)^2$   
 $20t^2 = 45(t^2 - 4t + 4)$  ή  $20t^2 = 45t^2 - 180t + 180$  ή  $25t^2 - 180t + 180 = 0$  ή  $5t^2 - 36t + 36 = 0$   
 $\Delta = (-36)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36 = 1296 - 720 = 576 > 0$ , άρα  $t = \frac{36 \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 5} = \frac{36 \pm 24}{10}$   
Άρα  $t = \frac{36+24}{10} = 6$  ή  $t = \frac{36-24}{10} = 1,2$  απορρ. διότι  $t > 2$ ,  $h = 5 \cdot 6^2 = 180$  m

## 2.4 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ.

1.

a)	β)	γ)	δ)
Σ	Λ	Λ	Σ

2. γ)  
3. δ)  
4. όχι διότι η τιμή  $x = 1$  απορρίπτεται από τον περιορισμό.

## Προτεινόμενες ασκήσεις –Προβλήματα

1.

- α) Πρέπει  $x-1 \neq 0$  δηλ  $x \neq 1$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $2(x-1) \neq 0$  και  
η εξίσωση γράφεται :  $2(x-1) \cdot \frac{2}{x-1} = 2(x-1) \cdot \frac{1}{2}$  ή  $2 \cdot 2 = x-1$  ή  $4 = x-1$  ή  $x = 5$  δεκτή.
- β) Πρέπει  $2\psi-3 \neq 0$  ή  $\psi \neq \frac{3}{2}$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $3 \cdot (2\psi-3) \neq 0$  και  
η εξίσωση γράφεται:  $3(2\psi-3) \cdot \frac{7}{2\psi-3} = -3(2\psi-3) \cdot \frac{1}{3}$  ή  $3 \cdot 7 = -(2\psi-3)$  ή  $21 = -2\psi+3$  ή  
 $\eta -2\psi = 18$  ή  $\psi = -9$  δεκτή
- γ) Πρέπει  $\omega-2 \neq 0$  ή  $\omega \neq 2$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $\omega-2 \neq 0$  και η  
εξίσωση γράφεται :  $(\omega-2) \cdot \frac{4\omega+1}{\omega-2} = (\omega-2) \cdot \frac{9}{\omega-2}$  ή  $4\omega+1 = 9$  ή  $4\omega = 8$  ή  $\omega = 2$   
Απορρίπτεται από τον περιορισμό. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

**8)** Πρέπει  $5\alpha \neq 0$  και  $\alpha \neq 0$  άρα  $\alpha \neq 0$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $10\alpha \neq 0$

και η εξίσωση γράφεται  $10\alpha \cdot \frac{7}{5\alpha} + 10\alpha \cdot \frac{3}{10} = 10\alpha \cdot \frac{2}{\alpha}$  ή  $2 \cdot 7 + 3 \cdot \alpha = 10 \cdot 2$  ή  $14 + 3\alpha = 20$  ή  $3\alpha = 6$  ή  $\alpha = 2$  δεκτή.

**ε)**  $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$  ή  $\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$ . Πρέπει  $x-3 \neq 0$  ή  $x \neq 3$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $x-3$  και η εξίσωση γράφεται  $(x-3) \frac{2x+1}{x-3} = 2(x-3) + (x-3) \frac{7}{x-3}$   $2x+1 = 2(x-3)+7$  ή  $2x+1 = 2x-6+7$  ή  $2x-2x = -1-6+7$  ή  $0x = 0$ . Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από το 3.

**στ)**  $1 - \frac{5}{\psi-2} = \frac{6-\psi}{2-\psi}$  ή  $1 - \frac{5}{\psi-2} = \frac{\psi-6}{\psi-2}$ . Πρέπει  $\psi-2 \neq 0$  ή  $\psi \neq 2$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $\psi-2$  και η εξίσωση γράφεται  $\psi-2 - (\psi-2) \cdot \frac{5}{\psi-2} = (\psi-2) \frac{\psi-6}{\psi-2}$  ή  $\psi-2-5 = \psi-6$  ή  $\psi-\psi = 2+5-6$  ή  $0\psi = 1$  αδύνατη.

## 2.

**α)** Πρέπει  $x \neq 0$  και  $x^2 \neq 0$  ή  $x \neq 0$  και  $x \neq 0$  ή  $x \neq 0$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $x^2 \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται  $x^2 \cdot \frac{4}{x} \cdot x^2 \cdot \frac{3}{x^2} = x^2$  ή  $4x-3 = x^2$  ή  $x^2-4x+3=0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -4$ ,  $\gamma = 3$  οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-4)^2-4 \cdot 1 \cdot 3 = 16-12 = 4 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$  άρα  $x = \frac{4+2}{2} = 3$  δεκτή, ή  $x = \frac{4-2}{2} = 1$  δεκτή.

**β)** Πρέπει  $\psi \neq 0$  και  $\psi-1 \neq 0$  ή  $\psi \neq 0$  και  $\psi \neq 1$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $\psi \cdot (\psi-1) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται  $\psi(\psi-1) \frac{5}{\psi} + \psi(\psi-1) \frac{4}{\psi-1} = 2\psi(\psi-1)$  ή  $5(\psi-1) + 4\psi = 2\psi^2 - 2\psi$  ή  $5\psi-5+4\psi = 2\psi^2-2\psi$  ή  $2\psi^2-11\psi+5=0$ . Είναι  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -11$ ,  $\gamma = 5$  οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-11)^2-4 \cdot 2 \cdot 5 = 121-40 = 81 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 9}{4}$  άρα  $\psi = \frac{11+9}{4} = 5$  δεκτή ή  $\psi = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$ , δεκτή

**γ)** Πρέπει  $\omega \neq 0$  και  $\omega+2 \neq 0$  και  $\omega^2 \neq 0$  ή  $\omega \neq 0$  και  $\omega \neq -2$  και  $\omega \neq 0$  ή  $\omega \neq -2$  και  $\omega \neq 0$ . Τό E.K.P. των παρονομαστών είναι  $\omega^2(\omega+2) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται  $\omega^2(\omega+2) \frac{7}{\omega} - \omega^2(\omega+2) \frac{3}{\omega+2} = \omega^2(\omega+2) \frac{6}{\omega^2}$  ή  $7\omega(\omega+2) - 3\omega^2 = 6(\omega+2)$  ή  $7\omega^2 + 14\omega - 3\omega^2 = 6\omega + 12$  ή  $4\omega^2 + 8\omega - 12 = 0$  ή  $\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -3$  οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 2^2-4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4+12 = 16 > 0$ . Άρα η εξίσωση

**Κεφάλαιο 2**

$$\text{έχει δύο λύσεις τις } \omega = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \text{ άρα } \omega = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \text{ δεκτή ή } \omega = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \text{ δεκτή.}$$

**δ)** Πρέπει  $(\alpha-2)^2 \neq 0$  και  $\alpha-2 \neq 0$  ή  $\alpha-2 \neq 0$  ή  $\alpha \neq 2$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $(\alpha-2)^2 \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται  $(\alpha-2)^2 \cdot \frac{4}{(\alpha-2)^2} - (\alpha-2)^2 \cdot \frac{3}{\alpha-2} = (\alpha-2)^2$  ή  $4 - 3(\alpha-2) = (\alpha-2)^2$  ή  $4 - 3\alpha + 6 = \alpha^2 - 4\alpha + 4$  ή  $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = -6$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $\alpha = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ , άρα  $\alpha = \frac{1+5}{2} = 3$  δεκτή, ή  $\alpha = \frac{1-5}{2} = -2$  δεκτή.

**ε)** Πρέπει  $x \cdot (x+3) \neq 0$  ή  $x \neq 0$  και  $x+3 \neq 0$  ή  $x \neq 0$  και  $x \neq 0$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $x \cdot (x+3) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται

$$x(x+3) \cdot \frac{6}{x(x+3)} = x(x+3) \cdot \frac{x+2}{x} + x(x+3) \cdot \frac{x+1}{x+3} \text{ ή } 6 = (x+3)(x+2) + x(x+1) \text{ ή} \\ 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 + x^2 + x \text{ ή } 2x^2 + 6x = 0 \text{ ή } 2x(x+3) = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x+3 = 0 \text{ ή} \\ x = 0 \text{ απορρ. ή } x = -3 \text{ απορρ. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.}$$

**στ)** Πρέπει  $\psi(\psi+1) \neq 0$  ή  $\psi \neq 0$  και  $\psi \neq -1$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι

$$\psi(\psi+1) \neq 0 \text{ και η εξίσωση γράφεται } \psi(\psi+1) \cdot \frac{\psi-1}{\psi} - \psi(\psi+1) \cdot \frac{2}{\psi+1} = \psi(\psi+1) \cdot \frac{\psi+3}{\psi(\psi+1)} \\ \text{ή } (\psi+1)(\psi-1) - 2\psi = \psi+3 \text{ ή } \psi^2 - 1 - 2\psi = \psi+3 \text{ ή } \psi^2 - 3\psi - 4 = 0. \text{ Είναι } \alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -4, \\ \text{οπότε η διακρίνουσα είναι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0 \\ \text{Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις } \psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}, \\ \text{άρα } \psi = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ δεκτή ή } \psi = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ απορρ.}$$

**3.**

**α)**  $\frac{x+5}{x^2 - 25} = \frac{3}{x+5}$  ή  $\frac{x+5}{(x-5)(x+5)} = \frac{3}{x+5}$ . Πρέπει  $x-5 \neq 0$  και  $x+5 \neq 0$  δηλ  $x \neq 5$  και  $x \neq -5$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $(x-5)(x+5) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται :  $(x-5)(x+5) \cdot \frac{x+5}{(x-5)(x+5)} = (x-5)(x+5) \cdot \frac{3}{x+5}$  ή  $x+5 = 3 \cdot (x-5)$  ή  $x+5 = 3x-15$  ή  $2x = 20$  ή  $x = 10$

β)  $\frac{\psi+1}{\psi^2-\psi-2} - \frac{1}{\psi-2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\psi+1}{(\psi-2)(\psi+1)} - \frac{1}{\psi-2} = 0$ . Πρέπει  $\psi-2 \neq 0$  και  $\psi+1 \neq 0$

δηλ  $\psi \neq 2$  και  $\psi \neq -1$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $(\psi-2)(\psi+1) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται :  $(\psi-2)(\psi+1) \cdot \frac{\psi+1}{(\psi-2)(\psi+1)} - (\psi-2)(\psi+1) \cdot \frac{1}{\psi-2} = 0 \quad \text{ή}$

$\psi+1-(\psi+1) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi+1-\psi-1 = 0 \quad \text{ή} \quad 0\psi = 0$ . Άρα αληθεύει για όλες τις τιμές του  $\psi$  εκτός του  $-1$  και του  $2$ .

γ)  $\frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega} \quad \text{ή} \quad \frac{\omega^2+5}{\omega(\omega-1)} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$ . Πρέπει  $(\omega-1) \neq 0$  και  $\omega \neq 0$  δηλ  $\omega \neq 1$  και  $\omega \neq 0$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $\omega(\omega+1) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται :  $\omega(\omega-1) \cdot \frac{\omega^2+5}{\omega(\omega-1)} - \omega(\omega-1) \cdot \frac{\omega+5}{\omega-1} = \omega(\omega-1) \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{ή} \quad \omega^2+5-\omega(\omega+5) = \omega-1$

ή  $\omega^2+5-\omega^2-5\omega = \omega-1 \quad \text{ή} \quad -5\omega-\omega = -1-5 \quad \text{ή} \quad -6\omega = -6 \quad \text{ή} \quad \omega = 1$  απορρ. Άρα είναι αδύνατη.

δ)  $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2} \cdot \frac{1}{\alpha(\alpha-2)} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$ . Πρέπει  $\alpha \neq 0$  και  $\alpha-2 \neq 0$  δηλ  $\alpha \neq 0$  και  $\alpha \neq 2$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $\alpha(\alpha-2) \neq 0$  και η εξίσωση

γράφεται :  $\alpha(\alpha-2) \cdot \frac{1}{\alpha(\alpha-2)} + \alpha(\alpha-2) \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} = \alpha(\alpha-2) \cdot \frac{\alpha}{\alpha-2} \quad \text{ή} \quad 1+(\alpha-2)(\alpha-1) = \alpha^2 \quad \text{ή}$   
 $1+\alpha^2-\alpha-2\alpha+2 = \alpha^2 \quad \text{ή} \quad -3\alpha = -3 \quad \text{ή} \quad \alpha = 1$

#### 4.

α)  $1 - \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\psi^2-\psi} = 0 \quad \text{ή} \quad 1 - \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\psi(\psi-1)} = 0$ . Πρέπει  $\psi \neq 0$  και  $\psi-1 \neq 0$  δηλ  $\psi \neq 0$  και  $\psi \neq 1$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $\psi(\psi-1) \neq 0$  και η εξίσωση

γράφεται  $\psi(\psi-1) \cdot 1 - \psi(\psi-1) \cdot \frac{1}{\psi} - \psi(\psi-1) \cdot \frac{1}{\psi(\psi-1)} = 0 \quad \text{ή} \quad \psi(\psi-1)-(\psi-1)-1 = 0$

ή  $\psi^2-\psi-\psi+1-1 = 0 \quad \text{ή} \quad \psi^2-2\psi = 0 \quad \text{ή} \quad \psi(\psi-2) = 0 \quad \text{ή} \quad \psi = 0$  απορρ. ή  $\psi-2 = 0$  δηλ  $\psi = 2$  δεκτή.

β)  $\frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2} \quad \text{ή} \quad \frac{2\omega^2}{\omega(\omega+2)} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$ . Πρέπει  $\omega \neq 0$  και  $\omega+2 \neq 0$  δηλ  $\omega \neq 0$  και  $\omega \neq -2$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι:  $\omega(\omega+2) \neq 0$  και η έξισωση γράφεται  $\omega(\omega+2) \frac{2\omega^2}{\omega(\omega+2)} = \omega(\omega+2) \cdot 3 - \omega(\omega+2) \frac{4}{\omega+2} \quad \text{ή} \quad 2\omega^2 = 3\omega(\omega+2)-4\omega \quad \text{ή}$   
 $2\omega^2 = 3\omega^2+6\omega-4\omega \quad \text{ή} \quad \omega^2+2\omega = 0 \quad \text{ή} \quad \omega(\omega+2) = 0 \quad \text{ή} \quad \omega = 0$  απορρ. ή  $\omega+2 = 0$  δηλ  $\omega = -2$  απορ. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

**Κεφάλαιο 2**

γ)  $\frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x-1}{x^2 - 4}$  ή  $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2x-1}{(x-2)(x+2)}$ . Πρέπει  $x-2 \neq 0$  και  $x+2 \neq 0$  δηλ  $x \neq 2$  και  $x \neq -2$ . Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $(x-2)^2(x+2) \neq 0$  και η

$$\text{εξίσωση γράφεται } (x-2)^2(x+2) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} = (x-2)^2(x+2) \cdot \frac{2x-1}{(x-2)(x+2)} \text{ ή}$$

$$(x+2) = (x-2)(2x-1) \text{ ή } x+2 = 2x^2 - x - 4x + 2 \text{ ή } 2x^2 - 6x = 0 \text{ ή } x(2x-6) = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ δεκτή} \\ \text{ή } 2x-6 = 0 \text{ δηλ } x = 3 \text{ δεκτή.}$$

δ)  $1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$  ή  $1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ . Πρέπει  $\alpha-2 \neq 0$  και  $\alpha-1 \neq 0$

$\alpha \neq 2$  και  $\alpha \neq 1$ . Τό Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι  $(\alpha-2)(\alpha-1) \neq 0$  και η εξίσωση

$$\text{γράφεται } (\alpha-2)(\alpha-1) \cdot 1 + (\alpha-2)(\alpha-1) \cdot \frac{3\alpha}{\alpha-2} = (\alpha-2)(\alpha-1) \cdot \frac{\alpha+4}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \text{ ή}$$

$$(\alpha-2)(\alpha-1) + 3\alpha(\alpha-1) = \alpha+4 \text{ ή } \alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2 + 3\alpha^2 - 3\alpha = \alpha+4 \text{ ή } 4\alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0. \text{ Είναι}$$

$$\alpha = 4, \beta = -7, \gamma = -2, \text{ οπότε η διακρίνουσα είναι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 49 + 32 = 81 > 0$$

$$\text{Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm 9}{8}$$

$$\text{δηλ } x = \frac{7+9}{8} = 2 \text{ απορρ. ή } x = \frac{7-9}{8} = -\frac{1}{4} \text{ δεκτή.}$$

5.

α)  $\frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3}$ . Πρέπει  $x \neq 0$  και  $x - \frac{4}{x} \neq 0$  ή  $x \neq \frac{4}{x}$  ή  $x^2 \neq 4$  ή  $x \neq \pm 2$ .

$$\text{Οπότε } \frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3} \text{ ή } \frac{x}{\frac{x^2-4}{x}} = \frac{4}{3} \text{ ή } \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{4}{3} \text{ ή } 3(x^2-4) \cdot \frac{x^2}{x^2-4} = 3(x^2-4) \cdot \frac{4}{3} \text{ ή}$$

$$3x^2 = 4(x^2-4) \text{ ή } 3x^2 = 4x^2 - 16 \text{ ή } x^2 = 16 \text{ ή } x = \pm 4$$

β) Πρέπει :  $x \neq 0$  και  $1 + \frac{3}{x} \neq 0$  ή  $\frac{3}{x} \neq -1$  ή  $x \neq -3$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \text{ ή } \frac{1}{\frac{x+3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \text{ ή } \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9} \text{ ή}$$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} \text{ Πρέπει } x-3 \neq 0 \text{ και } x+3 \neq 0 \text{ άρα } x \neq 3 \text{ και } x \neq -3.$$

Ε.Κ.Π.  $(x-3)(x+3) \neq 0$

$$\text{Άρα } (x-3)(x+3) \cdot \frac{x}{x+3} - (x-3)(x+3) \cdot \frac{2}{x-3} = (x-3)(x+3) \cdot \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} \text{ ή}$$

$$x(x-3) - 2(x+3) = x-6 \text{ ή } x^2 - 3x - 2x - 6 = x-6 \text{ ή } x^2 - 6x = 0 \text{ ή } x(x-6) = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ απορ ή } x = 6$$

6.

**α)**  $\rho = \frac{m}{V}$  ή  $\rho \cdot V = m$  ή  $V = \frac{m}{\rho}$ , **β)**  $E = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R}$  ή  $4ER = \alpha \beta \gamma$  ή  $R = \frac{\alpha \beta \gamma}{4E}$

**γ)**  $R = \rho \frac{l}{S}$  ή  $R = \frac{\rho \cdot l}{S}$  ή  $R \cdot S = \rho \cdot l$  ή  $S = \frac{\rho \cdot l}{R}$  **δ)**  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$  ή  $T_1 P_2 V_2 = T_2 P_1 V_1$   
άρα  $T_1 = \frac{T_2 P_1 V_1}{P_2 V_2}$

**ε)**  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  ή  $\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$  ή  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

**στ)**  $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$  ή  $\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\beta} - \frac{1}{\gamma}$ .  $\frac{1}{\alpha} = \frac{2\gamma - \beta}{\beta\gamma}$  ή  $\alpha = \frac{\beta\gamma}{2\gamma - \beta}$

**ζ)**  $\frac{1}{v_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$  ή  $\frac{1}{v_\alpha^2} = \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\beta^2 \gamma^2}$  ή  $v_\alpha^2 = -\frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2}$

**η)**  $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$  ή  $1-\lambda = \frac{\alpha}{S}$  ή  $\lambda = 1 - \frac{\alpha}{S}$

7.

**α)** Εστω  $x \neq 0$  ένας αριθμός και  $\frac{1}{x}$  είναι ο αντίστροφός του. Τότε  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

Το Ε.Κ.Π. των αριθμών είναι  $4x \neq 0$ , οπότε  $4x \cdot x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4x \cdot \frac{17}{4}$  ή  $4x^2 + 4 = 17x$  ή  $4x^2 - 17x + 4 = 0$ . Είναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = -17$ ,  $\gamma = 4$ , οπότε η διακρίνουσα είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64 = 225 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8}$ , άρα  $x = \frac{17+15}{8} = 4$  ή  $x = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4}$ .

**β)** Εστω  $x$  είναι ο αριθμός τότε :  $\frac{3+x}{5+x} = \frac{4}{5}$ . Πρέπει  $5+x \neq 0$  δηλ  $x \neq -5$ . Το Ε.Κ.Π. των αριθμών είναι  $5(x+5) \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται :

$$5(x+5) \cdot \frac{3+x}{5+x} = 5(x+5) \cdot \frac{4}{5} \quad \text{ή} \quad 5(3+x) = 4(x+5) \quad \text{ή} \quad 15+5x = 4x+20 \quad \text{ή} \quad 5x-4x = 20-15 \\ \text{ή} \quad x = 5$$

**γ)** Εστω  $2v$  είναι ό ένας οπότε ο άλλος θα είναι  $2v+2$  άρα :  $\frac{2v}{2v+2} = \frac{3}{4}$  ή

$$4(2v+2) \cdot \frac{2v}{2v+2} = 4(2v+2) \cdot \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad 4 \cdot 2v = 3(2v+2) \quad \text{ή} \quad 8v = 6v+6 \quad \text{ή} \quad 8v-6v = 6 \quad \text{ή} \quad 2v = 6 \\ \text{ή} \quad v = 3. \quad \text{Άρα ο ένας θα είναι } 6 \text{ και ο άλλος } 8.$$

Έστω  $x$  ευρώ θα πλήρωναν αν ήταν όλοι ενήλικες. Άρα τα áτομα θα ήταν  $\frac{84}{x}$ . Αν δεν πληρώσουν τα παιδιά τότε ο καθένας θα πληρώσει  $x+9$ . Οπότε

τα áτομα που πληρώνουν θα είναι  $\frac{84}{x+9}$ . Οπότε έχουμε την εξίσωση

$$\frac{84}{x} - \frac{84}{x+9} = 3 \quad (1). \text{ Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται διότι } x > 0. \text{ Ε.Κ.Π. } x(x+9) \neq 0.$$

$$\text{Άρα } x(x+9) \frac{84}{x} - x(x+9) \frac{84}{x+9} = 3x(x+9) \text{ ή } 84(x+9) - 84x = 3x^2 + 27x \text{ ή} \\ 84x + 756 - 84x = 3x^2 + 27x \text{ ή } 3x^2 + 27x - 756 = 0 \text{ ή } x^2 + 9x - 252 = 0. \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-252) = 81 + 1008 = 1089 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{-9 \pm 33}{2}, \text{ δηλ } x = \frac{-9 + 33}{2} = 12 \text{ ή } x = \frac{-9 - 33}{2} = -21$$

$$\text{Επειδή } x > 0, \text{ θα έχουμε } x = 12 \text{ áρα τα áτομα ήταν } \frac{84}{12} = 7.$$

Έστω αγόρασε  $x$  πυροσβεστήρες áρα η τιμή του ενός θα ήταν  $\frac{240}{x}$ . Πρίν

από λίγα χρόνια θα αγόραζε  $x+2$  πυροσβεστήρες με τιμή  $\frac{240}{x+2}$ . Οπότε

$$\text{έχουμε την εξίσωση } \frac{240}{x} - \frac{240}{x+2} = 4 \quad (1). \text{ Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται}$$

$$\text{διότι } x > 0. \text{ Ε.Κ.Π. } x(x+2) \neq 0. \text{ Άρα } x(x+2) \frac{240}{x} - x(x+2) \frac{240}{x+2} = 4x(x+2) \text{ ή}$$

$$240(x+2) - 240x = 4x^2 + 8x \text{ ή } 240x + 480 - 240x = 4x^2 + 8x \text{ ή } 4x^2 + 8x - 480 = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 + 2x - 120 = 0. \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120) = 4 + 480 = 484 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει δύο}$$

$$\text{λύσεις τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{-2 \pm 22}{2} \text{ δηλ, } x = \frac{-2 + 22}{2} = 10$$

$$\text{ή } x = \frac{-2 - 22}{2} = -12. \text{ Επειδή } x > 0 \text{ θα έχουμε } x = 10 \text{ πυροσβεστήρες.}$$

Έστω  $x$  είναι η πυκνότητα του A τότε από τον τύπο  $d = \frac{m}{v}$  θα έχουμε

$$v = \frac{m}{d}. \text{ Οπότε ο όγκος από το A διάλυνμα θα είναι } \frac{12}{x} \text{ και από το B θα είναι}$$

$$\frac{15}{x-0,2}. \text{ Άρα } \frac{12}{x} + \frac{15}{x-0,2} = 25 \text{ ή } 12(x-0,2) + 15x = 25x(x-0,2)$$

$$\text{ή } 12x - 2,4 + 15x = 25x^2 - 5x \text{ ή } 25x^2 - 32x - 2,4 = 0$$

$$\Delta = -(32)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-2,4) \text{ ή } \Delta = 1024 + 240 = 1264 > 0 \text{ áρα } x = \frac{-(-32) \pm \sqrt{1264}}{2 \cdot 25} =$$

$$x = \frac{32 \pm 35,5}{50} = \frac{67,5}{50} = 1,35 \text{ ή } x = \frac{32 - 35,5}{50} = \frac{-3,5}{50} = -0,07 \text{ απορρίπτεται.}$$

## 11.

Έστω η βιοτεχνία είχε χ υπαλλήλους οπότε ο καθένας θα συσκευάσει

$\frac{120}{x}$  προϊόντα. Όταν όμως απουσίαζαν 2 υπάλληλοι τότε οι υπάλληλοι

είναι  $x-2$  και ο καθένας θα συσκευάσει  $\frac{120}{x-2}$ . Οπότε έχουμε την εξίσωση

$$\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 3 \quad (1).$$

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται διότι  $x > 2$ . Ε.Κ.Π.  $x(x-2) \neq 0$

$$\text{Άρα } x(x-2) \frac{120}{x-2} - x(x-2) \frac{120}{x} = 3x(x-2) \quad \text{ή} \quad 120x - 120(x-2) = 3x^2 - 6x \quad \text{ή}$$

$$120x - 120x + 240 = 3x^2 - 6x \quad \text{ή} \quad 3x^2 - 6x - 240 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2x - 80 = 0. \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80) = 4 + 320 = 324 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} \quad \text{δηλ } x = \frac{2+18}{2} = 10 \quad \text{ή} \quad x = \frac{2-18}{2} = -8 \quad \text{Επειδή } x > 2$$

οι υπάλληλοι θα ήταν 10.

## 12.

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν την απόσταση ήταν  $x$  Km/h τότε

την απόσταση των 210 Km την διήνυσε σε χρόνο  $\frac{210}{x}$  ώρες. Όταν ο οδηγός

μειώσει την ταχύτητα κατά 10 Km/h δηλ θα είναι  $x-10$  Km/h τότε θα κάνει

$\frac{210}{x-10}$  ώρες.  $\frac{210}{x-10} - \frac{210}{x} = \frac{1}{2}$ . Επειδή  $x > 10$  οι όροι της εξίσωσης ορίζονται.

Ε.Κ.Π.  $2x(x-10) \neq 0$ .  $2x(x-10) \frac{210}{x-10} - 2x(x-10) \frac{210}{x} = 2x(x-10) \frac{1}{2} \quad \text{ή}$

$$2x \cdot 210 - 2(x-10) \cdot 210 = x(x-10) \quad \text{ή} \quad 420x - 420x + 4200 = x^2 - 10x \quad \text{ή} \quad x^2 - 10x - 4200 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4200) = 100 + 16800 = 16900 > 0. \text{ Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16900}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 130}{2}, \quad \text{δηλ } x = \frac{10 + 130}{2} = 70 \quad \text{ή} \quad x = \frac{10 - 130}{2}$$

= -60. Άρα η μέση ταχύτητα ήταν 70 Km/h.

## 2.5 Ερωτήσεις κατανόησης

1.

<b>α)</b>	<b>β)</b>	<b>γ)</b>	<b>δ)</b>	<b>ε)</b>	<b>στ)</b>	<b>ζ)</b>	<b>η)</b>
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

2.

- α)**  $\alpha - 3 > 0$ , **β)**  $\alpha < \gamma$ , **γ)**  $\frac{\alpha}{\beta} < 0$  **δ)**  $\alpha > \beta$  **ε)**  $\alpha^2 > 0$  **στ)**  $\alpha + \beta \leq 0$
3. Προσθέτουμε το 4 στα δύο μέλη - Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 3.
4. **α)** Προσθέτουμε το 4 και στα δύο μέλη  
**β)** Αφαιρούμε το 2 και από τα δύο μέλη.  
**γ)** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 5.  
**δ)** Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το -6
5. Οι ανισότητες α), γ)  
6. Όχι, γιατί πρέπει οι β, δ να είναι ομόσημοι.

## Προτεινόμενες ασκήσεις - Προβλήματα

1.  $3(\alpha - \beta) > 2(\alpha + \beta)$  ή  $3\alpha - 3\beta > 2\alpha + 2\beta$  ή  $3\alpha - 2\alpha > 3\beta + 2\beta$  ή  $\alpha > 5\beta$
2. **α)**  $x > -6$  (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με -5)  
 $-5x < 30$  (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το -30)  
 $-5x - 30 < 30 - 30$   
 $-5x < 0$   
**β)**  $x > -6$  (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με 3)  
 $3x > -18$  (προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ανισότητας το 18)  
 $3x + 18 > -18 + 18$   
 $3x > 0$   
**γ)**  $x > -6$  (προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 4)  
 $x + 4 > -6 + 4$   
 $x + 4 > -2$  (πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της ανισότητας με το 2)  
 $2(x + 4) > -4$ .
3. **α)** Ισχύει:  $2 < \alpha < 6$  αφαιρούμε το 2 και έχουμε:  $0 < \alpha - 2 < 4$   
**β)** Ισχύει:  $2 < \alpha < 6$  πολλαπλασιάζουμε με 2 και έχουμε:  $4 < 2\alpha < 12$ ,  
αφαιρούμε το 5 και έχουμε  $-1 < 2\alpha - 5 < 7$   
**γ)** Ισχύει:  $2 < \alpha < 6$  πολλαπλασιάζουμε με -3 και έχουμε:  $-6 > -3\alpha > -18$   
 $-18 < -3\alpha < -6$ , προσθέτουμε το 1 και έχουμε:  $-17 < 1 - 3\alpha < -5$

4. **α)**  $\alpha < \beta$  ή  $5\alpha < 5\beta$  ή  $5\alpha - 3 < 5\beta - 3$   
**β)**  $\alpha < \beta$  ή  $-2\alpha > -2\beta$  ή  $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$   
**γ)**  $\alpha < \beta$  ή  $\alpha + \alpha < \alpha + \beta$  ή  $2\alpha < \alpha + \beta$   $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$   
**δ)**  $\alpha < \beta$  ή  $\alpha + \beta < \beta + \beta$  ή  $\alpha + \beta < 2\beta$  ή  $\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$
5. **α)** Ισχύει  $1 < x < 3$  και  $2 < \psi < 5$  προσθέτονμε κατά μέλη τις ανισότητες και έχουμε:  $1 + 2 < x + \psi < 3 + 5$  ή  $3 < x + \psi < 8$ .  
**β)** Ισχύει  $1 < x < 3$  πολλαπλασιάζω με 2 οπότε,  $2 < 2x < 6$  (1), ακόμη  $2 < \psi < 5$  (2). Προσθέτονμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) οπότε  $2 + 2 < 2x + \psi < 6 + 5$  ή  $4 < 2x + \psi < 11$ .  
**γ)** Ισχύει  $1 < x < 3$  (1) και  $2 < \psi < 5$ , πολλαπλασιάζω με (-1), οπότε:  $-2 > -\psi > -5$  ή  $-5 < -\psi < -2$  (2). Προσθέτω κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) οπότε  $1 - 5 < x - \psi < 3 - 2$  ή  $-4 < x - \psi < 1$ .
6. **α)** Ισχύουν  $x > 2$  και  $\psi > 3$ , επειδή είναι θετικοί οι αριθμοί μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη. Έτσι έχουμε  $x \cdot \psi > 2 \cdot 3$  ή  $x\psi > 6$ .  
**β)** Ισχύει  $x > 2$  άρα  $x - 2 > 0$  και  $\psi > 3$  άρα  $\psi - 3 > 0$ . Οι αριθμοί  $x - 2$ ,  $\psi - 3$  είναι θετικοί οπότε  $(x - 2)(\psi - 3) > 0$   
**γ)** Οι αριθμοί  $x + 2$ ,  $\psi$  είναι θετικοί άρα  $(x + 2) \cdot \psi > 12$
7. Επειδή  $\alpha > \beta$  ο αριθμός  $\alpha - \beta > 0$ . Οι αριθμοί  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  είναι θετικοί, άρα  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) > 0$  ή  $\alpha^2 - \beta^2 > 0$  άρα  $\alpha^2 > \beta^2$ .
8. **α)** Ισχύει  $\alpha > 1$  (1), άρα  $\alpha > 0$ . Πολλαπλασιάζουμε με  $\alpha$  και έχουμε  $\alpha \cdot \alpha > \alpha \cdot 1$  ή  $\alpha^2 > \alpha$ .  
**β)** Ισχύει  $x > 2$  (1), άρα  $x > 0$ . Πολλαπλασιάζουμε με  $x^2$  και έχουμε  $x^2 \cdot x > 2 \cdot x^2$  ή  $x^3 > 2x^2$
9. Πολλαπλασιάζω τα δύο μέλη τις ανισότητας με  $\frac{1}{\alpha\beta} > 0$  και έχουμε:  

$$\frac{1}{\alpha\beta} \alpha > \frac{1}{\alpha\beta} \beta \text{ ή } \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$$
10. **α)** Ισχύει  $x > 3$  άρα  $x - 3 > 0$ ,  $\psi < 2$  άρα  $\psi - 2 < 0$ . Οι αριθμοί  $x - 3$ ,  $\psi - 2$  είναι ετερόσημοι, άρα  $(x - 3)(\psi - 2) < 0$ .  
**β)** από **α)**  $(x - 3)(\psi - 2) < 0$  ή  $x\psi - 2x - 3\psi + 6 < 0$  ή  $x\psi + 6 < 2x + 3\psi$
11. **α)**  $x^2 + 1 \geq 2x$  ή  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$  ή  $(x - 1)^2 \geq 0$ . Ισχύει διότι το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός. Η ισότητα ισχύει όταν  $x - 1 = 0$  δηλ  $x = 1$ .  
**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά  $(x + \psi)^2 - 4x\psi$  είναι μη αρνητικός αριθμός.

**Κεφάλαιο 2**

$$(x + \psi)^2 - 4x\psi = x^2 + \psi^2 + 2x\psi - 4x\psi = x^2 + \psi^2 - 2x\psi = (x - \psi)^2 \geq 0.$$

Ισχύει διότι το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός.

Η ισότητα ισχύει όταν  $x - \psi = 0$  δηλ  $x = \psi$ .

**γ)** Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά  $x^2 + \psi^2 + 1 - 2\psi$  είναι μη αρνητικός αριθμός.  $x^2 + \psi^2 + 1 - 2\psi = x^2 + (\psi - 1)^2 \geq 0$ . Το οποίο ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών. Η ισότητα ισχύει όταν  $x = 0$  και  $\psi - 1 = 0$  δηλ  $x = 0$  και  $\psi = 1$ .

- 12. a)** Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά  $x + \frac{1}{x} - 2$  είναι μη αρνητικός αριθμός.  $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ . Το οποίο ισχύει διότι:  $(x-1)^2 \geq 0$  και  $x > 0$

**β)** Αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά  $x + \frac{1}{x} - (-2)$  δεν είναι θετικός αριθμός.

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0. \text{ Το οποίο ισχύει διότι: } (x+1)^2 \geq 0 \text{ και } x < 0$$

- 13.** Έστω  $x$  είναι ο αριθμός και  $\pi$  είναι το πηλίκο της διαίρεσης τότε:

$$x = 15\pi + 6. \text{ Ετσι έχουμε: } 114 < x < 135 \text{ ή } 114 < 15\pi + 6 < 135 \text{ ή}$$

$$114 - 6 < 15\pi + 6 - 6 < 135 - 6 \text{ ή } 108 < 15\pi < 129 \text{ ή } \frac{108}{15} < \pi < \frac{129}{15} \text{ ή } 7,2 < \pi < 8,6.$$

Επειδή ο  $\pi$  είναι ακέραιος  $\pi = 8$ , άρα  $x = 15 \cdot 8 + 6 = 126$ .

- 14.** Έστω  $x$  είναι η τιμή του παντελονιού και  $\psi$  είναι η τιμή της μπλούζας τότε  $30 \leq x \leq 35$  (1) και  $22 \leq \psi \leq 25$  (2). Πολλαπλασιάζω με το δύο τα μέλη της ανίσωσης (1) και με 3 τα μέλη της ανίσωσης (2) και έχουμε:  $60 \leq 2x \leq 70$  και  $66 \leq 3\psi \leq 75$ . Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες:  $60 + 66 \leq 2x + 3\psi \leq 70 + 75$  ή  $126 \leq 2x + 3\psi \leq 145$ . Άρα θα πληρώσει από 126 έως 145 ευρώ.

- 15.** Αν  $x$  είναι το βάρος των ατόμων και  $\psi$  είναι το βάρος των αποσκευών τότε:  $60 < x < 100$  οπότε  $51 \cdot 60 < 51x < 51 \cdot 100$  ή  $3060 < 51x < 5100$  (1) και  $4 \leq \psi \leq 15$  οπότε  $50 \cdot 4 \leq 50 \cdot \psi \leq 50 \cdot 15$  ή  $200 \leq 50\psi \leq 750$  (2). Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:  $3060 + 200 < 51x + 50\psi < 5100 + 750$  ή  $3260 < 51x + 50\psi < 5850$ . Άρα το πούλμαν θα έχει συνολικό βάρος από 16,51 t έως 19,1 t. Οπότε μπορεί να περάσει το πούλμαν από την γέφυρα.

- 16. a)**  $11 - 3x < 7x + 1$  ή  $-3x - 7x < 1 - 11$  ή  $-10x < -10$  ή  $x > 1$

$$\text{b)} 2x - 9 > 5x + 6 \text{ ή } 2x - 5x > 6 + 9 \text{ ή } -3x > 15 \text{ ή } x < -5$$

$$\text{γ)} 4(3x - 5) > 3(4x + 5) \text{ ή } 12x - 20 > 12x + 15 \text{ ή } 12x - 12x > 20 + 15 \text{ ή } 0x > 35 \text{ αδύνατη.}$$

**δ)**  $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$  ή  $10 \cdot \frac{3-4x}{5} - 10 \cdot \frac{3x}{10} > 10 \cdot \frac{6-x}{2}$  ή  $2(3-4x) - 3x > 5(6-x)$  ή

**ε)**  $\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$  ή  $6 \cdot \frac{2x+1}{6} - 6x < 6 \cdot \frac{3-2x}{3}$  ή  $2x+1 - 6x < 2(3-2x)$  ή  
 $2x+1 - 6x < 6 - 6x$  ή  $2x - 6x + 6x < 6 - 1$  ή  $2x < 5$  ή  $x < \frac{5}{2}$

**στ)**  $1 - \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3}) < \frac{x+4}{6}$  ή  $6 \cdot 1 - 6 \cdot [\frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})] < 6 \cdot \frac{x+4}{6}$  ή  $6 - 3(x + \frac{2}{3}) < x + 4$  ή  
 $6 - 3x - 2 < x + 4$  ή  $-3x - x < 4 - 6 + 2$  ή  $-4x < 0$  ή  $x > 0$ .

**17.** **α)**  $7x - 1 < 8 + 6x$  ή  $7x - 6x < 8 + 1$  ή  $x < 9$   
και  $3x - 2 > x - 10$  ή  $3x - x > -10 + 2$  ή  $2x > -8$  ή  $x > -4$   
Αρα  $-4 < x < 9$

**β)**  $4x + 3 < 9 + 5x$  ή  $4x - 5x < 9 - 3$  ή  $-x < 6$  ή  $x > -6$   
και  $1 - x < 2x + 7$  ή  $-x - 2x < 7 - 1$  ή  $-3x < 6$  ή  $x > -2$ . Αρα  $x > -2$ .

**γ)**  $2x + 5 < \frac{x}{2} + 2$  ή  $2(2x + 5) < 2(\frac{x}{2} + 2)$  ή  $4x + 10 < x + 4$  ή  $4x - x < 4 - 10$  ή  $x < -2$   
και  
 $\frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$  ή  $6(\frac{x-1}{2} + 1) > 6(x + \frac{1}{3})$  ή  $3(x-1) + 6 > 6x + 2$  ή  $3x - 3 + 6 > 6x + 2$   
ή  $3x - 6x > 3 - 6 + 2$  ή  $-3x > -1$  ή  $x < \frac{1}{3}$

Αρα  $x < -2$

**18.**  $\frac{x}{x+1} < \frac{31}{40}$  ή  $40(x+1) \frac{x}{x+1} < 40(x+1) \frac{31}{40}$  ή  $40x < 31(x+1)$  ή  $40x < 31x + 31$   
ή  $40x - 31x < 31$  ή  $9x < 31$  ή  $x < 3,44$  (1)  
και  $\frac{x+1}{x+2} > \frac{31}{40}$  ή  $40(x+2) \frac{x+1}{x+2} > 40(x+2) \frac{31}{40}$  ή  $40(x+1) > 31(x+2)$  ή  
 $40x + 40 > 31x + 62$  ή  $40x - 31x > 62 - 40$  ή  $9x > 18$  ή  $x > 2$  (2). Από (1) και (2)  $x = 3$ .

- 1.** **a)**  $(x + \alpha)^2 - (x + \beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2$  ή  $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - (x^2 + 2\beta x + \beta^2) = \beta^2 - \alpha^2$  ή  
 $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - x^2 - 2\beta x - \beta^2 = \beta^2 - \alpha^2$  ή  $2\alpha x - 2\beta x = 2(\beta^2 - \alpha^2)$  ή  
 $2(\alpha - \beta) = (\beta - \alpha)(\alpha + \beta)$ . Επειδή  $\alpha \neq \beta$  η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{2(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)}{2(\alpha - \beta)}$$
 ή  $x = -(\alpha + \beta)$

- b)** Ε.Κ.Π.  $\alpha\beta \neq 0$ , οπότε  $\alpha\beta \cdot \frac{x + \alpha}{\beta} - \alpha\beta \frac{x + \beta}{\alpha} = \alpha\beta \frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta$  ή  
 $\alpha(x + \alpha) - \beta(x + \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta \alpha x + \alpha^2$  ή  $\alpha x - \alpha^2 - \beta x - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta$   $(\alpha - \beta)x = \beta^2 - \alpha\beta$ . Επειδή  $\alpha \neq \beta$  η εξίσωση έχει μοναδική λύση την  
 $x = \frac{\beta(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta}$  ή  $x = -\beta$ .

- 2.** Το τρίγωνο  $ABC$  είναι ορθογώνιο άρα  $BG^2 = AB^2 + AG^2$ , άρα  $(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2$  ή  $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1$  ή  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .  
Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = -3$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ .

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$ ,  
άρα  $x = \frac{2+4}{2} = 3$  ή  $x = \frac{2-4}{2} = -1$  απορρ.

Για  $x = 1$   $BG = 1 + 2 = 3$ , από το ορθογώνιο  $BGD$  έχουμε:  $\Gamma\Delta^2 = BG^2 + B\Delta^2$ ,  
άρα  $(3\psi - 2)^2 = 5^2 + (2\psi + 2)^2$  ή  $9\psi^2 - 12\psi + 4 = 25 + 4\psi^2 + 8\psi + 4$  ή  
 $5\psi^2 - 20\psi - 25 = 0$  ή  $\psi^2 - 4\psi - 5 = 0$  Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -4$ ,  $\gamma = -5$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $\psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$   
Άρα  $\psi = \frac{4+6}{2} = 5$  δεκτή ή  $\psi = \frac{4-6}{2} = -1$  απορρ.

- 3.** Έστω  $x$  είναι ο ένας τότε ο άλλος θα είναι  $x + 1$ . Έτσι θα έχουμε την  
εξίσωση  $x(x + 1) = (x + x + 1) \cdot 7 = 23$  ή  $x^2 + x = (2x + 1) \cdot 7 + 23$  ή  
ή  $x^2 + x = 14x + 7 + 23$  ή  $x^2 - 13x - 30 = 0$   
Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -13$ ,  $\gamma = -30$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 169 + 120 = 289 > 0$   
Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $\psi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 17}{2}$   
Άρα  $x = \frac{13+17}{2} = 15$  δεκτή ή  $x = \frac{13-17}{2} = -2$  απορρ. Άρα οι αριθμοί είναι:  
15, 16.

4. **a)**  $\frac{x}{x-a} + \frac{2x}{x+a} = \frac{2\alpha^2}{x^2 - a^2}$  ή  $\frac{x}{x-a} + \frac{2x}{x+a} = \frac{2\alpha^2}{(x-a)(x+a)}$ .

Πρέπει  $x - a \neq 0$  και  $x + a \neq 0$  δηλ  $x \neq a$  και  $x \neq -a$

Ε.Κ.Π.  $(x-a)(x+a) \neq 0$ ,

$$\text{οπότε } (x-a)(x+a) \frac{x}{x-a} + (x-a)(x+a) \frac{2x}{x+a} = (x-a)(x+a) \frac{2\alpha^2}{(x-a)(x+a)} \text{ ή} \\ (x+a) \cdot x + (x-a) \cdot 2x = 2\alpha^2 \text{ ή } x^2 + ax + 2x^2 - 2ax = 2\alpha^2 \text{ ή } 3x^2 - ax - 2\alpha^2 = 0$$

Είναι  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -a$ ,  $\gamma = -2\alpha^2$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2\alpha^2) = a^2 + 24\alpha^2 = 25\alpha^2 > 0$

$$\text{Αρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-a) \pm \sqrt{25\alpha^2}}{2 \cdot 3} = \\ = \frac{\alpha \pm 5\alpha}{6}. \text{ Άρα } x = \frac{\alpha + 5\alpha}{6} = \alpha \text{ ή } x = \frac{\alpha - 5\alpha}{3} = -\frac{2}{3}\alpha$$

**b)**  $\frac{3\alpha}{x^2 - ax} + \frac{1}{x^2 + ax} = \frac{6x}{x^2 - a^2}$  ή  $\frac{3\alpha}{x(x-a)} + \frac{1}{x(x+a)} = \frac{6x}{(x-a)(x+a)}$ .

Πρέπει  $x \neq 0$  και  $x + a \neq 0$  και  $x - a \neq 0$  άρα  $x \neq 0$  και  $x \neq -a$  και  $x \neq a$ .

Ε.Κ.Π.  $x(x-a)(x+a) \neq 0$ , οπότε

$$x(x-a)(x+a) \frac{3\alpha}{x(x-a)} + x(x-a)(x+a) \frac{1}{x(x+a)} = x(x-a)(x+a) \frac{6x}{(x-a)(x+a)}$$

$$3\alpha(x+a) + x - a = 6x^2 \text{ ή } 3\alpha x + 3\alpha^2 + x - a = 6x^2 \text{ ή } 6x^2 - (3\alpha + 1)x - 3\alpha^2 + a = 0$$

Είναι  $\alpha = 6$ ,  $\beta = -(3\alpha + 1)$ ,  $\gamma = -3\alpha^2 + a$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

$$[-(3\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3\alpha^2 + a) = (3\alpha + 1)^2 - 24(-3\alpha^2 + a) =$$

$$9a^2 + 6a + 1 + 72a^2 - 24a = 81a^2 - 18a + 1 = (9a - 1)^2 \geq 0$$

**1<sup>η</sup> περίπτωση:** Αν  $\Delta = 0$  ή  $(9a-1)^2 = 0$  ή  $9a-1 = 0$  ή  $a = \frac{1}{9}$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $6x^2 - (3 \cdot \frac{1}{9} + 1)x - 3(\frac{1}{9})^2 + \frac{1}{9} = 0$  ή  $6x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{27} = 0$   
έχει δύο ρίζες ίσες τις  $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\frac{3}{9}}{2 \cdot 6} = -\frac{1}{9}$

**2<sup>η</sup> περίπτωση:** Αν  $\Delta > 0$  τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$   
 $= \frac{3a+1 \pm \sqrt{(9a-1)^2}}{2 \cdot 6} = \frac{3a+1 \pm (9a-1)}{12}$ , άρα  $x = \frac{3a+1+9a-1}{12} = \frac{12a}{12} = a$ ,  
 $x = \frac{3a+1-9a+1}{12} = \frac{-6a+2}{12} = \frac{-3a+1}{6}$ .

**Κεφάλαιο 2**

- 5.** Ο αριθμός 1 είναι λύση άρα  $12 + (\lambda - 5) \cdot 1 + \lambda = 0$  ή  $1 + \lambda - 5 + \lambda = 0$  ή  $2\lambda = 4$  ή  $\lambda = 2$ .  
 Για  $\lambda = 2$  η εξίσωση γίνεται:  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -3$ ,  $\gamma = 2$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$   
 Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
. Άρα  $x = \frac{3+1}{2} = 2$ ,  $x = \frac{3-1}{2} = 1$   
 άρα η άλλη ρίζα είναι η  $x = 2$ .
- 6.** Κάνουμε την διαίρεση  $P(x)$ :  $(x - 3)$
- |  |  |
|--|--|
| $\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 \\ -x^3 + 3x^2 \\ \hline 6x^2 - 13x - 15 \\ -6x^2 + 18x \\ \hline 5x - 15 \\ -5x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$ | $\left  \begin{array}{c} x-3 \\ \hline x^2 + 6x + 5 \end{array} \right.$ |
|--|--|
- Άρα  $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x - 3)(x^2 + 6x + 5)$ .  $P(x) = 0$   $(x-3)(x^2 + 6x + 5) = 0$   
 $x - 3 = 0$  ή  $x^2 + 6x + 5 = 0$  δηλ  $x = 3$  ή  $x^2 + 6x + 5 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 5$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2}$ .  
 Άρα  $x = \frac{-6 - 4}{2} = -5$  ή  $x = \frac{-6 + 4}{2} = -1$
- 7.** Εστω  $x$ ,  $x+1$  είναι οι δύο ακέραιοι (είναι διάφοροι του μηδενός, για να υπάρχουν οι αντίστροφοι). Οπότε  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = 1$ .  
 Ε.Κ.Π.  $x(x+1) \neq 0$ , οπότε  $x(x+1) \frac{1}{x} + x(x+1) \frac{1}{x+1} + x(x+1) \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = x(x+1)$  ή  $(x+1)+x+1 = x^2+x$  ή  $x^2-x-2 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = -2$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1+8 = 9 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$ , άρα  $x = \frac{1+3}{2} = 2$  ή  $x = \frac{1-3}{2} = -1$  απορρ.
- 8.** Έστω η μία διάσταση είναι  $x > 0$  τότε η άλλη θα είναι  $x + 2$  οπότε  $x(x+2) = 399$  ή  $x^2 + 2x - 399 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -399$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 22-4 \cdot 1 \cdot (-399) = 4 + 1596 = 1600 > 0$ . Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις  

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{1600}}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{-2 \pm 40}{2}, \text{ áρα } x = \frac{-2 - 40}{2} = -21 \text{ απορρ. ή } x = \frac{-2 + 40}{2} = 19.$$

Άρα οι διαστάσεις είναι: 19, 21

- 9.** Στο ορθογώνιο  $\text{ΑΒΓ}$   $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2$  (1). Στο ορθογώνιο  $\text{ΑΓΔ}$ :  $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΓΔ}^2$  άρα  $\text{ΑΓ}^2 = 3^2 + x^2$  ή  $\text{ΑΓ}^2 = 9 + x^2$ . Στο ορθογώνιο  $\text{ΑΔΒ}$ :  $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2$  άρα  $\text{ΑΒ}^2 = x^2 + (2x+9)^2 = x^2 + 4x^2 + 36x + 81 = 5x^2 + 36x + 81$ .  $\text{ΒΓ}^2 = (2x+12)^2 = 4x^2 + 48x + 144$ . Άρα (1) ή  $5x^2 + 36x + 81 + 9 + x^2 = 4x^2 + 48x + 144$  ή  $2x^2 - 12x - 54 = 0$   $x^2 - 6x - 27 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -6$ ,  $\gamma = -27$ .  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$

$$\text{Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις } x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2}$$

$$\text{Άρα } x = \frac{6+12}{2} = 9 \text{ ή } x = \frac{6-12}{2} = -3 \text{ απορρ.}$$

- 10.** Θα βρούμε το πρόσημο της διαφοράς των δύο αριθμών.

$$(1+\alpha)(1+\beta) - (1+\alpha+\beta) = 1 + \beta + \alpha + \alpha\beta - 1 - \alpha - \beta = \alpha\beta$$

**a)** Av  $\alpha \cdot \beta = 0$  τότε  $(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta$

**b)** Av  $\alpha \cdot \beta > 0$  τότε  $(1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta$

**c)** Av  $\alpha \cdot \beta < 0$  τότε  $(1+\alpha)(1+\beta)<1+\alpha+\beta$

- 11.** **a)**  $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)$ .

**b)**  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$  ή  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma = 0$  ή  $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma) = 0$ .

Άρα από το **a)**  $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0$  οπότε  $\alpha - \beta = 0$  και  $\beta - \gamma = 0$  και  $\gamma - \alpha = 0$  άρα  $\alpha = \beta$  και  $\beta = \gamma$  και  $\gamma = \alpha$  δηλ  $\alpha = \beta = \gamma$ .

- 12.** Επειδή  $v$ ,  $v+1$ ,  $v+2$  είναι θετικοί, πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών το οποίο είναι  $v(v+1)(v+2) > 0$  και η φορά δεν αλλάζει.

$$v(v+1)(v+2) \frac{4}{v(v+2)} - v(v+1)(v+2) \frac{1}{(v+1)(v+2)} > v(v+1)(v+2) \frac{2}{v(v+1)} \text{ ή}$$

$$4(v+1) - v > 2(v+2) \text{ ή } 4v+4-v > 2v+4 \text{ ή } v > 0 \text{ που ισχύει.}$$

- 13.** **a)**  $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2 - 2\alpha\beta$  ή  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta > 0$  ή  $(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 > 0$  ή  $(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) > 0$ . Το οποίο ισχύει διότι:  $\alpha + \beta > \gamma$  ή  $\alpha + \beta - \gamma > 0$  και  $\alpha + \beta + \gamma > 0$  (άθροισμα θετικών)

**b)**  $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$  ή  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta < 0$  ή  $(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 < 0$  ή  $(\alpha - \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) < 0$ . (1) Το οποίο ισχύει διότι:  $\alpha < \beta + \gamma$  ή  $\alpha - \beta - \gamma < 0$  και  $\alpha + \gamma > \beta$  ή  $\alpha + \gamma - \beta > 0$ , άρα η (1) ισχύει ως γινόμενο ετερόσημων.

**γ)** Από β)  $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2 + 2\alpha\beta$  (1),  $\alpha^2 + \gamma^2 < \beta^2 + 2\alpha\gamma$  (2),  $\beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2 + 2\beta\gamma$  (3). Αν προσθέσουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη παίρνουμε:

**Κεφάλαιο 2**

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2 &< \gamma^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + \alpha^2 + 2\beta\gamma \text{ ή} \\ \text{ή } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 &< 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \text{ ή} \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &< 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma \end{aligned}$$

- 14.** Θέτω  $2007\alpha = 2008\beta = 2009\gamma = \lambda > 0$ , άρα  $2007\alpha = \lambda$ ,  $2008\beta = \lambda$ ,  $2009\gamma = \lambda$ , οπότε  $\alpha = \frac{\lambda}{2007}$ ,  $\beta = \frac{\lambda}{2008}$ ,  $\gamma = \frac{\lambda}{2009}$ , οπότε  $\gamma < \beta < \alpha$
- 15.**  $\Delta = [-(3\alpha - 2)]^2 - 4(\alpha + 1)(\alpha + 1) = (3\alpha - 2)^2 - 4(\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 - 12\alpha + 4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 9\alpha^2 - 12\alpha + 4 - 4\alpha^2 - 8\alpha - 4 = 5\alpha^2 - 20\alpha = 5\alpha(\alpha - 4) > 0$  διότι  $\alpha > 4$ , άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
- 16.**  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$  ή  $\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 4\beta + 4 + \gamma^2 - 6\gamma + 9 = 0$  ή  $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 + (\gamma - 3)^2 = 0$ , οπότε  $\alpha - 1 = 0$  και  $\beta - 2 = 0$  και  $\gamma - 3 = 0$  άρα  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$  και  $\gamma = 3$ .
- 17.**  $A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8 = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 + 2\beta^2 - 8\beta + 8 =$   
 $= (\alpha - 5)^2 + 2(\beta^2 - 4\beta + 4) = (\alpha - 5)^2 + 2(\beta - 2)^2$ . Επειδή  $(\alpha - 5\beta)^2 \geq 0$  και  $2(\beta - 2)^2 \geq 0$  άρα και  $A \geq 0$ . Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $A$  είναι το 0. Η παράσταση γίνεται ελάχιστη όταν  $\alpha - 5\beta = 0$  και  $\beta - 2 = 0$  δηλ όταν  $\alpha = 5\beta$  και  $\beta = 2$  άρα  $\alpha = 10$  και  $\beta = 2$
- 18.** Παρατηρούμε ότι:  $x - 19 = (x - 2020) + 2001$ ,  $x - 17 = (x - 2020) + 2003$ ,  
 $x - 15 = (x - 2020) + 2005$ ,  $x - 13 = (x - 2020) + 2007$ . Οπότε
- $$\frac{x-19}{2001} + \frac{x-17}{2003} + \frac{x-15}{2005} + \frac{x-13}{2007} = 4 \text{ ή}$$
- $$\frac{x-2020+2001}{2001} + \frac{x-2020+2003}{2003} + \frac{x-2020+2005}{2005} + \frac{x-2020+2007}{2007} = 4$$
- $$\text{ή } \frac{x-2020}{2001} + 1 + \frac{x-2020}{2003} + 1 + \frac{x-2020}{2005} + 1 + \frac{x-2020}{2007} + 1 = 4 \text{ ή}$$
- $$(x-2020)\left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2007}\right) = 0 \text{ ή } x-2020 = 0 \text{ ή } x = 2020.$$
- 19.**
- |  |   |
|--|---|
| <b>OPIZONTIA</b><br>1. δευτεροβάθμια<br>2. διάταξη.<br>3. αόριστη<br>4. ρίζα<br>5. διπλή<br>6. συμπλήρωση<br>7. κλασματική | <b>ΚΑΘΕΤΑ</b><br>1. διακρίνουσα<br>2. δύο<br>3. μεταβατική<br>4. μία<br>5. λύση<br>6. αδύνατη |
|--|---|



A close-up photograph of a person's hand holding a silver pen over an open notebook. The notebook contains handwritten text and several diagrams, including a network graph with nodes and connections. The background is slightly blurred.

# Κεφάλαιο 30



Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους λέμε κάθε εξίσωση της μορφής  $\alpha x + \beta \psi = 0$ , με  $x, \psi \in R$  και  $\alpha, \beta \in R$ .

Τα  $x, \psi$  είναι οι άγνωστοι, τα  $\alpha, \beta$  οι συντελεστές και το  $\gamma$  ο σταθερός όρος.

Κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία όταν τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές είναι διάφορος του μηδενός

Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Λύση μιάς γραμμικής εξίσωσης  $\alpha x + \beta \psi = \gamma$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, \psi)$  που την επαληθεύει.

### Γενικά:

**α)** Αν ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

**β)** Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

### Ειδικές περιπτώσεις

- Η εξίσωση  $\psi = \kappa$ , με  $\kappa \neq 0$  παριστάνει μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και τέμνει τον άξονα  $\psi'\psi$  στο σημείο  $(0, \kappa)$ , ενώ η εξίσωση  $\psi = 0$  παριστάνει τον  $x'x$ .
- Η εξίσωση  $x = \kappa$  με  $\kappa \neq 0$  παριστάνει μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $\psi'\psi$  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $(\kappa, 0)$ , ενώ η εξίσωση  $x = 0$  παριστάνει τον  $\psi'\psi$ .

Κάθε σημείο του άξονα  $x$  έχει την μορφή  $(x, 0)$

Κάθε σημείο του άξονα  $\psi'\psi$  έχει την μορφή  $(0, \psi)$

### Παρατηρήση:

Για να βρούμε τα σημεία που τέμνει μία ευθεία  $(\varepsilon)$  τους άξονες:

**α)** Για τον άξονα  $x'x$ , βάζουμε όπου  $\psi = 0$  και βρίσκουμε το  $x$ .

**β)** Για τον άξονα  $\psi'\psi$ , βάζουμε όπου  $x = 0$  και βρίσκουμε το  $\psi$ .

**1** Δίνεται η γραμμική εξίσωση:  $7x + 2\psi = 9$ . Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης.

A(1,1) B(3,-2) Γ(0,0)

### Λύση

Για το σημείο **A**:  $7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7 + 2 = 9$ , άρα είναι λύση

Για το σημείο **B**:  $7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 21 - 4 = 17 \neq 9$ , άρα δεν είναι λύση

Για το σημείο **Γ**:  $7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 9$ , άρα δεν είναι λύση

**2** Δίνεται η ευθεία  $2x + 3\psi = 5$

**a)** Να εξετάσετε αν τα σημεία A(1, 1) B(-2, 3) ανήκουν στην ευθεία

**b)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας

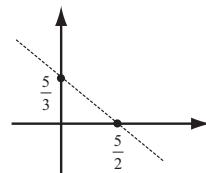
**γ)** Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία να διέρχεται από το σημείο M( λ-1,λ)

### Λύση

**a)** Για το σημείο **A**:  $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$ , άρα το **A** ανήκει στην ευθεία.

Για το σημείο **B**:  $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5$ , άρα το **B** ανήκει στην ευθεία

**b)** Για  $x = 0$ ,  $\psi = \frac{5}{3}$ , άρα το σημείο είναι:  $(0, \frac{5}{3})$  Για  $\psi = 0$ ,  $x = \frac{5}{2}$ ,



άρα το σημείο είναι  $(\frac{5}{2}, 0)$

**γ)** Για να διέρχεται η ευθεία από το **M** πρέπει  $2 \cdot (\lambda - 1) + 3 \cdot \lambda = 5$  ή

$$2\lambda - 2 + 3\lambda = 5 \text{ ή } 5\lambda = 5 + 2 \text{ ή } 5\lambda = 7 \text{ ή } \lambda = \frac{7}{5}.$$

**3** Δίνεται η ευθεία (ε)  $4x + 6\psi = 12$ .

**a)** Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η ευθεία (ε) τους άξονες

**β)** Αν **A** είναι το σημείο που τέμνει η(ε) τον x'x, να βρείτε την ευθεία (η) που περνάει από το **A** και είναι παράλληλη στον ψ'ψ.

### Λύση

**a)** Για τον άξονα x'x: Θέτω όπου ψ το 0, οπότε  $4 \cdot x + 6 \cdot 0 = 12$  ή  
 $4x = 12$  ή  $x=3$

Άρα τέμνει τον x'x στο σημείο **A**(3,0)

Για τον άξονα ψ'ψ: Θέτω όπου x το 0, οπότε  $4 \cdot 0 + 6\psi = 12$  ή  $\psi = 2$ .

Άρα τέμνει τον ψ'ψ στο σημείο **B**(0,2)

**β)** Από α) είναι **A**(3,0) οπότε η ζητούμενη ευθεία θα είναι  $x = 3$

4

Δίνεται η εξίσωση:  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)\psi = 3 \quad (1)$

- α)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε ή (1) να παριστάνει ευθεία.
- β)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $x'x$ .
- γ)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία που να περνάει από το  $A(0,3)$ .

### Λύση

- α)** Η εξίσωση  $\alpha x + \beta \psi = \gamma$ , παριστάνει ευθεία όταν ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές  $\alpha, \beta$  είναι διάφορος του μηδενός.
- Βρίσκω την τιμή του  $\lambda$  για την οποία οι συντελεστές των  $x$  και  $\psi$  γίνονται ταυτόχρονα μηδέν. Λύνω  $\lambda - 1 = 0$  ή  $\lambda = 1$ . Αντικαθιστώ στην (1) όπου  $\lambda = 1$  και έχουμε:  $1^2 - 1 = 0$ , άρα για  $\lambda = 1$  δεν έχουμε ευθεία.
- β)** Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον  $x'x$  πρέπει:
- $$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1$$
- (απορρίπτεται) ή  $\lambda = -1$ . Η τιμή  $\lambda = 1$  απορρίπτεται διότι για  $\lambda = 1$  δεν έχουμε ευθεία.
- γ)** Για να παριστάνει η (1) ευθεία που να περνάει από το  $A(0,3)$  πρέπει
- $$(\lambda^2 - 1) \cdot 0 + (\lambda - 1) \cdot 3 = 0 \quad \text{ή} \quad 3(\lambda - 1) = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1$$
- απορρίπτεται. Άρα δεν υπάρχει  $\lambda$  που η (1) να παριστάνει ευθεία που να διέρχεται από το  $A(0,3)$

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

1. Η εξίσωση  $3x^2 + \psi = 7$  είναι γραμμική.
2. Η εξίσωση  $\frac{\alpha}{x} + \beta \psi = \gamma$  είναι γραμμική.
3. Η εξίσωση  $(\alpha-1)x + (\alpha^2-1)\psi = 3$  είναι γραμμική για κάθε τιμή του  $\lambda$ .
4. Η ευθεία  $x = 5$  είναι συνάρτηση.
5. Η ευθεία  $\psi = 6$  είναι συνάρτηση.
6. Οι ευθείες  $x = 5$  και  $x = -1$  είναι παράλληλες.
7. Οι ευθείες  $\psi = 3$  και  $x = -4$  είναι κάθετες.
8. Η ευθεία  $x = 3$  είναι παράλληλη στον  $x$ .

**Κεφάλαιο 3**

9. Η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)\psi = 0$  παριστάνει πάντα ευθεία.
10. Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
11. Η εξίσωση  $\psi = 6$  έχει άπειρες λύσεις.
12. Η εξίσωση  $3x - 5 = 0$  είναι γραμμική.
13. Αν  $(x_0, \psi_0)$  είναι μία λύση της γραμμικής εξίσωσης  $ax + \beta\psi = \gamma$  τότε  $a\bar{x}_0 + \beta\bar{\psi}_0 = \gamma$ .
14. Η εξίσωση  $ax + \beta\psi = \gamma$  γραφικά παριστάνει πάντα ευθεία γραμμή.
15. Η εξίσωση  $3x + \lambda\psi = 3$  γραφικά παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$ .
16. Το σημείο  $M(-1,2)$  ανήκει στην ευθεία  $x = 2$ .
17. Κάθε σημείο της ευθείας  $\psi = x$  ισαπέχει από τους άξονες.
18. Το σημείο τομής των ευθειών  $(\varepsilon) 3x - \psi = 3$  και  $(\zeta) x - \psi = -1$  είναι το  $(0,0)$ .
19. Η ευθεία  $\varepsilon: 2x + 2\psi = 6$  τέμνει το  $x'$ - $x$  στο σημείο  $(-3,0)$ .
20. Οι ευθείες  $x = 4$  και  $\psi = -2$  τέμνονται στο σημείο  $A(4, -2)$ .
21. Η ευθεία  $x = 5$  τέμνει τον  $\psi'$ - $\psi$  στο  $A(0,5)$ .
22. Η ευθεία  $2x + 6\psi = 0$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**B. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:**

1. Η ευθεία  $\psi = 6$  είναι κάθετη:  
**α.** στον  $x'$ - $x$    **β.** στον  $\psi'$ - $\psi$    **γ.** στην ευθεία  $\psi = 3$    **δ.** στην ευθεία  $\psi = 6x$ .
2. Αν η ευθεία  $(\varepsilon) 3x - (\lambda - 1)\psi = 3$  περνάει από το σημείο  $A(\lambda, \lambda)$  τότε η τιμή του  $\lambda$  είναι:  
**α.**  $\lambda = 1$    **β.**  $\lambda = 0$    **γ.**  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = 3$    **δ.**
3. Το σημείο τομής των ευθειών  $(\varepsilon) 2x - \psi = 1$  και  $(\zeta) 3x + 2\psi = 5$  είναι:  
**α.**  $O(0,0)$ ,   **β.**  $A(1,1)$ ,   **γ.**  $B(-1,1)$    **δ.**  $\Gamma(1,-1)$
4. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(-2,3)$  και είναι παράλληλη στον  $\psi'$ - $\psi$  έχει εξίσωση:  
**α.**  $x = -2$ ,   **β.**  $x = 2$ ,   **γ.**  $\psi = 3$ ,   **δ.**  $\psi = 2$

5. Η ευθεία ( $\varepsilon$ )  $2x + 4\psi - 8 = 0$ , τέμνει τον  $x'$  $x$  στο σημείο:  
**α.** (4,0), **β.** (0,4), **γ.** (2,0), **δ.** (0,2).
6. Η ευθεία  $x = 4$  είναι παράλληλη:  
**α.** στον  $x'$  $x$ , **β.**  $\psi'$  $\psi$ , **γ.** στην ευθεία  $\psi = x$ , **δ.** στην ευθεία  $\psi = -x$ .
7. Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμική είναι:  
**α.**  $2x - x\psi = 2$ , **β.**  $4x - 5\psi + 3 = 0$  **γ.**  $x - 1 + \psi = 3$ , **δ.**  $x + \psi - 1 + 2 = 0$
8. Η εξίσωση  $(\lambda 2 - \lambda)x + \lambda\psi = 3$ . Παριστάνει ευθεία όταν:  
**α.**  $\lambda = 0$ , **β.**  $\lambda \neq 0$ , **γ.**  $\lambda \neq 1$ , **δ.**  $\lambda = 1$
9. Η ευθεία:  $x - 4\psi = 8$ , σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν:  
**α.** 8 τ.μον., **β.** 4 τ. μον., **γ.** 2 τ. μον., **δ.** 16 τ.μον.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:  
**α)**  $\varepsilon_1$ :  $x - 3\psi = 4$    **β)**  $\varepsilon_2$ :  $x - \psi = 0$ ,   **γ)**  $\varepsilon_3$ :  $x = 4$    **δ)**  $\psi = -2$
2. Δίνεται η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $3x - \psi = 3$ .  
**α)** Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  ώστε η ευθεία τα τέμνει τον  $x/x$  στο σημείο  $A(\alpha^2 - 3, 0)$ .  
**β)** Για τη μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε από το α) ερώτημα να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας:  $\alpha \cdot x + \psi = 5$
3. Δίνεται η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $x - 4\psi = 8$   
**α)** Να βρείτε τα σημεία που η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τους άξονες.  
**β)** Αν  $A$  είναι το σημείο που η ( $\varepsilon$ ) τέμνει τον  $x / x$ , να βρείτε την ευθεία που περνάει από το  $A$  και είναι παράλληλη στον  $\psi / \psi$ .
4. Δίνεται η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $\alpha \cdot x + 5\psi = 10$ . Να βρείτε: **α)** Τον αριθμό  $\alpha$  αν η ευθεία τέμνει τον  $x'$  $x$  στο 2. **β)** Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η ( $\varepsilon$ ) με τους άξονες.
5. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η εξίσωση  $(\alpha^2 - 1)x + (\alpha - 1)\psi = 3$   
**α)** Να παριστάνει ευθεία  
**β)** Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $x'$  $x$   
**γ)** Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $\psi'\psi$

### Κεφάλαιο 3

6. Δίνεται η εξίσωση  $(\alpha^2 - 2\alpha)x + (\alpha - 2)\psi + \alpha^2 - 4 = 0$ .  
Να βρείτε τις τιμές του α ώστε:  
**α)** η εξίσωση να παριστάνει ευθεία  
**β)** η εξίσωση να παριστάνει ευθεία η οποία να περνάει από την αρχή των αξόνων.
7. Δίνεται η εξίσωση:  $4x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x\psi + 2\psi - 6 = 0$ .  
Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να είναι γραμμική. Για την μικρότερη τιμή του λ που θα βρείτε να σχεδιάσετε την ευθεία:  
 $2x - \lambda\psi + 4\lambda = 0$ .

## 3.2 Η έννοια των γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και ψ, λέμε ένα σύνολο από δύο γραμμικές εξισώσεις και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων.

### Γενικά:

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και ψ ονομάζεται κάθε ζεύγος (x,ψ) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, ψ επιλύεται γραφικά και αλγεβρικά.

Για να λύσουμε ένα σύστημα γραφικά δουλεύουμε ως εξής:

Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών που παριστάνει κάθε γραμμική εξίσωση και έχουμε:

- Αν οι ευθείες τέμνονται τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής.
- Αν οι ευθείες είναι παράλληλες τότε δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι αδύνατο.
- Αν οι ευθείες συμπίπτουν τότε έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και λέμε ότι είναι αόριστο.

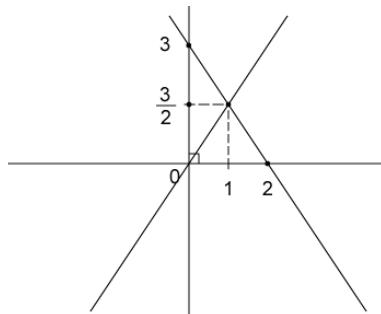
1

**α)** Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα ( $\Sigma$ ): 
$$\begin{cases} 3x+2\psi=6 \\ \psi-\frac{3}{2}x=0 \end{cases}$$

**β)** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x+2\psi=6$ ,  $\varepsilon_2 : \psi-\frac{3}{2}x=0$  και ο άξονας  $\psi'$ .

### Λύση

**α)** Θα κάνουμε την γραφική παράσταση των ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων.



Οι ευθείες τέμνονται στο  $A(1, \frac{3}{2})$ . Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (1, \frac{3}{2})$

**β)** Το ζητούμενο τρίγωνο έχει βάση 3 και ύψος  $\frac{3}{2}$ . Οπότε:

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

2

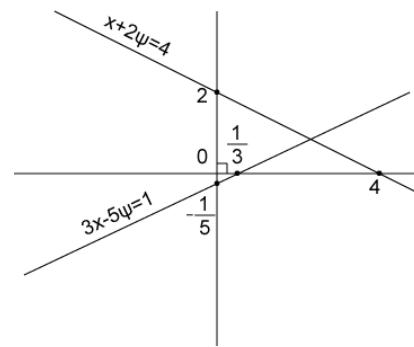
Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

**α)** 
$$\begin{cases} x+2\psi=4 \\ 3x-5\psi=1 \end{cases}$$
    **β)** 
$$\begin{cases} x=5 \\ x+\psi=0 \end{cases}$$
    **γ)** 
$$\begin{cases} \psi=4 \\ x=-7 \end{cases}$$
    **δ)** 
$$\begin{cases} x-5=0 \\ \psi+3=0 \end{cases}$$

### Λύση

**α)** Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

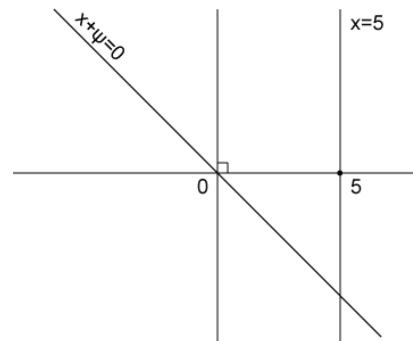
**Κεφάλαιο 3**



Οι ευθείες τέμνονται στο  $A\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{8}\right)$

Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{8}\right)$

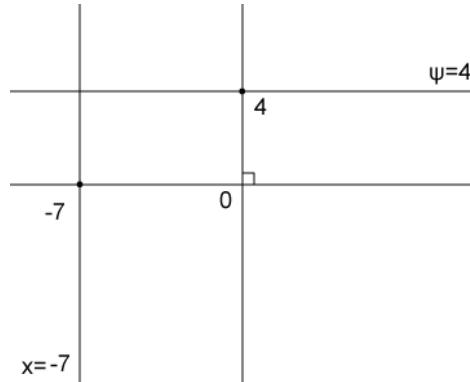
**β)** Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων.



Οι ευθείες τέμνονται στο  $A(5, -5)$

Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (5, -5)$

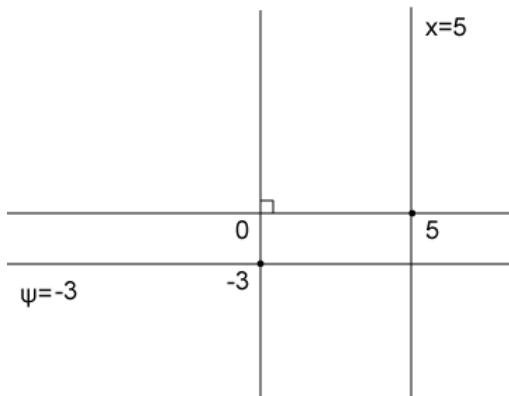
**γ)** Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων



Οι ευθείες τέμνονται στο Α(-7, 4)

Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (-7, 4)$

- δ)** Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων



Οι ευθείες τέμνονται στο Α(5, -3)

Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (5, -3)$

### Ερωτήσεις κατανόησης

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο. Τότε οι ευθείες που παριστάνουν αυτές οι εξισώσεις είναι πάντα παράλληλες στον x'x.
2. Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο.
3. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους x, ψ μπορεί να έχει μόνο δύο πραγματικές λύσεις.
4. Το σύστημα των εξισώσεων:  $x = 3$  και  $x - 5 = 0$  είναι αδύνατο.
5. Το σύστημα των εξισώσεων:  $3x - 6 = 0$  και  $\psi - 4 = 0$  έχει μοναδική λύση.
6. Το σύνολο των εξισώσεων  $3x + 2\psi = 1$ ,  $3x - 5\psi = 6$  αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα .

**Κεφάλαιο 3**

- 7.** Το ζεύγος (-1,3) είναι λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x+3\psi=1 \\ x+2\psi=5 \end{cases}$$

- 8.** Το παρακάτω σύστημα είναι αδύνατο

$$\begin{cases} x+\psi=8 \\ x+2\psi=10 \end{cases}$$

**B. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:**

- 1.** Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (1,1) και (-2,-2) είναι:  
**a.**  $\psi = x$ , **b.**  $\psi = 3x - 1$ , **c.**  $\psi = 3x - 2$ , **d.**  $\psi = x + 1$
- 2.** Η ευθεία  $\psi + 2x = 4$  τέμνει τον  $x'$  στο:  
**a.** A(2,0), **b.** B(0,2), **c.** Γ(0,4) **d.** Δ(4,0)
- 3.** Οι ευθείες: (ε)  $2x - 5\psi = -3$ , (ζ)  $x + \psi = 2$   
**a.** είναι παράλληλες, **b.** ταυτίζονται, **c.** τέμνονται σε ένα σημείο  
**d.** διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
- 4.** Οι ευθείες: (ε)  $2x - \psi = 0$ ,  $3x + \psi = 0$  τέμνονται στο:  
**a.** (0,0), **b.** (1,2), **c.** (1,-3), **d.** (-3,1)

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

- 1** Δίνονται οι ευθείες: (ε)  $3x + 2\psi = 5$ , (ζ)  $-x + 2\psi = 1$ .

**a)** Να βρείτε την λύση του συστήματος γραφικά:

**β)** Να εξετάσετε αν η ευθεία (η)  $4x - 3\psi = 1$  περνάει από το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

**2** Δίνεται η ευθεία: (ε)  $x - 4\psi = 8$

**a)** Να κάνετε την γραφική της παράσταση

**β)** Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η (ε) τους άξονες.

**γ)** Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) και της ευθείας που περνάει από το A(-2,3) και είναι παράλληλη στον  $x'$ .

**3** Δίνονται οι ευθείες: (ε)  $3x - \psi = 3$ , (ζ)  $x - 2\psi = 4$  (η)  $2x - \psi = 2$

**a)** Να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες.

**β)** Να βρείτε το σημείο τομής των (ζ), (η) γραφικά.

**γ)** Να εξετάσετε αν οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.

Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μία εξίσωση τον έναν από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο. Έχουμε δύο μεθόδους που αυτό επιτυγχάνεται.

**α)** Μέθοδος αντικατάστασης: Δουλεύουμε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν αγνώστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στη προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

**β)** Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών: Δουλεύουμε ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξισώσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ένα σύστημα έχει την μορφή: 
$$\begin{cases} \alpha_1x + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2x + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{cases}$$

Τότε ισχύουν **α)**  $\text{Av } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$ , τότε το σύστημα έχει μία λύση.

**β)**  $\text{Av } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ , τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

**γ)**  $\text{Av } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ , τότε το σύστημα είναι αόριστο.

**1** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με την μέθοδο της αντικατάστασης

$$\alpha) \begin{cases} x+4\psi=5 \\ 2x-4\psi=-2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x+\psi=7 \\ 3x+4\psi=3 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 3x+2\psi=2 \\ x-2\psi=14 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 4x+5\psi=-2 \\ 2x-\psi=6 \end{cases}$$

### Λύση

**a)** Λύνουμε την εξίσωση  $x + 4\psi = 5$  ως προς  $x$  και έχουμε:  $x = 5 - 4\psi$ .

Αντικαθιστούμε το  $x$  με  $5 - 4\psi$  στην εξίσωση  $2x - 4\psi = -2$  και έχουμε:

$$2(5 - 4\psi) - 4\psi = -2 \quad \text{ή} \quad 10 - 8\psi - 4\psi = -2 \quad \text{ή} \quad 10 - 12\psi = -2 \quad \text{ή} \quad -12\psi = -2 - 10$$

$$\text{ή} \quad -12\psi = -12 \quad \text{ή} \quad \psi = 1. \text{ Για } \psi = 1 \text{ από την εξίσωση } x = 5 - 4\psi \text{ έχουμε}$$

$x = 5 - 4 \cdot 1$  ή  $x = 1$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 1$  και  $\psi = 1$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (1, 1)$

**b)** Λύνουμε την εξίσωση  $2x + \psi = 7$  ως προς  $\psi$  και έχουμε:  $\psi = 7 - 2x$ .

Αντικαθιστούμε το  $\psi$  με  $7 - 2x$  στην εξίσωση  $3x + 4\psi = 3$  και έχουμε:

$$3x + 4(7 - 2x) = 3 \quad \text{ή} \quad 3x + 28 - 8x = 3 \quad \text{ή} \quad 3x - 8x = 3 - 28 \quad \text{ή} \quad -5x = -25$$

$$\text{ή} \quad x = 5. \text{ Για } x = 5 \text{ από την εξίσωση } \psi = 7 - 2x \text{ έχουμε: } \psi = 7 - 2 \cdot 5$$

ή  $\psi = 7 - 10$  ή  $\psi = -3$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 5$  και  $\psi = -3$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (5, -3)$

**γ)** Λύνουμε την εξίσωση  $x - 2\psi = 14$  ως προς  $x$  και έχουμε  $x = 14 + 2\psi$ .

Αντικαθιστούμε το  $x$  με  $x = 14 + 2\psi$  στην εξίσωση  $3x + 2\psi = 2$  και έχουμε:

$$3(14 + 2\psi) + 2\psi = 2 \quad \text{ή} \quad 42 + 6\psi + 2\psi = 2 \quad \text{ή} \quad 8\psi = 2 - 42 \quad \text{ή} \quad 8\psi = -40$$

$$\text{ή} \quad \psi = -5. \text{ Για } \psi = -5 \text{ από την εξίσωση } x = 14 + 2\psi \text{ έχουμε:}$$

$x = 14 + 2 \cdot (-5)$  ή  $x = 14 - 10$  ή  $x = 4$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 4$  και  $\psi = -5$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (4, -5)$

**δ)** Λύνουμε την εξίσωση  $2x - \psi = 6$  ως προς  $\psi$  και έχουμε  $\psi = 2x - 6$ .

Αντικαθιστούμε το  $\psi$  με  $\psi = 2x - 6$  στην εξίσωση  $4x + 5\psi = -2$  και έχουμε:  $4x + 5(2x - 6) = -2$  ή  $4x + 10x - 30 = -2$  ή  $14x = 30 - 2$  ή

$$14x = 28 \quad \text{ή} \quad x = 2. \text{ Για } x = 2 \text{ από την εξίσωση } \psi = 2x - 6 \text{ έχουμε:}$$

$\psi = 2 \cdot 2 - 6$  ή  $\psi = -2$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $\psi = -2$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (2, -2)$

**2** Να λύσετε με την μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα

$$\alpha) \begin{cases} 2x-5\psi=-3 \\ 3x+5\psi=8 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 4x+3\psi=2 \\ -4x+2\psi=-12 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 3x-5\psi=1 \\ 2x+3\psi=7 \end{cases}$$

**Λύση**

- α)** Οι συντελεστές του ψ είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη, τότε ό αγνωστος ψ απαλείφεται. Έτσι έχουμε  $2x + 3x = -3 + 8 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$ . Αντικαθιστούμε την τιμή του x σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ. στην δεύτερη και έχουμε:  $3 \cdot 1 + 5\psi = 8 \Rightarrow 5\psi = 8 - 3 \Rightarrow 5\psi = 5 \Rightarrow \psi = 1$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x=1$  και  $\psi=1$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (1, 1)$
- β)** Οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη, τότε ό αγνωστος x απαλείφεται. Έτσι έχουμε  $3\psi + 2\psi = -10 \Rightarrow 5\psi = -10 \Rightarrow \psi = -2$ . Αντικαθιστούμε την τιμή του ψ σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ. στην πρώτη και έχουμε:  $4x + 3 \cdot (-2) = 2 \Rightarrow 4x - 6 = 2 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $\psi = -2$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (2, -2)$
- γ)** Θα κάνουμε απαλοιφή του αγνώστου που θέλουμε, π.χ. το x. Οπότε πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξισώσης με 2 και της δεύτερης με -3 οπότε έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-5\psi=1 \\ 2x+3\psi=7 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6x-10\psi=2 \\ -6x-9\psi=-21 \end{array} \right.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $-10\psi - 9\psi = 2 - 21 \Rightarrow -19\psi = -19 \Rightarrow \psi = 1$ . Αντικαθιστούμε την τιμή του ψ σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ. στην πρώτη και έχουμε:  $3x - 5 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x = 1 + 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 2$  και  $\psi = 1$ , δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (2, 1)$ .

**3**

Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \frac{4x-1}{3} + 2\psi = 3 \\ \frac{3-2x}{5} + \frac{3x+\psi}{5} = 1 \end{array} \right. \quad \beta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = 13 \\ \frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 3 \end{array} \right. \quad \gamma) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} = 8 \\ 3\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 3 \end{array} \right. \quad \delta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} \\ \alpha - 2\beta = 6 \end{array} \right.$$

**Λύση**

- α)** Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε:

**Κεφάλαιο 3**

a) 
$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \frac{4x-1}{3} + 3 \cdot 2\psi = 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot \frac{3-2x}{5} + 5 \cdot \frac{3x+\psi}{5} = 5 \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ή } \left\{ \begin{array}{l} 4x-1+6\psi=9 \\ 3-2x+3x+\psi=5 \end{array} \right. \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} 4x+6\psi=10 \\ x+\psi=2 \end{array} \right.$$

Λύνουμε ως προς  $x$  την εξίσωση  $x + \psi = 2$  και έχουμε:  $x = 2 - \psi$ .

Αντικαθιστούμε στην  $4x + 6\psi = 10$  το  $x$  και έχουμε:  $4(2 - \psi) + 6\psi = 10$

ή  $8 - 4\psi + 6\psi = 10$  ή  $-4\psi + 6\psi = 10 - 8$  ή  $2\psi = 2$  ή  $\psi = 1$ . Άρα  $x = 2 - 1 = 1$ .

Άρα η λύση του συστήματος είναι  $x = 1$  και  $\psi = 1$  δηλαδή το ζεύγος  $(x, \psi) = (1, 1)$ .

b) Θέτω  $\frac{1}{\alpha} = x$ ,  $\frac{1}{\beta} = \psi$  άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα  $\left\{ \begin{array}{l} x+3\psi=13 \\ x-\psi=3 \end{array} \right.$

Λύνω την εξίσωση  $3x - \psi = 3$  ως προς  $\psi$  και έχουμε:  $\psi = 3x - 3$ . Αντικαθιστούμε στην  $2x + 3\psi = 13$  το  $\psi$  και έχουμε:  $2x + 3(3x - 3) = 13$  ή  $2x + 9x - 9 = 13$  ή  $11x = 22$

ή  $x = 2$ . Άρα  $\psi = 3 \cdot 2 - 3 = 3$ . Οπότε  $\frac{1}{\alpha} = 2$  ή  $\alpha = \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{\beta} = 3$  ή  $\beta = \frac{1}{3}$ . Άρα η λύση

του συστήματος είναι  $\alpha = \frac{1}{2}$  και  $\beta = \frac{1}{3}$  δηλαδή το ζεύγος  $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

y) Θέτω  $\sqrt{\alpha} = x \geq 0$  και  $\sqrt{\beta} = \psi \geq 0$ , άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2\psi=8 \\ 3x-\psi=3 \end{array} \right.$$

Λύνω την εξίσωση  $x + 2\psi = 8$  ως προς  $x$  και έχουμε:  $x = 8 - 2\psi$

Αντικαθιστούμε το  $x$  στην εξίσωση  $3x - \psi = 3$  και παίρνουμε:

$3(8 - 2\psi) - \psi = 3$  ή  $24 - 6\psi - \psi = 3$  ή  $-7\psi = 3 - 24$  ή  $-7\psi = -21$  ή  $\psi = 3$ . Άρα  $x = 8 - 2 \cdot 3 = 2$

Οπότε:  $\sqrt{\alpha} = 2$  ή  $(\sqrt{\alpha})^2 = 2^2$  ή  $\alpha = 4$  και  $\sqrt{\beta} = 3$  ή  $(\sqrt{\beta})^2 = 3^2$  ή  $\beta = 9$ . Άρα η λύση του συστήματος είναι  $\alpha = 4$  και  $\beta = 9$  δηλαδή το ζεύγος  $(\alpha, \beta) = (4, 9)$

4

Ο πατέρας του Κώστα έχει στο αγρόκτημα πρόβατα και κότες. Αν όλα μαζί **Κεφάλαιο 3** τα ζώα έχουν 30 κεφάλια και 100 πόδια να βρείτε πόσα είναι τα πρόβατα και πόσες είναι οι κότες.

### Λύση

Έστω  $x$  είναι οι κότες και  $y$  είναι τα πρόβατα τότε:  $x + y = 30$  (1). Η μία κότα έχει δύο πόδια, άρα οι  $x$  θα έχουν  $2x$  πόδια. Το ένα πρόβατο έχει τέσσερα πόδια, άρα τα  $y$  θα έχουν  $4y$  πόδια. Οπότε  $2x + 4y = 100$  (2).

Έτσι έχουμε

$$\text{το σύστημα: } \begin{cases} x+y=30 \\ x+4y=100 \end{cases}$$

Λύνω την εξίσωση  $x+y=30$  ή  $x=30-y$ . Αντικαθιστώ το  $x$  στην εξίσωση  $2x+4y=100$  και έχουμε :

$$2(30-y)+4y=100 \text{ ή } 60-2y+4y=100 \text{ ή } -2y+4y=100-60 \text{ ή } 2y=40 \text{ ή } y=20$$

Άρα  $x=30-20=10$ . Άρα οι κότες είναι 10 και τα πρόβατα 20.

5

Ο Κώστας πήρε από το κυλικείο του σχολείου του δύο τόστ και μία τυρόπιτα και πλήρωσε 5 ευρώ. Ο Νίκος πήρε ένα τόστ και τρείς τυρόπιτες, έδωσε 10 ευρώ και του δώσαν ρέστα 5 ευρώ. Να βρείτε πόσο κοστίζει η τυρόπιτα και πόσο το τόστ.

### Λύση

Έστω  $x$  ευρώ κοστίζει το τόστ και  $y$  ευρώ η τυρόπιτα. Τότε έχουμε το

$$\text{σύστημα: } \begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

Λύνω την εξίσωση :  $x+3y=5$  ως προς  $x$  και έχουμε :  $x=5-3y$ . Αντικαθιστούμε στην  $2x+y=5$

$$\text{και έχουμε : } 2(5-3y)+y=5 \text{ ή } 10-6y+y=5 \text{ ή } 5y=5 \text{ ή } y=1, \text{ άρα } x=5-3=2.$$

Άρα το τόστ κοστίζει 2 ευρώ και η τυρόπιτα 1 ευρώ.

6

**a)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) που διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B (-1,3)

**b)** Να εξετάσετε αν το σημείο  $\Gamma(-1,3)$  ανήκει στην ( $\epsilon$ )

### Λύση

**a)** Η ευθεία θα έχει εξίσωση :  $y=\alpha x+\beta$ . Η ευθεία περνάει από τα σημεία A(1,2) και B(-1,3), άρα  $2=\alpha \cdot 1 + \beta$  (1) και  $3=\alpha \cdot (-1) + \beta$  (2). Από (1) και (2)

$$\text{έχουμε το σύστημα } \begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ -\alpha+\beta=3 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :  $2\beta=5$  ή  $\beta=\frac{5}{2}$ . Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και έχουμε :  $\alpha+\frac{5}{2}=2$  ή  $\alpha=2-\frac{5}{2}$  ή  $\alpha=-\frac{1}{2}$ . Άρα η ευθεία είναι :  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ .

**Κεφάλαιο 3**

**β)** Για  $x=-1$  και  $\psi=3$  έχουμε :  $3=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{5}{2}$  ή  $3=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$  ή  $3=3$  ισχύει .  
Άρα το  $\Gamma$  ανήκει στην ευθεία .

**7**

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων χωρίς να τα λύσετε.

**α)** 
$$\begin{cases} 3x-4\psi=6 \\ 4x-7\psi=8 \end{cases}$$

**β)** 
$$\begin{cases} 2x-5\psi=6 \\ 4x-10\psi=7 \end{cases}$$

**γ)** 
$$\begin{cases} 3x-2\psi=4 \\ 6x-4\psi=8 \end{cases}$$

**Λύση**

**α)** Επειδή  $\frac{3}{4} \neq \frac{-4}{-7}$  , το σύστημα έχει μοναδική λύση.

**β)** Επειδή  $\frac{2}{4} = \frac{-5}{-10} \neq \frac{6}{7}$  , το σύστημα είναι αδύνατο.

**γ)** Επειδή  $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{4}{8}$  , το σύστημα είναι αόριστο.

**8**

Να λύσετε τα συστήματα:

**α)** 
$$\begin{cases} x^2-3\psi-1=0 \\ x-\psi=1 \end{cases}$$

**β)** 
$$\begin{cases} x^2-\psi^2=3 \\ x+\psi=1 \end{cases}$$

**γ)** 
$$\begin{cases} (x-\psi)(x+2\psi)=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases}$$

**Λύση**

**α)** Λύνω την εξίσωση  $x-\psi=1$  ως προς  $\psi$  και έχουμε :  $\psi=x-1$ . Αντικαθιστώ το  $\psi$  στην εξίσωση  $x^2-3\psi-1=0$  και έχουμε :  $x^2-3(x-1)-1=0$  ή  $x^2-3x+3-1=0$  ή  $x^2-3x+2=0$  .  $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4 \cdot 1 \cdot 2=9-8=1>0$  . Άρα έχουμε δύο λύσεις

$$x=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\alpha}=\frac{3 \pm 1}{2} \quad \text{άρα } x=\frac{3+1}{2}=2 \quad \text{ή } x=\frac{3-1}{2}=1 \text{ .}$$

Για  $x=2$  ,  $\psi=2-1=1$  ή για  $x=1$  ,  $\psi=1-1=0$  . Άρα  $(x,\psi)=(2,1)$  ή  $(x,\psi)=(1,0)$

**β)** 
$$\begin{array}{c|cc|c} x^2-\psi^2=3 & (x-\psi)(x+\psi)=3 & x-\psi=3 \\ x+\psi=1 & x+\psi=1 & x+\psi=1 \end{array} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη}$$

$2x=4$  ή  $x=2$  , οπότε  $2+\psi=1$  ή  $\psi=-1$  , άρα  $(x,\psi)=(2,-1)$

γ) Από την εξίσωση  $(x-\psi)(x+2\psi)=0$  ή  $x-\psi=0$  ή  $x+2\psi=0$ , άρα έχουμε τα συστήματα :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x-\psi=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x+2\psi=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases}$$

Λύνω  $(\Sigma_1)$  : Λύνω την  $x-\psi=0$  ως προς  $x$  και έχουμε :  $x=\psi$ . Αντικαθιστώ στην  $x-3\psi=4$  και έχουμε :  $\psi-3\psi=4$  ή  $-2\psi=4$  ή  $\psi=-2$ , άρα  $x=-2$ .

Λύνω  $(\Sigma_2)$  : Λύνω την  $x+2\psi=0$  ως προς  $x$  και έχουμε :  $x=-2\psi$ . Αντικαθιστώ στην  $x-3\psi=4$  και έχουμε :  $-2\psi-3\psi=4$  ή  $-5\psi=4$  ή  $\psi=-\frac{4}{5}$ , άρα  $x=-2(-\frac{4}{5})=\frac{8}{5}$ , Άρα  $(x,\psi)=(-2,-2)$  ή  $(x,\psi)=(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$

9

Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

### Λύση

Έστω  $x$  είναι το ψηφίο των δεκάδων και  $\psi$  το ψηφίο των μονάδων. Τότε  $x + \psi = 14$  (1). Ο αριθμός θα είναι:  $\alpha = 10x + \psi$ . Όταν εναλλάξουμε τα ψηφία ο αριθμός που προκύπτει θα είναι  $\beta = 10\psi + x$ . Δίνεται ότι  $\alpha = \beta + 36$  άρα  $10x + \psi = 10\psi + x + 36$  ή  $9x - 9\psi = 36$  ή  $x - \psi = 4$  (2). Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2). Αν λύσουμε την εξίσωση  $x + \psi = 14$  ως προς  $x$  παίρνουμε  $x = 14 - \psi$ .

Αντικαθιστούμε την τιμή του  $x$  στην εξίσωση  $x - \psi = 4$  και παίρνουμε:

$14 - \psi - \psi = 4$  ή  $-2\psi = 4 - 14$  ή  $-2\psi = -10$  ή  $\psi = 5$ , άρα  $x = 14 - 5 = 9$ .

Οπότε ο αριθμός είναι ο 95.

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

1. Το σημείο  $A(2,1)$  είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών  $2\psi = x$  και  $\psi = 1$
2. Οι ευθείες  $\psi - 3x = 2$  και  $\psi - x = 0$  τέμνονται στην αρχή των αξόνων
3. Οι ευθείες  $\varepsilon_1: 3x - 2\psi = 3$ ,  $\varepsilon_2: 6x - 4\psi = -3$  είναι παράλληλες.
4. Οι ευθείες  $\varepsilon_1: 4x - \psi = 1$ ,  $\varepsilon_2: x - \frac{1}{4}\psi = \frac{1}{4}$  τέμνονται.
5. Η σχέση  $(3x - 2\psi + 1)(x - 2\psi + 5) = 0$  δίνει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

### Κεφάλαιο 3

6. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις.
7. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους,  $x, \psi$  είναι αόριστο, τότε αυτό αληθεύει για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$ .
8. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους,  $x, \psi$  έχει λύσεις τα ζεύγη  $(3,2)$  και  $(-1,2)$  τότε θα έχει λύση και το  $(-2,2)$
9. Το σύστημα  $\begin{cases} x-2\psi=0 \\ 4x+7\psi=0 \end{cases}$  δεν είναι ποτέ αδύνατο

### B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Οι ευθείες  $\varepsilon_1: 3x + 2\psi = 5$  και  $\varepsilon_2: 2x - 5\psi = -3$  έχουν κοινό σημείο το  
**a.**  $A(1,1)$ , **b.**  $B(3, -2)$ , **c.**  $\Gamma(-4, -1)$  **d.**  $\Delta(6,3)$
2. Η παράσταση  $(x-3\psi+5)^2 + (2x+\psi-4)^2 + 2008$  γίνεται ελάχιστη όταν:  
**a.**  $x = 1$  ή  $\psi = 2$ , **b.**  $x = 1$  και  $\psi = 2$ , **c.**  $x = 2$  και  $\psi = 1$ , **d.**  $x = -1$  και  $\psi = 2$ .
3. Το σύστημα:  $\begin{cases} 2x-4\psi=1 \\ 6x-12\psi=5 \end{cases}$  είναι:  
**a.** αδύνατο, **b.** αόριστο, **c.** έχει 2 λύσεις, **d.** έχει μοναδική λύση.
4. Το σύστημα  $\begin{cases} x-2\psi=1 \\ x+\psi=2 \end{cases}$  παριστάνει δύο ευθείες:  
**a.** που είναι παράλληλες, **b.** που τέμνονται, **c.** που ταυτίζονται.  
**d.** τίποτα από τα παραπάνω

**1** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**a)**  $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$     **β)**  $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 5x-7y=5 \end{cases}$     **γ)**  $\begin{cases} 3x-5y=x+1 \\ 4x+y=13 \end{cases}$     **δ)**  $\begin{cases} 4x-2y=2 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

**2** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**α)**  $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y-1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$     **β)**  $\begin{cases} \frac{4x-3}{5} + \frac{y-1}{2} = 2 \\ \frac{3x+2}{4} - \frac{2y-1}{3} = 1 \end{cases}$

**3** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**α)**  $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} = 5 \\ 2\sqrt{\alpha} - 5\sqrt{\beta} = -3 \end{cases}$     **β)**  $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\beta} = -5 \\ 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} = -2 \end{cases}$

**4** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**α)**  $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} = 5 \\ 2\sqrt{\alpha} - 5\sqrt{\beta} = -3 \end{cases}$     **β)**  $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\beta} = -5 \\ 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} = -2 \end{cases}$

**5** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**α)**  $\begin{cases} \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{5} \\ 3\alpha - 7\beta = 15 \end{cases}$     **β)**  $\begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{4} \\ \alpha + 2\beta = 10 \end{cases}$     **γ)**  $\begin{cases} \frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{2} \\ 3\alpha + 5\beta = 16 \end{cases}$

**6** **α)** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία A (1,2) και B(2, -1)

**β)** Να εξετασθεί αν το σημείο Γ(1, 2) είναι σημείο της ευθείας που ορίζουν τα σημεία A και B.

**a)** Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ευθείες με εξισώσεις:  
 $(\varepsilon) \psi = x - 2$  και  $(\zeta) 3x - 4\psi = 5$

**b)** Αν η ευθεία  $(\lambda - 1) \cdot x + (3\lambda - 2) \cdot \psi = 0$  διέρχεται από το σημείο που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το  $\lambda$

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon) 3x - 2\psi = 1$  και  $(\zeta) x - 4\psi = -3$ .

**a)** Να βρείτε το σημείο τομής  $K$  των ευθεών  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$ .

**b)** Να βρείτε την ευθεία  $(\eta)$  που περνάει από το  $K$  και από το σημείο που τέμνει  $\eta$   $(\zeta)$  τον  $x'x$ .

Αν το σύστημα  $\begin{cases} x+2\alpha\psi=9 \\ \alpha x-2\beta\psi=-10 \end{cases}$  έχει λύση την  $(x,\psi)=(1,3)$

**a)** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$

**b)** Να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας  $\psi = 3ax + 2\beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  οι τιμές που βρήκατε από το α) ερώτημα

Σε ένα αγρόκτημα είναι κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 140 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon) 3x - \psi = 2$  και  $(\zeta) 4x + \psi = 5$

**a)** Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  αν  $\eta$   $(\varepsilon)$  περνάει από το  $K(\alpha-1, \beta)$  και  $\eta$   $(\zeta)$  από το σημείο  $\Lambda(\beta+2, \alpha)$

**b)** Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  από το α) ερώτημα να βρείτε την ευθεία  $K\Lambda$

Αν η εξίσωση:  $x^2 - (3\kappa - \lambda)x + \lambda = 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3 τότε να βρείτε τους αριθμούς  $\kappa, \lambda$ .

Να αποδείξετε ότι:

**a)** Τα σημεία  $A(2,4), B(-3,8)$  και  $G(12,-4)$  βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία

**b)** Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία τέμνει τον  $x'x$  σε σημείο που απέχει 7 μονάδες από την αρχή των αξόνων.

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ευθείες  $(\varepsilon) 3x - \psi = 2$ ,  $(\eta) 4x + \psi = 5$  και  $(\zeta) x - 3\psi = -2$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Έστω ότι η ευθεία  $(\varepsilon) 3x - \psi + 6\beta = 0$  τέμνει τον  $x'x$  στο  $A(4,0)$  και η ευθεία  $(\eta) 2x - 4\psi + \alpha - 2 = 4$  τέμνει τον  $\psi'ψ$  στο  $B(0, 6)$ .

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και να κάνετε την γραφική παράσταση της  $\psi = 2\alpha x + 2\beta$

**16** Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{α)} \begin{cases} x+\psi=11 \\ x\psi=24 \end{cases} \quad \text{β)} \begin{cases} x-\psi=2 \\ x\psi=35 \end{cases} \quad \text{γ)} \begin{cases} x^2+\psi^2=73 \\ x+\psi=11 \end{cases} \quad \text{δ)} \begin{cases} x^2-2\psi+x=0 \\ x+2\psi=2 \end{cases}$$

**17** Σε ένα τρίγωνο  $ABC$  η εξίσωση της πλευράς  $AB$  είναι  $\psi = 2x$ , της  $BG$  είναι  $3\psi - 5x = 2$  και της  $AG$  είναι  $\psi + 2x = 3$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$ ,  $B$ ,  $G$  του τριγώνου.

**18** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να ισχύει  $2x^2 - 6x = 2(x - 2)^2 + \alpha(x - 2) + 3\beta$ .

**19** Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι  $22 \text{ cm}$ , ενώ το εμβαδόν του είναι  $30 \text{ cm}^2$ . Να υπολογισθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

### Γενικές Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

**1** Δίνονται οι ευθείες: (ε)  $4\lambda x - 3(\lambda + 1)\psi = 5$  και (ζ)  $2x - 6\psi = 3$

Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε οι ευθείες (ε) και (ζ) να τέμνονται σε σημείο

**α)** του  $xx'$  **β)** του  $\psi'$

**2** **α)** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ . Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζες τους αριθμούς  $-1$  και  $2$ .

**β)** Για τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να σχεδιάσετε την ευθεία  $\alpha x + 2\beta\psi = 3$ .

**3** Αν η εξίσωση  $(\alpha - \beta + 1)x = \beta - 2 \cdot \alpha + 3$  είναι αόριστη να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

**4** Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  αν ισχύει  $(2\alpha - 2\beta - 4)^2 + (3\alpha + \beta - 2)^2 = 0$

### Κεφάλαιο 3

- 5** Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$  αν το σύστημα : 
$$\begin{cases} 2\alpha x + 3\beta \psi = -1 \\ \alpha x - 2\beta \psi = 5 \end{cases}$$
 έχει λύση την  $(x, \psi) = (1, 1)$
- 6** Δύο πλοία κινούνται ευθύγραμμα το πρώτο από το λιμάνι  $A(3, 7)$  προς το λιμάνι  $B(-1, -1)$  και το δεύτερο από το λιμάνι  $\Gamma(2, 5)$  προς το λιμάνι  $\Delta(-3, 0)$ . Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους.
- 7** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) η οποία τέμνει τον Οψ στο σημείο  $A(0, 4)$  και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο εμβαδού 10 τετραγωνικές μονάδες.
- 8** Αν το σύστημα 
$$\begin{cases} 2\alpha x + 3\beta \psi = 5 \\ 4\alpha x - 3\beta \psi = 1 \end{cases}$$
 έχει λύση την  $(x, \psi) = (1, 1)$  να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας  $2\alpha x + 6\beta \psi = 12$
- 9** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^2 + 3\beta x + 2$ . Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό -1 και η αριθμητική τιμή για  $x = 1$  είναι 4, να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .
- 10** Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε τα συστήματα:
- $$(\Sigma_1) : \begin{cases} x - 3\psi = -1 \\ 3x + 2\psi = 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} \alpha x - 2\beta \psi = 1 \\ 4\alpha x + 2\beta \psi = 14 \end{cases} \quad \text{να έχουν κοινή λύση}$$
- 11** **a)** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε η εξίσωση:  
 $(\alpha - \beta + 3)x^3 + x^2 + (2\alpha + 3\beta + 1)\sqrt{x} + 3x - 2 = 0$  να είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$
- b)** Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  που βρήκατε στο a) ερώτημα να λύσετε το σύστημα  

$$\begin{cases} (\alpha + 1)x + \beta \psi = 4 \\ (\alpha - 3\beta)x + 5\alpha \psi = 6 \end{cases}$$
- 12** Δίνεται το σύστημα:  

$$\begin{aligned} x + 2\psi &= \alpha - 1 \\ x - \psi &= 2 \end{aligned}$$
- a)** Να λύσετε το σύστημα (Οι λύσεις να είναι σε συνάρτηση με το  $\alpha$ )
- b)** Αν  $(x_1, \psi_1)$  είναι η λύση του παραπάνω συστήματος να λύσετε την εξίσωση  $(x_1 - 2)^2 + (\psi_1 - 1)^2 = 3$ .

- 13** Να βρείτε τις τιμές των  $x$ ,  $\psi$  ώστε η παράσταση  $A = (x - 2\psi + 1)^2 + (3x + \psi - 1)^2 + 2007$  να παίρνει την ελάχιστη τιμή. Ποια είναι αυτή;
- 14** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $a$  οι ευθείες με εξισώσεις  $3ax - 4a\psi = 12$  και  $2x + 3\psi = 6$  τέμνονται:  
**α)** Πάνω στον άξονα  $x'$ , **β)** Πάνω στον άξονα  $\psi'$ .
- 15** Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις:  $2x + \psi - 3 = 0$ ,  $3x - 2\psi - 1 = 0$  αντίστοιχα.  
**α)** Να βρείτε το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ .  
**β)** Να βρεθεί ο λ  $R$  ώστε η ευθεία  $(\varepsilon)$   $(2\lambda + 3) \cdot x + 2\lambda\psi + 6 = 0$  να περνάει από το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

## 1<sup>o</sup> Κριτήριο Αξιολόγησης

### Θέμα 1

- α)** Να γράψετε μία δική σας γραμμική εξίσωση και να βρείτε δύο σημεία της ευθείας την οποία παριστάνει γραφικά.  
**β)** Τι λέμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους.  
**γ)** Πότε ένα γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο; Ποια η γεωμετρική ερμηνεία για τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του.

### Θέμα 2

- A. α)** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας( $\varepsilon$ ) η οποία περνάει από το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$ :  $3x + 2\psi = 5$  και  $\varepsilon_2$ :  $3x - 2\psi = 1$  και από το σημείο  $A(-1,2)$   
**β)** Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η ευθεία ( $\varepsilon$ ) του α) ερωτήματος τους άξονες.
- B. α)** Αν τα παρακάτω συστήματα έχουν κοινή λύση να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} 3x - 2\psi = 1 \\ 4x + 5\psi = 7 \end{cases} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} \alpha x - \beta\psi = 6 \\ 3\alpha x + 2\beta\psi = 8 \end{cases}$$

- β)** Για τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  του α) ερωτήματος να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών:  $(\varepsilon_1) \alpha x - \beta\psi = 6$ ,  $(\varepsilon_2) 3\alpha x + 2\beta\psi = 8$ .

**A. α)** Ένα ξενοδοχείο έχει 40 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Αν το ξενοδοχείο έχει 95 κρεβάτια, να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα.

**β)** Αν η εξίσωση  $(\alpha - 2\beta - 3) \cdot x = 2\alpha + \beta - 11$  είναι αόριστη να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

**B.** Να λύσετε το σύστημα:

$$3x\alpha - 2\psi = 5$$

$$4x + \psi\beta = 14$$

Όπου  $\alpha, \beta$  είναι η μικρότερη, μεγαλύτερη ρίζα αντίστοιχα της εξίσωσης  $x^2 - 3x + 2 = 0$

### Θέμα 4

**α)** Δίνεται η ευθεία  $(\epsilon)$   $3x - 2\psi - 1 = 0$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η εξίσωση  $2\psi - 3x + 4\alpha + 5 = 0$ , να έχει ως λύση ένα σημείο της  $(\epsilon)$ .

**β)** Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το σημείο που τέμνει η ευθεία  $(\zeta)$   $4x - 2\psi = \alpha$ , τον άξονα  $x'x$

**Θέμα 1**

- α)** Τί λέμε γραμμικό σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους
- β)** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το γεγονός ότι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι αόριστο
- γ)** Να δικαιολογήσετε γραφικά γιατί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x - 2\psi &= 0 \\ x + \psi &= 0 \quad \text{δεν είναι αδύνατο.} \end{aligned}$$

**Θέμα 2**

**A.** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} 2x+3\psi=2 \\ 3x+3\lambda=\psi \end{cases}$  με αγνώστους τους  $x, \psi$

- α)** Να λύσετε το σύστημα. (Τα  $x, \psi$  θα υπολογισθούν σε συνάρτηση με το  $\lambda$ )
- β)** Για ποια τιμή του  $\lambda$  η λύση του συστήματος ανήκει στην ευθεία  $x - 2\psi - 6 = 0$

- B. α)** Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών ( $\epsilon$ )  $2x + 3\psi = 5$  και ( $\zeta$ )  $3x - 2\psi = -1$ .
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\eta$ ) που περνάει από το σημείο A του α) ερωτήματος και από το σημείο B(-1,3).

**Θέμα 3**

- A. α)** Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  η παράσταση  $A = (\alpha - 2\beta - 2)^2 + (2\alpha + \beta - 9)^2 + 2007$  γίνεται ελάχιστη.
- β)** Να εξετάσετε αν η ευθεία  $3x - 4\psi + 5 = 0$  διέρχεται από το σημείο  $(2^\alpha - 1, 2\beta)$  όπου  $\alpha, \beta$  είναι οι τιμές του α) ερωτήματος.
- B.** Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 100 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν έχουν όλα μαζί 240 ρόδες, να βρείτε πόσα είναι τα ποδήλατα και πόσα τα αυτοκίνητα.

**Θέμα 4**

- α)** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + ax + \beta = 0$ . Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3 να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta$ .
- β)** Για τις τιμές των  $a, \beta$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $3ax + 2\beta\psi + 4 = 0$  με τους άξονες.

## 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

## Ερωτήσεις κατανόησης

1.  $(3,2), (0,6), (-3,10)$ ,

2.

α)	β)	γ)	δ)
$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$

3.

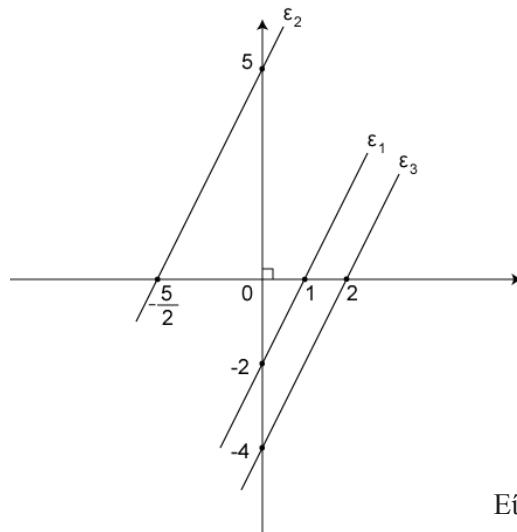
α)	β)	γ)	δ)
4	3	1	2

4. i) γ) ii) δ)

5. i) δ) ii) β)

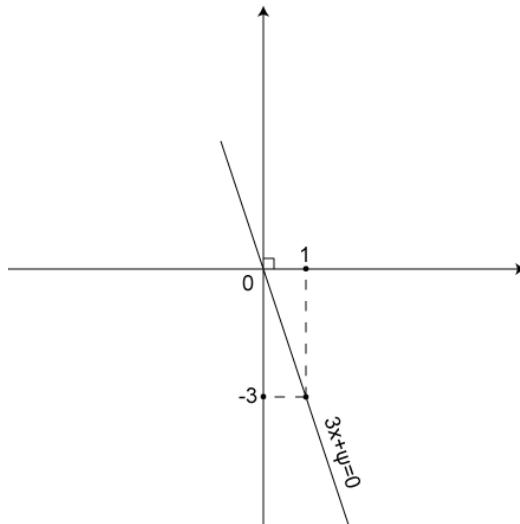
## Προτεινόμενες ασκήσεις - Προβλήματα

1. a)



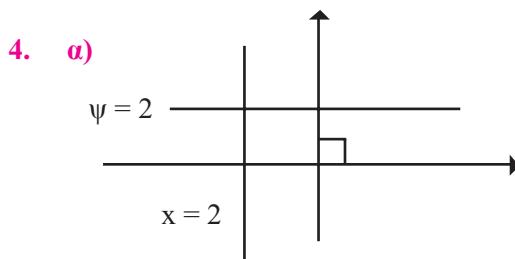
Είναι παράλληλες

2. **α)** Για να διέρχεται η ευθεία από την αρχή των αξόνων πρέπει το σημείο  $(0,0)$  να την επαληθεύει. Έτσι  $6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8 - 2\lambda$  οπότε  $8 - 2\lambda = 0$  άρα  $\lambda = 4$
- β)** Για  $\lambda = 4$  η ευθεία γίνεται  $6x + 2y = 0$  ή  $3x + y = 0$



3. **α)** Για τον άξονα  $x \cdot x$  θέτω όπου  $y = 0$  και έχουμε:  $4 \cdot x = 12$  άρα  $x = 3$ .  
Οπότε τέμνει τον  $x \cdot x$  στο  $A(3,0)$ . Για τον άξονα  $y \cdot y$  θέτω όπου  $x = 0$  και έχουμε  $3 \cdot y = 12$  άρα  $y = 4$ . Οπότε τέμνει τον  $y \cdot y$  στο  $B(0,4)$

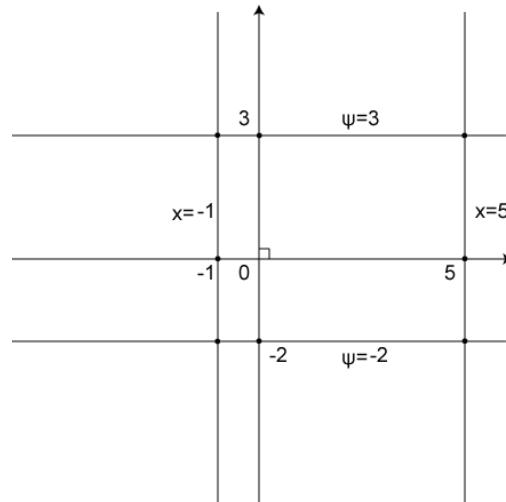
**β)**  $E_{OAB} = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$  τετραγωνικές μονάδες



Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το  $A(-2,2)$

**β)** Από το σημείο  $A$  περνάει η ευθεία  $\zeta_3$ .

5. a)



- β)** Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο με διαστάσεις: 6 και 5 άρα το εμβαδόν είναι:  $E = 6 \cdot 5 = 30$  τετραγωνικές μονάδες.
6. **a)** Για να είναι παράλληλη στον  $x'$  πρέπει  $\lambda - 2 = 0$  ή  $\lambda = 2$   
**β)** Για να είναι παράλληλη στον  $\psi'$  πρέπει  $\lambda - 1 = 0$  ή  $\lambda = 1$ .
7. **a)** Έστω  $t_1, t_2$  είναι οι χρόνοι που χρειάζεται για να διανύσει τις αποστάσεις  $x, \psi$  αντίστοιχα. Τότε  $t_1 = \frac{x}{4}, t_2 = \frac{\psi}{2}$ . Δίνεται ότι:  $t_1 + t_2 = 1$  οπότε:  
 $\frac{x}{4} + \frac{\psi}{2} = 1$  ή  $2x + 4\psi = 8$  ή  $x + 2\psi = 4$ .
8. Στον ξενώνα υπάρχουν  $x$  δίκλινα άρα θα έχουν  $2x$  κρεβάτια, επίσης υπάρχουν  $\psi$  τρίκλινα τα οποία θα έχουν  $3\psi$  κρεβάτια. Επειδή όλα τα κρεβάτια είναι 25 κρεβάτια θα έχουμε την εξίσωση:  $2x + 3\psi = 25$ .

### 3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η επίλυσή του.

Κεφάλαιο 3

#### Ερωτήσεις κατανόησης

1. Δ)

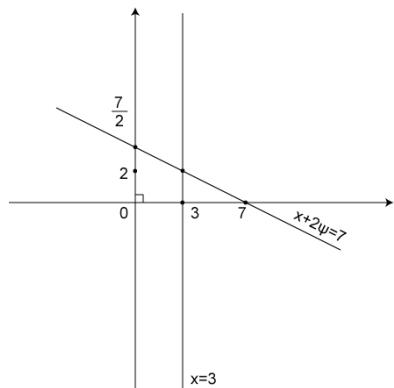
2.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
2	3	1

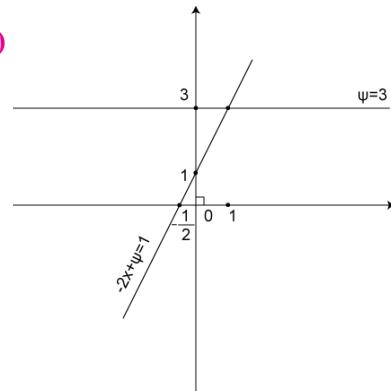
3. α)  $(x, \psi) = (-3, -2)$  β)  $(x, \psi) = (3, 2)$  γ)  $(x, \psi) = (6, 0)$  δ)  $(x, \psi) = (0, 0)$

#### Προτεινόμενες ασκήσεις -Προβλήματα

1. α)



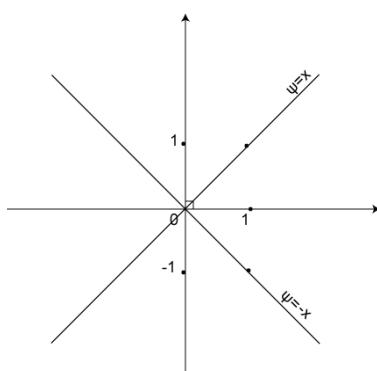
β)



Τέμνονται στο  $A(3,2)$ , άρα η λύση είναι  $(3,2)$ .

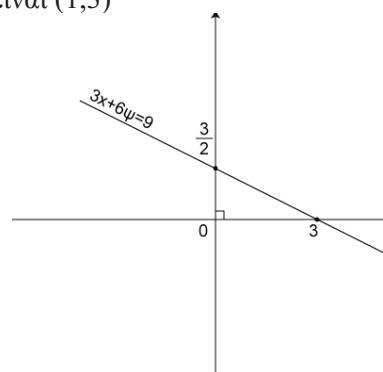
Τέμνονται στο  $A(1,3)$ , άρα λύση είναι  $(1,3)$

γ)



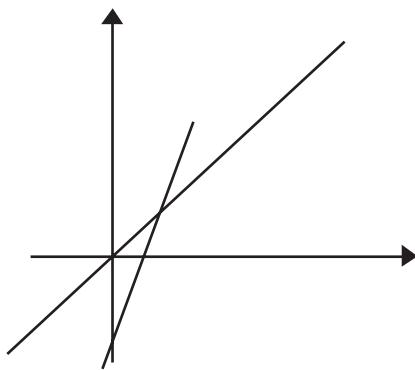
Τέμνονται στο  $(0,0)$  άρα η λύση είναι  $(0,0)$

δ)



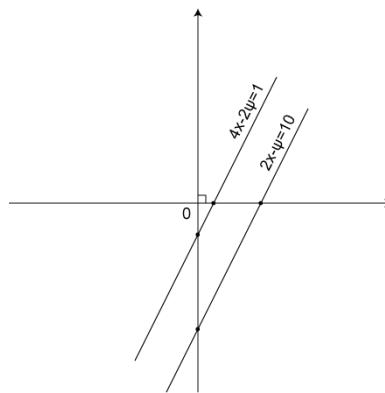
Οι ευθείες ταυτίζονται άρα έχουμε άπειρες λύσεις.

δ)



Οι ευθείες τέμνονται στο (1,1). Οπότε η λύση είναι (1,1)

στ)



Οι ευθείες είναι παράλληλες άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

2. **α)** Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες άρα το σύστημα είναι αδύνατο.  
**β)** Οι δύο ευθείες ταυτίζονται άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις  
**γ)** Οι δύο ευθείες τέμνονται στο A(0,2). Άρα η λύση είναι (0,2)
3. **α)** Το A αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα  $v = 0$ , το B αυτοκίνητο έχει αρχική ταχύτητα  $v = 10 \text{ m/sec}$   
**β)** Θα έχουν ίδια ταχύτητα την χρονική στιγμή  $t = 10 \text{ sec}$  και η ταχύτητα είναι  $20 \text{ m/sec}$ .
4. **α)** Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην ευθεία  $\varepsilon_1$ :  $20x - \psi = 0$ .  
 Η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί στην ευθεία  $\varepsilon_2$ :  $10x - \psi + 60 = 0$   
 Η τρίτη περίπτωση αντιστοιχεί στην ευθεία  $\varepsilon_3$ :  $\psi = 300$   
**β)** Θα πρέπει να ισχύει:  $10x + 60 = 300 \Rightarrow 10x = 300 - 60 \Rightarrow 10x = 240 \Rightarrow x = 24$   
**γ)** Αν παρακολουθήσει 12 αγώνες τότε: σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση

θα πληρώσει  $20 \cdot 12 = 240$  ευρώ, σύμφωνα με την δεύτερη θα πληρώσει  $10 \cdot 12 + 60 = 120 + 60 = 180$  ευρώ και σύμφωνα με την τρίτη 300 ευρώ

- δ)** Αν παρακολουθήσει 15 αγώνες τότε για την πρώτη και τρίτη περίπτωση θα πληρώσει 300 ευρώ και για την δεύτερη 210. Επειδή δεν επιλέγει την πιο συμφέρουσα θα ζημιώθει 90 ευρώ.
- ε)** Για να επιλέξει την πρώτη περίπτωση πρέπει να επιλέξει λιγότερους από 6 αγώνες. Αν παρακολουθήσει 6 αγώνες συμφέρουσα είναι η πρώτη ή η δεύτερη. Αν παρακολουθήσει πάνω από 6 και λιγότερους από 24, συμφέρουσα είναι η δεύτερη, αν παρακολουθήσει 24 αγώνες συμφέρουσα είναι η δεύτερη ή η τρίτη ενώ αν παρακολουθήσει, περισσότερους από 24 συμφέρουσα είναι η τρίτη.

### 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

1. **δ)**
2. **δ)**
3. **γ)**
4. Την πρώτη εξίσωση με 1 και την δεύτερη με -2  
Την πρώτη εξίσωση με 5 και τη δεύτερη με 3
5. **α)** Με τη μέθοδο της αντικατάστασης  
**β)** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών  
**γ)** Με τη μέθοδο της αντικατάστασης  
**δ)** Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών
6.  $\Sigma_1$ : είναι αδύνατο  
 $\Sigma_2$ : είναι αόριστο

## Προτεινόμενες ασκήσεις - Προβλήματα

- 1. a)** Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση όπου  $\psi = 4$ . Οπότε  $x - 2 \cdot 4 = 1$  ή  $x - 8 = 9$  άρα  $x = 9$ . Άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (9, 4)$

**b)** Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς  $x$  και έχουμε  $x = -2 - 3\psi$ . Αντικαθιστούμε  $x$ , οπότε:  $2(-2 - 3\psi) + \psi = 0$  ή  $-4 - 6\psi + \psi = 0$  ή  $-5\psi = 4$  ή  $\psi = -\frac{4}{5}$   
Άρα  $x = -2 - 3(-\frac{4}{5}) = -2 + \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$  και η λύση είναι  $(x, \psi) = (\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$

**γ)** Λύνω την δεύτερη εξίσωση ως προς  $x$  και έχουμε  $x = 9 - 3\psi$ .  
Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση το  $x$ , οπότε:  $4(9 - 3\psi) - \psi = 10$  ή  $36 - 12\psi - \psi = 10$  ή  $-13\psi = -26$  ή  $\psi = 2$ . Άρα  $x = 9 - 3(2) = 9 - 6 = 3$  και η λύση είναι  $(x, \psi) = (3, 2)$

**δ)** Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς  $\psi$  και έχουμε  $\psi = -4 - 3x$ .  
Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το  $\psi$ , οπότε:  $x + 2(-4 - 3x) = -3$  ή  $x - 8 - 6x = -3$  ή  $-5x = 5$  ή  $x = -1$ . Άρα  $\psi = -4 - 3(-1) = -4 + 3 = -1$  και η λύση είναι  $(x, \psi) = (-1, -1)$

- 2. a)** Λύνω την δεύτερη εξίσωση ως προς  $\psi$  και έχουμε  $\psi = 4 + 2x$ .  
Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση το  $\psi$ , οπότε:  $3x - (4 + 2x) = 7$  ή  $3x - 4 - 2x = 7$  ή  $x = 7 + 4$  ή  $x = 11$ , οπότε  $\psi = 4 + 2 \cdot 11$  ή  $\psi = 26$  και η λύση είναι  $(x, \psi) = (11, 26)$

**β)** Λύνω την πρώτη εξίσωση ως προς  $\psi$  και έχουμε  $-\psi = 3 - 2x$  ή  $\psi = -3 + 2x$ .  
Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση το  $\psi$ , οπότε  $5x + 2(-3 + 2x) = 6$  ή  $5x - 6 + 4x = 6$  ή  $9x = 12$  άρα  $x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$  ή  $x = -\frac{4}{3}$ , οπότε  $\psi = -3 + 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{9}{3} + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$  και η λύση είναι  $(x, \psi) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

**γ)** 
$$\begin{cases} 3x - 2\psi = 0 \\ 2x + 3\psi = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 6x - 4\psi = 0 \\ -6x - 9\psi = 0 \end{cases} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } -13\psi = 0 \text{ ή } \psi = 0. \quad \text{Άρα } 3x - 2 \cdot 0 = 0 \text{ ή } 3x = 0 \text{ ή } x = 0 \text{ άρα η λύση είναι } (x, \psi) = (0, 0)$$

**δ)** 
$$\begin{cases} -2x + 3\psi = 5 \\ 6x - 9\psi = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -6x + 9\psi = 15 \\ 6x - 9\psi = 3 \end{cases} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } 0x + 0\psi = 18 \text{ αδύνατη. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.}$$

3.

**a)** 
$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{2x+\psi}{4} = 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot \frac{3x-\psi}{2} = 4 \cdot 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ή} \quad \begin{cases} 2x+\psi=12 \\ 3x-\psi=8 \end{cases} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } 5x=20 \text{ ή } x=4 \\ \text{Οπότε } 2 \cdot 4 + \psi = 12 \text{ ή } \psi = 12 - 8 \text{ ή } \psi = 4, \text{ άρα ή λύση} \\ \text{είναι } (x, \psi) = (4, 4). \end{array}$$

**b)** 
$$4 \cdot \frac{x-1}{4} - 4\psi = 4 \cdot 1 \quad \text{ή} \quad x-1-4\psi=4 \quad \text{ή} \quad x-4\psi=5 \quad -2 \quad \text{ή} \quad -2x+8\psi=-10$$

$$12 \cdot \frac{x}{6} + 12 \cdot \frac{\psi}{4} = 12 \cdot (-1) \quad 2x+3\psi=-12 \quad 2x+3\psi=-12 \quad 1 \quad 2x+3\psi=-12$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $11\psi=-22$  ή  $\psi=-2$ , άρα  $x-4 \cdot (-2)=5$  ή  $x+8=5$  ή  $x=-3$ , άρα η λύση είναι  $(x, \psi) = (-3, -2)$

**γ)** 
$$\begin{cases} 6 \cdot \frac{x-5}{2} + 6 \cdot \frac{2\psi+1}{3} = 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot \frac{x+4}{3} + 6 \cdot \frac{\psi-6}{2} = 6 \cdot 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ή} \quad \begin{cases} 3(x-5) + 2(2\psi+1) = 18 \\ 2(x+4) - 3(\psi-6) = 24 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x-15+4\psi+2=18 \\ 2x+8-3\psi+18=24 \end{cases} \\ \text{ή} \quad \begin{cases} 3x+4\psi=31 \\ 2x-3\psi=-2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -6x-8\psi=-62 \\ 6x-9\psi=-6 \end{array} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη} \\ -17\psi=-68 \quad \text{ή} \quad \psi=4. \text{ Άρα} \quad 3x+4 \cdot 4=31 \quad \text{ή} \quad 3x=15 \quad \text{ή} \quad x=5, \text{ άρα} \quad (x, \psi) = (5, 4) \end{array}$$

4.

**a)** 
$$\begin{cases} 4x - 3(2x+3\psi) = 20 - x + \psi \\ 2(x-2\psi) + 5(x-2) = 3\psi + 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ή} \quad \begin{cases} 4x - 6x - 9\psi = 20 - x + \psi \\ 2x - 4\psi + 5x - 10 = 3\psi + 4 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -x - 10\psi = 20 \\ 7x - 7\psi = 14 \end{cases} \\ \text{ή} \quad \begin{cases} -x - 10\psi = 20 \\ x - \psi = 2 \end{cases} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } -11\psi=22 \text{ ή } \psi=-2 \text{ και } x-(-2)=2 \text{ ή} \\ x+2=2 \quad \text{ή} \quad x=0. \text{ Άρα } (x, \psi) = (0, -2) \end{array}$$

**β)** 
$$\begin{cases} x(\psi+4) = \psi(x-6) - 15 + 3x \\ (x-1)(x+2\psi) = (x+\psi)^2 - \psi(\psi+1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ή} \quad \begin{cases} x\psi + 4x = \psi x - 6\psi - 15 + 3x \\ x^2 + 2x\psi - x - 2\psi = x^2 + 2x\psi + \psi^2 - \psi^2 - \psi \end{cases} \\ \begin{cases} x+6\psi=-15 \\ -x-\psi=0 \end{cases} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: } 5\psi=-15 \text{ ή } \psi=-3. \end{array}$$

Αντικαθιστώ στην  $x+6\psi=-15$  και έχουμε:  $x+6(-3)=-15$  ή  $x-18=-15$   
ή  $x=-15+18=3$ , άρα  $(x, \psi) = (3, -3)$ .

**Κεφάλαιο 3**

5.  $1,3\alpha - 0,8\beta = 2,1 \quad 10 \quad \text{ή} \quad 13\alpha - 8\beta = 21 \quad 1 \quad \text{ή} \quad 13\alpha - 8\beta = 21$

a)  $0,9\alpha + 0,4\beta = 0,5 \quad 10 \quad 9\alpha + 4\beta = 5 \quad 2 \quad 18\alpha + 8\beta = 10$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε  $31\alpha = 31$  ή  $\alpha = 1$ , αντικαθιστούμε στην  $13\alpha - 8\beta = 21$  και έχουμε:  $13 \cdot 1 - 8\beta = 21$  ή  $13 - 8\beta = 21$  ή  $-8\beta = 8$  ή  $\beta = -1$ , άρα  $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ .

b)  $4\frac{\omega}{4} - 4 \cdot 0,2\varphi = 4 \cdot 1,5 \quad \text{ή} \quad \omega - 0,8\varphi = 6 \quad 10 \quad \text{ή} \quad 10\omega - 8\varphi = 60 \quad -3 \quad \text{ή}$

$3\omega + 1,4\varphi = -1 \quad 3\omega + 1,4\varphi = -1 \quad 10 \quad 30\omega + 14\varphi = -10 \quad 1$

$-30\omega + 24\varphi = -180$

$30\omega + 14\varphi = -10$ . Με πρόσθεση κατά μέλη  $38\varphi = -190$  ή  $\varphi = -5$ .

Αντικαθιστώ στην  $30\omega + 14\varphi = -10$  ή  $30\omega + 14 \cdot (-5) = -10$  ή  $30\omega - 70 = -10$  ή  $30\omega = 60$  ή  $\omega = 2$ .

Άρα  $(\omega, \varphi) = (2, -5)$

y) 
$$\left\{ \begin{array}{l|l} 2,5x+3,2\psi=-1,8 & 10 \quad \text{ή} \quad 25x+32\psi=-18 \\ 1,6x-2,4\psi=-5,6 & 10 \quad 16x-24\psi=-56 \end{array} \right| \begin{array}{l|l} 3 \quad \text{ή} \quad 75x+96\psi=-54 \\ 4 \quad 64x-96\psi=-224 \end{array} \text{ Με} \\ \text{πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε } 139x = -278 \text{ ή } x = -2. \text{ Αντικαθιστώ στην } 25x+32\psi=-18 \text{ οπότε: } 25 \cdot (-2) + 32\psi = -18 \text{ ή } -50 + 32\psi = -18 \text{ ή } 32\psi = 32 \text{ ή } \psi = 1 \\ \text{άρα } (x, \psi) = (-2, 1) \end{array}$$

6.

a) 
$$\left\{ \begin{array}{l|l} x\psi \frac{1}{x} - x\psi \frac{2}{\psi} = 0 & \left\{ \begin{array}{l|l} \psi - 2x = 0 & \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l|l} -2x + \psi = 0 \\ x + \psi = 3 \end{array} \right. \\ x + \psi = 3 & \end{array} \right. \\ x + \psi = 3 & \end{array} \right| \begin{array}{l|l} 1 \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l|l} -2x + \psi = 0 \\ 2x + 2\psi = 6 \end{array} \right. \\ 2 & \end{array} \text{ Με} \\ \text{πρόσθεση κατά μέλη } 3\psi = 6 \text{ ή } \psi = 2. \text{ Αντικαθιστώ στην } x + \psi = 2 \text{ οπότε } x + 2 = 3 \text{ ή } x = 1, \text{ άρα } (x, \psi) = (1, 2). \end{array}$$

b) 
$$\left\{ \begin{array}{l|l} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} & -2 \quad \text{ή} \quad -\frac{2}{\alpha} - \frac{4}{\beta} = -\frac{2}{6} \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} & 1 \quad \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} \end{array} \right. \text{ . Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:} \\ \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{6} \quad \text{ή} \quad 3\alpha = 6 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2, \text{ αντικαθιστώ στην } \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{3}{6} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \quad \text{ή} \\ \frac{2}{\beta} = \frac{-2}{6} \quad \text{ή} \quad \beta = -6, \text{ άρα } (\alpha, \beta) = (2, -6)$$

γ) 
$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{3} \\ -\frac{6}{\omega} + \frac{9}{\varphi} = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \quad \text{ή} \quad \frac{6}{\omega} - \frac{3}{\varphi} = 1 \\ 1 \quad \frac{-6}{\omega} + \frac{9}{\varphi} = 1. \end{array} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } \frac{6}{\varphi} = 2 \text{ ή } 2\varphi = 6 \text{ ή} \\ \varphi = 3. \quad \text{Αντικαθιστώ στην } \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{3} \text{ και έχουμε } \frac{2}{\omega} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{2}{\omega} = \frac{2}{3} \text{ ή } \omega = 3. \\ \text{Άρα } (\varphi, \omega) = (3, 3) \end{array}$$

7.

Λύνω το σύστημα 
$$\begin{cases} x+5y=10 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Λύνω την δεύτερη εξίσωση ως προς  $x$  και έχουμε  $x=1+y$ . Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:  $2(1+y)+5y=10$  ή  $2+2y+5y=10$  ή  $7y=8$  ή  $y=\frac{8}{7}$ .

Άρα  $x=1+\frac{8}{7}$  ή  $x=\frac{15}{7}$ . Άρα οι ευθείες τέμνονται στο  $A(\frac{15}{7}, \frac{8}{7})$

8.

Λύνω το σύστημα των ευθειών:  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  δηλ το σύστημα 
$$\begin{cases} x-3y=-14 \\ x+y=-2 \end{cases}$$

Λύνω την δεύτερη εξίσωση ως προς  $x$  και έχουμε  $x=-2-y$ . Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και παίρνουμε:  $2(-2-y)-3y=-14$  ή  $-4-2y-3y=-14$  ή  $-5y=-10$  ή  $y=2$ .

Άρα  $x=-2-2$  ή  $x=-4$ . Άρα οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται στο  $A(-4, 2)$ .

Λύνω το σύστημα των ευθειών:  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  δηλ το σύστημα: 
$$\begin{cases} x+y=-2 \\ 3x-y=14 \end{cases}$$
. Με πρόσθεση κατά μέλη:  $4x=12$  ή  $x=3$ , αντικαθιστώ στην  $x+y=-2$  και έχουμε  $3+y=-2$  ή  $y=-5$ . Άρα οι  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  τέμνονται στο  $B(3, -5)$ .

Λύνω το σύστημα των ευθειών:  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$  δηλ το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x-3y=-14 \\ 3x-y=14 \end{cases}$$

Λύνω την  $3x-y=14$  και έχουμε:  $y=3x-14$ . Αντικαθιστώ στην  $2x-3y=-14$  οπότε  $2x-3(3x-14)=-14$  ή  $2x-9x+42=-14$  ή  $-7x=-56$  ή  $x=8$ , άρα  $y=3 \cdot 8 - 14$  ή  $y=24 - 14$  ή  $y=10$ . Άρα οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$  τέμνονται στο  $\Gamma(8, 10)$

9.

Έστω κ φορές χρησιμοποιήθηκε το 3 και ν φορές το 5 τότε:  $3 \cdot \kappa + 5 \cdot \nu = 410$  (1)  
και  $\kappa + \nu = 100$  (2). Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3\kappa + 5\nu = 410 \\ \kappa + \nu = 100 \end{cases} \quad | \begin{array}{l} 1 \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3\kappa + 5\nu = 410 \\ -3\kappa - 3\nu = -300 \end{cases} \\ -3 \end{array} \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη } 2\nu = 110 \text{ ή } \nu = 55.$$

Αντικαθιστώ στην  $\kappa + \nu = 100$ , άρα  $\kappa + 55 = 100$  ή  $\kappa = 45$ . Άρα το 3

χρησιμοποιήθηκε 45 φορές και το 5 χρησιμοποιήθηκε 55 φορές.

**Κεφάλαιο 3**

- 10.** Αν βάλουμε όπου  $x$  το 1 και  $y$  βάλουμε το 2 έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=7 \\ 2\alpha-2\beta=8 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $3\alpha=15$  ή  $\alpha=5$ , αντικαθιστώ στην  $\alpha+2\beta=7$  και παίρνουμε  $5+2\beta=7$  ή  $2\beta=2$  ή  $\beta=1$ . Άρα  $(\alpha, \beta)=(5,1)$

- 11.** Το σημείο  $A(1,2)$  ανήκει στην ευθεία, άρα  $\alpha \cdot 1 + 2 = \beta$  ή  $\alpha - \beta = -2$  (1). Το σημείο  $B(-3,2)$  ανήκει στην ευθεία, άρα  $\alpha \cdot (-3) - 2 = \beta$  ή  $3\alpha + \beta = -2$  (2). Λύνουμε

$$\text{Το σύστημα } \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ 3\alpha+\beta=-2 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $4\alpha=-4$  ή  $\alpha=-1$ , αντικαθιστώ στην  $\alpha-\beta=-2$ , οπότε  $-1-\beta=-2$  ή  $\beta=1$ . Άρα  $(\alpha, \beta)=(-1,1)$

- 12.** Αν το 1 είναι ρίζα τότε  $(-1)^2 + (\lambda - \mu)(-1) + \mu - 2\lambda = 0$  ή  $1 - \lambda + \mu + \mu - 2\lambda = 0$  ή  $2\mu - 3\lambda = -1$ .

Αν το 3 είναι ρίζα τότε  $3^2 + (\lambda - \mu) \cdot 3 + \mu - 2\lambda = 0$  ή  $9 + 3\lambda - 3\mu + \mu - 2\lambda = 0$  ή  $-2\mu + \lambda = -9$

$$\text{Λύνουμε το σύστημα } \begin{cases} 2\mu-3\lambda=-1 \\ -2\mu+\lambda=-9 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $-2\lambda = -10$  ή  $\lambda=5$ . Αντικαθιστώ στην  $2\mu-3\lambda=-1$  και έχουμε  $2\mu-3 \cdot 5 = -1$  ή  $2\mu=14$  ή  $\mu=7$

- 13.** Εστω τα γαλάζια τούβλα έχουν μήκος  $x$  και τα πράσινα έχουν μήκος  $y$ .

$$\text{Tότε } \begin{cases} 4x+3y=180 \\ 2x+6y=180 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{c} -8x-6y=-360 \\ 2x+6y=180 \end{array} \right. \text{. Με πρόσθεση κατά μέλη} \\ -6x = -180 \quad \text{ή } x = 30. \text{ Άρα } 2 \cdot 30 + 6y = 180 \text{ ή } 6y = 120 \text{ ή } y = 20. \\ \text{Άρα τα γαλάζιαέχουν μήκος } 30\text{cm} \text{ και τα πράσινα μήκος } 20\text{cm.}$$

- 14.** Εστω χρησιμοποιήσαμε  $x$  δοχεία των 2 κιλών και  $y$  δοχεία των 5 κιλών.

Τότε

έχουμε το σύστημα :  $\begin{cases} x + y = 800 \\ 2x + 5y = 2500 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{c} -2x-2y=-1600 \\ 2x+5y=2500 \end{array} \right. \text{. Με πρόσθεση} \\ \text{κατά μέλη παίρνουμε : } 3y=900 \text{ ή } y=300. \text{ Αντικαθιστώ στην } x+y=800 \text{ άρα } x+300=800 \text{ ή } x=500. \text{ Άρα } 500 \text{ των } 2 \text{ κιλών και } 300 \text{ των } 5 \text{ κιλών.}$

- 15.** Εστω  $x$  ο βαθμός στην φυσική και  $y$  στην χημεία τότε :  $\frac{x+y}{2}=16$  ή  $x+y=32$

Στο δεύτερο τρίμηνο οι βαθμοί είναι :  $x-2$  και  $y+4$  οπότε :  $x-2=y+4$

Οπότε  $x-y=6$ . Λύνουμε το σύστημα  $\begin{cases} x+y=32 \\ x-y=6 \end{cases}$  Με πρόσθεση κατά μέλη

$2x=38$  ή  $x=19$ . Αντικαθιστώ στην  $x+y=32$  οπότε  $18+y=32$  ή  $y=14$ . Άρα ο βαθμός στην Φυσική ήταν 19 και στην Χημεία 13.

- 16.** Αν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ) είναι οι ακτίνες των δύο κύκλων τότε : Όταν εφάπτονται εσωτερικά  $\rho_1 - \rho_2 = 12$  . Όταν εφάπτονται εξωτερικά  $\rho_1 + \rho_2 = 58$  . Λύνουμε το σύστημα :  

$$\begin{cases} \rho_1 - \rho_2 = 12 \\ \rho_1 + \rho_2 = 58 \end{cases}$$
. Με πρόσθεση κατά μέλη 2  $\rho_1 = 70$  ή  $\rho_1 = 35$  . Άρα  $35 - \rho_2 = 12$  ή  $\rho_2 = 35 - 12$  ή  $\rho_2 = 23$  .

- 17.** Έστω  $\alpha$  είναι οι μαθητές και  $\beta$  τα θρανία τότε :  $\alpha \cdot 1 = \beta + 8$  ή  $\alpha = \beta + 8$  (1) . Ακόμη :  $\alpha = (\beta - 4) \cdot 2$  ή  $\alpha = 2\beta - 8$  (2) . Λύνουμε το σύστημα  

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 8 \\ \alpha = 2\beta - 8 \end{cases}$$
- Οπότε  $\beta + 8 = 2\beta - 8$  ή  $-\beta = -16$  ή  $\beta = 16$  , άρα  $\alpha = 16 + 8 = 24$  . Άρα οι μαθητές είναι 24 και τα θρανία 16.

- 18.** Έστω χρησιμοποίησε  $x$  λίτρα ούζο με περιεκτικότητα 32% και  $y$  λίτρα ούζο με περιεκτικότητα 48% . Τότε :  $x + y = 400$  (1) και  $\frac{32}{100} \cdot x + \frac{48}{100} \cdot y = \frac{38}{100} \cdot 400$  ή  $32x + 48y = 152$  (2) . Λύνω το σύστημα :  

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 32x + 48y = 15200 \end{cases}$$
 Λύνω την  $x + y = 400$  ως προς  $x$  και έχουμε :  $x = 400 - y$  . Αντικαθιστώ στην (2)  $32(400 - y) + 48y = 15200$  ή  $12800 - 32y + 48y = 15200$  ή  $16y = 2400$  ή  $y = 150$  , άρα  $x = 400 - 150 = 250$  . Άρα χρησιμοποίησε 250 λίτρα με περιεκτικότητα 32% και 150 λίτρα με περιεκτικότητα 48%.

- 19.** Για  $t=2$  έχουμε :  $12 = v_0 - a \cdot 2$  ή  $v_0 - 2a = 12$  . Για  $t=4$  ,  $4 = v_0 - a \cdot 4$  ή  $v_0 - 4a = 4$  Άρα έχουμε το σύστημα :  $v_0 - 2a = 12 \quad | -1$  ή  $-v_0 + 2a = -12$   
 $v_0 - 4a = 4 \quad | \quad 1$   $v_0 - 4a = 4$  .

Με πρόσθεση κατά μέλη  $-2a = -8$  ή  $a = 4$  . Αντικαθιστώ στην  $v_0 - 4a = 4$  και έχουμε:  $v_0 - 4 \cdot 4 = 4$   $v_0 = 20$   
 Άρα η αρχική ταχύτητα ήταν  $v_0 = 20$  m/sec και η επιβράδυνση  $a = 4$  m/sec<sup>2</sup>  
 Το αυτοκίνητο θα σταματήσει όταν  $v=0$  , οπότε  $0 = 20 - 4t$  ή  $4t = 20$  ή  $t = 5$  . Δηλαδή θα σταματήσει μετά από 5 sec .

- 20.** Έστω  $x$  αυτοκίνητα και  $y$  μοτοσικλέτες τότε :  $x + y = 945$  . Ακόμη  
 $2x + 1,2y = 1810$  . Άρα έχουμε το σύστημα :  $x + y = 945$   
 $2x + 1,2y = 1810$

Λύνω την  $x + y = 945$  ως προς  $x$  και έχουμε :  $x = 945 - y$  .

Αντικαθιστούμε στην  $2x + 1,2y = 1810$  και έχουμε  $2(945 - y) + 1,2y = 1810$  ή  $1890 - 2y + 1,2y = 1810$  ή  $0,8y = 80$  ή  $y = 100$  . Άρα  $x = 945 - 100$  ή  $x = 845$ . Οπότε τα αυτοκίνητα ήταν 845 και οι μοτοσικλετες 100.

Έστω χ βαθμούς παίρνει σε κάθε σωστή απάντηση και ψ βαθμοί αφαιρούνται σε κάθε λάθος απάντηση τότε:  $7x - 3\psi = 64$  για τον πρώτο παίκτη.

Ακόμη  $4x - 6\psi = 28$  για τον δεύτερο παίκτη. Έτσι έχουμε το σύστημα.

$$7x - 3\psi = 64 \quad | -2 \quad \text{ή} \quad -14x + 6\psi = -128$$

$$\begin{array}{rcl} 4x - 6\psi = 28 & | & 1 \quad 4x - 6\psi = 28 \\ & & \end{array} \text{ . Με πρόσθεση κατά μέλη } -10x = -100 \text{ ή } x = 10 \\ \text{Αντικαθιστώ στην } 7x - 3\psi = 64, \quad 7 \cdot 10 - 3\psi = 64 \text{ ή } -3\psi = -6 \text{ ή } \psi = 2. \text{ Άρα κάθε σωστή απάντηση παίρνει 10 βαθμούς και κάθε λάθος αφαιρεί 2 βαθμούς.}$$

### Γενικές ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

- 1.** Αν  $\kappa = 1$  τότε οι δύο ευθείες ταυτίζονται, άρα το σύστημα είναι αόριστο.  
Αν  $\kappa \neq 1$  τότε οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.
- 2.** Το σημείο  $A(2,1)$  ανήκει και στις δύο ευθείες οπότε **a)**  $\varepsilon_1: (\lambda + \mu) \cdot 2 + 1 = 7$  άρα  $2\lambda + 2\mu = 6$  ή  $\lambda + \mu = 3$  (1) **b)**  $\varepsilon_2: 2 + (\lambda + 3\mu) \cdot 1 = 1$  άρα  $\lambda + 3\mu = -1$  (2). Λύνουμε  
το σύστημα των (1) και (2) και έχουμε :  $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{cases}$   
Λύνω την πρώτη ως προς  $\lambda$  και έχουμε :  $\lambda = 3 - \mu$ . Αντικαθιστώ στην δεύτερη και παίρνουμε :  $3 - \mu + 3\mu = -1$  ή  $2\mu = -4$  ή  $\mu = -2$ , άρα  $\lambda = 3 + 2 = 5$  δηλ  $(\lambda, \mu) = (5, -2)$
- 3.** Λύνω το  $(\Sigma_1)$ : Λύνω την πρώτη ως προς  $x$  και έχουμε  $x = 3 + \psi$ .  
Αντικαθιστώ στη δεύτερη και παίρνουμε:  $2(3 + \psi) + \psi = 9$  ή  $6 + 2\psi + \psi = 9$  ή  $3\psi = 3$  ή  $\psi = 1$ . Άρα  $x = 3 + 1$  ή  $x = 4$  άρα  $(x, \psi) = (4, 1)$ . Η λύση αυτή επαληθεύει το  $(\Sigma_2)$   
άρα  
$$(\Sigma_2): \begin{cases} 8 + \alpha = \beta \\ 12 - \beta = \alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha - \beta = -8 \\ \alpha + \beta = 12 \end{cases}$$
  
Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε  $2\alpha = 4$  ή  $\alpha = 2$ . αντικαθιστώ στην πρώτη εξίσωση οπότε :  $2 - \beta = -8$  ή  $\beta = 10$ . Άρα  $(\alpha, \beta) = (2, 10)$
- 4.** **a)** Πρέπει:  $x + \psi - 2 = 0$  (1) και  $2x - 3\psi + 1 = 0$  (2). Λύνουμε την (1) ως προς  $x$  και έχουμε  $x = 2 - \psi$ . Αντικαθιστούμε στην (2) και έχουμε  $2(2 - \psi) - 3\psi + 1 = 0$  ή  $4 - 2\psi - 3\psi + 1 = 0$  ή  $-5\psi = -5$  ή  $\psi = 1$ . Άρα  $x = 2 - 1$  ή  $x = 1$  Άρα  $(x, \psi) = (1, 1)$   
**b)**  $2x^2 + \psi^2 - 2x\psi + 4x + 4 = 0$  ή  $x^2 + \psi^2 - 2x\psi + x^2 + 4x + 4 = 0$

$$\text{ή } (x - \psi)^2 + (x + 2)^2 = 0$$

Πρέπει  $x - \psi = 0$  (1) και  $x+2=0$  (2). Από την (2)  $x = -2$ , άρα (1)  $-2 - \psi = 0$   
ή  $\psi = -2$ . Άρα  $(x, \psi) = (-2, -2)$

5.

**a)** Λύνω την εξίσωση  $2x + \psi = 4$  ως προς  $\psi$  και έχουμε:  $\psi = 4 - 2x$ .

Αντικαθιστώ στην  $(2x - 3\psi + 4)(x + \psi) = 0$  και έχουμε:

$$[2x - 3(4 - 2x) + 4](x + 4 - 2x) = 0 \quad \text{ή} \quad (2x - 12 + 6x + 4)(-x + 4) = 0$$

$$\text{ή} \quad (8x - 8)(-x + 4) = 0 \quad \text{ή} \quad 8x - 8 = 0 \quad \text{ή} \quad -x + 4 = 0 \quad \text{άρα} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

Για  $x = 1$ ,  $\psi = 4 - 2$  ή  $\psi = 2$ , για  $x = 4$ ,  $\psi = 4 - 2 \cdot 4$  ή  $\psi = -4$

Άρα  $(x, \psi) = (1, 2)$  ή  $(x, \psi) = (4, -4)$

**b)** Στην εξίσωση  $\frac{x}{2} + \psi = -2$  κάνουμε απαλοιφή του 2 και παίρνουμε:  $x + 2\psi = -4$

Αντικαθιστούμε στην  $(3x - 4\psi)(x + 2\psi) = 8$  και παίρνουμε  $(3x - 4\psi)(-4) = 8$  ή

$$3x - 4\psi = -2 \quad . \quad \text{Έτσι έχουμε το σύστημα:} \quad \begin{cases} x + 2\psi = -4 \\ 3x - 4\psi = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x + 4\psi = -8 \\ 3x - 4\psi = -2 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη  $5x = -10$  ή  $x = -2$ . Άρα  $2(-2) + 4\psi = -8$  ή  $4\psi = -4$  ή  $\psi = -1$

Οπότε  $(x, \psi) = (-2, -1)$ .

**c)** Από την εξίσωση  $x^2 + \psi^2 = 2x\psi$  ή  $x^2 + \psi^2 - 2x\psi = 0$  ή  $(x - \psi)^2 = 0$  ή  $x - \psi = 0$ .

Λύνουμε το σύστημα:  $\begin{cases} x - \psi = 0 \\ x + \psi = 7 \end{cases}$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη } 2x = 7 \quad \text{ή} \quad x = \frac{7}{2}, \quad \text{άρα}$$

και  $\psi = \frac{7}{2}$ . Οπότε  $(x, \psi) = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$

6.

Έστω  $x, \psi$  είναι οι αριθμοί με  $x > \psi$  τότε  $x + \psi = 100$  (1) και  $\psi = 4x + 15$

(2). Αντικαθιστούμε στην (1)  $x + 4x + 15 = 100$  ή  $5x = 85$  ή  $x = 17$  και

$\psi = 4 \cdot 17 + 15 = 83$  Άρα οι αριθμοί είναι 83 και 17.

7.

Η εξίσωση είναι αόριστη όταν  $2\lambda - \kappa - 3 = 0$  (1) και  $\kappa - \lambda + 1 = 0$  (2).

Λύνω την (2) ως προς  $\kappa$  και έχουμε  $\kappa = \lambda - 1$ . Αντικαθιστούμε στην (1)

$$2\lambda - (\lambda - 1) - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad 2\lambda - \lambda + 1 - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 2.$$

Άρα  $(\kappa, \lambda) = (1, 2)$ .

8.

Έστω  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ) είναι οι ακτίνες τότε:  $\rho_1 + \rho_2 = 18$  (1).

$$E_1 - E_2 = 72\pi \quad \text{ή} \quad \pi \rho_1^2 - \pi \rho_2^2 = 72\pi \quad \text{ή} \quad \rho_1^2 - \rho_2^2 = 72 \quad \text{ή} \quad (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2) = 72$$

$$\text{ή} \quad (\rho_1 - \rho_2) \cdot 18 = 72 \quad \text{ή} \quad \rho_1 - \rho_2 = 4 \quad (2). \quad \text{Προσθέτω τις (1) και (2) κατά μέλη:}$$

$$2\rho_1 = 22 \quad \text{ή} \quad \rho_1 = 11\text{cm}, \quad \text{άρα} \quad \rho_2 = 7\text{cm}$$

**Κεφάλαιο 3****9.**

Έστω οι ηλικίες είναι  $x$  και  $\psi$  σήμερα. Οπότε  $x - \psi = 5$  (1). Μετά από 11 χρόνια οι ηλικίες τους θα είναι  $x + 11$  και  $\psi + 11$  αντίστοιχα.

$$\text{Άρα } \frac{x+11}{\psi+11} = \frac{4}{3} \text{ ή } 3(x+11) = 4(\psi+11) \text{ ή } 3x + 33 = 4\psi + 44$$

ή  $3x - 4\psi = 11$  (2). Λύνω την (1) ως προς  $x$  και έχουμε  $x = 5 + \psi$ .

Αντικαθιστούμε στην (2)  $3(5 + \psi) - 4\psi = 11$  ή  $15 + 3\psi - 4\psi = 11$  ή  $-\psi = -4$  ή  $\psi = 4$ , άρα  $x = 5 + 4$  ή  $x = 9$ . Άρα οι ηλικίες είναι 9 και 4 χρονών.

**10.**

Έστω κόπηκαν  $x$  εισιτήρια της Α' θέσης και  $\psi$  εισιτήρια της Β' θέσης.

Τότε  $x + \psi = 350$  (1) και  $18 \cdot x + 12 \cdot \psi = 4500$  (2). Λύνουμε την (1) ως προς  $x$  και έχουμε:  $\psi = 350 - x$ . Αντικαθιστώ στην (2)  $18x + 12(350 - x) = 4500$  ή  $18x + 4200 - 12x = 4500$  ή  $6x = 300$  ή  $x = 50$ , άρα  $\psi = 350 - 50$  ή  $\psi = 300$ . Άρα κόπηκαν 50 εισιτήρια της Α' θέσης και 300 εισιτήρια της Β' θέσης.

**11.**

Έστω α είναι ο αριθμός και τα ψηφία του αριθμού είναι  $x, \psi$ , οπότε:

$\alpha = 10x + \psi$ . Με την αλλαγή των ψηφίων του ο αριθμός γίνεται

$\beta = 10\psi + x$ . Άρα  $10x + \psi = 10\psi + x + 18$  ή  $9x - 9\psi = 18$  ή  $x - \psi = 2$  (1). Ακόμη  $x + \psi = 10$  (2). Με πρόσθεση των (1) και (2)  $2x = 12$  ή  $x = 6$ , άρα  $\psi = 4$ . Άρα ο αριθμός είναι ο 64.

**12.**

Έστω α είναι ο αριθμός και τα ψηφία του είναι  $x, \psi$ , οπότε:  $\alpha = 10x + \psi$

και έχουμε  $\alpha = (x + \psi) \cdot 6 + 3$  ή  $10x + \psi = 6x + 6\psi + 3$  ή  $4x - 5\psi = 3$  (1).

Αν ολλάξουμε τη θέση των ψηφίων του τότε:  $\beta = 10\psi + x$  οπότε:

$\beta = (x + \psi) \cdot 4 + 9$  ή  $10\psi + x = 4x + 4\psi + 9$  ή  $3x - 6\psi = -9$  ή  $x - 2\psi = -3$  (2).

Λύνω την (2) ως προς  $x$  και έχουμε:  $x = 2\psi - 3$ . Αντικαθιστώ στην (1)

$4(2\psi - 3) - 5\psi = 3$  ή  $8\psi - 12 - 5\psi = 3$  ή  $3\psi = 15$  ή  $\psi = 5$ . Άρα  $x = 2 \cdot 5 - 3$  ή  $x = 7$ . Άρα ο αρχικός αριθμός είναι ο 75.

**13.**

Έστω  $x > 2$  τό μήκος,  $\psi > 6$  το πλάτος είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου

τότε:  $E = x \cdot \psi$ . Αν ελαττώσουμε το μήκος κατά 2, αυξήσουμε το πλάτος

κατά 5 τότε  $x - 2$  και  $\psi + 5$  οπότε  $(x - 2)(\psi + 5) = E + 94$  ή  $x\psi + 5x - 2\psi - 10 = x\psi + 94$  ή  $5x - 2\psi = 104$  (1). Αν αυξήσουμε το μήκος κατά 4 και

ελαττώσουμε το πλάτος κατά 6 τότε  $x + 4$  και  $\psi - 6$  οπότε:  $(x + 4)(\psi - 6) = E - 104$  ή  $x\psi - 6x + 4\psi - 24 = x\psi - 104$  ή  $-6x + 4\psi = -80$  ή  $-3x + 2\psi = -40$

(2). Άρα έχουμε το σύστημα:  $5x - 2\psi = 104 - 3x + 2\psi = -40$ . Με πρόσθεση

κατά μέλη παίρνουμε:  $2x = 64$  ή  $x = 32$ . Αντικαθιστώ το  $x$  στην εξίσωση

$3x + 2\psi = -40$  και έχουμε  $-3 \cdot 32 + 2\psi = -40$  ή  $-96 + 2\psi = -40$  ή  $2\psi = 56$  ή  $\psi = 28$ .

**14.**

Το αυτοκίνητο που ξεκινά από την πόλη Α στα 15 λεπτά θα διανύσει

διάστημα:  $S = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20 \text{ km}$ . Έστω  $t$  χρόνο θα κινηθούν τα δύο

αυτοκίνητα τότε :  $S_1 = 80t$  ,  $S_2=60t$  , Ακόμη  $S_1 + S_2 = 35$  ή

$80t+60t=35$  ή  $140t=35$  ή  $t=\frac{1}{4}$  ώρες =15 λεπτά. Άρα το πρώτο αυτοκίνητο θα κινηθεί 30 λεπτά και το δεύτερο 15 λεπτά .

**15.**

Έστω  $v_1$ ,  $v_2$  οι ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων τότε αν  $S_1$ ,  $S_2$  είναι τα διαστήματα που διανύουν τότε:  $S_1 = 3v_1$ ,  $S_2 = 3v_2$

**a)** Όταν κινούνται στην ίδια κατεύθυνση  $S_1 = S_2 + 45$  ή  $3v_1 = 3v_2 + 45$  ή  $v_1 = v_2 + 15$  (1)

**b)** Όταν κινούνται σε διαφορετική κατεύθυνση  $S_1 + S_2 = 45$  ή  $\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 = 45$  ή  $v_1 + v_2 = 135$  (2) . Λύνω το σύστημα :  $v_1 = v_2 + 15$   
 $v_1 + v_2 = 135$

Οπότε έχουμε :  $v_2 + 15 + v_2 = 135$  ή  $2v_2 = 120$  ή  $v_2 = 60$  Km/ h και  $v_1 = 75$  Km/h.

**16.**

Αν  $x$  είναι το μήκος του τρένου τότε : Από τον τύπο  $S = v \cdot t$  έχουμε :

$$180+x=v \cdot 12 \quad \text{ή} \quad 12v-x=180 \quad -1 \quad \text{ή} \quad -12v+x=-180$$

$$930+x=v \cdot 42 \quad 42v-x=930 \quad 1 \quad 42v-x=930 \quad \text{Με πρόσθεση κατά μέλη} \quad 30v=750 \quad \text{ή} \quad v=25, \text{ άρα} \quad 930+x=25 \cdot 42 \quad \text{ή} \quad x=1050-930 \quad \text{ή} \quad x=120.$$

Άρα το τρένο έχει μήκος 120 m και ταχύτητα 25m/ sec .

**17.**

Από τον τύπο :  $\frac{1}{R_{0\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  έχουμε το σύστημα:

$$\frac{1}{2,4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{12} \quad \text{Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση και έχουμε :}$$

$$\frac{1}{2,4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{R_2} = \frac{1}{2,4} - \frac{1}{12} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{R_2} = \frac{10}{24} - \frac{2}{24} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{R_2} = \frac{8}{24} \quad \text{ή} \quad R_2 = 6 \Omega$$

$$\text{Οπότε} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{3}{12} \quad \text{ή} \quad R_1 = 4 \Omega$$





A close-up photograph of a person's hand holding a silver pen over an open notebook. The notebook contains various mathematical sketches, including a network graph with nodes and edges, some handwritten text like 'εεε', and several geometric diagrams. The background is slightly blurred.

# Κεφάλαιο

40



## 4.1 Η συνάρτηση $\psi = ax^2$ με $a \neq 0$

## Κεφάλαιο 4

Συνάρτηση λέμε μία ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές  $x$  και  $\psi$  και σε κάθε τιμή του  $x$  αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του  $\psi$ .

Αν σε ένα σύστημα αξόνων, παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη  $(x, \psi)$ , όπου  $\psi$  είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μία τιμή του  $x$ , τότε το σύνολο των σημείων αυτών αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

**Η συνάρτηση  $\psi = ax^2$  με  $a \neq 0$ .**

- Έχει γραφική παράσταση που είναι παραβολή με κορυφή το σημείο  $O(0,0)$  και άξονα συμμετρίας τον άξονα  $\psi$ .
- Αν  $a > 0$ , τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x$  και πάνω και η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή  $\psi = 0$ , όταν  $x = 0$
- Αν  $a < 0$ , τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x$  και κάτω και η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή  $\psi = 0$ , όταν  $x = 0$

**Παρατηρήσεις:**

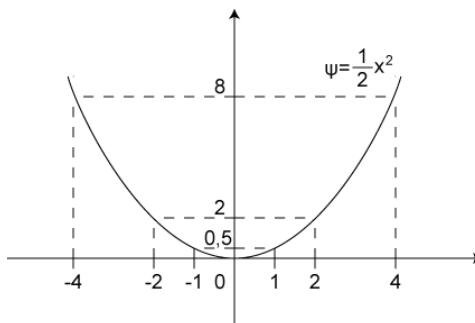
- Ο συντελεστής  $a$  καθορίζει: i) Την θέση της παραβολής  $\psi = ax^2$  ως προς τον άξονα  $x$  ii) Το άνοιγμά της. Όταν η απόλυτη τιμή του  $a$  αυξάνεται τότε η παραβολή κλείνει δηλαδή πλησιάζει προς τον άξονα  $\psi$ .
- Οι παραβολές  $\psi = ax^2$  και  $\psi = -ax^2$  είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον  $x$ .
- Για να κάνουμε την γραφική παράσταση της  $\psi = ax^2$  κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για διάφορες τιμές του  $x$ .

Έτσι αν θέλουμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της παραβολής:

$$\psi = \frac{1}{2}x^2 \text{ κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του } x.$$

$x$	-4	-2	-1	0	1	2	4
$\psi$	8	2	0,5	0	0,5	2	8

Και η γραφική παράσταση δίνεται:



1.

- a)** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραβολή  $\psi = \alpha x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 4)$
- b)** Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να σχεδιάσετε την παραβολή

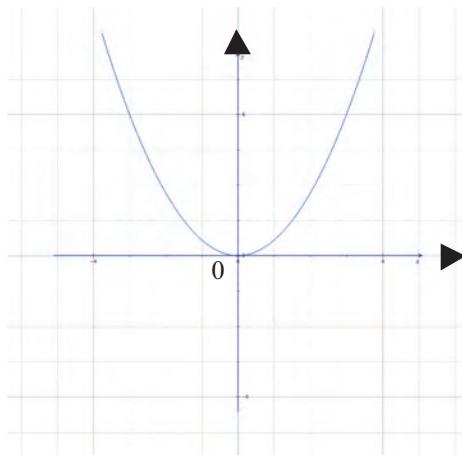
**Λύση**

**a)** Η παραβολή περνάει από το  $A(-2, 4)$  áρα:  $4 = \alpha(-2)^2$  ή  $4 = 4\alpha$   
οπότε  $\alpha = 1$

**b)** Για  $\alpha = 1$  η παραβολή είναι:  $\psi = x^2$   
Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του  $x$ .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi$	9	4	1	0	1	4	9

Η Γραφική παράσταση δίνεται.



2.

Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\alpha + 1)x^2$  με  $\alpha \neq -1$ .

- a)** Αν η παραβολή έχει μέγιστο να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .
- b)** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  όταν είναι συμμετρική ως προς τον  $x'$  με την  $\psi = 4x^2$

**Λύση**

**a)** Η παραβολή έχει μέγιστο όταν:  $\alpha + 1 < 0$  ή  $\alpha < -1$

**b)** Οι παραβολές είναι συμμετρικές ως προς τον  $x'$  όταν  $\alpha + 1 = -4$   
οπότε  $\alpha = -5$ .

3.

Δίνονται οι παραβολές  $\psi = (\alpha + \frac{3}{2})x^2$  και  $\psi = (\frac{\alpha}{2} + 2)x^2$  με  $\alpha > 0$ .

Αν η γραφική παράσταση της πρώτης παραβολής είναι πιο κοντά στον άξονα  $\psi'$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

- α)** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραβολή  $\psi = \alpha x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2,4)$
- β)** Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να σχεδιάσετε την παραβολή

### Λύση

$$\text{Πρέπει: } \alpha + \frac{3}{2} < \frac{\alpha}{2} + 2 \quad \text{ή} \quad 2\alpha + 3 < \alpha + 4 \quad \text{ή} \quad \alpha < 1. \quad \text{Άρα} \quad 0 < \alpha < 1$$

## Ερωτήσεις κατανόησης

A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

1. Η παραβολή  $\psi = -x^2$  έχει άξονα συμμετρίας των  $x'$ 'x.
2. Η παραβολή  $\psi = (\lambda^2 + 1)x^2$  έχει μέγιστο.
3. Οι παραβολές  $\psi = (\alpha^2 + 1)x^2$ ,  $\psi = -(\alpha^2 + 1)x^2$  είναι συμμετρικές ως προς το  $\psi'\psi$
4. Η παραβολή  $\psi = 3x^2$  έχει μέγιστο το  $(0,0)$
5. Αν η παραβολή  $\psi = (\alpha + 1)2007x^2$ ,  $\alpha \neq -1$  διέρχεται από το  $A(-3,8)$ , τότε διέρχεται και από το  $B(3,8)$
6. Οι παραβολές  $\psi = -2x^2$ ,  $\psi = 6x^2$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
7. Η γραφική παράσταση της παραβολής  $\psi = -3x^2$  είναι πάντα κάτω από των  $x'$ 'x

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- 1.** Για ποιά τιμή του  $\alpha$  η παραβολή  $\psi = (\alpha + 1)x^2$  διέρχεται από το  $A(-2,4)$   
**a.**  $\alpha = 0$ , **b.**  $\alpha = -1$  **c.**  $\alpha = 2$  **d.**  $\alpha = -3$  **e.**  $\alpha = 4$
  
- 2.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\alpha + 2)x^2$ . Η γραφική της παράσταση βρίσκεται από τον  $x'$  και κάτω όταν:  
**a.**  $\alpha < 0$ , **b.**  $\alpha < -1$  **c.**  $\alpha < -2$  **d.**  $\alpha > 0$  **e.**  $\alpha > -2$
  
- 3.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\lambda - 2)x^2$ . Η παραβολή έχει μέγιστο όταν:  
**a.**  $\lambda = 2$ , **b.**  $\lambda > 2$ , **c.**  $\lambda < 2$ , **d.** τίποτα από τα παραπάνω.
  
- 4.** Οι παραβολές  $\psi = \lambda x^2$ ,  $\lambda \neq 0$  και  $\psi = 3x^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον  $x'$  όταν:  
**a.**  $\lambda = 3$ , **b.**  $\lambda = -3$ , **c.**  $\lambda < 3$ , **d.**  $\lambda > 3$
  
- 5.** Αν μία παραβολή με  $x \in R$  διέρχεται από το  $(-1,3)$  τότε σίγουρα θα διέρχεται από το:  
**a.**  $(1, 3)$ , **b.**  $(-1,3)$  **c.**  $(3,1)$  **d.**  $(-3,1)$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1.** Να σχεδιάσετε τις παραβολές  
**a)**  $\psi = -x^2$  αν  $-2 < x \leq 1$  , **b)**  $\psi = \frac{1}{2}x^2$  αν  $-4 \leq x \leq 4$
  
- 2.** Να σχεδιάσετε τις παραβολές  
**a)**  $\psi = -x^2$  αν  $-2 < x \leq 1$ , **b)**  $\psi = x^2$  αν  $-4 \leq x \leq 4$
  
- 3.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραβολή  $\psi = (\alpha + 2)x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1,4)$ . Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συμμετρικής της ως προς τον  $x'$ .
  
- 4.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\frac{\lambda + 1}{2} - 4\lambda)x^2$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η παραβολή να έχει μέγιστο.

5.

- Δίνονται οι παραβολές  $\psi = (\alpha + \frac{1}{3})x^2$ ,  $\psi = (2\alpha - 1)x^2$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε:
- a)** Οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών να ταυτίζονται.
  - b)** Να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'$ .

6.

Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2$

- a)** Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η παραβολή να διέρχεται από το  $A(1, 6)$
- b)** Για τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  του α) ερωτήματος να κάνετε τη γραφική παράσταση.

7.

Δίνονται οι παραβολές  $\psi = (\alpha^2 + 4\alpha + 4)x^2$ ,  $\psi = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)x^2$  με  $\alpha \neq -2, \alpha \neq 1$ .

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η γραφική παράσταση της πρώτης παραβολής να είναι πιο μακριά από τον άξονα  $\psi'$ .

## 4.2 Η συνάρτηση $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

Μία συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική όταν έχει την μορφή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ .

**Γενικά:** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$  είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο  $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ , όπου  $\Delta$  η διακρίνουσα.
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $K$  και έχει εξίσωση  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

**Γενικά:** Αν  $\alpha > 0$ , η συνάρτηση  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  παίρνει ελάχιστη τιμή  $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ , όταν  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Αν  $\alpha < 0$ , η συνάρτηση  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  παίρνει μέγιστη τιμή  $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$  όταν  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

### Παρατηρήσεις:

- a)** Η γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha x^2 + \kappa$  προκύπτει από τη γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha x^2$  αν μεταφερθεί: **i)** κ μονάδες προς τα πάνω αν  $\kappa > 0$  **ii)** κ μονάδες προς τα κάτω αν  $\kappa < 0$ . Δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση.
- b)** Η γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha(x-\kappa)^2$  προκύπτει από τη γραφική παράσταση της  $\psi = \alpha x^2$  αν μεταφερθεί: **i)** κ μονάδες δεξιά αν  $\kappa > 0$  **ii)** κ μονάδες αριστερά αν  $\kappa < 0$ . Δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Δίνεται η παραβολή  $\psi = x^2 - (\lambda - 2)x - 3$ .

**a)** Να δείξετε ότι έχει ελάχιστο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**b)** Αν η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την  $x = 1$  να βρείτε το αριθμό  $\lambda$ .

**γ)** Για την τιμή του που βρήκατε στο β) ερώτημα να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες.

**Λύση**

**α)** Επειδή  $\alpha = 1 > 0$  η παραβολή θα έχει ελάχιστο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**β)** Η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$   $\alpha \neq 0$  έχει άξονα συμμετρίας την  $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$   
οπότε:  $1 = -\frac{-(\lambda - 2)}{2}$  ή  $2 = \lambda - 2$  ή  $\lambda = 4$

**γ)** Για  $\lambda = 4$  η παραβολή γίνεται:  $\psi = x^2 - 2x - 3$ .

Για τον άξονα  $x'$ : θέτω  $\psi = 0$  οπότε  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . Είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = -3$   $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ .

Άρα έχουμε δύο ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}, \quad \text{άρα} \quad x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{ή} \quad x = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Οπότε τέμνει τον  $x'$  στα  $A(3,0)$ ,  $B(-1,0)$

Για τον άξονα  $\psi'$ : θέτω  $x = 0$  οπότε:  $\psi = -3$ . Άρα τέμνει τον  $\psi'$  στο  $\Gamma(0,-3)$

**2.**

Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 20. Να δείξετε ότι:

**α)** Αν ο ένας είναι ο  $x$  τότε το γινόμενό τους δίνεται:  $-x^2 + 20x$

**β)** Να βρείτε τους αριθμούς όταν το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο.

Ποιο είναι το μέγιστο γινόμενο.

**Λύση**

**α)** Αν ο ένας είναι ο  $x$  τότε ο άλλος θα είναι  $20 - x$ . Έτσι για το γινόμενο έχουμε:  $x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x$ .

**β)** Θεωρώ την παραβολή  $\psi = -x^2 + 20x$ . Επειδή  $\alpha = -1 < 0$  έχουμε μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{20}{-2} = 10 \quad \text{Άρα το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν ο ένας αριθμός είναι ο 10 και ο άλλος 10. Το μέγιστο γινόμενο θα είναι:}$$

$$10 \cdot 10 = 100.$$

**3.**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ . Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ώστε η παραβολή να έχει κορυφή το σημείο  $A(0,4)$  και να τέμνει τον  $x'$  στο σημείο  $B(-2,0)$ .

**Λύση**

Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο  $A(0,4)$ , άρα  $4 = \gamma$  (1). Έχει κορυφή το  $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$  οπότε:  $0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$  ή  $\beta = 0$  (2). Περνάει από το  $(-2,0)$  οπότε:

$$0 = \alpha \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) + 4 \quad \text{ή} \quad 0 = 4\alpha + 4 \quad \text{ή} \quad \alpha = -1 \quad (3)$$

**A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

- 1.** Η συνάρτηση  $\psi = (\alpha^2 + 1)x^2 + 3x - 6$  παίρνει ελάχιστη τιμή.
- 2.** Η παραβολή  $\psi = x^2 - 4$  έχει άξονα συμμετρίας τη ευθεία  $x = -2$
- 3.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$ . Οι τιμές της διακρίνουσας καθορίζουν το είδος του ακροτάτου.
- 4.** Η παραβολή  $\psi = x(1 - x) + 2x + 6$  έχει ελάχιστο.
- 5.** Η παραβολή  $\psi = 3x^2 - x(3 + 4x) + 2$  έχει ελάχιστο.
- 6.** Οι παραβολές  $\psi = x^2 - 4x + 1$ ,  $\psi = -2x^2 + 8x + 10$  έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας.
- 7.** Η παραβολή  $\psi = (x-2)^2$  προκύπτει από την γραφική παράσταση της παραβολής  $\psi = x^2$ , αν μεταφερθεί 2 μονάδες προς τα πάνω.
- 8.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ . Αν  $\Delta = 0$  τότε η κορυφή της βρίσκεται στον  $\psi'$ .
- 9.** Η παραβολή  $\psi = x^2 + 5$  προκύπτει από τη γραφική παράσταση της παραβολής αν μεταφερθεί 5 μονάδες προς τα πάνω.
- 10.** Η παραβολή  $\psi = 2x^2 + 6x + 8$  έχει ελάχιστο το  $x = -\frac{3}{2}$
- 11.** Η παραβολή  $-x^2 - 2\psi = 3$  έχει μέγιστο.

**B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

- 1.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\alpha - 3)x^2 - 3\alpha x + \alpha - 1$   $\alpha \neq 3$ . Για ποια τιμή του  $\alpha$  η παραβολή έχει μέγιστο.
  - a.**  $\alpha > 3$ ,
  - b.**  $\alpha < 3$ ,
  - c.**  $\alpha > 0$
  - d.**  $\alpha < 0$
- 2.** Η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \alpha^2 x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ , έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία.

**α.**  $x=1$    **β.**  $x=a, \quad x=-\frac{\alpha}{2}$    **γ.**  $x=\frac{\alpha}{2}, \quad \delta.$   $x=-\alpha$

3. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 10. Το μέγιστο γινόμενό τους είναι  
**α.** 20   **β.** 100   **γ.** -20   **δ.** -100
4. Η παραβολή  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν:  
**α.**  $c = 0$ ,   **β.**  $a > 0$ ,   **γ.**  $a < 0$ ,   **δ.**  $b = 0$
5. Η παραβολή  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  έχει κορυφή την αρχή των αξόνων αν:  
**α.**  $a > 0$ ,   **β.**  $a < 0$ ,   **γ.**  $b = c = 0$    **δ.**  $b > 0$
6. Η παραβολή  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  έχει την κορυφή στον  $x'$  τότε:  
**α.**  $b = 0$ ,   **β.**  $c = 0$    **γ.**  $b^2 = 4ac$ ,   **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:

**α)**  $\psi = x^2 + 3$ ,   **β)**  $\psi = x^2 - 4$ ,   **γ)**  $\psi = (x + 2)^2$ ,   **δ)**  $\psi = (x - 1)^2$

2 Να βρείτε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης.

**α)**  $\psi = -x^2 - 4x + 2$    **β)**  $\psi = (x - 1)^2 + 3$

3 Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda)x + 2$ .

**α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο

**β)** Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο για  $x = -1$  να βρείτε το  $\lambda$ .

**γ)** Για την μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  να βρείτε το ελάχιστο

4 Δίνεται η παραβολή  $\psi = 2x^2 - (\lambda - 1)x + 1$ . Αν η κορυφή της παραβολής βρίσκεται στον  $\psi'$  να βρείτε το  $\lambda$ .

5 Δίνεται η παραβολή  $\psi = 2x^2 + (\lambda - 1)x + 6$ .

**α)** Για ποια τιμή του  $\lambda$  η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την  $x = -1$

**β)** Για την τιμή του  $\lambda$  του α) ερωτήματος να βρείτε το ελάχιστο

6 Να υπολογίσετε τα  $\alpha$ ,  $\beta$  ώστε η παραβολή  $\psi = -x^2 + \alpha x + \beta$ , για  $x = 4$  να παρουσιάζει μέγιστο το 6

Δύο θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 10. Να βρείτε τους αριθμούς αν

- a)** Το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο .
- b)** Το άθροισμα των τετραγώνων τους γίνεται ελάχιστο.

Αν  $x, \psi$  είναι δύο πραγματικοί αριθμοί με  $2x + \psi = 5$ . Να βρείτε το μέγιστο της παράστασης  $A = x \psi + 5$

Δίνονται οι παραβολές  $\psi = -x^2 + ax + 1$ ,  $\psi = x^2 - 3x + 2$ . Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $a$  ώστε οι κορυφές των δύο παραβολών να ταυτίζονται.

Δίνεται η παραβολή:  $\psi = x^2 - (\lambda + 2)x - \lambda + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- a)** Να εξετάσετε αν η παραβολή έχει ελάχιστο ή μέγιστο το οποίο και να βρείτε.
- b)** Αν η παραβολή έχει ελάχιστο να βρείτε το  $\lambda$  ώστε το ελάχιστο της παραβολής να γίνεται μέγιστο.

Ένας παραγωγός καλλιεργεί  $x$  (σε δεκάδες) στρέμματα με ροδάκινα.

Για την καλλιέργεια των  $x$  στρεμμάτων έχει έξοδα  $2x + 7$  (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Τα έσοδα του παραγωγού είναι  $x$  (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Να βρείτε πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργήσει ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.

### Γενικές ασκήσεις 4<sup>ον</sup> Κεφαλαίου

Δίνονται οι παραβολές  $\psi = x^2 - (\lambda - 1)x + 2$ ,  $\psi = -2x^2 + (3\lambda - 2)x + 6$ .

- a)** Να δείξετε ότι η πρώτη παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε  $\lambda$ , ενώ η δεύτερη παραβολή παρουσιάζει μέγιστο για κάθε  $\lambda$ .
- b)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε οι δύο παραβολές να έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

Δίνεται η παραβολή  $\psi = x^2 - \lambda x + \lambda - 1$ . Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η κορυφή της παραβολής να ανήκει στην ευθεία  $x + 2\psi - 4 = 0$

Αν για τους θετικούς αριθμούς  $x, \psi$  ισχύει:  $2x + \psi = 5$  (1).Να βρείτε τους αριθμούς ώστε το γινόμενο  $x \cdot \psi$  να γίνεται μέγιστο.

Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε να έχουν άθροισμα 20 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

- 5** Δίνονται οι παραβολές:  $\psi = (3\lambda - 6)x^2 + 3x + 8$ ,  $\psi = (1 - \lambda)x^2 + 2x - 2008$ .  
Να αποδείξετε ότι: Αν η πρώτη παραβολή έχει ελάχιστο τότε η δεύτερη παραβολή έχει μέγιστο.

- 6** Δίνεται η παραβολή  $\psi = x^2 - 4x + \lambda - 1 = 0$

- a)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η κορυφή της να βρίσκεται στον  $x'$ .
- b)** Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε την ευθεία που περνάει από την κορυφή της παραβολής και το σημείο που τέμνει η παραβολή τον άξονα  $\psi'$

- 7** Σε ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 12$  cm παίρνουμε σημείο  $M$  και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα,  $AMKL$ ,  $BM\Gamma\Delta$ . Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$  ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να είναι ελάχιστο.

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α)** Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;
- β)** Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ . Πότε έχουμε ελάχιστο; Πότε έχουμε μέγιστο; Ποιο είναι σε κάθε περίπτωση.
- γ)** Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ . Έχει άξονα συμμετρίας και ποιος είναι;

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = \alpha x^2$ , η οποία περνάει από το A(1,3).

- α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.
- β)** Να κάνετε την γραφική της παράσταση.
- γ)** Να βρείτε την συμμετρική της ως προς τον x'x.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = x^2 - 3x + 2$ .

- α)** Να βρείτε τα σημεία που τέμνει τους άξονες.
- β)** Να εξετάσετε αν έχει μέγιστο ή ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.
- γ)** Αν A, B είναι τα σημεία που τέμνει τον x'x και Γ είναι η κορυφή της παραβολής να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AΒΓ.

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\alpha - 2)x^2$

- α)** Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η παραβολή να έχει μέγιστο.
- β)** Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η παραβολή που δίνεται να είναι συμμετρική ως προς τον x'x με την παραβολή  $\psi = (\alpha^2 + \alpha - 1) x^2$ .

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α)** Από τι εξαρτάται η απόσταση της γραφικής παράστασης της παραβολής από τον ψ'ψ.
- β)** Η γραφική παράσταση μιάς παραβολής περνάει από το Α(3, 9).  
Να εξηγήσετε γιατί θα περνάει και από το Β(-3,9).
- γ)** Αν η παραβολή  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  έχει κορυφή το σημείο K(0,4), τότε τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τους αριθμούς  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\lambda - 2)x^2 + 5\lambda x + 2$ ,  $\lambda \neq 2$ .

- α)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε να έχει άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ.
- β)** Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε να εξετάσετε αν η παραβολή έχει μέγιστο ή ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Να βρείτε τους αριθμούς  $a$ ,  $b$ ,  $c$  όταν: η παραβολή περνάει από την αρχή των αξόνων, έχει κορυφή το σημείο τομής των ευθειών ( $\varepsilon$ )  $x + \psi = 0$ , ( $\zeta$ )  $3x + \psi = 0$  και είναι συμμετρική με την  $\psi = 3x^2$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ένα τραπέζιο στο οποίο το άθροισμα των βάσεων και του ύψους είναι 30 m.

- α)** Να εκφράσετε τις βάσεις σε σχέση με το ύψος.
- β)** Να εκφράσετε το εμβαδόν σε σχέση με το ύψος.
- γ)** Για ποια τιμή του ύψους το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

4.1 Η συνάρτηση  $\psi = \alpha x^2$ 

## Ερωτήσεις κατανόησης

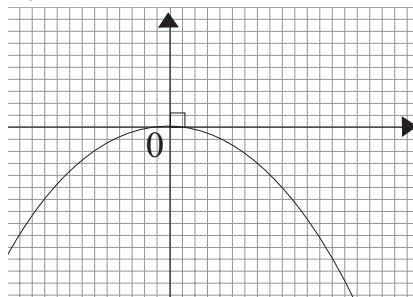
1. **β)**  $B(2, -8)$ , **γ)**  $\Gamma\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Μέγιστη τιμή έχουν: **α), δ)**  
Ελάχιστη τιμή έχουν: **β), γ)**

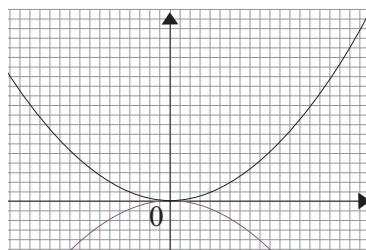
3.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

4. a)



β)



5. β)

6.

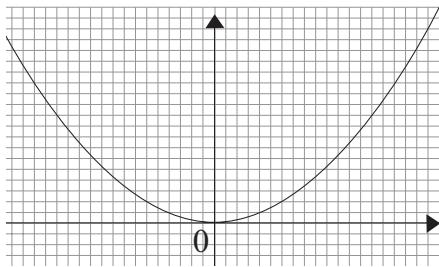
α)	β)	γ)	δ)
3	4	1	2

1.

a)

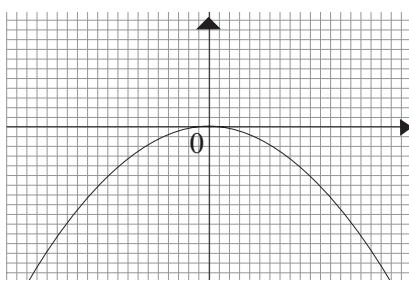
Κάνουμε τον πίνακα τιμών

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	8	2	0	2	8



γ) Κάνουμε τον πίνακα τιμών

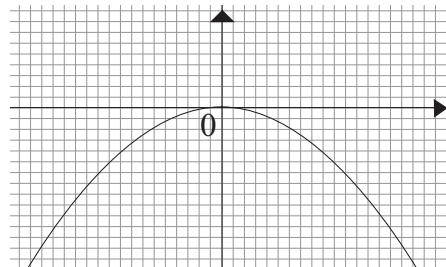
x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	-3	-0,75	0	-0,75	-3



b)

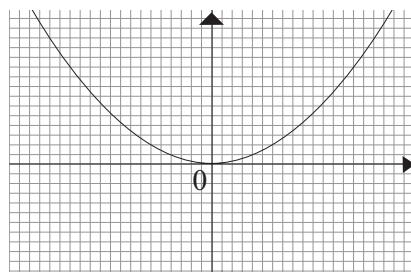
Κάνουμε τον πίνακα τιμών

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	-8	2	0	2	8



δ) Κάνουμε τον πίνακα τιμών

x	-3	-1	0	1	3
$\psi$	6	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	6



2. Κάνουμε τον πίνακα τιμών:

a)  $\psi = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	4	1	0	1	4

$$\psi = 3x^2$$

$$\psi = \frac{1}{3} x^2$$

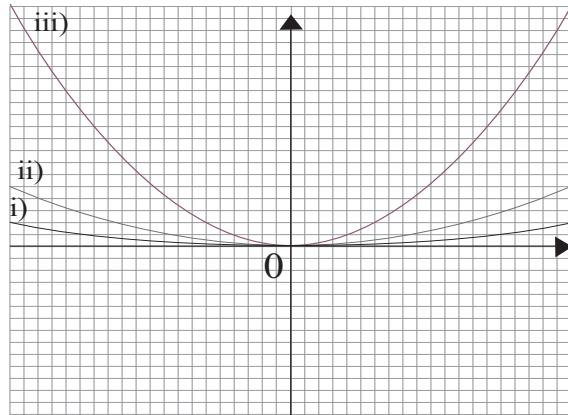
x	-3	-1	0	1	3
$\psi$	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

(ii)

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	12	3	0	3	12

(iii)

**Κεφάλαιο 4**

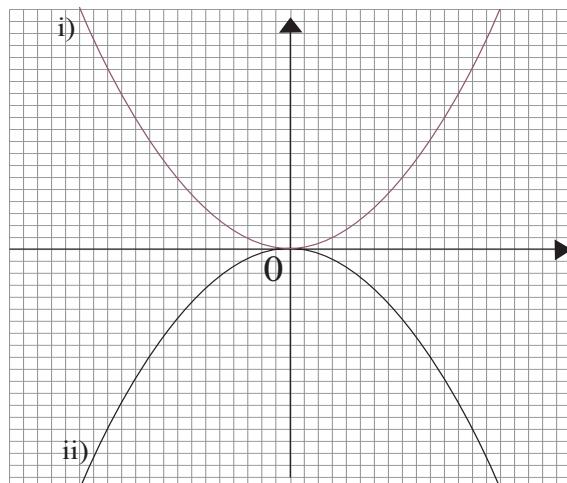


β) (i)  $\psi = \frac{3}{2} x^2$

(ii)  $\psi = -\frac{3}{2} x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	6	1,5	0	1,5	6

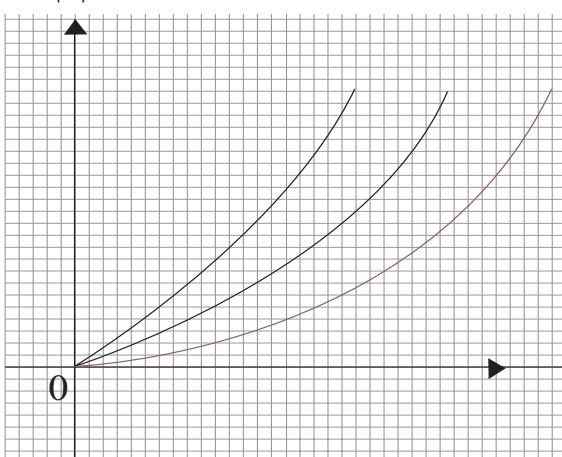
x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	-6	-1,5	0	1,5	6



3. Η παραβολή είναι :  $\psi = \alpha x^2$ . Περνάει από το  $(-2, -1)$  οπότε :  $-1 = \alpha(-2)^2$  ή  $4\alpha = -1$  ή  $\alpha = -\frac{1}{4}$ . Η συμμετρική της ως προς τον  $x'$  είναι  $\psi = \frac{1}{4} x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$\psi$	1	0,25	0	0,25	1

4. Για  $\psi = -9$  έχουμε :  $-9 = -4x^2$  ή  $x^2 = \frac{9}{4}$  ή  $x = \pm \frac{3}{2}$ . Άρα τα σημεία είναι  $A(-\frac{3}{2}, -9)$  και  $B(\frac{3}{2}, -9)$
5. Το σημείο  $M$  ανήκει στην παραβολή άρα :  $\frac{1}{2} = (\lambda+2)(-\frac{1}{2})^2$  ή  $\frac{1}{2} = (\lambda+2)\frac{1}{4}$  ή  $2 = (\lambda+2)$  ή  $\lambda = 0$
6. Το σημείο  $M$  ανήκει στην παραβολή άρα :  $\lambda = \frac{1}{2}2^2$  ή  $\lambda = \frac{4}{\lambda}$  ή  $\lambda^2 = 4$  ή  $\lambda = \pm 2$ . Επειδή όμως έχουμε μέγιστη τιμή πρέπει  $\frac{1}{\lambda} < 0$  ή  $\lambda < 0$   
Άρα  $\lambda = -2$
7. a) Για  $m=1$  τότε  $E = \frac{1}{2}v^2$  (Η γραφική παράσταση είναι η πιο πλατιά)  
Για  $\mu=2$  τότε  $E=v^2$  (Η γραφική παράσταση είναι η μεσαία)  
Για  $\mu=4$  τότε  $E=2v^2$  (Η γραφική παράσταση βρίσκεται πιο κοντά στον  $\psi$ )



- β) Όταν  $E = 2$  τότε μεγαλύτερη ταχύτητα έχει το σώμα με μάζα  $1 \text{ kg}$ .
- γ) Όταν  $v = \frac{3}{2}$  τότε μεγαλύτερη ενέργεια έχει το σώμα με μάζα  $4 \text{ kg}$ .

## Ερωτήσεις κατανόησης

1. **α)** παραβολή,  $K(1, -4)$ ,  $x=1$ . **β)** ελάχιστη,  $\psi = -4$ ,  $x = 1$ . **γ)**  $(-1, 0), (3, 0), (0, -3)$

2. **i)** γ), **ii)** γ)

3.

<b>α)</b>	<b>β)</b>	<b>γ)</b>	<b>δ)</b>	<b>ε)</b>
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ

4.

<b>α)</b>	<b>β)</b>	<b>γ)</b>	<b>δ)</b>
2	4	1	3

5. **α)**  $x=1$ ,  $K(1, 4)$ , **β)**  $\psi = 4$ , όταν  $x=1$ , **γ)**  $(-1, 0), (3, 0), (0, 3)$

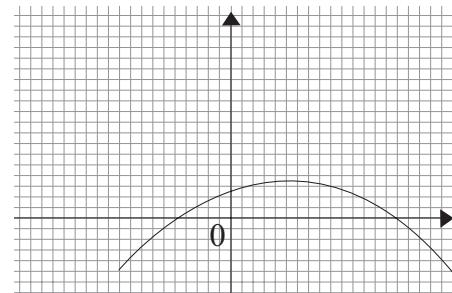
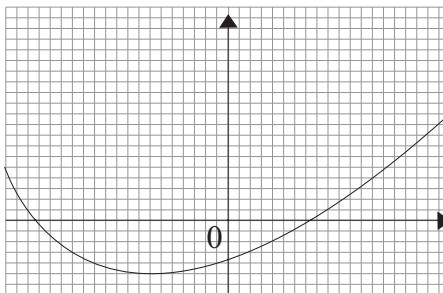
## Προτεινόμενες ασκήσεις - Προβλήματα

1. **α)** Κάνουμε τον πίνακα τιμών  
Έχει κορυφή το  $K(-1, -4)$

x	-3	-2	-1	0	1
$\psi$	0	-3	-4	-3	0

**β)** Κάνουμε τον πίνακα τιμών  
Έχει κορυφή το  $K(1, 8)$

x	-1	0	1	2	3
$\psi$	0	6	8	6	0



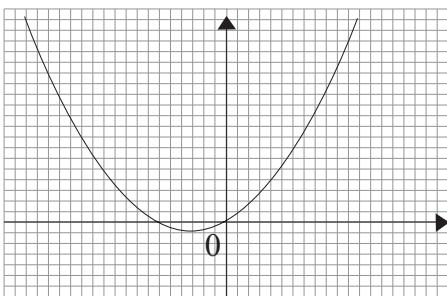
2. **α)** Επειδή  $a=3>0$  η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή για  $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-1}{2\cdot3}=\frac{1}{6}=2$   
την  $\psi=-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{1}{4\cdot3}=-\frac{1}{12}=-\frac{1}{12}$

**β)** Έπειδή  $a = -4 < 0$  η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή για  $x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-8}{-8} = -1$   
 $\tau \eta \psi = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{80}{-16} = 5$

**γ)** Έχει μέγιστη τιμή για  $x = 6$   $\tau \eta \psi = 7$

3. Κάνουμε τον πίνακα τιμών

x	-4	-2	0	1	2
$\psi$	6	0	0	3	8



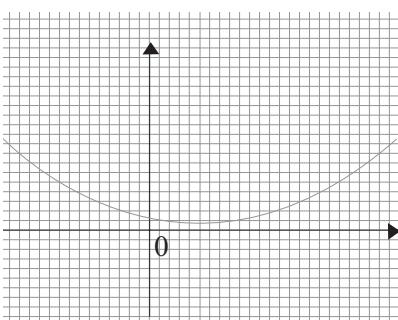
Αν κάνουμε την ευθεία  $\psi = 3$  την τέμνει στα σημεία με  $x = 1$  και  $x = -3$

4. Η κορυφή είναι το σημείο K(1,1). Κάνουμε τον πίνακα τιμών

Η κορυφή είναι το σημείο  $K(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$

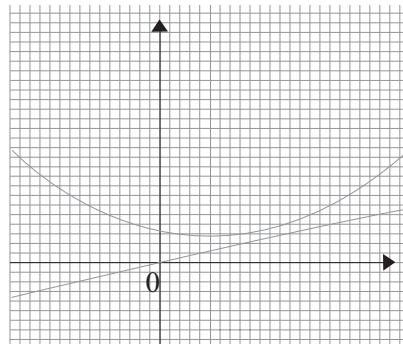
Ο πίνακας τιμών είναι

x	-1	0	1	2	3
$\psi$	5	2	1	2	5



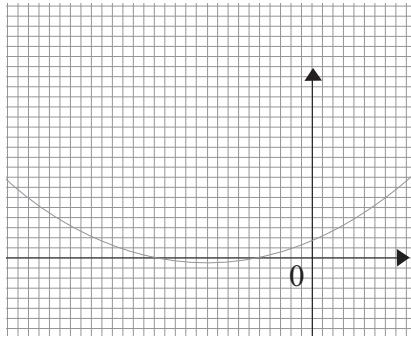
#### Κεφάλαιο 4

Κάνουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής  $\psi = x^2 + 2$  και της ευθείας  $\psi = 2x$ .



5. **a)** Για  $x = 1$ ,  $\psi = 6$  έχουμε:  $6 = 1^2 + 3 \cdot 1 + \lambda$  ή  $\lambda = 2$   
**b)** Για  $\lambda = 2$  έχουμε:  $\psi = x^2 + 3x + 2$

x	-2	0	1	2	3
$\psi$	0	2	6	12	20



6. Για τον άξονα  $x'x$ : θέτω  $\psi=0$  και έχουμε:  $x^2 - 6x + 5 = 0$  άρα  $x = 1$  ή  $x = 5$ , οπότε τέμνει τον  $x'x$  στα  $A(1,0)$ ,  $B(5,0)$ .  
Για τον άξονα  $\psi'\psi$ : θέτω  $x=0$  και έχουμε:  $\psi=5$ , οπότε τέμνει τον  $\psi'\psi$  στο  $\Gamma(0,5)$ . Οπότε  $E = \frac{1}{2} (AB) \cdot (\Gamma O)$  όπου  $(\Gamma O)$  είναι το ύψος. Είναι  $(AB)=4$  και  $(\Gamma O)=5$ , οπότε  $E = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 = 10$  τετραγων. μονάδες.

7. Επειδή  $\alpha=1 >0$  η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή για  $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$  οπότε

$$4 = -\frac{\beta}{2 \cdot 1} \quad \text{ή} \quad \beta = -8 . \quad \text{Η ελάχιστη τιμή είναι } \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} \quad \text{ή} \quad -7 = -\frac{\beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma}{4 \cdot 1} \quad \text{ή} \\ -28 = -[(-8)^2 - 4\gamma] \quad \text{ή} \quad -28 = -64 + 4\gamma \quad \text{ή} \quad 4\gamma = 36 \quad \text{ή} \quad \gamma = 9$$

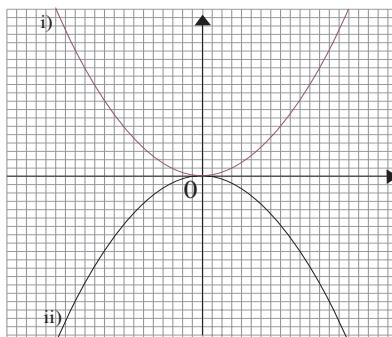
8. α) Έστω η παραβολή είναι :  $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$  . Περνάει από το (0,0) áρα

$$0 = \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma \quad \text{ή} \quad \gamma = 0 \quad (1) . \quad \text{Έχει μέγιστο για } x=20 \quad \text{άρα} \quad 20 = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad \beta = -40\alpha \\ \text{το } \psi = 10 \quad \text{άρα} \quad 10 = -\frac{\Delta}{4\alpha} \quad \text{ή} \quad \Delta = -40\alpha \quad \text{ή} \quad \beta^2 - 4\alpha \cdot 0 = -40\alpha \quad \text{ή} \quad (-40\alpha)^2 = -40\alpha \quad \text{ή} \\ 1600\alpha^2 + 40\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad 40\alpha(40\alpha + 1) = 0 \quad \text{ή} \quad 40\alpha + 1 = 0 \quad \text{άρα} \quad \alpha = -\frac{1}{40} \quad \text{ή} \quad \beta = -40(-\frac{1}{40}) \\ \quad \text{ή} \quad \beta = 1 \quad \text{Οπότε} \quad \psi = -\frac{1}{40}x^2 + x \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq 40 .$$

β) Για  $x=30$ ,  $\psi = -\frac{1}{40}30^2 + 30 = -22,5 + 30 = 7,5$

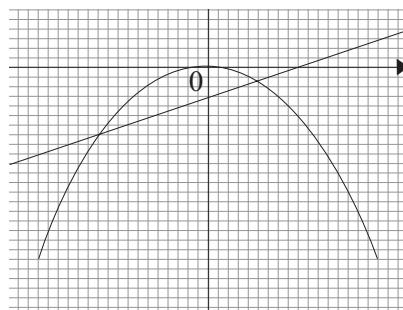
Η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς την  $x=20$ , άρα στο σημείο με τετμημένη  $x=10$  η μπάλα απέχει από το έδαφος 7,5 μέτρα

- 1.**  $9\psi^2=4x^4$  ή  $9\psi^2-4x^4=0$  ή  $(3\psi)^2-(2x^2)=0$  ή  $(3\psi-2x^2)(3\psi+2x^2)=0$  ή  
 $3\psi-2x^2=0$  ή  $3\psi+2x^2=0$  ή  $\psi=\frac{2}{3}x^2$  ή  $\psi=-\frac{2}{3}x^2$
- Άρα έχουμε δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον  $x'$



- 2.** Πρέπει:  $2\alpha-1=-(1-4\alpha^2)$  ή  $2\alpha-1=-1+4\alpha^2$  ή  $4\alpha^2-2\alpha=0$  ή  $2\alpha(2\alpha-1)=0$  άρα  
 $\alpha=0$  ή  $\alpha=\frac{1}{2}$  απορρίπτεται

- 3.** Λύνω την εξίσωση  $-x^2 = 2x - 3$  ή  $x^2 + 2x - 3 = 0$  άρα  $x = 1$  ή  $x = -3$ .  
Για  $x = 1$   $\psi = -1$ , για  $x = -3$   $\psi = -9$ , άρα τα σημεία τομής είναι  
 $A(1, -1)$ ,  $B(-3, -9)$ . Τα σημεία τομής τα βρίσκουμε και από τη γραφική παράσταση.

**4**

Έστω η παραβολή είναι:  $\psi=ax^2+\beta x+\gamma$   $a\neq 0$ . Περνάει από το  $\Gamma(0,5)$  άρα  $5=\gamma$  (1).  
Έχει κορυφή το σημείο  $K(2,-3)$  οπότε:  $2=-\frac{\beta}{2a}$  ή  $\beta=-4a$  (2) και  $-3=-\frac{\Delta}{4a}$   
ή  $12a=\Delta$  ή  $12a=\beta^2-4a\gamma$  ή  $12a=(-4a)^2-4a\cdot 5$  ή  $12a=16a^2-20a$  ή  $16a^2-32a=0$   
ή  $16a(a-2)=0$  ή  $a=0$  απορρ. ή  $a=2$ ,  $\beta=-8$  Άρα η παραβολή είναι:  $\psi=2x^2-8x+5$

5.

Έστω οι πλευρές είναι:  $x, z$  τότε  $x + z = 10$  ή  $z = 10 - x$ .

**a)** Οπότε το εμβαδόν είναι :  $\psi = \frac{1}{2}x \cdot z = \frac{1}{2}x(10-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ , με  $0 < x < 10$

**γ)** Το εμβαδόν  $\psi$  είναι παραβολή με  $a < 0$  άρα έχουμε μέγιστο για  $x = -\frac{\beta}{2a}$   
 $\text{ή } x = -\frac{5}{-1} = 5$ , άρα  $z = 10 - 5$  ή  $z = 5$  δηλ είναι ισοσκελές

6.

Έστω κατά  $x$  μέτρα θα αυξήσει το πλάτος και κατά  $x$  μέτρα θα μειώσει το μήκος τότε: Το μήκος θα γίνει  $6-x$  και το πλάτος  $3+x$ , οπότε το εμβαδόν είναι:

$$E = (6-x)(3+x) \text{ ή } E = 18 + 6x - 3x - x^2 \text{ ή } E = -x^2 + 3x + 18.$$

Επειδή  $a = -1 < 0$  έχουμε μέγιστο για  $x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$

7.

Έστω  $AM=x$ , τότε  $MB=10-x$ . Τότε τα εμβαδά θα είναι:

$$x^2, (10-x)^2. \text{ Τό } \alpha \text{ άθροισμα των εμβαδών είναι : } x^2 + (10-x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100. \text{ Η παράσταση } \psi = 2x^2 - 20x + 100 \text{ είναι παραβολή με } a = 2 > 0 \text{ άρα έχουμε ελάχιστο για } x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-20}{4} = 5. \text{ Άρα θα βρίσκεται στο μέσον. του } AB$$

8.

Η τροχιά της μπάλας είναι παραβολή. Έστω  $\psi = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , η παραβολή .

**a)** Περνάει από τα σημεία :  $(0,6)$ ,  $(6,0)$  άρα  $6 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$  ή  $c = 6$  (1) και  
 $0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$  ή  $36a + 6b + 6 = 0$  ή  $6a + b + 1 = 0$  (2). Έχει μέγιστο για  $x = 2$  άρα  
 $2 = -\frac{b}{2a}$  ή  $b = -4a$  οπότε  $6a - 4a + 1 = 0$  ή  $2a = -1$  ή  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $6 \cdot (-\frac{1}{2}) + b + 1 = 0$  ή  
 $-3 + b + 1 = 0$  ή  $b = 2$ . Οπότε η παραβολή είναι :  $\psi = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ , με  $0 \leq x \leq 6$ .

**β)** Η παραβολή είναι συμμετρική ως προς την  $x = 2$ , άρα θα βρίσκεται σε ύψος 6 όταν  $x = 4$  και θα απέχει από το σημείο ρίψης απόσταση 4 μέτρων.

9.

**a)** Έστω  $\psi = ax^2 + bx + c$   $a \neq 0$  είναι η παραβολή . Τα σημεία είναι  $A(-8,0)$   $B(8,0)$  και  $G(0,6)$ . Οπότε :  $6 = 0 + 0 + c$  ή  $c = 6$  (1). Έχει μέγιστο για  $x = 0$ , άρα  $0 = -\frac{b}{2a}$  ή  $b = 0$ . Ακόμη  $0 = a \cdot (-8)^2 + b \cdot (-8) + c$  ή  $0 = 64a + 0 + 6$  ή  $64a = -6$  ή  $a = -\frac{3}{32}$ . Οπότε :  $\psi = -\frac{3}{32}x^2 + 6$ , με  $-8 \leq x \leq 8$ .

**β)** Θα βρούμε το  $\psi$  (ύψος) όταν  $x = 1,6$ . Ετσι  $\psi = -\frac{3}{32} \cdot 1,6^2 + 6$  ή  $\psi = -0,24 + 6$  ή  $\psi = 5,76$ . Άρα το μέγιστο ύψος είναι 5,76 μέτρα.





A close-up photograph of a person's hand holding a silver pen over an open notebook. The notebook contains various mathematical sketches, including a network graph with nodes and edges, several circles, and some handwritten numbers like '55' and '35'. The background is slightly blurred.

# Κεφάλαιο

## 5ο



**Σύνολο** λέμε μια συλλογή από αντικείμενα τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου.

Κάθε σύνολο συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου Α, Β, Γ, ... και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

### α) Με αναγραφή των στοιχείων του.

Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα.

Π.χ. το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ειρήνη είναι  $A = \{\epsilon, i, r, \eta, n\}$ , το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2007 είναι  $B = \{2, 0, 7\}$  κ.τ.λ.

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια, χρησιμοποιούμε **αποσιωπητικά**. Π.χ το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών είναι  $Z_+ = \{+1, +2, +3, \dots\}$ . Το σύμβολο  $\in$  σημαίνει ανήκει, ενώ το σύμβολο  $\notin$  σημαίνει δεν ανήκει. Έτσι  $+1 \in Z_+$  ενώ  $-2 \notin Z_+$ .

### β) Με περιγραφή των στοιχείων του.

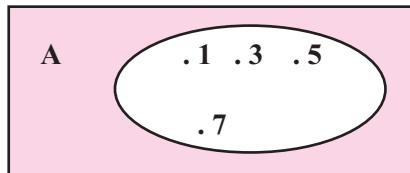
Γράφουμε την ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία του συνόλου.

Το σύνολο  $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  που έχει ως στοιχεία, τους περιττούς φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να τους παραστήσουμε και ως εξής:

$A = \{\text{περιττοί φυσικοί αριθμοί}\}$ , ή  $A = \{x \in N, \text{όπου } x \text{ περιττός αριθμός}\}$

### γ) Με διάγραμμα Venn

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε εποπτικά και με το εσωτερικό μιάς κλειστής γραμμής. Π.χ. Το σύνολο των περιττών αριθμών που είναι μικρότεροι του 8 φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, το οποίο ονομάζουμε διάγραμμα Venn.



### Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

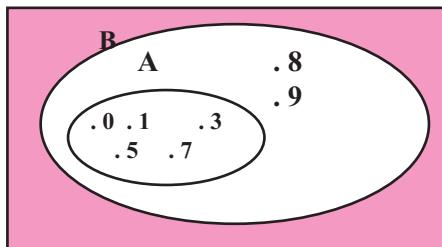
Αν τα σύνολα A, B είναι ίσα τότε γράφουμε  $A = B$

## Υποσύνολο συνόλου

Αν Α και Β είναι δύο σύνολα. Το σύνολο Α λέγεται υποσύνολο του συνόλου Β,όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Όταν το Α είναι υποσύνολο του Β τότε γράφουμε  $A \subseteq B$ .

Έστω  $A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$   $B = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ , τότε με το διάγραμμα του Venn έχουμε:



Άμεσες συνέπειες του προηγούμενου ορισμού είναι και οι προτάσεις:

- i) Για κάθε σύνολο Α ισχύει  $A \subseteq A$
- ii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq \Gamma$ , τότε  $A \subseteq \Gamma$
- iii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq A$  τότε  $A = B$

### Κενό σύνολο

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται με  $\emptyset$  ή  $\{\}$ . Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου, δηλ  $\emptyset \subseteq A$

### Πράξεις με σύνολα

- **Ένωση:** Θεωρούμε δύο σύνολα Α, Β. Ένωση των Α και Β και συμβολίζουμε με  $A \cup B$ , λέμε το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των συνόλων Α και Β.

**Δηλαδή:**

$$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Έτσι αν  $A = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ ,  $B = \{0, 1, 3, 5, 7\}$  τότε  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

- **Τομή:** Θεωρούμε δύο σύνολα Α, Β. Τομή των συνόλων Α και Β και συμβολίζουμε με  $A \cap B$ , λέμε το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν συγχρόνως στο Α και στο Β. Δηλαδή:

$$A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Έτσι αν  $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 4, 6\}$  τότε  $A \cap B = \{0, 1, 2, 4\}$

- **Συμπλήρωμα συνόλου.** Εστω  $\Omega$  είναι το βασικό σύνολο και Α ένα υποσύνολο του  $\Omega$ . Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του  $\Omega$  που δεν ανήκουν στο Α. Το νέο αυτό σύνολο ονομάζεται συμπλήρωμα του Α ως προς το  $\Omega$  και συμβολίζεται με  $\Lambda'$ . Έτσι αν ως βασικό σύνολο θεωρήσουμε το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  και  $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  τότε:  $A' = \{4, 8\}$

Στις πράξεις των συνόλων ισχύουν οι ιδιότητες:

- α)**  $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
- β)**  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
- γ)**  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- δ)**  $A \cup A = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup A' = \Omega, A \cap A' = \emptyset$
- ε)**  $\emptyset' = \Omega, \Omega' = \emptyset$
- στ)**  $\text{Av } A \subseteq B, \text{ τότε } \text{isx} \Omega \text{ ei } A \cup B = B, A \cap B = A.$

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα.

$A = \{k \in \mathbb{N}, \text{όπου } k \text{ πολλαπλάσιο του } 3 \text{ μικρότερο του } 30\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}, \text{όπου } x \text{ είναι λύση της εξίσωσης } x^3 = 4x\}$

#### Λύση

$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

Λύνουμε την εξίσωση  $x^3 = 4x$  ή  $x^3 - 4x = 0$  ή  $x(x^2 - 4) = 0$  άρα  $x = 0$  ή  $x^2 = 4$  δηλ.  $x = 0$  ή  $x = \pm 2$ . Επειδή ο  $x$  είναι φυσικός άρα  $B = \{0, 2\}$

2.

$\text{Av } \Omega = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}, A = \{-3, 0, +3\}, B = \{-2, +1, +3\}$ , να βρείτε τα σύνολα:

- α)**  $A \cup B, \beta) A \cap B, \gamma) (A \cup B)', \delta) A' \cup B$

#### Λύση

**α)**  $A \cup B = \{-3, 0, +1, +3\}, \beta) A \cap B = \{3\} \gamma) (A \cup B)' = \{-1, +2\}$

**δ)**  $A' = \{-2, -1, +1, +2\} \text{ άρα } A' \cup B = \{-2, -1, +1, +2, +3\}$

**A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

- 1.** Το σύνολο  $\{\emptyset\}$  είναι το κενό.
- 2.** Ισχύει  $\{0, 1, 2\} = \{1, 0, 2\}$
- 3.** Ισχύει  $5 = \{5\}$
- 4.** Ισχύει  $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 4, 6\}$
- 5.** Av  $x \in A \cup B$  τότε  $x \in A$
- 6.** Av  $x \in A \cap B$  τότε  $x \in A$
- 7.** Ισχύει  $A' \subseteq A$
- 8.** Ισχύει  $A \cap B \subseteq B$
- 9.** Ισχύει  $A \cup B \subseteq B$
- 10.** Av  $A \subseteq B$ , τότε ισχύει  $A \cup B = A$

**B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

- 1.** Av  $A, B$  δύο σύνολα μη κενά με  $A \subseteq B$  τότε:  
 α.  $A \cap B = A$ , β.  $A \cup B = A$ , γ.  $A \cap B = B$ , δ.  $A \cap B = \emptyset$
- 2.** Av  $A = \{x \in N^*,$  όπου  $x$  άρτιος μικρότερος του 10 $\}$  και  $B = \{0, 3, 8, 10\}$  τότε το σύνολο  $A \cap B$  είναι ίσο με:  
 α.  $\{8\}$ , β.  $\{0, 8, 10\}$ , γ. 8, δ.  $\{0, 8, 10\}$
- 3.** Av  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 2\} \quad \Gamma = \{1, 2, 3, 5\}$  τότε είναι:  
 α.  $B \subseteq A$ , β.  $A \subseteq B$ , γ.  $\Gamma \subseteq A$ , δ.  $A \subseteq B$
- 4.** Av  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{1, 2, 3, 6, 8, 0\}$  τότε είναι:  
 α.  $A = B$ , β.  $B \subseteq A$ , γ.  $A \subseteq B$ , δ. τίποτα από τα παραπάνω

**1** Αν  $A = \{x \in Z, \text{όπου } -1 \leq x \leq 1\}$  και  $B = \{x \in Z, \text{όπου } x \text{ λύση της εξίσωσης } x^2 = 1\}$

- α)** Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα A και B.  
**β)** Να βρείτε τα σύνολα  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

**2** Δίνεται το σύνολο  $\Omega = \{-4, -2, 0, +1, +2, +3\}$  και τα σύνολα  $A = \{0, +2, +3\}$ ,  $B = \{0, +1\}$  Να βρείτε:

- 1) α)**  $A'$ ,  $B'$  **β)**  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  **γ)**  $(A \cap B)'$   
**2)** Να παραστήσετε τα σύνολα του α) ερωτήματος με το διάγραμμα του Venn

**3** Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του  $\lambda \in R$ , ώστε να ορίζεται το σύνολο A στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$A = \{1, \lambda, 3\}, \quad A = \{0, \lambda, 3\} \quad A = \{1, 2\lambda + 1, \lambda\}$$

**4** Ένα σύνολο A έχει 8 στοιχεία το σύνολο B έχει 5 στοιχεία και το σύνολο  $A \cap B$  έχει 5 στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο  $A \cup B$

**5** Δίνονται τα σύνολα  $A = \{1, 3, v\}$  και  $B = \{1, 2, \lambda\}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $v, \lambda$  ώστε  $A = B$ .

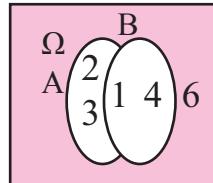
**6** Αν  $\Omega = \{-1, 01, +2, +3\}$  είναι το σύνολο αναφοράς

- α)** Να βρεθεί το σύνολο A των λύσεων της εξίσωσης  $(x - 1)(x^2 - 1) = 0$ , (όπου A είναι υποσύνολο του  $\Omega$ )  
**β)** Να βρείτε το σύνολο B των περιττών θετικών ακεραίων (υποσύνολο του  $\Omega$ )  
**γ)** Να βρείτε τα σύνολα  $A'$ ,  $B'$ ,  $(A \cup B)'$

**7** Έστω  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  είναι το σύνολο αναφοράς και η εξίσωση  $x^2 - 2x + \lambda = 0$  η οποία δεν έχει ρίζες στο R. Να βρείτε το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές το  $\lambda$ .

**8** Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το διάγραμμα του Venn για τα σύνολα A και B  
 Να βρείτε τα σύνολα:

- α)**  $A \cup B$ ,  $A \cap B$   
**β)**  $A'$ ,  $(A \cup B)'$ ,  $(A \cap B)'$



## 5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

**Πείραμα τύχης** λέμε κάθε πείραμα το οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του όσες φορές και να το επαναλάβουμε, ξέρουμε όμως όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος.

Σε ένα πείραμα τύχης το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται δειγματικός χώρος και συμβολίζεται με  $\Omega$ .

**Ενδεχόμενο** λέμε κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

**Απλό ή στοιχειώδες** ενδεχόμενο ονομάζεται το ενδεχόμενο που έχει μόνο ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου.

**Σύνθετο** ενδεχόμενο ονομάζεται αυτό που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου.

**Βέβαιο** ενδεχόμενο ονομάζεται ο δειγματικός χώρος  $\Omega$ , γιατί πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος.

**Αδύνατο** ενδεχόμενο είναι αυτό που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος και είναι το κενό σύνολο.

**Πραγματοποιείται ή συμβαίνει** ένα ενδεχόμενο όταν, το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα από τα στοιχεία του ενδεχομένου. Δύο ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ονομάζονται ασυμβίβαστα όταν  $A \cap B = \emptyset$

Το δειγματικό χώρο  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης μπορούμε να τον βρούμε:

- a)** Όταν το πείραμα αποτελείται από δύο τουλάχιστον εκτελέσεις (φάσεις), τότε ο δειγματικός χώρος προσδιορίζεται ευκολότερα με την βοήθεια του δεντροδιαγράμματος.
- b)** Όταν το πείραμα αποτελείται από δύο εκτελέσεις (φάσεις) και σε κάθε φάση έχουμε πολλά αποτελέσματα, τότε χρησιμοποιούμε τον πίνακα διπλής εισόδου.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

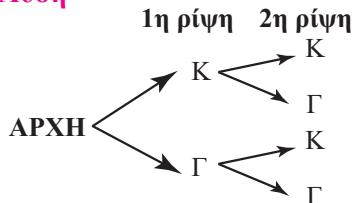
1

Ρίχνουμε ένα νόμισμα φορές.

**a)** Να βρούμε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$

**b)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα. **A:** Η πρώτη ρίψη είναι γράμματα,  
**B:** Έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα στις δύο ρίψεις.

**Λύση**



Από το παραπάνω δεντροδιάγραμμα έχουμε  $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$

$$\mathbf{A} = \{ KG, GG \}$$

$$\mathbf{B} = \{ KK, GG \}$$

2

Πίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.

**α)** Να γράψετε τον δειγματικό χώρο  $\Omega$ .

**β)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα.

**A:** Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο του 9

**B:** Το γινόμενο των ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο του 15.

### Άνση

**α)** Κατασκευάζουμε τον πίνακα διπλής εισόδου:

2 <sup>η</sup> ρίψη \ 1η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη του παραπάνω πίνακα δηλ  $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3) \dots (6,5), (6,6)\}$

**β)**  $A = \{ (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

$B = \{ (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### A. Ερωτήσεις του τύπου σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

- Ρίχνουμε ένα ζάρι τότε ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{1, 3, 2, 4, 6, 5\}$
- Τα ενδεχόμενα  $A = \{1, 3, 6\}$  και  $B = \{2, 6\}$  είναι ασυμβίβαστα.
- Το αποτέλεσμα κάθε πειράματος τύχης ανήκει στον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

## Κεφάλαιο 5

4. Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε  $A \cup B = \Omega$ .
5. Ρίχνουμε ένα ζάρι και μετά ένα νόμισμα. Ο δειγματικός χώρος έχει 12 στοιχεία.
6. Κάθε στοιχείο του ενδεχομένου  $A$  είναι και στοιχείο του  $\Omega$ .
7. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι και αυτός ενδεχόμενο.
8. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  του πειράματος αυτού είναι:  
**a.**  $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$ ,   **b.**  $\Omega = \{KG, GK\}$ ,   **c.**  $\Omega = \{GK, KG\}$ ,  
**d.**  $\Omega = \{KK, GG\}$
2. Έστω  $A = \{1, 3, 4\}$  και  $B = \{2, 5, 6\}$  δύο ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού μία φορά. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 6 τότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο:  
**a.**  $A \cap B$ ,   **b.**  $A \cup B$ ,   **c.**  $A'$    **d.**  $B$ .
3. Ελέγχουμε στη μονάδα παραγωγής ενός εργοστασίου μέχρι να βρούμε ένα ελαττωματικό προιον ή δύο καλά. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:  
**a.**  $\Omega = \{E, K\}$ ,   **b.**  $\Omega = \{K, EK, KK\}$ ,   **c.**  $\Omega = \{K, EE\}$ ,   **d.**  $\Omega = \{KK, KE\}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1

Ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ένα ζάρι.

**a)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

**b)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα

**A:** Κορώνα και αριθμός τουλάχιστον 3

**B:** Γράμματα και αριθμός το πολύ 4 .

**γ)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα:  $A'$ ,  $B'$ ,  $(A \cup B)'$

**δ)** Να δείξετε ότι τα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα.

**2**

Έστω ένας μαθητής της Γ' Γυμνασίου και τα ενδεχόμενα:

**A:** Ο μαθητής είναι άριστος στη χημεία.

**B:** Ο μαθητής είναι άριστος στην ιστορία. Να γράψετε με λόγια καθένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) A', β) B', γ) A $\cup$ B, δ) A $\cap$ B ε) A $\cap$ B' στ) (A $\cup$ B)'**

**3**

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.

**α)** Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

**β)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

**A:** Η ένδειξη της 1<sup>ης</sup> ρίψης να είναι μεγαλύτερη του 5.

**B:** Η ένδειξη της 2<sup>ης</sup> ρίψης να είναι μικρότερη του 2.

**γ)** Να βρείτε τα σύνολα: A $\cup$ B, A $\cap$ B .

**4**

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρείς φορές.

**α)** Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

**β)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

**A:** Να φέρουμε το πολύ δύο φορές γράμματα .

**B:** Να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά γράμματα .

**Γ:** Να φέρουμε την ίδια ένδειξη .

**5**

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$  με A = {άρτιος μικρότερος του 8} και B = {πολλαπλάσιο του 3}.

### Να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα

**α)** Ένα τουλάχιστο από τα A, B πραγματοποιείται.

**β)** Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το A και το B.

**γ)** Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A , B.

**6**

Ένας έμπορος από την Κομοτηνή αποφασίζει να ταξιδέψει στην Αθήνα και από εκεί στην Κρήτη. Στην Αθήνα μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό του με λεωφορείο ή με τρένο. Από την Αθήνα για την Κρήτη μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο.

### Να βρείτε:

**α)** Το δειγματικό χώρο  $\Omega$ .

**β)** Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

**A:** Να ταξιδέψει χωρίς το αυτοκίνητό του.

**B:** Να ταξιδέψει με τρένο.

### 5.3 Η έννοια της πιθανότητας

Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν κάθε στοιχείο του  $\Omega$  δεν έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, τότε όλα τα στοιχεία έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής και λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Έτσι αν η επιλογή γίνεται στην τύχη, τότε όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Αν ένα ενδεχόμενο  $A$  έχει  $n$  στοιχεία τότε γράφουμε:  $N(A) = n$ .

Έστω έχουμε ένα πείραμα τύχης και  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος. Αν τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, τότε λέμε πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$  και συμβολίζουμε με  $P(A)$  τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1 \quad \text{και} \quad P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\emptyset)} = 0$$

Για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ενός ενδεχομένου  $A$  ισχύει:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

**Παρατήρηση:** Αν  $P(A) = 0$ , δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα ότι  $A = \emptyset$

#### ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A, A'$  του  $\Omega$  ισχύει:  $P(A) + P(A') = 1$
2. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  του  $\Omega$  ισχύει:  

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$
 Αν τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα τότε:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**1** Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος και  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα με  $A$ : αριθμός μεγαλύτερος του 2.  $B$ : αριθμός περιττός.

- α)** Να γράψετε τα σύνολα  $A$  και  $B$  με αναγραφή.
- β)** Να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες:  $P(A)$ ,  $P(B')$ ,  $A \cup B$ ,

### Λύση

- α)** Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  είναι  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$

$$\textbf{β)} P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6}, \quad B' = \{2, 4, 6\}, \quad P(B') = \frac{N(B')}{N(\Omega)} = \frac{3}{6}, \quad A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

**2** Στο σύλλογο καθηγητών ενός Γυμνασίου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Διαλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- α.** Γυναίκα ή φιλόλογος
- β.** Γυναίκα και όχι φιλόλογος
- γ.** Άνδρας και φιλόλογος
- δ.** Άνδρας ή φιλόλογος

### Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

**Γ:** Καθηγητής γυναίκα, **Φ:** Καθηγητής φιλόλογος.

Από τον παρακάτω πίνακα έχουμε:

	Ανδρες	Γυναίκες
Φιλόλογος	10%	30%
Όχι Φιλόλογος	35%	25%

Οπότε **α)**  $P(\Gamma \cup \Phi) = \frac{30}{100} + \frac{25}{100} + \frac{10}{100} = \frac{65}{100}$

**β)**  $P(\Gamma \cap \Phi') = \frac{25}{100}$

**γ)**  $P(\Gamma' \cap \Phi) = \frac{10}{100}$

**δ)**  $P(\Gamma' \cup \Phi) = \frac{10}{100} + \frac{35}{100} + \frac{30}{100} = \frac{75}{100}$

**Κεφάλαιο 5****3**

Αν για το ενδεχόμενο Α του δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:  
 $(P(A))^2 + (P(A'))^2 = 1$ , να αποδείξετε ότι:  $P(A) = 0$  ή  $P(A) = 1$

**Λύση**

Από την ισότητα  $P(A) + P(A') = 1$  έχουμε ότι:  $P(A') = 1 - P(A)$ .

Οπότε έχουμε  $(P(A))^2 + (P(A'))^2 = 1$  ή  $(P(A))^2 + (1 - P(A))^2 = 1$

ή  $(P(A))^2 + 1 - 2 P(A) + (P(A))^2 = 1$  ή  $2(P(A))^2 - 2 P(A) = 0$

ή  $2 P(A)(P(A) - 1) = 0$  ή  $P(A) = 0$  ή  $P(A) = 1$

**4**

Τα A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  και ισχύει:

$P(A) = 2P(A')$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B', A ∪ B.

**Λύση**

Από την ισότητα  $P(A) + P(A') = 1$  έχουμε:  $2P(A') + P(A') = 1$  ή  $3P(A') = 1$

$P(A') = \frac{1}{3}$ . Άρα  $P(A) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  ή  $P(A) = \frac{2}{3}$

Από την ισότητα  $P(B) + P(B') = 1$  έχουμε:  $\frac{1}{2} + P(B') = 1$  ή  $P(B') = \frac{1}{2}$

Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε

$P(A \cup B) + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$  ή  $P(A \cup B) = 1$

**Ερωτήσεις κατανόησης****A. Ερωτήσεις του τύπου σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Αν A είναι ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε μπορεί να ισχύει  $P(A) = 2$
2. Αν A, B είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε  $P(A \cap B) = \emptyset$
3. Αν το ενδεχόμενο  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  τότε  $N\{A\} = 4$
4. Το συμπλήρωμα  $A'$  ενός ενδεχομένου A ενός πειράματος τύχης είναι επίσης ενδεχόμενο αυτού του πειράματος.
5. Το  $N(A)$  συμβολίζει την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A.

6. Αν  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης τότε  $P(\Omega) = 1$ .
7. Για το αδύνατο ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ισχύει :  $P(\emptyset) = 0$
8. Το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του δειγματικού χώρου του πειράματος.
9. Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα τού δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε μπορεί να ισχύει:  $P(A) + P(B) > 1$
10. Αν  $A, A'$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε:  $P(A) + P(A') = 1$ .
11. Για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ισχύει:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
12. Ισχύει  $P(\Omega) = P((\emptyset)')$

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ισχύει:
  - α.**  $P(A) + P(A') = 0$ ,
  - β.**  $P(A) + P(A') = 2$ ,
  - γ.**  $P(A) = P(A')$ ,
  - δ.** Κανένα από τα παραπάνω
2. Αν για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:  $N(A \cap B) = 0$  τότε ισχύει:
  - α.**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,
  - β.**  $P(A) + P(B) = 1$ ,
  - γ.**  $P(A) = P(B)$ ,
  - δ.** Κανένα από τα παραπάνω.

**1** Έστω  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος. Αν  $A = \{3, 4, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$

- a)** Να βρείτε τα σύνολα:  $A'$ ,  $B'$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$
- b)** Να βρείτε τις πιθανότητες των συνόλων του α) ερωτήματος .

**2** Σε μία τάξη της Β' γυμνασίου υπάρχουν 18 αγόρια και 12 κορίτσια. Τα μισά από τα αγόρια και τα  $\frac{5}{6}$  από τα κορίτσια είναι άριστοι στα Μαθηματικά.

Διαλέγουμε ένα άτομο στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα:

- a)** Να είναι άριστο στα Μαθηματικά .
- b)** Να είναι αγόρι
- γ)** Να είναι κορίτσι και να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά
- δ)** Να είναι κορίτσι ή να είναι άριστο στα Μαθηματικά

**3** Σε ένα Γυμνάσιο η Α' τάξη έχει 28 μαθητές, η Β' τάξη έχει 35 μαθητές και η Γ' τάξη έχει 37 μαθητές. Εκλέγουμε τυχαία έναν μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα.

- a)** Ο μαθητής να μην είναι της Α' τάξης
- β)** Ο μαθητής να είναι της Α' ή της Γ' τάξης.

**4** Έστω  $A$ ,  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν οι πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cap B)$ , είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$(3x - 1)(5x - 2)(6x - 1) = 0$$

να βρείτε τις πιθανότητες:

- a)**  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cap B)$
- β)**  $P(B)$

**5** Έστω  $A$ ,  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  για τα οποία ισχύει:

- a)** Να πραγματοποιείται το  $A$  είναι  $\frac{2}{7}$
- β)** Να μην πραγματοποιείται το  $B$  είναι  $\frac{3}{5}$ .
- γ)** Να πραγματοποιούνται συγχρόνως και τα δύο είναι  $\frac{2}{35}$ .

**Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:**

- i)** Να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα  $A$ ,  $B$ .
- ii)** Κανένα από τα  $A$  και  $B$  να μην πραγματοποιείται.

- 6** Υψώνουμε στο τετράγωνο έναν τυχαίο μονοψήφιο θετικό ακέραιο αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο:
- α)** το 1, **β)** το 4, **γ)** το 1 ή το 4, **δ)** το 5 **ε)** το 2.

- 7** Δίνεται ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Αν  $A$  είναι ένα ενδεχόμενο του  $\Omega$  το οποίο που έχει ως στοιχεία τις λύσεις τις εξίσωσης:  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ . Να βρείτε την πιθανότητα του  $A$ .

- 8** Η  $A'$  τάξη ενός Γυμνασίου έχει 40 μαθητές. Από αυτούς οι 20 παιζουν ποδόσφαιρο, οι 14 παιζουν μπάσκετ και οι 8 και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους παραπάνω μαθητές, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:
- α.** Να μην παίζει ούτε ποδόσφαιρο ούτε μπάσκετ .  
**β.** Να παίζει ένα τουλάχιστον από τα δύο τα αθλήματα  
**γ.** Να μην ασχολείται ταυτόχρονα και με τα δύο τα αθλήματα

- 9** Αν για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει :
- $$\frac{P(A)}{P(A')} = 4, \quad P(B') = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$
- Να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες
- α)** Να πραγματοποιείται το  $A$ .  
**β)** Να πραγματοποιείται το  $B$ .  
**γ)** Ένα τουλάχιστον από τα  $A, B$  πραγματοποιείται.

- 10** Το σύνολο  $A = \{30^\circ, 80^\circ, 70^\circ, 100^\circ\}$  περιέχει σαν στοιχεία μέτρα γωνιών. Παίρνουμε στην τύχη τρία στοιχεία του  $A$ . Να βρεείτε την πιθανότητα να αποτελούν γωνίες τριγώνου .

- 1** Για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:  
 $3 [P(A')^2 + 6P(A') + P(A) - 3 = 0]$ . Να βρείτε την  $P(A)$ .
- 2** Ένα κουτί περιέχει πράσινες, κίτρινες και μαύρες μπάλες. Αν πάρουμε τυχαία μία μπάλα, τότε η πιθανότητα να είναι πράσινη είναι  $\frac{1}{6}$ , ενώ η πιθανότητα να είναι κίτρινη είναι  $\frac{2}{3}$ . Αν το κουτί περιέχει 4 μαύρες μπάλες να βρείτε:
- a)** Πόσες μπάλες έχει το κουτί.
  - b)** Πόσες είναι οι πράσινες και πόσες οι κίτρινες.
- 3** Από 120 μαθητές ενός Γυμνασίου, 24 συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 συμμετέχουν στον διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:
- a.** Να συμμετέχει σε έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς.
  - b.** Να μην σε κανένα διαγωνισμό.
  - γ.** Να συμμετέχει στον διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών.
- 4** Ρίχνουμε ένα ζάρι. Να βρείτε:
- a)** Τον δειγματικό χώρο  $\Omega$
  - β)** Να βρείτε την πιθανότητα ώστε η εξίσωση:  $x^2 - 3x + \alpha = 0$  να έχει δύο ρίζες άνισες, όπου  $\alpha$  είναι στοιχείο του  $\Omega$ .
- 5** Αν ισχύει  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = 2$ , να αποδείξετε ότι τα  $A$ ,  $B$  είναι βέβαια ενδεχόμενα.
- 6** Ένα κουτί περιέχει 15 άσπρες μπάλες, χ κόκκινες και ψ πράσινες.  
Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη είναι  $\frac{1}{3}$  και η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη είναι  $\frac{5}{12}$ . Να βρείτε πόσες μπάλες έχει το κουτί .
- 7** Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 4, 7, 8, 9, 10\}$  και τα ενδεχόμενα  $A = \{2, 4, 7\}$  και  $B = \{1\}$ .
- α)** Να εξετάσετε αν τα  $A$ ,  $B$  είναι ασυμβίβαστα .
  - β)** Αν  $P(A) = \frac{3-2\lambda}{7}$ ,  $P(B) = \frac{2\lambda+1}{7}$  να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει το  $\lambda$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε  $P(A \cup B)$

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. **α)** Τι λέμε πείραμα τύχης;  
**β)** Τι λέμε ενδεχόμενο και ποια ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα.  
**γ)** Ποιο ενδεχόμενο λέγεται βέβαιο.
- B. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Να εκφράσετε τα παρακάτω σύνολα με λόγια:  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Ένα κουτί περιέχει 5 άσπρες, 10 κόκκινες, 15 μαύρες μπάλες. Η πιθανότητα να πάρνουμε στην τύχη από το κουτί μία μπάλα. Ν βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

- A:** Η μπάλα είναι κόκκινη .  
**B:** Η είναι άσπρη ή μαύρη  
**Γ:** Η μπάλα δεν είναι κόκκινη ή μαύρη

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- A. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν:  
 $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B') = \frac{7}{10}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ . Να βρείτε:  
τις πιθανότητες  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 45%, να γνωρίζει Γαλλικά είναι 25% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 10%. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

- α)** Να ξέρει τουλάχιστον μία από τις ξένες γλώσσες  
**β)** Να μην ξέρει καμία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες

**Θέμα 1<sup>o</sup>**

- a)** Πώς ορίζεται η ένωση δύο συνόλων A , B.
- β)** Τι λέμε Πιθανότητα ενός ενδεχομένου A και ποιες τιμές μπορεί να πάρει.
- γ)** Ποια σύνολα λέγονται ασυμβίβαστα.

**Θέμα 2<sup>o</sup>**

- a)** Έστω ο αριθμός λ παίρνει τιμές από το σύνολο  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση:  $x^2 + 3x + 2\lambda = 0$  να έχει ρίζες πραγματικές.
- β)** Αν  $A = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  είναι δύο ενδεχόμενα του  $\Omega$ . Να βρείτε:  $A \cup B$  ,  $A'$  ,  $B'$ .

**Θέμα 3<sup>o</sup>**

Ένα κουτί περιέχει 15 άσπρες μπάλες, χ κόκκινες και ψ πράσινες.

Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη είναι  $\frac{7}{24}$  και η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη είναι  $\frac{1}{3}$ .

Να βρείτε πόσες μπάλες έχει το κουτί .

**Θέμα 4<sup>o</sup>**

Ένα κουτί περιέχει πράσινες, κίτρινες και μαύρες μπάλες. Αν πάρουμε τυχαία μία μπάλα, τότε η πιθανότητα να είναι πράσινη είναι, ενώ η πιθανότητα να είναι κίτρινη είναι . Αν το κουτί περιέχει 4 μαύρες μπάλες να βρείτε:

- α)** Πόσες μπάλες έχει το κουτί.
- β)** Πόσες είναι οι πράσινες και πόσες οι κίτρινες.

**5.1 Σύνολα****Ερωτήσεις κατανόησης**

1.

a)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

2.

a)	β)	γ)	δ)
3	4	2	1

3.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A' = \{4, 5, 6, 7\} \quad B' = \{1, 6, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad A \cap B = \{2, 3\}$

4.

a)	β)	γ)	δ)	ε)
5	6	2	3	1

5. a)  $A \cup B$ : κόκκινο, κίτρινο, μπλέ.β)  $A \cap B$ : κίτρινογ)  $A'$ : μπλέ, πράσινοδ)  $B'$ : κόκκινο, πράσινοε)  $(A \cup B)'$ : πράσινοστ)  $(A \cap B)'$ : κόκκινο, μπλέ, πράσινο

## Προτεινόμενες ασκήσεις – Προβλήματα

1. **a)**  $A = \{-5, 5\}$ , **β)**  $B = \{5\}$ , **γ)**  $\Gamma = \{-1, 0, +1, +2, +3, +4\}$  **δ)**  $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
2.  $A \subseteq K$ ,  $A = \Lambda$ ,  $B = M$ ,  $\Gamma \subseteq K$ ,
3.  $A = \{1, 2, 3\}$ . Υποσύνολα είναι:  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
4.  $A = \{(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$
5. **a)**  $A = \{\text{περιττοί αριθμοί}\}$ , **β)**  $B = \{\text{Γράμματα της λέξης ιστορίας}\}$   
**γ)**  $\Gamma = \{\text{Άρτιοι μικρότεροι του } 4\}$
6. **a)**  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ , **β)**  $A \cap B = \{2, 4\}$ , **γ)**  $A' = \{3, 6\}$ , **δ)**  $B' = \{1, 3, 5\}$
7. **a)**  $A = \{\alpha, \lambda, \gamma, \varepsilon, \beta, \rho\}$  **β)**  $B = \{\phi, \rho, \varepsilon, \gamma, \alpha, \tau\}$ ,  $\Gamma = \{\varepsilon, \lambda, \alpha, \phi, \iota\}$   
**γ)**  $A \cap (B \cup \Gamma) = \{\alpha, \lambda, \gamma, \varepsilon, \rho\}$ ,  $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = \{\alpha, \gamma, \varepsilon, \rho, \lambda\}$ .  
Άρα  $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
8. **a)**  $A \cap B$ , **β)**  $A \cup B$ , **γ)**  $A \cap B'$ , **δ)**  $(A \cap B)'$
9. **a)** Είναι αθλητής στίβου ή φοιτητής πανεπιστημίου.  
**β)** Είναι αθλητής στίβου και φοιτητής πανεπιστημίου.  
**γ)** Δεν είναι αθλητής στίβου.  
**δ)** Δεν είναι φοιτητής πανεπιστημίου.  
**ε)** Είναι αθλητής στίβου και όχι φοιτητής πανεπιστημίου.  
**στ)** Δεν είναι αθλητής στίβου αλλά είναι φοιτητής πανεπιστημίου.  
**ζ)** Δεν είναι αθλητής στίβου και ούτε φοιτητής πανεπιστημίου.

## 5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

## Ερωτήσεις κατανόησης

1. **α), γ), δ)**
2. Ναι. Στη δεύτερη γραμμή πρώτη στήλη πρέπει να γράψει BA.
3. Αποτέλεσμα: 235, 253, 325, 352, 523, 532,
4. **α)**  $A = \{4, 8, 10\}$  **δ)**  $\Delta = \{6\}$
5. **α)**  $A = \{2, 4, 6\}$ , **γ)**  $\Gamma = \{4, 5, 6\}$
6. **γ)** Η μπίλια είναι πράσινη.
7. **δ)** Ο μήνας έχει περισσότερες από 27 ημέρες.
- 8.

<b>α</b>	<b>β</b>	<b>γ</b>
2	4	1

1.  $\Omega = \{\sigma \pi, \sigma \lambda, \tau \pi, \tau \lambda, \gamma \pi, \gamma \lambda\}$
2.  $\Omega = \{\text{KKK}, \text{KKG}, \text{KKG}, \text{KGG}, \text{GKK}, \text{GKG}, \text{GGK}, \text{GGG}\}$

3.

	A	B	G	D
A		AB	AG	AD
B	BA		BG	BD
G	GA	GB		GD
D	DA	DB	DG	

4. **a)**  $\Omega = \{\text{KAM}, \text{KMA}, \text{AKM}, \text{AMK}, \text{MAK}, \text{MKA}\}$   
**β)** Με δύο το πολύ κινήσεις θα πάρουμε την κόκκινη μπάλα.  
**γ)** Με δύο το πολύ κινήσεις αναγνωρίζουμε το χρώμα κάθε μπάλας.
5. **a)**  $\Omega = \{\Delta E, \Delta Z, \Delta \Sigma, KE, KZ, KS, ME, MZ, M\Sigma, PE, PZ, P\Sigma\}$   
**β)** A = {ΔE, ΔZ, KE, KZ, ME, MZ, PE, PZ}  
B = {ΔE, ΔZ, ΔΣ, KE, KZ, KS, PE, PZ, PΣ}
6. A = {1, 3, 9}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}  
**α)**  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$   
**β)**  $A \cap B = \{1, 3\}$   
**γ)**  $B' = \{6, 7, 8, 9\}$
7. **α)**  $\Omega = \{2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972\}$   
**β)** A = {2672, 2872, 2972}  
B = {2642, 2672, 2842, 2872}

## 5.2 Έννοια της πιθανότητας

### Ερωτήσεις κατανόησης

1. **α), γ), δ)**2. **γ)  $\frac{7}{24}$** 

3.

a)	β)	γ)	δ)
Λ	Λ	Σ	Σ

## 4. γ)

5. Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε:

$$P(A \cup B) + \frac{1}{11} = \frac{4}{11} + \frac{5}{11} \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) = \frac{10}{11}. \text{ Άρα η απάντηση ήταν λάθος.}$$

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. **a)** Αν Α είναι το ενδεχόμενο: ο αριθμός είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο: ο αριθμός είναι περιττός: τότε  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ,  $B = \{4, 8, 12\}$

$$\text{Άρα } a) \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{13}, \quad b) \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{13}$$

2. Η πιθανότητα να κερδίσει είναι:  $\frac{6}{1200} = \frac{1}{200} = 0,5\%$

3. Τα χαρτιά που δεν είναι φιγούρες είναι:  $52 - 12 = 40$ . Άρα η πιθανότητα να μην είναι φιγούρα είναι:  $\frac{40}{52}$

$$4. \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{20}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{15}{20}, \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{13}{20}$$

5. Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

**A:** Ο μαθητής έχει βαθμό 15.

**B:** Ο μαθητής έχει βαθμό μικρότερο του 14.

**Γ:** Ο μαθητής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

**Δ:** Ο μαθητής έχει βαθμό 19 ή 20. Τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{25}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25}, \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{10}{25}$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{25}$$

6. Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  είναι:

$$\Omega = \{\text{KKK}, \text{KKΓ}, \text{KΓK}, \text{KΓΓ}, \text{ΓKK}, \text{ΓKΓ}, \text{ΓΓK}, \text{ΓΓΓ}\}$$

Αν Α είναι το ενδεχόμενο: Να φέρουμε και τις τρείς φορές την ίδια ένδειξη

$$\text{Tότε: } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8}$$

7. Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  έχει  $N(\Omega) = 36$  στοιχεία.

$$\text{Οπότε } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{36}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36}, \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

8. Αν  $A$  είναι το ενδεχόμενο: Ο μαθητής ελυσε την άσκηση τότε:

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{12}{25} + P(A') = 1 \quad \text{ή} \quad P(A') = 1 - \frac{12}{25} \quad \text{ή} \quad P(A') = \frac{13}{25}$$

Αν  $B$  είναι το ενδεχόμενο ο δεύτερος μαθητής να έχει λύσει την άσκηση τότε:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{24}$$

9. Αν  $A$  είναι το ενδεχόμενο να πάει κάποιος στο θέατρο τότε:  $P(A') = 4P(A)$

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \text{ή} \quad P(A) + 3P(A) = 1 \quad \text{ή} \quad 4P(A) = 1 \quad \text{ή} \quad P(A) = \frac{1}{4}$$

10. Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε:

$$\frac{7}{10} + P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

11. Από την ισότητα  $P(B) + P(B') = 1$  έχουμε:  $P(B) + \frac{11}{14} = 1 \quad \text{ή} \quad P(B) = \frac{3}{14}$ .

Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε :

$$\frac{1}{2} + P(A \cap B) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

12. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

**A:** Γνωρίζει Αγγλικά.

**B:** Γνωρίζει Γαλλικά.

Τότε  $P(A) = 0,42$ ,  $P(B) = 0,21$ ,  $P(A \cap B) = 0,15$ . Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A \cup B$ .

Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε:

$$P(A \cup B) + 0,15 = 0,42 + 0,21 \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) = 0,48.$$

13. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

**A:** Ο μαθητής έχει κανόνα.

**B:** Ο μαθητής έχει διαβήτη. Τότε  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{18}{24}$ ,  $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{14}{24}$

$$P(A \cup B) = \frac{20}{24}. \quad \text{Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου } A \cap B.$$

Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε:

$$\frac{20}{24} + P(A \cap B) = \frac{18}{24} + \frac{14}{24} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{18}{24} + \frac{14}{24} - \frac{20}{24} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{12}{24}$$

**1.** **a)**  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 8\}$

**b)**  $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $A \cap B = \{2, 4, 8\}$ ,  $A' = \{0, 2\}$ ,  $B' = \{0, 3, 5, 6, 7\}$

**γ)** i)  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$ , ii)  $P(B') = \frac{N(B')}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$ , iii)  $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9}$   
 iv)  $P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{9}$

**2.** Έστω  $A$  είναι το ενδεχόμενο: Η Μαρία διαλέγει παγωτό με γεύση φράουλα

Τότε  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{12}$ . Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A'$ , με δειγματικό χώρο  $\Omega'$  για τον οποίο ισχύει:  $N(\Omega') = 8$ , οπότε:

$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega')} = \frac{6}{8}$$

**3.**

**a)**

	Αγόρια	Κορίτσια
Γαλλικά	12	36
Γερμανικά	18	14

**β)** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα **A**: Το παιδί είναι αγόρι.

**B**: Το παιδί έχει επιλέξει Γερμανικά.

Τότε : **i)**  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{30}{80}$

**ii)**  $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{32}{80}$

**iii)**  $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{80}$

**iv)**  $P(A' \cup B) = \frac{N(A' \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{68}{80}$

**4.**

Μπορούμε να πάρουμε: 12 ζευγάρια αριθμών, από τα οποία, μόνο δύο  $(25^0, 65^0)$  και  $(65^0, 25^0)$  είναι γωνίες ορθογωνίου τριγώνου.

Άρα η πιθανότητα είναι:  $\frac{2}{12}$

5.

Μπορούμε να πάρουμε τέσσερεις διαφορετικές τριάδες. Η τριάδα που δε δίνει τρίγωνο είναι: 8, 12, 20.(δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα )

Άρα η πιθανότητα είναι:  $\frac{3}{4}$

6.

Μπορούμε να σχηματίσουμε: 12 κλάσματα. **α)** Ακέραιο αριθμό εκφράζουν

τα  $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}$ . Άρα η πιθανότητα είναι  $\frac{4}{12}$

**β)** Μικρότερα του 1 είναι:  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ .

Άρα η πιθανότητα είναι  $\frac{6}{12}$ .

7.

$$P(A') + P(B') = \frac{11}{10} \quad \text{ή} \quad 1 - P(A) + 1 - P(B) = \frac{11}{10} \quad \text{ή} \quad P(A) + P(B) = 2 - \frac{11}{10} \quad \text{ή}$$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{10}$ . Από την ισότητα  $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$  έχουμε

$$\frac{7}{10} + P(A \cap B) = \frac{9}{10} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

8.

Έχουμε τα εξής ζεύγη με άθροισμα 8: (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)

Άρα η πιθανότητα είναι:  $\frac{5}{36}$

Έχουμε τα εξής ζεύγη με άθροισμα 7: (6,1), (1,6), (3,4), (4,3), (2,5), (5,2).

Άρα η πιθανότητα είναι:  $\frac{6}{36}$ . Άρα είχε άδικο.

**α)**  $2^5 = 32$ , **β)**  $\frac{2}{32}$  **γ)**  $\frac{1}{64}$



# Γεωμετρία





## 1.1 Ισότητα τριγώνων

### Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

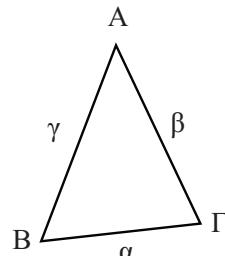
**Τα κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.

Αν έχουμε το τρίγωνο  $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$ , τότε οι γωνίες του συμβολίζονται με τα γράμματα των κορυφών του, δηλ. με  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{G}$ .

Οι πλευρές του συμβολίζονται με τα μικρά

γράμματα των απέναντι κορυφών του δηλ.,

$\hat{B}\hat{G} = \alpha$ ,  $\hat{G}\hat{A} = \beta$  και  $\hat{A}\hat{B} = \gamma$ .

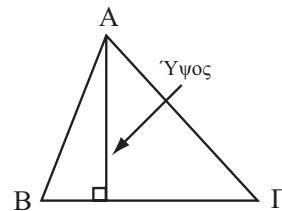
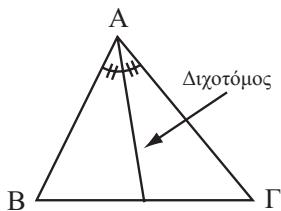
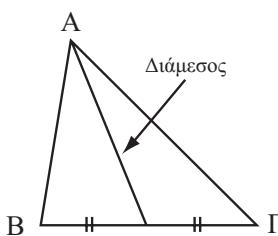


Για τις γωνίες κάθε τριγώνου  $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$  ισχύει  
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 180^\circ$

Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών ονομάζεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών  $\hat{B}\hat{G}$ ,  $\hat{A}\hat{B}$  είναι η γωνία  $\hat{B}$ . Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιάς πλευράς λέγονται προσκείμενες γωνίες της πλευράς αυτής π.χ προσκείμενες γωνίες της πλευράς  $\hat{A}\hat{B}$  είναι οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ .

**Τα δευτερεύοντα στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι διάμεσοι τα ύψη και οι διχοτόμοι.

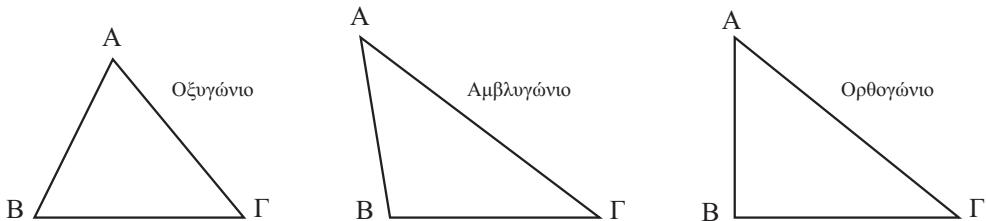
- **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους που τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου το οποίο λέγεται κέντρο βάρους ή βαρύκεντρο.
- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη που τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο λέγεται ορθόκεντρο.
- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους που τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο λέγεται **έγκεντρο**.

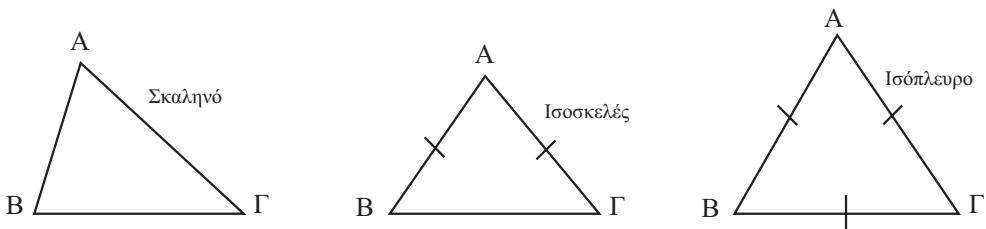
Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

1. **Οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
2. **Αμβλυγώνιο**, όταν έχει μία γωνία αμβλεία.
3. **Ορθογώνιο**, όταν έχει μία γωνία ορθή.



Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:

1. **Σκαληνό**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.
2. **Ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
3. **Ισόπλευρο**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την Ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$  με  $AB = AC$  η πλευρά  $BC$  ονομάζεται **βάση** του και το σημείο **Α κορυφή** του.

### Ίσα τρίγωνα

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

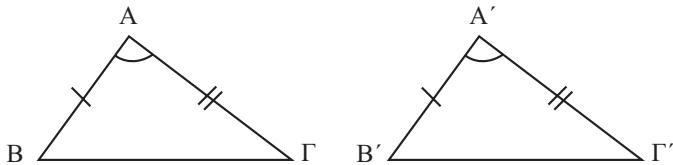
#### Αντίστροφα:

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

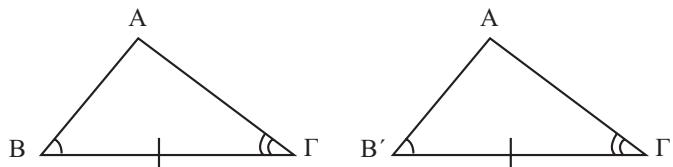
**Κριτήρια ισότητας τριγώνων** λέμε τις προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα.

**1<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)**

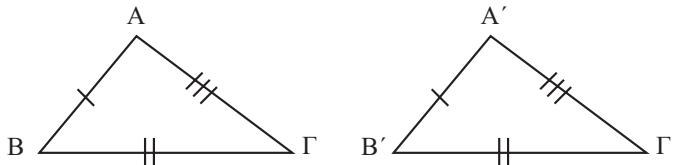
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

**2<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

**3<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

**Παρατηρήσεις:**

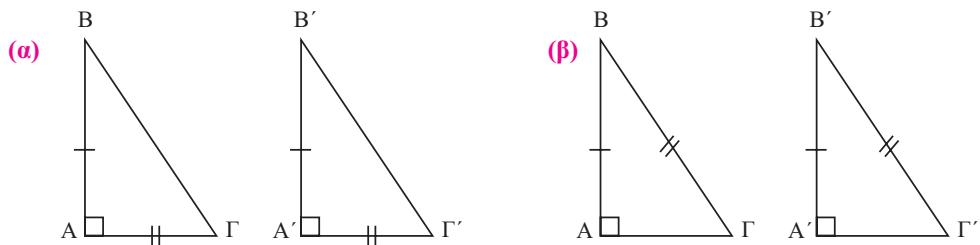
1. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
2. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

Τα προηγούμενα κριτήρια μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα έτσι έχουμε:

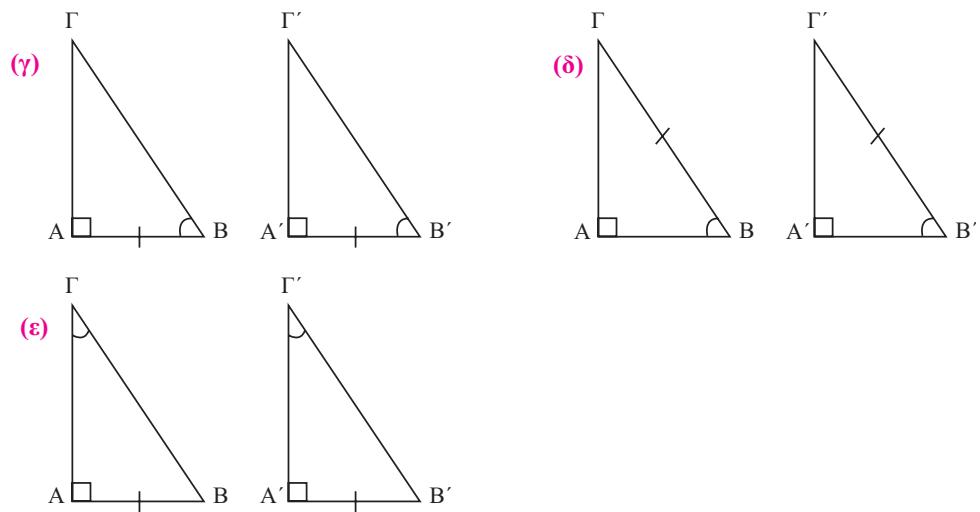
### Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

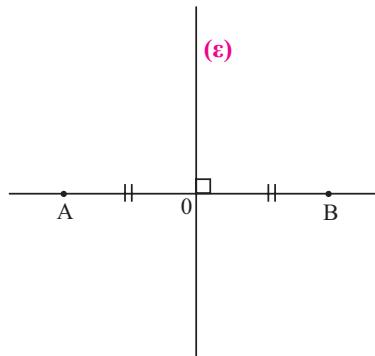
- Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία



- Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.



**Μεσοκάθετο** ενός ευθυγράμμου τμήματος λέμε την ευθεία η οποία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα και περνάει από το μέσον του.



Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος.

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του .
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιάς γωνίας.

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιάς γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

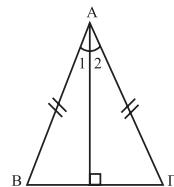
### Λυμένες ασκήσεις

1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  ( $AB = AG$ ).

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Οι παρα τη βάση γωνίες του είναι ίσες.  
**β)** Η διχοτόμος της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



#### Λύση

**α)** Αν φέρουμε την διχοτόμο  $AD$ , τότε: Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $ABD$ ,  $AGD$  τα οποία έχουν:

- i)  $AB = AG$  υπόθεση ii)  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  ( $AD$  διχοτόμος ) 3)  $AD$  κοινή. Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Γ- $\Pi$ ), οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Έτσι  $\hat{B} = \hat{G}$ .

**β)** Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα  $ABD$  και  $AGD$  είναι ίσα. Οπότε

$\Gamma\Delta = \beta\Delta$  άρα η  $AD$  είναι διάμεσος. Ακόμη  $\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta G$  και  $\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta G$ , άρα θα ισχύει:

$\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta G = 90^\circ$ . Άρα η διχοτόμος  $AD$  θα είναι διάμεσος και ύψος .

2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABG$  με  $AB = AG$ . Από το μέσον  $M$  της  $BG$  φέρνουμε τις  $MK$  κάθετη στην  $AB$  και την  $ML$  κάθετη στην  $AG$ .

Να δείξετε ότι:

- α)** Τα  $\Gamma M L$ ,  $B M K$  είναι ίσα. **β)** Το τρίγωνο  $MKL$  είναι ισοσκελές.  
**γ)**  $\hat{B} M K = \hat{\Gamma} M L$

**Λύση**

**α)** Τα τρίγωνα  $\Gamma\Delta\Lambda$ ,  $\Delta\Lambda\Gamma$  έχουν:

i)  $\Gamma\Delta = \Delta\Lambda$  (διότι  $\Delta$  μέσον  $\Gamma\Delta$ )

ii)  $\hat{\Delta} = \hat{\Lambda}$

iii) Είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

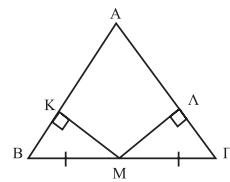
**β)** Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα  $\Gamma\Delta\Lambda$ ,  $\Delta\Lambda\Gamma$  είναι ίσα, οπότε θα έχουν ίσα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους.

Έτσι:  $\Gamma\Lambda = \Delta\Lambda$  οπότε το τρίγωνο  $\Gamma\Lambda\Delta$  είναι ισοσκελές.

**γ)** Τα τρίγωνα  $\Delta\Lambda\Gamma$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$  έχουν: i)  $\Delta\Gamma = \Gamma\Delta$ , ii)  $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma$

iii) είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι έχουν ίσες υποτείνουσες, μία κάθετη πλευρά ίση, οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα.

Έτσι  $\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Lambda}\Delta$ .



**Ερωτήσεις κατανόησης**

**A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Ένα τρίγωνο λέγεται αμβλυγώνιο όταν όλες οι γωνίες του είναι αμβλείες.
2. Ένα ισοσκελές τρίγωνο δεν μπορεί να έχει αμβλεία γωνία
3. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.
4. Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει μία γωνία ορθή και μία αμβλεία
5. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο οι διχοτόμοι να είναι και διάμεσοι.
6. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση τότε είναι ίσα.
7. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
8. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους τότε είναι ίσα.
9. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν τις γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.
10. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με τις κάθετες πλευρές ίσες, είναι ίσα.
11. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η ορθή.
12. Στο ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες.
13. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους τότε είναι ίσα.
14. Αν σε ένα τρίγωνο οι δύο πλευρές του είναι άνισες τότε είναι σκαληνό.
15. Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντα οξείες.
16. Ένα τρίγωνο λέγεται αμβλυγώνιο αν η μία γωνία του είναι αμβλεία.
17. Η διχοτόμος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισογώνια τρίγωνα.
18. Κάθε σημείο που απέχει από τις πλευρές μιας γωνίας ανήκει σε μεσοκάθετο.

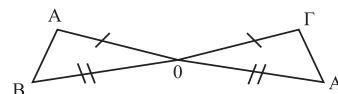
## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σε ένα τρίγωνο η μία γωνία είναι ορθή. Οι άλλες δύο είναι πάντοτε:  
 α. οξείες, β. παραπληρωματικές, γ. ίσες, δ. άνισες
2. Ένα τρίγωνο  $ABC$  δεν μπορεί να είναι:  
 α. ορθογώνιο και ισοσκελές, β. ισοσκελές και αμβλυγώνιο  
 γ. ισόπλευρο και ορθογώνιο, δ. σκαληνό και ορθογώνιο.
3. Αν το ύψος  $AD$  ενός τριγώνου  $ABC$  είναι εκτός αυτού τότε:  
 α. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, β. Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.  
 γ. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, δ. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με  $A > 90^\circ$ .
4. Αν οι γωνίες ενός τριγώνου  $ABC$  είναι:  $A = 3x$ ,  $B = 1200 - 2x$ ,  $C = 200 + x$  τότε το τρίγωνο είναι:  
 α. ορθογώνιο, β. Αμβλυγώνιο, γ. Οξυγώνιο δ. Ισόπλευρο
5. Τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται εκτός του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι:  
 α. ορθογώνιο, β. οξυγώνιο, γ. αμβλυγώνιο, δ. ισόπλευρο.
6. Σε ένα τρίγωνο το ένα μόνο ύψος ταυτίζεται με την διχοτόμο, τότε το τρίγωνο είναι:  
 α. ορθογώνιο, β. ισοσκελές, γ. ισόπλευρο. δ. τίποτα από τα παραπάνω.
7. Αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε τα ύψη τέμνονται:  
 α. εκτός του τριγώνου, β. εντός του τριγώνου, γ. είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, δ. τίποτα από τα παραπάνω.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1** Στο διπλανό σχήμα είναι  $OA = OG$  και  $OB = OD$ .  
 Να δείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $OAD$ ,  $OGL$  είναι ίσα.  
 β) Τα  $OAG$ ,  $OBG$  είναι ισοσκελή.



- 2** Δίνεται γωνία  $x$   $\hat{\psi}$  και Οδ η διχοτόμος της. Αν από τυχαίο σημείο Α της Οδ φέρουμε τις  $AK \perp Ox$  και  $AL \perp O\psi$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $OAK$ ,  $OAL$  είναι ίσα και να γράψετε τις ισότητες για τα υπόλοιπα στοιχεία των τριγώνων.

**3**

Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $AB = \Delta E$  και ίσες τις διχοτόμους  $AK, \Delta L$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $ABK, AE\Lambda$  είναι ίσα.
- b)** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma, \Delta EZ$  είναι ίσα.
- c)** Τα τρίγωνα  $AK\Gamma, \Delta LZ$  είναι ίσα.

**4**

Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:  $\hat{B} = \hat{\mathbb{E}}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$  και ίσα τα ύψη  $AK, \Delta L$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $ABK, ED\Lambda$  είναι ίσα.
- b)** Τα τρίγωνα  $AK\Gamma, \Delta LZ$  είναι ίσα.
- c)** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma, \Delta EZ$  είναι ίσα.

**5**

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma, A'B'\Gamma'$  τα οποία είναι ίσα με:  $AB = A'B'$ ,  $A\Gamma = A'\Gamma'$  Φέρνουμε τα ύψη  $A\Delta, A'\Delta'$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $AB\Delta, A'B'\Delta'$  είναι ίσα.
- b)** Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma, A'\Delta\Gamma'$  είναι ίσα.

**6**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B$  ισαπέχουν από οποιαδήποτε ευθεία ( $\varepsilon$ ) η οποία περνάει από το μέσον  $M$  του τμήματος  $AB$ .

**7**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  και παίρνουμε  $AM = ME$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $AMB, MGE$  είναι ίσα.
- b)** Τα τρίγωνα  $BME, AMG$  είναι ίσα.

**8**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Προεκτείνουμε την βάση  $B\Gamma$  προς τα σημεία  $B, \Gamma$ . Στην προέκταση προς το  $B$  παίρνουμε το σημείο  $E$  και στην προέκταση προς το  $\Gamma$  το σημείο  $Z$ , τέτοια ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $ABE, A\Gamma Z$  είναι ίσα.
- b)** Το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές.
- c)** Οι αποστάσεις των κορυφών  $B, \Gamma$  από τις  $AE$  και  $AZ$  είναι ίσες.

**9**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρνουμε την διάμεσο  $AM$  και τις αποστάσεις  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  των κορυφών  $B, \Gamma$  από την  $AM$ . Να δείξετε ότι:

- a)** Τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma EM$  είναι ίσα
- b)**  $B\Delta = \Gamma E$

- 10** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα  $B\Delta = AB$  και  $A\Gamma = \Gamma E$ . Φέρνουμε το ύψος ΑΚ. Από τα σημεία Δ, Ε φέρνουμε τα τμήματα  $\Delta\Lambda$ ,  $E\eta$ , πού είναι κάθετα στην ΒΓ. Να δείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα  $\Delta\Lambda B$ ,  $ABK$  είναι ίσα.
  - β)** Τα τρίγωνα  $\Gamma E N$ ,  $AK\Gamma$  είναι ίσα.
  - γ)** Τα σημεία Δ, Ε ισαπέχουν από την ΒΓ.
- 11** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ. Να δείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα  $BKM$ ,  $MKG$  είναι ίσα.
  - β)** Τα τρίγωνα  $ABK$ ,  $AKG$  είναι ίσα.
  - γ)** Το τρίγωνο  $BKG$  είναι ισοσκελές.
- 12** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Φέρνουμε την διαγώνιο  $B\Delta$ . Από τις κορυφές Α, Γ φέρνουμε τις  $AE$ ,  $GZ$  κάθετες στην  $B\Delta$ . Να δείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα  $A\Delta E$ ,  $B\Gamma Z$  είναι ίσα.
  - β)** Τα τρίγωνα  $AEB$ ,  $\Delta GZ$  είναι ίσα.
  - γ)** Οι κορυφές Α, Γ ισαπέχουν από την  $B\Delta$ .
- 13** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < AG$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος του. Από το σημείο  $B$  φέρνουμε κάθετη στην  $A\Delta$ , που τέμνει την  $AG$  στο  $Z$ . Να δείξετε ότι:
- α)** Το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.
  - β)** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Delta Z$  είναι ίσα.
  - γ)** Το  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές.
- 14** Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ίσες.
- 15** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = AG$ ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές  $AB$ ,  $AG$  και παίρνουμε τμήματα  $B\Delta = \Gamma E$ . Αν  $K$  είναι το μέσον της βάσης  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα  $AK\Delta$  και  $AKE$  είναι ίσα.
  - β)** Οι γωνίες  $A\Delta K$  και  $AEK$  είναι ίσες.

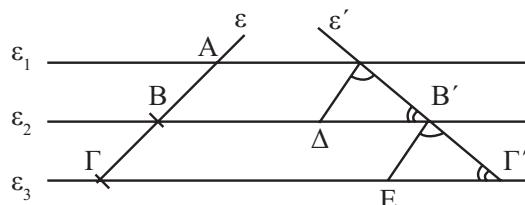
## 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

### Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

#### Απόδειξη:

Έστω  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  είναι τρεις παράλληλες ευθείες που τέμνουν την ευθεία  $\varepsilon$  στα  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε:  $AB = B\Gamma$ . Αν  $\varepsilon'$  είναι μία άλλη ευθεία που τέμνει τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  στα  $A', B', \Gamma'$  αντίστοιχα.



Θα δείξουμε ότι:  $A'B' = B'\Gamma'$ .

Αν φέρουμε  $A'\Delta // \varepsilon, B'E // \varepsilon$  τότε:

Τα τρίγωνα  $A'\Delta B', B'\Gamma'$  έχουν: **a)**  $A'\Delta = B'\Gamma$ , διότι τα  $AB\Delta A', B\Gamma E B'$  είναι παραλληλόγραμμα (έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες) και  $AB = \Gamma\Delta$ . **b)**  $\hat{\Delta}B'A' = \hat{E}\Gamma' B'$  (ως εντός και επί τα αυτά).

**γ)**  $\hat{\Delta}A'B' = \hat{E}\Gamma' B'$ . (ως εντός και επί τα αυτά). Άρα  $\hat{\Delta} = \hat{E}$

Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα θα έχουν και τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα οπότε:  $A'B' = B'\Gamma'$ .

### Μέσα πλευρών τριγώνου

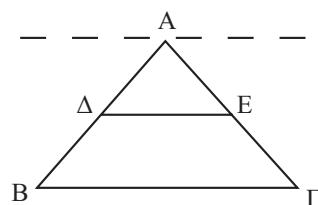
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , αν από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσον της τρίτης πλευράς.

#### Απόδειξη

Έστω ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσον  $M$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε την  $MN // B\Gamma$ .

Τότε αν από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία  $\varepsilon // B\Gamma$ , τότε οι παράλληλες  $\varepsilon, MN, B\Gamma$

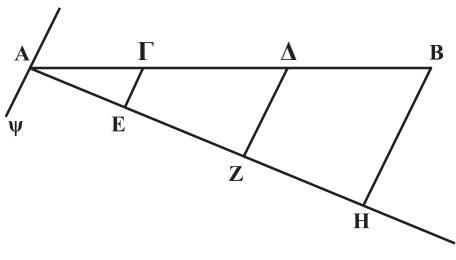
ορίζουν ίσα τμήματα στην  $AB$  άρα θα ορίζουν και ίσα τμήματα στην  $A\Gamma$ . Άρα  $AN = NG$ .



## Διαιρεση ευθυγράμμου τμήματος σε νέα τμήματα

Έστω έχουμε ένα ευθύγραμμό τμήμα  $AB = 7\text{cm}$  και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι  $2,333\dots\text{cm}$ , οπότε δεν μπορούμε να τα προσδιορίσουμε με ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να δουλέψουμε ως εξής:



Από το Α φέρνουμε μία τυχαία ημιευθεία  $Ax$  και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα  $AE, EZ, ZH$ .

Ενώνουμε τα σημεία  $B, H$  και από τα σημεία  $Z, E, A$  φέρνουμε τις  $ZΔ, EΓ, AΨ$  παράλληλες προς  $BH$ . Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην  $Ax$  ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην  $AB$ .  
Άρα  $AΓ = ΓΔ = ΔB$ .

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το  $AB$  σε νέα τμήματα .

## Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

Έστω  $AB, ΓΔ$  είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ονομάζουμε λόγο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  προς το ευθύγραμμό τμήμα  $ΓΔ$  και συμβολίζουμε με  $\frac{AB}{ΓΔ}$  τον θετικό αριθμό  $λ$ , για τον οποίο ισχύει  $AB = λ \cdot ΓΔ$   
Αν τα ευθύγραμμα τμήματα μετρηθούν με την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους.

## Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Αν έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα  $a, β, γ, δ$  τότε λέμε: Τα ευθύγραμμα τμήματα  $a, γ$  είναι ανάλογα προς τα  $β, δ$  όταν ισχύει:

$\frac{a}{β} = \frac{γ}{δ}$  (1). Η ισότητα (1) λέγεται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα  $a, β, γ, δ$ . Τα ευθύγραμμα τμήματα  $a, δ$  λέγονται άκροι όροι ενώ τα  $β, γ$  λέγονται μέσοι όροι. Αν έχουμε αναλογία με ευθύγραμμα τμήματα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών αρκεί όμως ως  $a, β, γ, δ$  να θεωρήσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Αν σε μία αναλογία ισχύει:  $\frac{a}{β} = \frac{γ}{α}$  τότε ο αριθμός  $a$  λέγεται μέσος ανάλογος των  $β$  και  $γ$ .

## Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

**1** Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε:  $\alpha\delta = \beta\gamma$

Δηλαδή σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

**2** Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$  ή  $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ .

Δηλαδή σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

**3** Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  τότε  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

Δηλαδή λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο, που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$ . Αν  $\Delta$  είναι το μέσον της  $AB$  και  $E$  είναι το μέσον της  $AC$ . Να αποδείξετε ότι **a)** Το τμήμα  $\Delta E$  είναι παράλληλο στην  $BC$

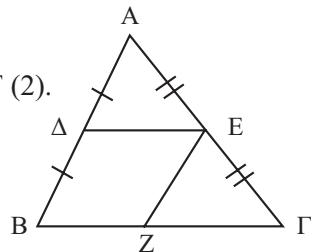
**b)**  $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

**Λύση**

**a)** Επειδή  $\Delta$  μέσο της  $AB$  θα ισχύει  $A\Delta = \Delta B$  (1)

Ακόμη  $E$  μέσο της  $AC$  άρα θα ισχύει  $AE = E\Gamma$  (2).

Από (1) και (2)  $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ , οπότε  $\Delta E // BC$



**b)** Από το  $E$  φέρνουμε  $EZ // AB$ , τότε το  $Z$  θα είναι μέσον του  $BC$ , άρα

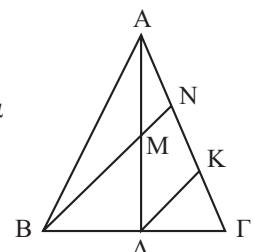
$BZ = Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ . Το  $\Delta EZB$  είναι παραλληλόγραμμο (διότι έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες) οπότε  $\Delta E = BZ = \frac{B\Gamma}{2}$ .

- 2** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  και η διάμεσος  $A\Delta$  αυτού.

Από το μέσον  $M$  της  $A\Delta$  φέρνουμε την  $BM$  η οποία τέμνει την  $AC$  στο  $N$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρνουμε την παράλληλη στην  $BN$  που τέμνει την  $AC$  στο  $K$ .

Να δείξετε ότι: **a)**  $AN = NK$ , **b)**  $NK = KG$ ,

**γ)**  $AN = NK = KG$



**Λύση**

- α)** Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι  $MN \parallel \Delta K$  και επειδή το  $M$  είναι μέσο του  $A\Delta$ , άρα το  $N$  είναι μέσο του  $A\Gamma$ , οπότε:  $AN = NK$  (1)
- β)** Στο τρίγωνο  $B\Gamma\Gamma$  είναι  $\Delta K \parallel BN$  και επειδή το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ , άρα το  $K$  είναι μέσο του  $\Gamma\Gamma$ , οπότε:  $NK = K\Gamma$  (2)
- γ)** Από (1) και (2)  $AN = NK = K\Gamma$

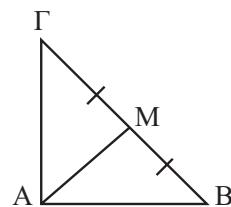
**3** Αποδείξτε ότι: σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**Λύση**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ).

Φέρνουμε την διάμεσο  $AM$  του  $AB\Gamma$  και τη διάμεσο  $MN$  του  $AM\Gamma$ . Στο τρίγωνο  $AM\Gamma$  το  $M$  είναι μέσο του  $B\Gamma$  και το  $N$  είναι μέσο του  $A\Gamma$ , οπότε  $MN \parallel AB$ . Αλλά  $AB \perp A\Gamma$ , οπότε  $MN \perp A\Gamma$ .

Άρα  $MN$  μεσοκάθετη της  $A\Gamma$  οπότε για το σημείο  $M$  ισχύει:  $AM = MG$ . Επειδή το  $M$  είναι μέσο του  $B\Gamma$  θα ισχύει  $BM = MG$ . Οπότε  $AM = BM = MG$ , δηλ η διάμεσος στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



**4** Αποδείξτε ότι: αν σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι  $30^\circ$  τότε η απέναντι κάθετος πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

**Λύση**

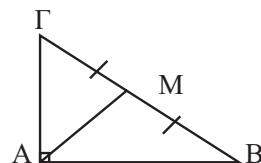
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )

με  $\hat{B} = 30^\circ$ . Θα δείξουμε ότι:  $AG = \frac{BG}{2}$  Φέρνουμε

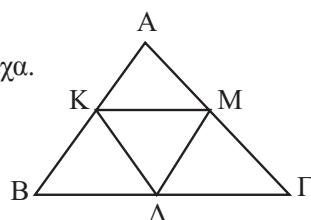
τη διάμεσο  $AM$ . Τότε  $AM = MB = MG$ .

Επειδή  $\hat{B} = 30^\circ$  θα είναι  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Οπότε το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

Άρα  $AG = AM = MG = \frac{BG}{2}$ .



**5** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι και το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο και να βρείτε την περίμετρο του  $K\Lambda M$  σε σχέση με το  $AB\Gamma$ .



**Λύση**

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι: **a)** Κ μέσον της  $AB$ , Μ μέσον της  $A\Gamma$  άρα

$$KM = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1)$$

**b)** Λ μέσον της  $B\Gamma$ , Μ μέσον της  $A\Gamma$  άρα  $\Lambda M = \frac{AB}{2}$  (2),

**γ)** Κ μέσον της  $AB$ , Λ μέσον της  $B\Gamma$ , άρα  $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$  (3).

Επειδή  $AB = B\Gamma = A\Gamma$  από (1), (2), (3)

θα έχουμε:  $KM = \Lambda M = K\Lambda$  δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

$$\Pi_{K\Lambda M} = KM + \Lambda M + K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma + AB + A\Gamma}{2} = \frac{1}{2} \Pi_{AB\Gamma}$$

6

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $B\Gamma = 10$  cm και  $K, \Lambda, M$ , είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma, AB, A\Gamma$  αντίστοιχα, να υπολογίσετε:

**a)** Τη διάμεσο  $AK$  και το τμήμα  $\Lambda M$ .

**b)** Να δείξετε ότι το  $AM\Lambda K$  είναι ορθογώνιο

**Λύση**

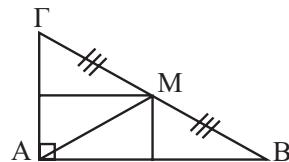
**a)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $AK$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα

$$AK = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι: το  $M$  μέσον της  $A\Gamma$

$$\text{και το } \Lambda \text{ μέσον της } AB \text{ οπότε: } \Lambda M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

**b)** Το τετράπλευρο  $AM\Lambda K$  έχει:  $\hat{A} = \hat{M} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ , οπότε  $\hat{K} = 90^\circ$ , οπότε είναι ορθογώνιο.



## Βασικά συμπεράσματα

1. Αν από το μέσον μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς τη μία πλευρά τότε περνάει από το μέσον της τρίτης πλευράς.
2. Αν ενώσουμε τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.
5. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
6. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι  $30^\circ$  τότε η απέναντι κάθετος πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις χωρίς να τα αποδεικνύουμε.

### Ερωτήσεις κατανόησης

#### A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.
2. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι  $60^\circ$ , τότε η προσκείμενη κάθετος στην πλευρά αυτή είναι το μισό της υποτείνουσας.
3. Κάθε ευθεία παράλληλη προς μία πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα.
4. Αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου τότε σχηματίζεται παραλληλόγραμμο.
5. Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 5 \text{ cm}$ , τότε δεν μπορούμε να το χωρίσουμε σε 7 ίσα τμήματα.
6. Αν  $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$  τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  είναι μεγαλύτερο από το  $\Gamma\Delta$
7. Ο λόγος δύο πλευρών ενός ρόμβου είναι  $\lambda = 1$
8. Αν  $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}$ , τότε  $AB = 3$  και  $\Gamma\Delta = 5$
9. Αν  $AB$  ένα τμήμα και  $M$  μέσον του  $AB$  τότε:  $\frac{AM}{MB} = 1 \text{ cm}$
10. Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι καθαρός αριθμός.
11. Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων δε μπορεί να είναι αρνητικός.

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , και σημείο του  $\Gamma$ , τέτοιο ώστε:  

$$\frac{AG}{GB} = \frac{3}{5}$$
 Τότε ο λόγος  $\frac{AB}{\Gamma B}$  είναι:  
**a.**  $\frac{8}{5}$ , **b.**  $\frac{5}{8}$ , **c.**  $\frac{3}{5}$ , **d.**  $\frac{5}{3}$
2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $AB = 8$  cm,  $AG = 6$  cm τότε η διάμεσος  $AM$  είναι ίση με:  
**a.** 4, **b.** 3, **c.** 16, **d.** 5.
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν η διάμεσος  $AM$  είναι  $\frac{13}{2}$  cm και η  $AG = 12$  cm, τότε η πλευρά  $AB$  είναι:  
**a.** 5 cm, **b.** 10 cm, **c.** 8 cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω.
4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $B\Gamma = 10$  cm και  $\hat{B} = 60^\circ$  τότε η πλευρά  $AB$  είναι:  
**a.** 5cm, **b.** 20 cm, **c.** 8 cm, **d.** δεν προσδιορίζεται.
5. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά  $a$ . Τότε ο λόγος ενός ύψους προς την πλευρά του είναι:  
**a.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , **b.**  $\sqrt{3}$ , **c.**  $\frac{1}{2}$ , **d.** τίποτα από τα παραπάνω
6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 10$  cm,  $B\Gamma = 12$  cm,  $AG = 16$  cm.  
Αν  $K, \Lambda, M$  είναι τα μέσα των πλευρών του, τότε το τρίγωνο  $K\Lambda M$  έχει περίμετρο.  
**a.** 38 cm, **b.** 19 cm, **c.** 27 cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

**1**

Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 5$  cm

**a)** Να χωρίσετε με κανόνα και διαβήτη το τμήμα  $AB$  σε έξι ίσα τμήματα.

**β)** Πάνω σε μία ευθεία ( $\varepsilon$ ) να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα :  $\Gamma\Delta$  ,  $\Delta Z$  ,  $Z\Gamma$  τέτοια ώστε:

$$\Gamma\Delta = \frac{1}{6} AB, \quad \Delta Z = \frac{7}{6} AB, \quad AB = \frac{4}{3} Z\Gamma$$

**γ)** Να υπολογίσετε τους λόγους:

**i)**  $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ , **ii)**  $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$ , **iii)**  $\frac{Z\Gamma}{\Gamma\Delta}$

**2** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $BG = 12\text{cm}$  και  $\hat{G} = 30^\circ$  και  $AM$  είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα να υπολογίσετε τους λόγους:

α)  $\frac{AM}{A\Gamma}$ , β)  $\frac{AM}{B\Gamma}$ , γ)  $\frac{AB}{A\Gamma}$

**3** Δίνεται ρόμβος  $ABGD$  με ( $\hat{A} = 60^\circ$ ). Αν οι διαγώνιοι  $AG$ ,  $BG$  τέμνονται στο  $K$  Να υπολογίσετε τους λόγους:

α)  $\frac{\Delta K}{A\Delta}$ , β)  $\frac{KB}{AB}$ , γ)  $\frac{KA}{AB}$ , δ)  $\frac{KA}{K\Delta}$

**4** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABGD$  ( $AB // GD$ ). Από το μέσον  $E$  του  $AB$  να φέρετε παράλληλη στην  $A\Delta$ , η οποία τέμνει τις  $AG$ ,  $GD$  στα σημεία  $K$ ,  $L$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία  $K$ ,  $L$  είναι μέσα των  $AG$ ,  $GD$  αντίστοιχα.  
 β) Τα τμήματα  $EB$ ,  $KG$  είναι ανάλογα προς τα τμήματα  $AE$ ,  $AK$ .

**5** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  ( $AB < AG$ ). Αν  $Z$  είναι μέσον του  $AB$ ,  $E$  μέσον του  $AG$ ,  $\Delta$  μέσον του  $BG$  και  $AK$  είναι το ύψος του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

α)  $KZ = \Delta E$

β)  $KE = \frac{AG}{2}$

γ)  $ZE // BG$

**6** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 8\text{cm}$  και η διάμεσος  $AM = 5\text{cm}$

Να υπολογίσετε τους λόγους:

α)  $\frac{AB}{AG}$ , β)  $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$  γ)  $\frac{AM}{B\Gamma}$

**7** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ABG$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $BG = 20\text{ cm}$ . Φέρνουμε την διάμεσο  $AM$ . Αν  $E$  είναι το μέσον της  $AM$  και  $\Delta M$  είναι κάθετη στην  $AG$ , να δείξετε ότι:  $\Delta E = 5\text{cm}$

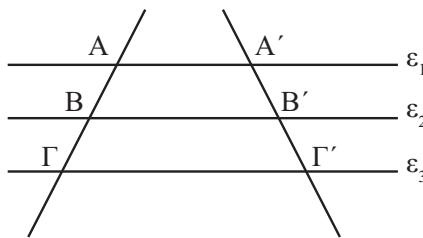
**8** Να αποδείξετε ότι: Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλένρου αποτελούν κορυφές παραλληλογράμμου.

### 1.3 Θεώρημα του Θαλή

#### Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε: Τα τμήματα που ορίζονται στην μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

$$\text{αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{AT'} \quad (1)$$



Από την ισότητα (1) μπορούν να προκύψουν:

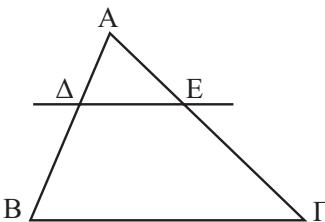
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AG}{AT'}$$

#### Παρατηρήση:

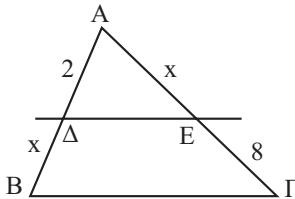
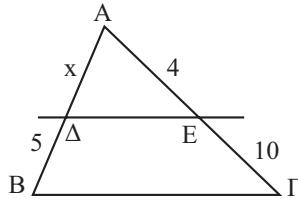
Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών AB, AG αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν  $\Delta E // BG$  τότε  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$ .
- Αν  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$  τότε  $\Delta E // BG$ .

Το δεύτερο συμπέρασμα από τις παρατηρήσεις χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε ότι: ότι δύο τμήματα είναι παράλληλα.



- 1** Στο τρίγωνο  $ABG$  η ( $\varepsilon$ ) είναι παράλληλη στη  $BG$ . Να υπολογίσετε το  $x$  σε κάθε περίπτωση:

**α)****β)****Λύση**

- α)** Στο τρίγωνο  $ABG$  είναι  $\Delta E \parallel BG$ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή

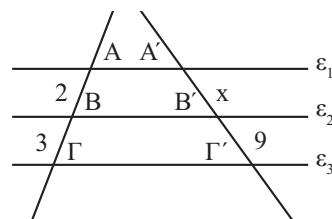
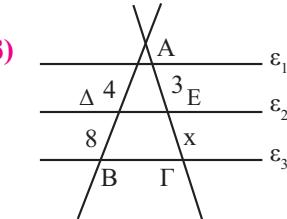
$$\text{έχουμε } \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EG} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{x} = \frac{x}{8} \quad \text{ή} \quad x^2 = 16 \quad \text{ή} \quad x = 4 .$$

- β)** Στο τρίγωνο  $ABG$  είναι  $\Delta E \parallel BG$ , οπότε από το θεώρημα του Θαλή

$$\text{έχουμε } \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EG} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{4} = \frac{5}{10} \quad \text{ή} \quad 10x = 20 \quad \text{ή} \quad x = 2 .$$

**2**

- Αν  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ , να υπολογίσετε το  $x$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

**α)****β)****Λύση**

- α)** Είναι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$  άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad \text{ή} \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{9} \quad \text{ή} \quad 3x = 18 \quad \text{ή} \quad x = 6$$

- β)** Είναι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$  άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EG} \quad \text{ή} \quad \frac{4}{3} = \frac{8}{x} \quad \text{ή} \quad 4x = 24 \quad \text{ή} \quad x = 6 .$$

3

Στο παρακάτω σχήμα είναι:  $AK \parallel BL$  και  $KM \parallel LN$ .

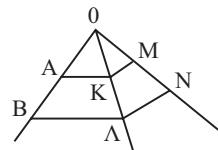
$$\text{Να δείξετε ότι: } \frac{OA}{AB} = \frac{OM}{MN} .$$

### Αύστη

Στο τρίγωνο  $OB\Lambda$  είναι  $AK \parallel BL$ . Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή:

$$\frac{OA}{OK} = \frac{AB}{KL} \quad \text{ή} \quad \frac{OA}{AB} = \frac{OK}{KL} \quad (1) . \quad \text{Στο τρίγωνο } O\Lambda N \text{ είναι } KM \parallel LN. \quad \text{Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή: } \frac{OK}{OM} = \frac{KL}{MN} \quad \text{ή} \quad \frac{OK}{KL} = \frac{OM}{MN} \quad (2) .$$

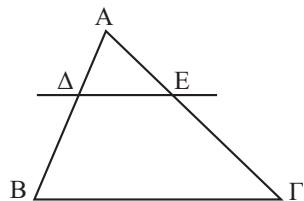
Από (1) και (2)  $\frac{OA}{AB} = \frac{OM}{MN}$  .



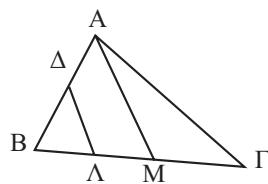
### Ερωτήσεις κατανόησης

A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

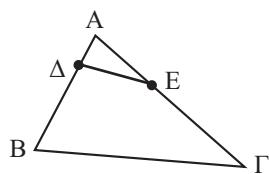
1. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $\Delta E \parallel BG$ . Τότε  $\frac{A\Delta}{E\Gamma} = \frac{AE}{AB}$



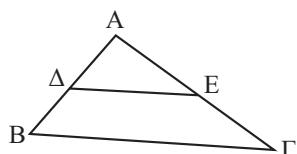
2. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η  $AM$  είναι διάμεσος και  $\Delta$  μέσον της  $AB$ ,  $\Lambda$  μέσον της  $BM$ , τότε  $\Delta\Lambda \parallel AM$  .



3. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A\Delta = 3$ ,  $\Delta B = 6$ ,  $AE = 5$ ,  $E\Gamma = 8$ , τότε η  $\Delta E$  είναι παράλληλη στην  $BG$  .

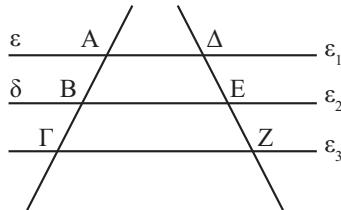


4. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\Delta E \parallel BG$ . Αν  $A\Delta = 4$ ,  $AE = 2$  και  $AB = 12$ , τότε η  $E\Gamma$  δεν υπολογίζεται.



5. Αν  $\varepsilon // \delta // \zeta$  τότε ισχύει:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{DE}{EZ}$$

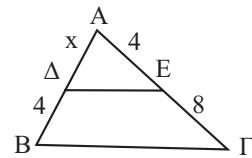


## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στο τρίγωνο είναι  $\Delta E // BG$ .

Τότε η τιμή του  $x$  είναι:

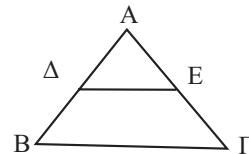
**α.** 4, **β.** 2 **γ.** 6, **δ.** καμία από τα παραπάνω .



2. Στο τρίγωνο  $ABG$  είναι  $\Delta E // BG$ . Αν  $A\Delta = x + 2$ ,

$AE = 3$ ,  $\Delta B = 4$ ,  $E\Gamma = 2$ . Τότε η τιμή του  $x$  είναι:

**α.** 4, **β.** 6, **γ.** 8, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

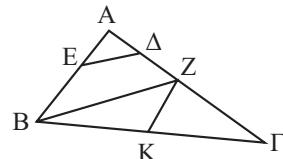


3. Στο τρίγωνο  $ABG$  είναι  $ED // BZ$ ,  $ZK // AB$ .

Αν  $AE = 4$ ,  $EB = 8$ ,  $A\Delta = 1$ ,  $\Delta Z = 2$ ,  $Z\Gamma = 6$ ,

$BK = 5$ . Τότε η τιμή του  $K\Gamma$  είναι:

**α.** 10, **β.** 6, **γ.** 4, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1 Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB // \Gamma\Delta$ ). Οι διαγώνιες  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  τέμνονται στο Ο

Να δείξετε ότι: **α)**  $\frac{OA}{OG} = \frac{OB}{OD}$ , **β)**  $\frac{OA}{AG} = \frac{OB}{BD}$

- 2 Στο οξυγώνιο τρίγωνο  $ABG$  φέρνουμε τα ύψη  $A\Delta$ ,  $\Gamma E$ . Στο τρίγωνο  $BE\Gamma$  φέρνουμε το ύψος  $EK$ . Να δείξετε ότι:

**α)**  $EK // A\Delta$

$$\beta) \frac{BE}{EA} = \frac{BK}{B\Delta}$$

**3**

Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  και η διάμεσος  $AD$ . Από τυχαίο σημείο  $M$  του τμήματος  $DG$  φέρνουμε  $\parallel AD$ , η οποία τέμνει την  $AG$  στο  $Z$  και την  $AB$  στο  $E$ . Να δείξετε ότι:

$$\text{α)} \frac{BD}{DM} = \frac{BA}{AH}, \quad \text{β)} \frac{GM}{DM} = \frac{GZ}{AZ}$$

**4**

Σε ένα τρίγωνο  $ABC$  είναι  $AB = 12\text{cm}$  και  $AC = 8\text{cm}$ . Πάνω στη διάμεσο  $AM$ , παίρνουμε ένα σημείο  $K$  τέτοιο ώστε:  $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{3}$ . Από το  $K$  φέρνουμε ευθεία ( $\varepsilon$ )  $\parallel$  στην  $BC$ , που τέμνει τις  $AB$ ,  $AC$  στα  $E$ ,  $Z$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα τμήματα  $AZ$ ,  $AE$ .

**5**

Στο τρίγωνο  $ABC$  δίνεται ότι:  $DE \parallel AB$ ,  $EZ \parallel AC$ .

Αν  $AE = x$ ,  $EG = 12$ ,  $BD = \psi$ ,  $DZ = 2x$ ,  $ZG = 4$ ,

Να υπολογίσετε τα  $x$ ,  $\psi$ .

**6**

Έστω τρίγωνο  $ABC$ . Προεκτείνουμε την  $BG$  προς το μέρος του  $B$  και του  $G$  και παίρνουμε σημεία  $K$ ,  $\Lambda$  αντίστοιχα τέτοια ώστε:  $BK = GL$ .

Από το  $K$  φέρνουμε παράλληλη στην  $AB$  και από το  $\Lambda$  παράλληλη στην  $AC$  που τέμνονται στο  $N$ . Αν η  $NA$  τέμνει την  $BG$  στο  $M$ , να δείξετε ότι:

$$\text{α)} \frac{MB}{BK} = \frac{MA}{AN}, \quad \text{β)} \frac{MG}{GL} = \frac{MA}{AN} \quad \text{γ)} \text{Το } M \text{ είναι μέσον του } BG.$$

## 1.4 Ομοιοθεσία

### α) Πώς ορίζουμε το ομοιόθετο ενός σημείου

Αν πάρουμε δύο σημεία  $O, A$  και στην γημευθεία  $OA$  πάρουμε ένα σημείο  $A'$  τέτοιο ώστε:  $OA' = \lambda \cdot OA$ , όπου  $\lambda > 0$ , τότε λέμε ότι το σημείο  $A'$  λέγεται **ομοιόθετο** του  $A$  με κέντρο το  $O$  και λόγο  $\lambda$ .



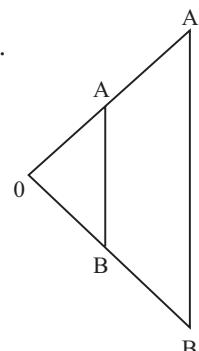
**Ομοιοθεσία** λέμε την διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σημείου με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$ . Το σημείο  $O$  λέγεται κέντρο ομοιοθεσίας, ενώ ο αριθμός  $\lambda$  λέγεται λόγος ομοιοθεσίας.

### β) Πώς ορίζουμε το ομοιόθετο ευθυγράμμου τμήματος.

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$

Για να βρούμε το ομοιόθετο του  $AB$  με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda > 0$ , βρίσκουμε τα ομοιόθετα  $A', B'$  των  $A, B$  αντίστοιχα με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda$ .

Τα ομοιόθετα τμήματα  $AB, A'B'$  έχουν λόγο ίσο με το λόγο της ομοιοθεσίας.



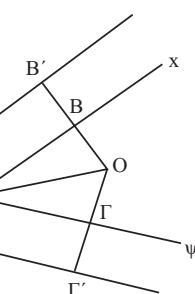
Δύο ομοιόθετα τμήματα ή θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή θα είναι παράλληλα

### γ) Πώς ορίζουμε το ομοιόθετο γωνίας.

Έστω έχουμε την γωνία  $x\text{A}\psi$  και θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετο της γωνίας με κέντρο  $O$  και λόγο  $\lambda > 0$ . Παίρνουμε ένα σημείο  $B$  στην πλευρά  $Ax$  και ένα σημείο  $\Gamma$  στην πλευρά  $A\psi$ .

Στην συνέχεια βρίσκουμε τα ομοιόθετα των  $A, B, \Gamma$  προς κέντρο το  $O$  και λόγο  $\lambda$ .

Αν  $A', B', \Gamma'$  είναι τα αντίστοιχα ομοιόθετα των  $A, B, \Gamma$  τότε η γωνία  $B'A'\Gamma'$  είναι η ομοιόθετη της  $BAG$  δηλ της  $x\text{A}\psi$ . Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ίσες.



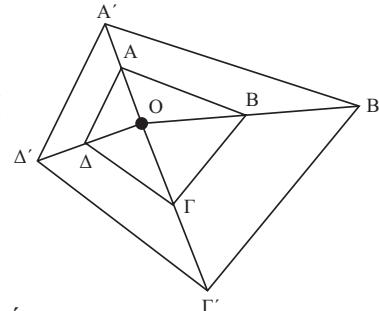
### δ) Πώς βρίσκουμε το ομοιόθετο πολυγώνου.

Έστω έχουμε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ . Αν βρούμε τα σημεία  $A', B', \Gamma', \Delta'$  τα οποία είναι τα ομοιόθετα των κορυφών  $A, B, \Gamma, \Delta$ , με κέντρο το σημείο  $O$  και λόγο  $\lambda > 0$  τότε το τετράπλευρο  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι το ομοιόθετο του  $AB\Gamma\Delta$ .

Οι πλευρές και οι γωνίες του  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι ομοιόθετες με τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες του  $AB\Gamma\Delta$ . Οπότε:  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = \lambda$  και  $\hat{A}' = \hat{A}$ ,  $\hat{B}' = \hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}'$

Αν το πολύγωνα  $\Pi'$  είναι ομοιόθετο του  $\Pi$  με λόγο  $\lambda > 0$  τότε το  $\Pi'$  είναι:

- a)** μεγέθυνση του  $\Pi$  όταν  $\lambda > 1$
- b)** συμίκρυνση του  $\Pi$  όταν  $0 < \lambda < 1$
- γ)** ίσο με το  $\Pi$  όταν  $\lambda = 1$

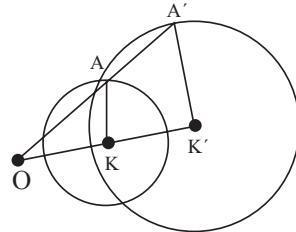


Αν δύο πολύγωνα είναι ομοιόθετα τότε ισχύει:

- a)** Έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- β)** Οι ανάλογες πλευρές που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.

### ε) Πώς βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός κύκλου.

Έστω κύκλος  $(K, \rho)$  και θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετο του κύκλου με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο  $O$  και λόγο  $\lambda > 0$ . Βρίσκουμε το το  $K'$  που είναι ομοιόθετο του κέντρο  $K$  με κέντρο το σημείο  $O$  και όγο  $\lambda$ . Στη συνέχεια παίρνουμε τυχαίο σημείο  $A$  στον κύκλο και βρίσκουμε το  $A'$  που είναι ομοιόθετο του  $A$  με κέντρο το  $O$  και λόγο  $\lambda$ . Έτσι ορίζεται ένας κύκλος που έχει κέντρο το  $K'$  και έχει ακτίνα  $\rho' = K'A'$ . Ο κύκλος  $(K', \rho')$  είναι ο ομοιόθετος του  $(K, \rho)$  με κέντρο το  $O$  και λόγο  $\lambda$ .



### Ερωτήσεις κατανόησης

#### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ )

- 1.** Το ομοιόθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι πάντα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο αρχικό.
- 2.** Αν μία γωνία είναι  $30^\circ$  τότε η ομοιόθετη της με λόγο  $\lambda = 2$  είναι  $60^\circ$ .
- 3.** Υπάρχει ομοιοθεσία με λόγο  $\lambda < 0$ .

4. Το ομοιόθετο ενός τετραγώνου δεν είναι πάντα τετράγωνο και εξαρτάται από το λόγο ομοιοθεσίας  $\lambda$ .
5. Αν σε μία ομοιοθεσία είναι  $\lambda = 1$  τότε τα δύο σχήματα συμπίπτουν.
6. Αν το πολύγωνο  $\Pi'$  είναι ομοιόθετο του  $\Pi$  με λόγο  $\lambda > 1$ , τότε το  $\Pi$  είναι σμίκρυνση του  $\Pi'$ .
7. Αν δύο κύκλοι είναι ομοιόθετοι τότε ο λόγος των ακτίνων είναι ίσος με το λόγο  $\lambda$  της ομοιοθεσίας.

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν ένα τετράγωνο έχει πλευρά 2cm. Τότε το ομοιόθετό του με κέντρο το σημείο  $A$  και λόγο  $\lambda = 3$ , έχει πλευρά
  - a.** 6 cm, **b.** 1,5 cm, **c.** 4cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω
2. Έστω η γωνία  $x\hat{O}\psi = 40^0$ . Η ομοιοθετή της με κέντρο το  $O$  και λόγο  $\lambda = 0,5$  έχει μέτρο.
  - a.**  $40^0$ , **b.**  $80^0$ , **c.**  $20^0$ , **d.** τίποτα από τα παραπάνω.
3. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο  $ABC$  έχει πλευρά  $a = 6\text{cm}$ . Η πλευρά του ομοιόθετου τριγώνου με λόγο  $\lambda = \frac{1}{3}$  θα είναι:
  - a.** 2, **b.** 3, **c.** 18, **d.** τίποτα από τα παραπάνω.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται τετράγωνο  $ABCD$  με πλευρά  $a = 2\text{cm}$ . Να σχεδιάσετε:
  - a)** Το ομοιόθετό του με κέντρο το  $A$  και λόγο 1
  - b)** Το ομοιόθετό του με κέντρο το  $B$  και λόγο 2
2. Δίνεται τρίγωνο ισόπλευρο με πλευρά  $a = 3\text{cm}$ . Να σχεδιάσετε:
  - a)** Το ομοιόθετό του με κέντρο το σημείο τομής των υψών και λόγο
  - b)** Να υπολογίσετε τις πλευρές του ομοιόθετου τριγώνου.

3

Δίνεται κύκλος ( $O, 2$ ). Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο κύκλο με κέντρο το σημείο  $K$  που είναι μέσον της ακτίνας  $OA$  και λόγο  $2$ .

4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $AB = 6 \text{ cm}$  και η διάμεσος  $AM$  είναι  $5 \text{ cm}$ , να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου με κέντρο το  $M$  και λόγο  $\lambda = 2$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές του ομοιόθετου τριγώνου.

5

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $AB = 4$ ,  $AG = 3$ .

Να σχεδιάσετε το ομοιόθετο του τριγώνου με κέντρο το  $B$ , λόγο  $\frac{1}{2}$  και να υπολογίσετε τις πλευρές του.

## 1.5 Ομοιότητα

### A Ομοια πολύγωνα

Δύο πολύγωνα  $\Pi$  και  $\Pi'$  που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου τα λέμε όμοια και τα συμβολίζουμε  $\Pi \approx \Pi'$ .

Έτσι αν δύο πολύγωνα είναι ομοιόθετα τότε είναι **όμοια**.

Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν: Έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα τότε δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές έχουν τον ίδιο λόγο και λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται λόγος ομοιότητας.

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. (Αυτό ισχύει διότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν οι ιδιότητες των ομοιόθετων σχημάτων)

Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους, διότι: Αν έχουμε ένα τετράπλευρο  $\text{AB}\Gamma\Delta$  και  $\text{A}'\text{B}'\Gamma'\Delta'$  το ομοιόθετο του με κέντρο Ο και λόγο  $\lambda$  τότε έχουμε:

$$\lambda = \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{A} \text{ B}} = \frac{\text{B}'\Gamma'}{\text{B} \Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma \Delta} = \frac{\Delta'\text{A}'}{\Delta \text{ A}} = \frac{\text{A}'\text{B}' + \text{B}'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'\text{A}'}{\text{A} \text{ B} + \text{B} \Gamma + \Gamma \Delta + \Delta \text{ A}} = \frac{\text{Περίμετρος } \Pi'}{\text{Περίμετρος } \Pi}$$

### Λόγος ομοιότητας - Κλίμακα

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μία γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση.

Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλίμακα του χάρτη και αναγράφεται πάνω στο χάρτη. Η κλίμακα του χάρτη είναι ο λόγος της απόστασης δύο σημείων στο χάρτη προς την πραγματική απόσταση των αντίστοιχων σημείων.

Για παράδειγμα όταν η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1:100.000, αυτό σημαίνει ότι η απόσταση 1 cm στο χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 100.000 cm = 1000m = 1km.

**Παρατήρηση:**

**Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.**

**B. Όμοια τρίγωνα**

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

- Αν δύο τρίγωνα τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και την γωνία που περιέχεται από αυτές ίση, τότε είναι όμοια.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

**Παρατήρηση:**

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε πρέπει να ξέρουμε να γράφουμε τους λόγους ομοιότητας. Για να γράψουμε τους λόγους ομοιότητας πρέπει να ξέρουμε την ισότητα των γωνιών. Έτσι έχουμε: Αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  έχουν  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{Z}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{E}$  τότε γράφουμε τα τρίγωνα με τα γράμματα να αντιστοιχούν στις ίσες γωνίες δηλ.,  $AB\Gamma$ ,  $\Delta ZE$ . Στην συνέχεια παίρνουμε τους λόγους ως εξής: Κάθε φορά ο αριθμητής θα σχηματίσετε με γράμματα από το ίδιο τρίγωνο και ο παρονομαστής με γράμματα από το άλλο τρίγωνο αλλά με την σειρά που πήραμε τα γράμματα στον αριθμητή δηλ.  $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$

**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****1**

Δίνεται τρίγωνο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

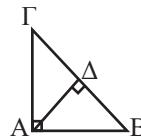
- Τα  $A\Gamma B$ ,  $A\Gamma\Delta$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.
- Τα  $A\Gamma B$ ,  $A\Delta B$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

**Λύση**

**α)** Τα τρίγωνα  $\text{ΑΓΔ}$ ,  $\text{ΑΒΓ}$  έχουν: 1)  $\hat{\text{Γ}}$  κοινή, 2)  $\hat{\text{ΓΑΒ}} = \hat{\text{ΑΓΔ}} = 90^\circ$ .

Άρα είναι όμοια (έχουν τις δύο γωνίες ίσες), οπότε:  $\text{ΓΑΔ} \approx \text{ΓΔΑ}$  και

$$\text{έχουμε: } \frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΑΔ}}$$



**β)** Τα τρίγωνα  $\text{ΑΔΒ}$ ,  $\text{ΑΓΒ}$  έχουν: 1)  $\hat{\text{Β}}$  κοινή, 2)  $\hat{\text{ΓΑΒ}} = \hat{\text{ΑΔΒ}} = 90^\circ$ .

Άρα είναι όμοια (έχουν τις δύο γωνίες ίσες), οπότε:  $\text{ΒΑΓ} \approx \text{ΒΔΑ}$  και

$$\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}}$$

**2** Δίνεται τρίγωνο  $\text{ΑΒΓ}$ . Αν το  $\text{Κ}$  είναι μέσον του  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{Λ}$  είναι το μέσον του  $\text{ΑΓ}$  και  $\text{Μ}$  είναι το μέσον του  $\text{ΒΓ}$ . Να δείξετε ότι τα  $\text{ΓΜΛ}$ ,  $\text{ΑΒΓ}$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας. Τα  $\text{ΒΚΜ}$ ,  $\text{ΜΛΓ}$  είναι όμοια

**Λύση**

Τα τρίγωνα  $\text{ΑΒΓ}$ ,  $\text{ΓΜΛ}$  έχουν:

**α)**  $\hat{\text{Γ}}$  κοινή, **β)**  $\text{ΜΛΓ} = \hat{\text{Α}}$  (ως εντός και επι τα αυτά). Άρα είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες. Έτσι έχουμε:  $\text{ΓΑΒ} \approx \text{ΓΛΜ}$  οπότε

$$\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΛ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΜ}}$$

Τα τρίγωνα  $\text{ΑΒΓ}$ ,  $\text{ΒΚΜ}$  έχουν:

**α)**  $\hat{\text{Β}}$  κοινή, **β)**  $\text{ΒΚΜ} = \hat{\text{Α}}$  (ως εντός και επι τα αυτά). Άρα είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες. Οπότε τα  $\text{ΒΚΜ}$ ,  $\text{ΜΛΓ}$  είναι όμοια διότι και τα δύο είναι όμοια στο τρίγωνο  $\text{ΑΒΓ}$

**3** Δύο τρίγωνα  $\text{ΑΒΓ}$  και  $\text{ΔΕΖ}$  είναι όμοια με  $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Δ}}$  και  $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Ε}}$ . Αν  $\text{ΑΒ} = 10\text{cm}$   $\text{ΒΓ} = 8\text{cm}$  και  $\text{ΑΓ} = 12\text{cm}$ . Το τρίγωνο  $\text{ΔΕΖ}$  έχει περίμετρο 15 cm.

Να βρείτε το λόγο ομοιότητας των τριγώνων και τις πλευρές του  $\text{ΔΕΖ}$ .

**Λύση**

Τα τρίγωνα είναι όμοια ώρα ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων. Έτσι έχουμε:  $\text{ΑΒΓ} \approx \text{ΔΕΖ}$  οπότε

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΒ} + \text{ΑΓ} + \text{ΒΓ}}{\text{ΔΕ} + \text{ΔΖ} + \text{ΕΖ}} = \frac{30}{15} = 2 \quad \text{Άρα ο λόγος ομοιότητας είναι:}$$

$$\lambda = 2. \text{ Οπότε } \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{10}{\text{ΔΕ}} = 2 \quad \text{ή} \quad 2\text{ΔΕ} = 20 \quad \text{ή} \quad \text{ΔΕ} = 10\text{cm}, \quad \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{12}{\text{ΔΖ}} = 2$$

$$\text{ή} \quad 2\text{ΔΖ} = 12 \quad \text{ή} \quad \text{ΔΖ} = 6\text{cm}, \quad \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{8}{\text{ΕΖ}} = 2 \quad \text{ή} \quad 2\text{ΕΖ} = 8 \quad \text{ή} \quad \text{ΕΖ} = 4\text{ cm}.$$

**A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

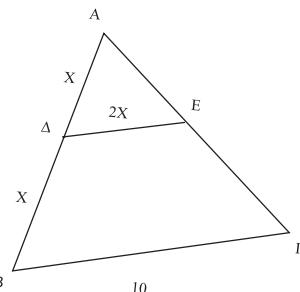
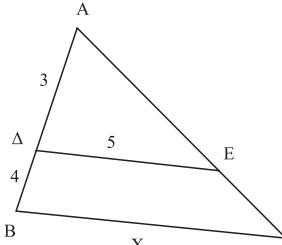
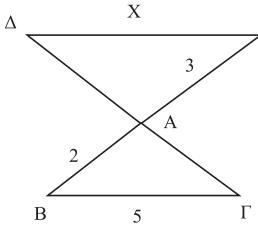
- 1.** Δύο ίσα τρίγωνα είναι όμοια.
- 2.** Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια.
- 3.** Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι πάντα όμοια.
- 4.** Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
- 5.** Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
- 6.** Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε είναι όμοια.
- 7.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες είναι όμοια.
- 8.** Δύο κανονικά πολύγωνα είναι πάντα όμοια.
- 9.** Δύο ορθογώνια που έχουν από μία οξεία γωνία ίση είναι όμοια.
- 10.** Ο λόγος των υψών δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας.
- 11.** Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
- 12.** Δύο παραλληλόγραμμα είναι πάντα όμοια.
- 13.** Ο λόγος ομοιότητας δύο ίσων τριγώνων είναι 0.

**B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

- 1.** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  με πλευρές:  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 8$ . Το τρίγωνο  $KLM$  είναι όμοιο με το  $ABC$  και έχει περίμετρο 48. Τότε η μεγαλύτερη πλευρά του  $KLM$  είναι:  
**a.** 20, **b.** 16, **c.** 12, **d.** τίποτα από τα παραπάνω
- 2.** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$ . Φέρνουμε τα ύψη του  $AZ$ ,  $BE$ . Το τρίγωνο  $BEF$  είναι όμοιο με το τρίγωνο:  
**a.**  $AZG$ , **b.**  $ABE$ , **c.**  $ABG$ , **d.** κανένα από τα προηγούμενα.
- 3.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρνουμε το ύψος  $AD$ . Αν  $BG = 10\text{cm}$ ,  $GD = 2\text{cm}$ . Τότε το ύψος  $AD$  είναι:  
**a.** 4 cm, **b.** 8 cm, **c.** 2 cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω.
- 4.** Αν στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα  $ABC$  και  $ADE$  είναι όμοια και  $A\Delta = 2\text{cm}$ ,  $\Delta B = 8\text{cm}$ ,  $BG = 16\text{cm}$  τότε η  $\Delta E$  είναι ίση με:  
**a.** 4cm, **b.** 8cm, **c.** 2cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1** **α)** Αν  $\Delta E \parallel BG$ , να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABG$ ,  $\Delta EZ$  είναι όμοια.  
**β)** Να βρείτε το  $x$  σε κάθε περίπτωση.



- 2** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$  με  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AG = 12\text{cm}$ . Πάνω στις  $AB$ ,  $AG$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  τέτοια ώστε:  $A\Delta = 2\text{ cm}$ ,  $AE = 3\text{cm}$ .
- α)** Να δείξετε ότι  $\Delta E \parallel BG$ .  
**β)** Τα τρίγωνα  $\Delta E$ ,  $ABG$  είναι όμοια.  
**γ)** Αν  $\Delta E = 4\text{cm}$ , να βρείτε την πλευρά  $BG$ .

- 3** Δίνεται το τρίγωνο  $ABG$ . Φέρνουμε τα ύψη  $A\Delta$ ,  $GE$  και  $BZ$ . Να δείξετε ότι:
- α)** Τα  $AB\Delta$ ,  $EBG$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.  
**β)** Τα  $AE\Gamma$ ,  $ABZ$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

- 4** Δίνεται τρίγωνο οξυγώνιο τρίγωνο  $ABG$ . Φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$ . Από τυχαίο σημείο  $M$  του  $BG$  φέρνουμε  $MK \perp AB$  και  $ML \perp AG$ . Να αποδείξετε ότι: **α)** Τα  $BKM$ ,  $AB\Delta$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.  
**β)** Τα  $A\Delta\Gamma$ ,  $MLG$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

- 5** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$ . Αν η διχοτόμος  $A\Delta$  τέμνει τον περιγεγραμένο κύκλο στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $\Delta EG$  είναι όμοια.  
**β)** Τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$ ,  $B\Delta E$  είναι όμοια.

- 6** Δίνεται τρίγωνο  $ABG$ . Φέρνουμε τον περιγγεγραμμένο κύκλο του. Αν  $A\Delta$  είναι το ύψος του και  $AE$  είναι διάμετρος, να δείξετε ότι τα  $AB\Delta$  και  $AE\Gamma$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

- 7** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος ομοιότητας αυτών είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών του τριγώνου.

- 8** Δίνεται παραλληλόγραμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από το  $A$  φέρνουμε ευθεία που τέμνει την  $B\Delta$  στο  $K$ , την  $\Delta\Gamma$  στο  $L$  και την προέκταση της  $BG$  στο  $M$ . Να αποδείξετε ότι: **α)** Τα τρίγωνα  $A\Delta K$ ,  $KBM$  είναι όμοια.  
**β)** Τα τρίγωνα  $\Delta KL$ ,  $AKB$  είναι όμοια.

## 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

Έστω ένα ορθογώνιο  $A B G \Delta$ , με διαστάσεις  $\alpha, \beta$ . Αν σχεδιάσουμε το ορθογώνιο  $A' B' G' \Delta'$  το οποίο είναι όμοιο με το αρχικό και έχουν λόγο λ τότε: οι διαστάσεις θα είναι:  $\lambda\alpha, \lambda\beta$  οπότε για τα εμβαδά έχουμε:

$$\frac{E_{A'B'G'\Delta'}}{E_{ABG\Delta}} = \frac{\lambda\alpha \cdot \lambda\beta}{\alpha \cdot \beta} = \lambda^2.$$

Γενικά για τα όμοια σχήματα ισχύει το συμπέρασμα:

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1**

Δίνεται τρίγωνο  $A B G$ . Πάνω στην  $A B$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A B = 2 A \Delta$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρνουμε παράλληλη στη  $B G$  που τέμνει την  $A G$  στο  $E$ . Να δείξετε ότι:

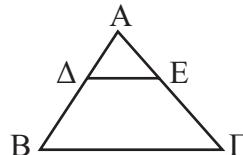
- a)** Τα τρίγωνα  $A \Delta E, A B G$  είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.
- b)** Αν το εμβαδόν του  $A \Delta E$  είναι  $10 \text{ cm}^2$ , να βρείτε το εμβαδόν του  $A B G$ .

#### Αύση

- a)** Τα τρίγωνα  $A B G, A \Delta E$ , έχουν:

- i)  $\hat{A}$  κοινή ii)  $\hat{B} = \hat{\Delta}$  (ως εντός και επι τα αυτά). Άρα είναι όμοια διότι έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες.

Οπότε :  $A B G \approx A \Delta E$  άρα :  $\frac{A B}{A \Delta} = \frac{B G}{\Delta E} = \frac{A G}{A E} = \lambda$  ή  $\lambda = \frac{A B}{A \Delta} = \frac{2 A \Delta}{A \Delta} = 2$



- b)** Για τα εμβαδά ισχύει :  $\frac{(A B G)}{(A \Delta E)} = \lambda^2$  ή  $\frac{(A B G)}{10} = 2^2$  ή  $(A B G) = 40 \text{ cm}^2$

**2**

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.

#### Αύση

Έστω  $\alpha$  είναι η πλευρά του τετραγώνου και  $E$  είναι το εμβαδόν του. Τότε η πλευρά του θα γίνει  $\alpha' = \alpha + 0,3\alpha = 1,3\alpha$ . Τα τετράγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1,3\alpha}{\alpha} = 1,3$ . Για τα εμβαδά θα ισχύει:

$$\frac{E'}{E} = \lambda^2 \quad \text{ή} \quad \frac{E'}{E} = 1,3^2 \quad \text{ή} \quad E' = 1,69E \quad \text{Οπότε η αύξηση είναι: } E' - E = 0,69 = 69\%$$

## Ερωτήσεις κατανόησης

### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων των σχημάτων.
2. Ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι 4. Τότε ο λόγος των πλευρών τους είναι 2.
3. Δύο κύκλοι είναι πάντα ομοιοί.
4. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6cm, 3cm. Τότε είναι ίσο με ένα άλλο ορθογώνιο με κάθετες 8cm και 4 cm.
5. Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες  $r_1 = 3\text{cm}$ ,  $r_2 = 6\text{ cm}$  τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι 4.
6. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 20% τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 40%.

### B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν τετραπλάσιο ενός άλλου με πλευρά 5cm. Τότε η πλευρά του είναι:  
 α. 10 cm, β. 5 cm, γ. 20 cm, δ. τίποτα από τα παραπάνω
2. Ένα τετράπλευρο έχει εμβαδό  $50\text{cm}^2$ . Αν τριπλασιαστούν οι πλευρές του, τότε το νέο πολύγωνο θα έχει εμβαδό:  
 α.  $450\text{ cm}^2$ , β.  $150\text{ cm}^2$ , γ.  $100\text{cm}^2$  δ. τίποτα από τα παραπάνω
3. Σε ένα τοπογραφικό σχέδιο ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου, παραλληλογράμμου με πλευρές 20cm και 15cm. Αν η κλίμακα είναι 1: 100, το οικόπεδο έχει εμβαδόν.  
 α.  $300\text{ m}^2$ , β.  $200\text{ m}^2$ , γ.  $100\text{m}^2$  δ. τίποτα από τα παραπάνω

- 1** Στο τρίγωνο  $ABC$  η  $\Delta E // BG$ . Αν  $\Delta E = 3$ ,  $BG = 9$  και  $(ABC) = 100\text{cm}^2$ , να βρείτε το  $(ADE)$ .
- 2** Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου μειωθεί κατά 30%, να βρείτε πόσο θα μειωθεί το εμβαδόν του.
- 3** Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου αυξήθηκαν κατά 110% (διότι ο ιδιοκτήτης (αγόρασε και τα διπλανά οικόπεδα). Να βρείτε πόσο % αυξήθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.
- 4** Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10 cm. Να βρείτε την πλευρά του ισοπλεύρου το οποίο έχει το τετραπλάσιο εμβαδόν.
- 5** Σε τρίγωνο  $ABC$  φέρνουμε  $\Delta E // BG$ . Αν  $AD = 2$ ,  $DB = x + 2$  και  $\frac{(ADE)}{(ABG)} = \frac{1}{9}$ , να βρείτε το  $x$ .

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$  ( $AB = AC$ ), με  $BG = 12$  cm. Παίρνουμε στη βάση σημείο  $K$  τέτοιο ώστε:  $BK = 5$  KG. Από το  $K$  φέρνουμε:  $K\Delta \perp AG$  και  $KE \perp AB$ . Να δείξετε ότι:
- a)** Τα τρίγωνα  $K\Delta G$ ,  $KEB$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.
  - b)** Αν το τρίγωνο  $KEB$  έχει εμβαδόν  $100\text{cm}^2$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $K\Delta G$ .
- 2** Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 2 cm και 6 cm. Ένα δεύτερο ορθογώνιο είναι όμοιο με το αρχικό και έχει διαγώνιο 15 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του δευτέρου ορθογωνίου.  
(Διαγωνισμός E.M.E.)
- 3** Ένα κανονικό δεκάγωνο έχει πλευρά 8cm και εμβαδόν  $100\text{cm}^2$ . Ένα άλλο κανονικό δεκάγωνο έχει περίμετρο 40cm. Αποδείξτε ότι:
- a)** Τα δύο πολύγωνα είναι όμοια.
  - b)** Το εμβαδόν του δευτέρου πολυγώνου είναι  $25 \text{ cm}^2$ .

- 4** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω Κ μέσον του ΑΒ και Λ μέσο του ΑΓ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΚΛ διχοτομεί την ΑΜ.
- 5** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν το Κ είναι το μέσο του ΑΒ, το Λ είναι μέσο του ΓΔ, το Μ είναι μέσο του της διαγωνίου ΑΓ και το Ν είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το ΚΜΛΝ είναι παραλληλόγραμμο.
- 6** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB // \Gamma\Delta$ ). Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων φέρνουμε // στις βάσεις που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την ΒΓ στο Ζ.  
Να δείξετε ότι:  
 α) Τα τρίγωνα ΕΔΟ, ΑΒΓ είναι όμοια.  
 β) Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΑΒΓ είναι όμοια.  
 γ)  $EO = OZ$

## 1<sup>ο</sup> Κριτήριο Αξιολόγησης

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

- α) Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.  
 β) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.  
 γ) Τι λέμε ομοιοθεσία;

### Θέμα 2<sup>ο</sup>

- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ( $AB < AG$ ). Προεκτείνω τη διάμεσο ΑΜ και παίρνουμε τμήμα  $M\Delta = AM$ . Να δείξετε ότι:  
 α) Τα τρίγωνα  $ABM, M\Delta G$  είναι ίσα.  
 β)  $B\Delta = AG$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

- α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω ΑΔ διχοτόμος. Φέρνουμε  $BE \perp AD$  και  $\Gamma Z \perp AD$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE, \Gamma ZG$  είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.  
 β) Να βρείτε πόσα  $cm^2$  σε χάρτη κλίμακας 1:100 αντιστοιχούν σε έναν αγρό 10 στρεμμάτων.

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

- α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η  $\Delta E // BG$ . Αν  $\Delta E = 3, \Delta B = 9$  και  $(\Delta B\Gamma) = 100cm^2$ , να βρείτε το  $(\Delta DE)$ .  
 β) Ένα κανονικό δεκάγωνο έχει πλευρά 8cm και εμβαδόν 100cm<sup>2</sup>. Ένα άλλο κανονικό δεκάγωνο έχει περίμετρο 40cm. Αποδείξτε ότι: Το εμβαδόν του δευτέρου πολυγώνου είναι 25 cm<sup>2</sup>.

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α)** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.  
**β)** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.  
**γ)** Ποια τρίγωνα λέγονται ίσα.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 8\text{cm}$ ,  $AG = 12\text{cm}$ . Πάνω στις ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε:  $AD = 2\text{ cm}$ ,  $AE = 3\text{ cm}$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $\Delta E \parallel BG$ .  
**β)** Τα τρίγωνα  $ADE$ ,  $ABG$  είναι όμοια.  
**γ)** Αν  $DE = 4\text{cm}$ , να βρείτε την πλευρά  $BG$ .

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται τραπέζιο  $ABΓΔ$  ( $AB \parallel ΓΔ$ ). Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων φέρουμε  $\parallel$  στις βάσεις που τέμνει την  $ΑΔ$  στο  $E$  και την  $BΓ$  στο  $Z$ .

Να δείξετε ότι:

- α)** Τα  $EDO$ ,  $ABΓ$  είναι όμοια.  
**β)** Τα  $OZΓ$ ,  $ABΓ$  είναι όμοια.  
**γ)**  $EO = OZ$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$ . Προεκτείνουμε την  $BΓ$  προς το μέρος του  $B$  και του  $Γ$  και παίρνουμε σημεία  $K$ ,  $L$  αντίστοιχα τέτοια ώστε:  $BK = GL$ .

Από το  $K$  φέρουμε παράλληλη στην  $AB$  και από το  $L$  παράλληλη στην  $ΑΓ$  που τέμνονται στο  $N$ . Αν η  $NA$  τέμνει την  $BΓ$  στο  $M$ , να δείξετε ότι:

- α)**  $\frac{MB}{BK} = \frac{MA}{AN}$  , **β)**  $\frac{MG}{GL} = \frac{MA}{AN}$  **γ)** Το  $M$  είναι μέσον του  $BΓ$

## 1.1 Ισότητα τριγώνων

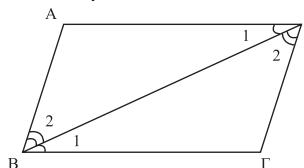
1. Έχουν: **α)**  $AB = AE$ , **β)**  $A\Delta = A\Gamma$ , **γ)**  $EA\Delta = BA\Gamma$ , άρα ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ )  
 $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ ,  $B\Gamma = E\Delta$
2. Δεν είναι ίσα διότι η γωνία δεν είναι η περιεχόμενη.
3. Έχουν: **α)**  $B\Gamma = EZ$ , **β)**  $\hat{B} = \hat{E} = 80^\circ$  **γ)**  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$  (έχουν τις δύο γωνίες ίσες  
άρα θα έχουν και την τρίτη ίση), άρα είναι ίσα ( $\Gamma - \Pi - \Gamma$ ) οπότε:  
 $AB = \Delta E$ ,  $A\Gamma = \Delta Z$
4. Τα  $AB\Gamma = K\Lambda M$  διότι: στο  $K\Lambda M$   $\hat{M} = 45^\circ$ , άρα έχουν:  
**α)**  $\hat{B} = \hat{\Lambda} = 60^\circ$ , **β)**  $\hat{\Gamma} = \hat{M} = 45^\circ$  **γ)**  $B\Gamma = \Lambda M$
5. Όχι. Διότι έχουν δύο ίσες πλευρές, δεν έχουν όμως τις προσκείμενες γωνίες ίσες.
6. Είναι ίσα διότι έχουν τις πλευρές τους ίσες  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{Z}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{E}$ .
- 7.

<b>α</b>	<b>β</b>	<b>γ</b>	<b>δ</b>	<b>ε</b>	<b>στ</b>
<b>Λ</b>	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>	<b>Σ</b>	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>

8. Είναι ίσα διότι: είναι ορθογώνια, έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.
9. Ίσα είναι τα:  $AB\Gamma$ ,  $K\Lambda M$  διότι είναι ορθογώνια, έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην κάθετη ίσες.
10. Δεν είναι ίσα διότι πρέπει να έχουν ίσες δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες (δύο κάθετες, ή κάθετη και υποτείνουσα).
11. Είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

## Προτεινόμενες ασκήσεις - προβλήματα

1. Τα τρίγωνα  $\Delta ABC$ ,  $\Delta AEG$  έχουν: **a)**  $AB = AG$ , **b)**  $\Delta AD = AE$  **c)**  $\hat{B}\hat{\Delta}D = \hat{E}\hat{A}G$  (ως κατακορυφήν). Άρα είναι ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, επομένως:  $\Delta D = GE$
2. Τα τρίγωνα  $\Delta OBC$ ,  $\Delta OAC$  έχουν: **a)**  $OB = OA$ , **b)**  $O\Delta$  κοινή **c)**  $\hat{O}\hat{B}\hat{C} = \hat{O}\hat{A}\hat{C}$  (διότι η  $O\Delta$  είναι διχοτόμος). Άρα είναι ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως:  $\Delta A = \Delta C$
3. Τα τρίγωνα  $\Delta ABC$ ,  $\Delta AGE$  έχουν: **a)**  $AB = AG$ , **b)**  $\Delta BD = \Delta GE$  **c)**  $\hat{B} = \hat{G}$ . Άρα είναι ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως:  $A\Delta = AE$
4. Τα τρίγωνα  $\Delta OAD$ ,  $\Delta OBG$  έχουν: **a)**  $OA = OG$ , **b)**  $OB = OD$ , **c)**  $\hat{O}$  κοινή. Άρα είναι ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως:  $\Delta BG = \Delta AD$
5. Τα τρίγωνα  $\Delta AZE$ ,  $\Delta BZD$  έχουν: **a)**  $AZ = BD = 3\text{cm}$ , **b)**  $AE = BZ$  ως διαφορά ίσων τμημάτων, **c)**  $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$ , άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ) οπότε:  $ZD = ZE$  (1). Τα τρίγωνα  $\Delta AZE$ ,  $\Delta DEG$  έχουν: **d)**  $GE = AZ$ , **e)**  $AE = GD$  ως διαφορά ίσων τμημάτων **f)**  $\hat{A} = \hat{G} = 60^\circ$  άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ) οπότε:  $ZE = ED$  (2). Από (1) και (2)  $ZD = DE = ZE$  δηλ. το  $ZDE$  είναι ισοπλευρο.
6. Τα τρίγωνα  $\Delta AFG$ ,  $\Delta ABE$  έχουν: **a)**  $AB = AF$ , **b)**  $A\Delta = AE$  (άθροισμα ίσων τμημάτων) **c)**  $\hat{A}$  κοινή. Άρα είναι ίσα ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως  $\hat{D} = \hat{E}$ .
7. Τα τρίγωνα  $\Delta AFG$ ,  $\Delta ABG$  έχουν: **a)**  $\hat{A}\hat{\Delta}G = \hat{G}\hat{A}B$ , **b)**  $A\Delta$  κοινή **c)**  $\hat{B}\hat{G}\hat{A} = \hat{A}\hat{G}\hat{D}$  Άρα είναι ίσα ( $\Gamma-\Pi-\Gamma$ ) οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα επομένως  $A\Delta = AB$  και  $BG = \Delta G$
8. Τα τρίγωνα  $\Delta ABC$ ,  $\Delta BGD$  έχουν: **a)**  $B\Delta$  κοινή, **b)**  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  (ως εντός εναλλάξ) **c)**  $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$  (ως εντός εναλλάξ). Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ). Οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα δηλ  $A\Delta = BG$ ,  $AB = \Delta D$ . Άρα οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες .



- 9.** **a)** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A'B'\Delta'$  έχουν: **1)**  $A\Delta = A'\Delta'$ , **2)**  $\hat{B}\Delta\Gamma = \hat{B}'\Delta'\Gamma' = 70^\circ$   
**3)**  $\hat{B}\Delta\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta' = 30^\circ$ . Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Gamma$ -Π- $\Gamma$ ). Άρα θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα οπότε  $AB = A'B'$ .
- b)** Από την προηγούμενη ισότητα έχουμε ότι:  $\hat{B} = \hat{B}'$ . Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  έχουν: **1)**  $AB = A'B'$ , **2)**  $\hat{B} = \hat{B}'$ , **3)**  $\hat{B}\Delta\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta'$ . Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Gamma$ -Π- $\Gamma$ ).
- 10.** Τα τρίγωνα  $OAB$ ,  $O\Gamma A$  έχουν: **a)**  $OB = O\Gamma$  (ακτίνες του ίδιου κύκλου)  
**b)**  $AB = \Gamma A$  (υπόθεση), **γ)**  $OA$  κοινή. Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Π- $\Pi$ ).
- 11.** Τα τρίγωνα  $OAB$ ,  $O\Gamma A$  έχουν: **a)**  $OB = O\Gamma$  (ακτίνες του ίδιου κύκλου)  
**β)**  $OA$  κοινή, **γ)**  $AB = \Gamma A$  (ακτίνες του ίδιου κύκλου). Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Π- $\Pi$ ). Οπότε θα έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $\hat{B}\hat{O}A = \hat{\Gamma}OA$ , οπότε η  $OA$  είναι διχοτόμος της  $\hat{B}\hat{\Gamma}A$ .
- 12.** Τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$  έχουν: **a)**  $AB = \Gamma A$ , **β)**  $B\Delta = \Delta\Gamma$ , **γ)**  $A\Delta$  κοινή.  
Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Π- $\Pi$ ), οπότε θα έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Delta$  και  $\hat{B}\hat{\Delta}A = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Gamma$ , άρα η  $A\Delta$  διχοτομεί τις γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{\Delta}$
- 13.** **a)** Τα τρίγωνα  $ABM$ ,  $A'B'M'$  έχουν: **1)**  $AB = A'B'$ , **2)**  $AM = A'M'$ ,  
**3)**  $BM = B'M'$ . Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Π- $\Pi$ ), οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα άρα  $\hat{B} = \hat{B}'$ .
- β)** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  έχουν: **1)**  $AB = A'B'$ , **2)**  $B\Gamma = B'\Gamma'$ , **3)**  $\hat{B} = \hat{B}'$   
άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ - $\Gamma$ - $\Pi$ ).
- 14.** **a)** Τα τρίγωνα  $B\Delta M$ ,  $M\Gamma E$  έχουν: **1)**  $BM = M\Gamma$ , **2)**  $B\Delta = \Gamma E$ , **3)**  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$   
άρα τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ - $\Gamma$ - $\Pi$ ) οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Έτσι  $M\Delta = ME$ .
- β)** Τα τρίγωνα  $A\Delta M$ ,  $A\Gamma E$  έχουν: **1)**  $A\Delta = A\Gamma$  ως διαφορά ίσων πλευρών.  
**2)**  $AM$  κοινή, **3)**  $M\Delta = ME$  (από a). Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi$ -Π- $\Pi$ ).
- 15.** Τα τρίγωνα  $A\Delta B$ ,  $A\Gamma E$  έχουν: **a)**  $A\Delta = A\Gamma$  **β)**  $AB = AE$  **γ)** είναι ορθογώνια.

Άρα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες. Οπότε  $B\Delta = \Gamma E$ .

16. Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Gamma$ ,  $A\Delta\Gamma$  έχουν: **a)**  $AB = A\Delta$ , **b)**  $A\Gamma$  κοινή **γ)** είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι: είναι ορθογώνια, έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Άρα  $AB = A\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = \Gamma B$ , άρα η  $A\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $B\Delta$ .
17. Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta E$  έχουν: **a)**  $B\Delta$  κοινή. **b)**  $A\Delta = \Delta E$  (διότι το  $\Delta$  είναι σημείο της διχοτόμου, άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές) **γ)** είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι: είναι ορθογώνια και έχουν τις αντίστοιχες πλευρές ίσες. Οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα άρα  $AB = BE$ .
18. Φέρνουμε τις  $AK$ ,  $B\Lambda$  κάθετες στην ( $\varepsilon$ ). Τα τρίγωνα  $AKM$ ,  $B\Lambda M$  έχουν:
  - a)**  $AM = MB$ , **b)**  $\hat{A}MK = \hat{B}\hat{M}\Lambda$  ως κατακορυφήν, **γ)** είναι ορθογώνια.
 Άρα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα  $AK = B\Lambda$ .
19. **a)** Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$ ,  $A'B'\Delta'$  έχουν: **1)**  $AB = A'B'$ , **2)**  $A\Delta = A'\Delta'$ , **3)** είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες. Οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα  $\hat{B} = \hat{B}'$ .
   
**b)** Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Gamma$ ,  $A'B'T'$  έχουν: **1)**  $AB = A'B'$ , **2)**  $\hat{B} = \hat{B}'$ , **3)**  $\hat{A} = \hat{A}'$ . Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ).
20. Τα τρίγωνα  $\Gamma ON$ ,  $AOM$  έχουν: **a)**  $O\Gamma = OA$ , **b)** είναι ορθογώνια **γ)**  $\Gamma N = AM$  (διότι τα  $O\Gamma N$ ,  $OAB$  είναι ισοσκελή και  $ON$ ,  $OM$  ύψη και διάμεσοι)
   
Άρα είναι ίσα. Οπότε  $OM = ON$ .
   
Αν  $ON = OM$  τότε τα  $O\Gamma N$ ,  $OAM$  είναι ίσα (είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση) οπότε  $\Gamma N = AM$  άρα  $\Gamma\Delta = AB$
21. Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Gamma$ ,  $A\Gamma\Delta$  έχουν: **a)**  $AB = A\Delta$ , **b)**  $AB$  κοινή, **γ)**  $\hat{A}\Gamma B = \hat{A}\Delta B = 90^\circ$  διότι είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

## 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

### Ερωτήσεις κατανόησης

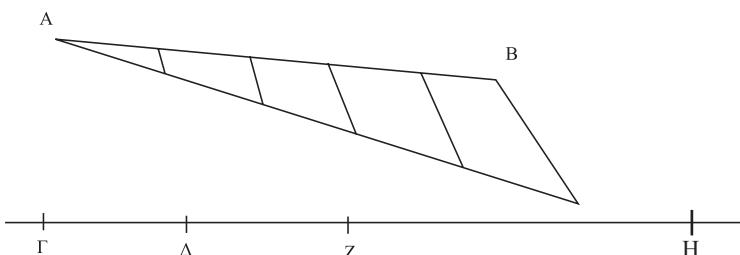
- Iσχύει:  $\frac{4}{4} = \frac{5}{x}$  ή  $4x = 20$  ή  $x = 5$ .
- Επειδή  $BB' // \Gamma\Gamma' // \Delta\Delta'$  και  $AG' = \Gamma'\Delta' = \Delta'B'$ , θα ισχύει  $AG = \Gamma\Delta = 4 = \Delta B$ , άρα  $AB = 12$  cm.
- Av η EZ ήταν παράλληλη στις βάσεις τότε:  $\frac{AE}{ED} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$  ή  $\frac{4}{4} = \frac{5}{6}$  άτοπο
- a)**  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4}{12}$ , **β)**  $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{12}{4}$ , **γ)**  $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{16}$ , **δ)**  $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{12}{16}$
- a)**  $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{1}{3}$ , **β)**  $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{2}{3}$ , **γ)**  $\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{1}{2}$ , **δ)**  $\frac{AE}{B\Gamma} = 4$ , **ε)**  $\frac{A\Gamma}{GE} = 1$
- |           |           |           |           |           |            |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| <b>α)</b> | <b>β)</b> | <b>γ)</b> | <b>δ)</b> | <b>ε)</b> | <b>στ)</b> | <b>ζ)</b> |
| $\Sigma$  | $\Lambda$ | $\Sigma$  | $\Sigma$  | $\Lambda$ | $\Sigma$   | $\Sigma$  |
- Δίκιο είχε η Ελένη.

### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Iσχύει:  $\frac{AD}{BE} = \frac{\Delta H}{E\Theta}$ , επειδή  $AD = \Delta H$  πρέπει:  $BE = E\Theta$  άρα  $3 = x$ .

Iσχύει:  $\frac{BE}{GZ} = \frac{E\Theta}{ZI}$  ή  $\frac{3}{\psi} = \frac{3}{4}$ , άρα  $\psi = 4$ .

- a)**



β)

$$\text{i)} \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{2}{5}, \text{ ii)} \frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{4}{5}AB}{\frac{2}{5}AB} = 2, \text{ iii)} \frac{AB}{ZH} = \frac{AB}{\frac{6}{5}AB} = \frac{5}{6}, \text{ iv)} \frac{ZH}{\Delta Z} = \frac{\frac{6}{5}AB}{\frac{4}{5}AB} = \frac{3}{2}$$

$$\text{v)} \frac{\Gamma\Delta}{ZH} = \frac{\frac{2}{5}AB}{\frac{6}{5}AB} = \frac{1}{3}$$

3. Στο ορθογώνιο  $AB\Gamma$  έχουμε:  $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$  ή  $B\Gamma^2 = 2^2 + 1^2$  ή  $B\Gamma = \sqrt{5}$

$$\text{a)} \frac{AB}{A\Gamma} = 2, \text{ b)} \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ c)} \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

4. Υπολογίζω την  $A\Gamma$ .  $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$  ή  $A\Gamma^2 = 100 - 36$  ή  $A\Gamma^2 = 64$  ή  $A\Gamma = 8$ .

Οπότε a)  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10}$ , b)  $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{8}{10}$ , c)  $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8}$

5. Έστω  $AB\Gamma$  το ισόπλευρο. Φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$ . Στο ορθογώνιο  $AB\Delta$  έχουμε  $A\Delta^2 = AB^2 - \Delta B^2$  ή  $A\Delta^2 = 4^2 - 2^2$  ή  $A\Delta^2 = 12$  ή  $A\Delta = \sqrt{12}$  ή  $A\Delta = 2\sqrt{3}$

Οπότε  $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. a) Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το  $M$  είναι μέσον του  $A\Gamma$  και  $EM$  παράλληλο στην  $B\Gamma$  οπότε το  $E$  είναι μέσον του  $AB$ . Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  το  $M$  είναι μέσον του  $A\Gamma$  και  $MZ$  είναι παράλληλη στην  $A\Delta$  άρα  $Z$  μέσον του  $\Delta\Gamma$ .

b) Επειδή  $\frac{AB}{AE} = \frac{2AE}{AE} = 2$  και  $\frac{A\Gamma}{AM} = \frac{2AM}{AM} = 2$  Άρα  $\frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{AM}$

7. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  η  $BM$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα οπότε  $BM = \frac{A\Gamma}{2}$  (1). Στο ορθογώνιο  $A\Delta\Gamma$  η  $\Delta M$  είναι διάμεσος στην υποτείνουσα οπότε:  $\Delta M = \frac{A\Gamma}{2}$  (2). Από (1) και (2)  $BM = \Delta M$

8. Από το μέσον  $K$  της  $A\Delta$  φέρνουμε // στην  $AB$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $K$ . Τότε  $BK = K\Gamma$  άρα η περίμετρος υπολογίζεται

### 1.3 Θεώρημα Θαλή

#### Ερωτήσεις κατανόησης

1. α)  $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{3}{6}$ , β)  $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{4}{10}$ , γ)  $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{7}{13}$

2.

α)	β)	γ)	δ)
Σ	Λ	Λ	Σ

3. Είναι λάθος. Αν ήταν παράλληλη τότε:  $\frac{AE}{BZ} = \frac{E\Delta}{Z\Gamma}$  ή  $\frac{4}{5} = \frac{6}{7}$  ή  $28 = 30$  áτοπο

4. α)  $\frac{OB}{B\Gamma} = \frac{OB'}{B'\Gamma'} = \frac{4}{2} = 2$ , β)  $\frac{B\Gamma}{O\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{O\Gamma'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , γ)  $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{3}{4}$ , δ)  $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{7}{2}$

5.

α	β	γ
3	1	4

#### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.  $\frac{AE}{BZ} = \frac{E\Delta}{Z\Gamma}$  ή  $\frac{6}{BZ} = \frac{12}{14}$  ή  $12 \cdot BZ = 14 \cdot 6$  ή  $BZ = 7$

2. Έστω  $BZ = x$ , τότε  $Z\Gamma = 8-x$ , οπότε:  $\frac{AE}{BZ} = \frac{E\Delta}{Z\Gamma}$  ή  $\frac{4}{x} = \frac{6}{8-x}$  ή  $6x = 4(8-x)$  ή  $6x = 32 - 4x$  ή  $6x + 4x = 32$  ή  $10x = 32$  ή  $x = 3,2$ . Οπότε  $BZ = 3,2$ ,  $Z\Gamma = 4,8$ .

3. Ισχύει:  $\frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{E\Gamma}$  ή  $\frac{x}{18} = \frac{8}{x}$  ή  $x^2 = 8 \cdot 18$  ή  $x = 12$

4. Ισχύει:  $\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$  ή  $\frac{21}{O\Gamma} = \frac{14}{10}$  ή  $14O\Gamma = 210$  ή  $O\Gamma = \frac{210}{14}$  ή  $O\Gamma = 15$

Ισχύει:  $\frac{O\Gamma}{OE} = \frac{\Gamma\Delta}{EZ}$  ή  $\frac{15}{18} = \frac{10}{EZ}$  ή  $15EZ = 180$  ή  $EZ = \frac{180}{15}$  ή  $EZ = 12$

5. Το  $B\Delta E Z$  είναι παραλληλόγραμμο διότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, οπότε:  $B\Delta = EZ = 4$ .

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{AE} = \frac{B\Delta}{EG} \text{ ή } \frac{5}{x} = \frac{4}{6} \text{ ή } 4x=30 \text{ ή } x=7,5$$

6. Ισχύει:  $\frac{OA}{OL} = \frac{OB}{OK}$  ή  $\frac{12}{10} = \frac{18}{OK}$  ή  $12 \cdot OK = 180$  ή  $OK = 15$ .

$$\text{Ισχύει: } \frac{OL}{OK} = \frac{\Lambda\Delta}{K\Gamma} \text{ ή } \frac{10}{15} = \frac{6}{K\Gamma} \text{ ή } 10 \cdot K\Gamma = 90 \text{ ή } K\Gamma = 9$$

7.

$$\text{Ισχύει: } \frac{AZ}{Z\Delta} = \frac{AE}{EG} \text{ ή } \frac{18-x}{x} = \frac{8}{12} \text{ ή } 12(18-x) = 8x \text{ ή } 216 - 12x = 8x \text{ ή } 20x = 216$$

$$\text{ή } x = 10,8. \text{ Ακόμη: } \frac{AE}{AH} = \frac{EG}{HB} \text{ ή } \frac{8}{\psi} = \frac{12}{9} \text{ ή } 12\psi = 72 \text{ ή } \psi = 6$$

8. Αν ήταν οριζόντια τότε:  $\frac{OA}{OB} = \frac{OG}{OD}$  ή  $\frac{34}{68} = \frac{28}{65}$  άτοπο.

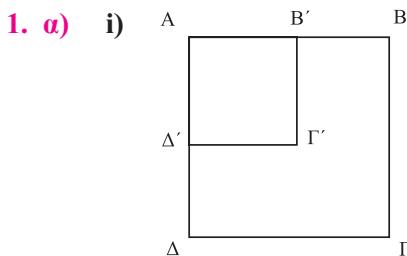
## 1.4 Ομοιοθεσία

### Ερωτήσεις κατανόησης

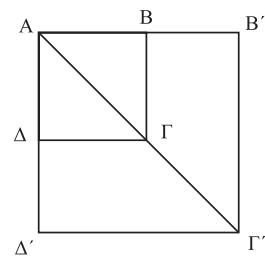
1. **a)** E, **b)** Δ, **c)** A, **d)** Γ
2. Στο  $1^0$  και  $3^0$  τα πολύγωνα είναι ομοιόθετα ενώ στο  $2^0$  δεν είναι.
- 3.

Ευθύγραμμο τμήμα	Κέντρο ομοιοθεσίας	Λόγος ομοιοθεσίας	Ομοιόθετο τμήματος
KP	A	3	BΓ
PN	Γ	$\frac{1}{2}$	ΣΜ
ΣΜ	Γ	3	ΑΔ
BΓ	A	$\frac{1}{3}$	KP
BΛ	B	3	BA

**1. a)**



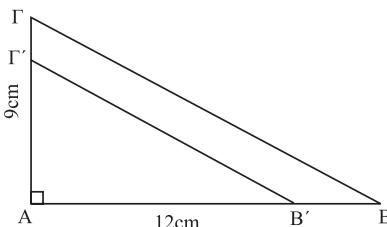
ii)



**b) i)** Τα τετράγωνα είναι όμοια με  $\lambda = \frac{1}{2}$  άρα  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$  ή  $\frac{AB}{A'B'} = 2$  ή  $AB = \frac{3}{2}$

**ii)** Τα τετράγωνα είναι όμοια με  $\lambda = 2$  άρα  $\frac{A'B'}{AB} = 2$  cm ή  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$  ή  $AB = 6$  cm

**2**



Τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{2}{3}$   
 $\lambda = \frac{A'B'}{AB} = \frac{AG'}{AG} = \frac{B'G'}{BG} = \frac{2}{3}$

Οπότε:  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{3}$  ή  $\frac{A'B'}{12} = \frac{2}{3}$  ή  $A'B' = 8$  cm

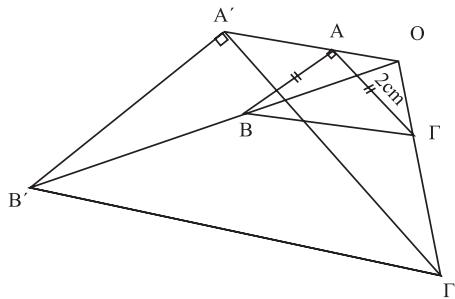
$\frac{A'G'}{AG} = \frac{2}{3}$  ή  $\frac{A'G'}{9} = \frac{2}{3}$  ή  $A'G' = 6$  cm

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα  $BG^2 = AB^2 + AG^2$  ή

$$\text{ή } BG^2 = 12^2 + 9^2 \text{ ή } BG^2 = 225 \text{ άρα } BG = 15 \text{ cm}$$

Οπότε  $\frac{B'G'}{BG} = \frac{2}{3}$  ή  $\frac{B'G'}{15} = \frac{2}{3}$  ή  $B'G' = 10$  cm

3.



Τα τρίγωνα  $A'B'\Gamma'$ ,  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο  $\lambda = 3$

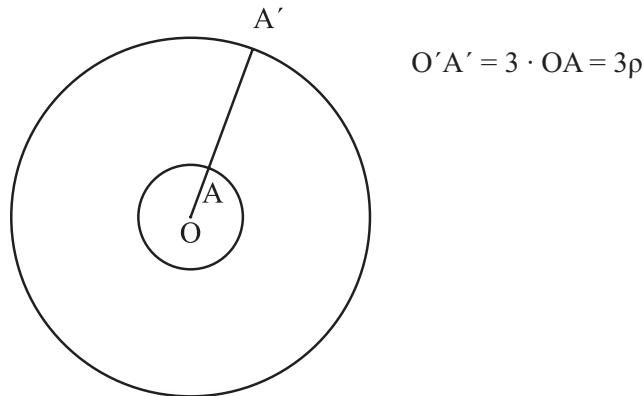
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:  $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$  ή  $B\Gamma^2 = 4 + 4$  ή  $B\Gamma = \sqrt{8}$   
 ή  $B\Gamma = 2\sqrt{2}$ .  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$  Άρα  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 3$

Οπότε  $\frac{A'B'}{AB} = 3$  ή  $A'B' = 3 \cdot 2$  ή  $A'B' = 6$

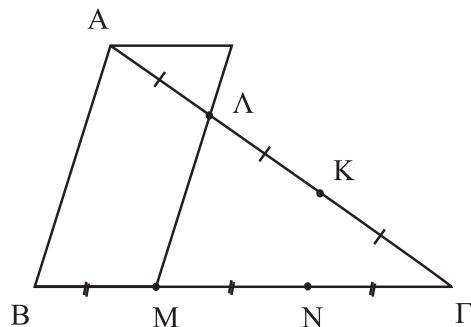
$\frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = 3$  ή  $A'\Gamma' = 3 \cdot 2$  ή  $A'\Gamma' = 6$

$\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 3$  ή  $B'\Gamma' = 3 \cdot 2\sqrt{2}$  ή  $B'\Gamma' = 6\sqrt{2}$

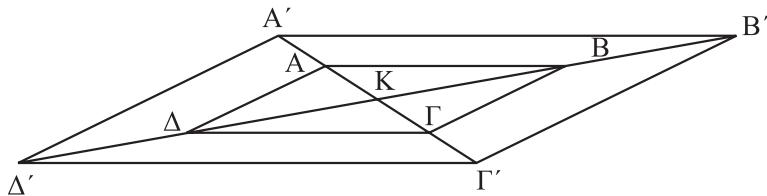
4.



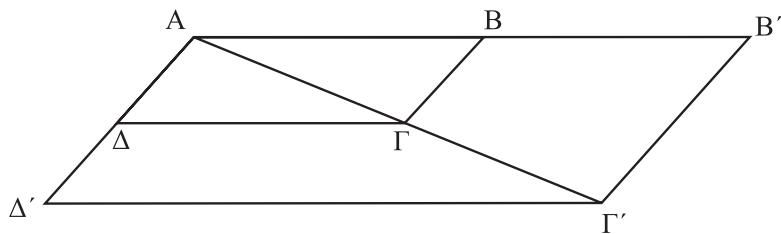
5.



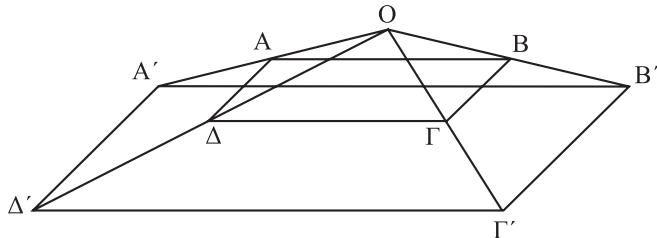
6. α)



β)

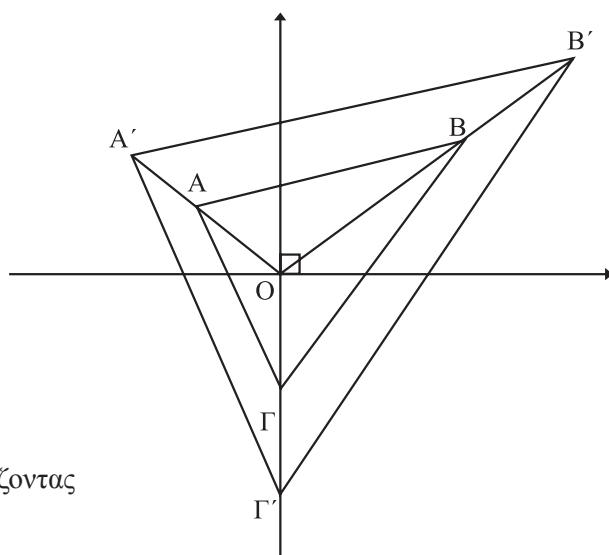


γ)



Τα τρία ομοιόθετα σχήματα είναι ίσα διότι το καθένα είναι όμοιο με το αρχικό με λόγο  $\lambda = 2$ .

7. α)



$$A' (-2, 2)$$

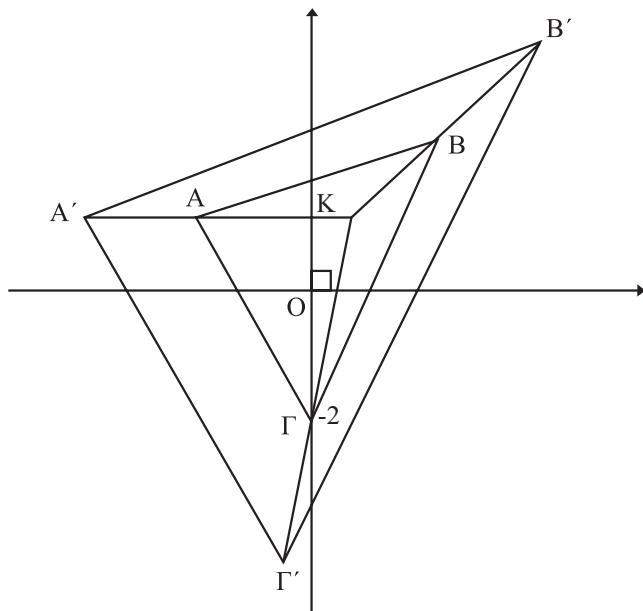
$$B' (2, 2)$$

$$\Gamma' (0, -4)$$

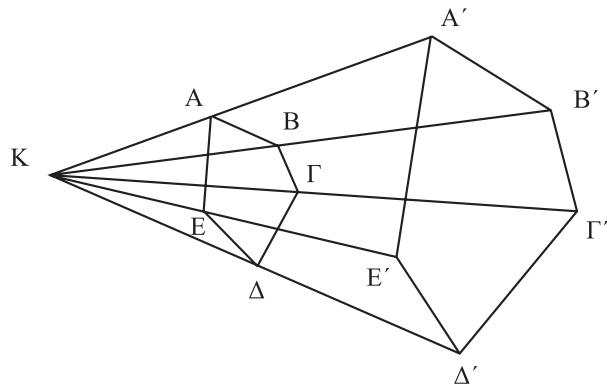
Πολλαπλασιάζοντας

με το 2

β)



8. Το σημείο  $\Delta$  είναι το ομοιόθετο του  $B$  με κέντρο το  $A$  και λόγο  $\frac{1}{3}$ . Το σημείο  $E$  είναι το ομοιόθετο του  $\Gamma$  με κέντρο το  $A$  και λόγο  $\frac{1}{3}$ . Άρα το  $\Delta E$  είναι το ομοιόθετο του  $B\Gamma$  με κέντρο  $A$  και λόγο  $\frac{1}{3}$ . Άρα  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και  $\Delta E = \frac{1}{3} B\Gamma$ .
9. Αν ενώσουμε τις  $A'A$ ,  $B'B$ , τέμνονται σε ένα σημείο  $K$  το οποίο είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας. Ο λόγος ομοιοθεσίας είναι  $\lambda = \frac{5}{2}$



## 1.5 Ομοιότητα

### A. Όμοια πολύγωνα

#### Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ

2.  $\Pi_1 \approx \Pi_3 \approx \Pi_7, \Pi_5 \approx \Pi_6, \Pi_2 \approx \Pi_4$ 

3.

Διαστάσεις		
ΑΒΓΔ	4	2
ΕΖΗΘ	6	4
ΙΚΛΜ	9	6

Όμοια είναι τα ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ.

Διαστάσεις		
ΑΒΓΔ	3	2
ΕΖΗΘ	5	3
ΙΚΛΜ	6	4

Όμοια είναι τα ΑΒΓΔ, ΑΘΙΚ

4. α)  $\lambda = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ , β)  $\lambda' = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ , γ)  $\hat{B}' = 110^\circ$ , δ)  $\lambda = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$  ε) 10 cm

#### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. β) Διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

2. α) Ισχύει  $\frac{A\Delta}{\Theta H} = \frac{\Delta\Gamma}{HZ}$  ή  $\frac{6,3}{x} = \frac{9}{6}$  ή  $9x = 37,8$  ή  $x = 4,2$ β) Πρέπει:  $\hat{\Theta} + x^0 = 180^\circ$  ή  $130^\circ + x^0 = 180^\circ$ , οπότε  $x = 50^\circ$ 3. Οι διαστάσεις θα γίνουν: 20 cm, 14 cm. Αν τα παραλληλόγραμμα είναι ίδια οι τότε:  $\frac{24}{20} = \frac{18}{14}$  ή  $\frac{6}{5} = \frac{9}{7}$  άτοπο. Άρα ο μαθητής δεν είχε δίκιο.

4. Το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με κέντρο το Κ και λόγο  $\lambda = \frac{1}{2}$ , οπότε είναι όμοια.
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΕΚ // ΒΓ οπότε:  $\frac{AK}{AG} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$  (1). Στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΗΚ // ΔΓ οπότε:  $\frac{AH}{AD} = \frac{AK}{AG} = \frac{1}{4}$  (2). Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το ΑΗΚΕ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο  $\frac{1}{4}$ , άρα είναι όμοια. Είναι  $\frac{KZ}{AD} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{K\Theta}{AB} = \frac{3}{4}$ , οπότε το παραλληλόγραμμο ΚΘΓΖ είναι το ομοιόθετο του ΑΒΓΔ με λόγο  $\frac{3}{4}$ , άρα είναι όμοια. Οπότε τα ΑΕΚΗ και ΚΘΓΖ είναι όμοια διότι και τα δύο είναι όμοια στο ΑΒΓΔ.
6. Τα σπίτια των δύο φίλων απέχουν τα  $\frac{3}{16}$  της συνολικής διαδρομής. Έτσι έχουμε:  $640 \cdot \frac{3}{16} = 40 \cdot 3 = 120$  m. Το σχήμα είναι σμίκρυνση της πραγματικής διαδρομής, οπότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας ίσο με το λόγο των περιμέτρων έτσι:  $\lambda = \frac{16}{64000} = \frac{1}{4000}$ . Άρα η κλίμακα είναι 1 : 4000.

## B. Όμοια τρίγωνα

### Ερωτήσεις κατανόησης

1. **a)** (δύο γωνίες ίσες), **γ)** (δύο γωνίες ίσες)
2. Το ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα:  $\hat{B} = \hat{G} = 75^\circ$ . Το ΕΔΖ είναι ισοσκελές με  $\hat{E} = \hat{Z} = 75^\circ$  και  $\hat{D} = 30^\circ$ . Άρα είναι όμοια διότι έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
3. **a)**  $\frac{AB}{AE} = \frac{BG}{ZE} = \frac{GA}{ZD}$     **β)**  $\frac{AB}{ZD} = \frac{AG}{ED} = \frac{BG}{EZ}$ , **γ)**  $\frac{BG}{ED} = \frac{AB}{ZD} = \frac{AG}{ZE}$
- 4.
- |           |           |           |           |           |            |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| <b>α)</b> | <b>β)</b> | <b>γ)</b> | <b>δ)</b> | <b>ε)</b> | <b>στ)</b> |
| $\Sigma$  | $\Sigma$  | $\Sigma$  | $\Sigma$  | $\Lambda$ | $\Sigma$   |

- 5.** **a)** Είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες (είναι ισοσκελή)  
**β)** Όχι. Διότι τα τετράπλευρα ενώ αποτελούνται από δύο όμοια τρίγωνα δεν είναι όμοια αφού το ένα είναι τετράγωνο και το άλλο παραλληλόγραμμο.

### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1.** **a)** Τα  $\Delta \text{AE}$ ,  $\Delta \text{AB}$  είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες, οπότε:

$$\frac{\text{AE}}{\text{AG}} = \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{ED}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{ED}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{4}{6} = \frac{x}{9} \quad \text{ή} \quad 6x = 36 \quad \text{ή} \quad x = 6 \text{ cm.}$$

- β)** Τα  $\Delta \text{AE}$ ,  $\Delta \text{AB}$  είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες οπότε:

$$\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AG}} = \frac{\text{DE}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{DE}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{12}{16} = \frac{x}{8} \quad \text{ή} \quad 16x = 96 \quad \text{ή} \quad x = 6 \text{ cm.}$$

- γ)** Τα  $\Delta \text{AE}$ ,  $\Delta \text{AB}$  είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες οπότε:

$$\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{AG}} = \frac{\text{DE}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{DE}}{\text{BG}} \quad \text{ή} \quad \frac{6}{x+6} = \frac{8}{12} \quad \text{ή} \quad 8(x+6) = 72 \quad \text{ή} \\ 8x + 48 = 72 \quad \text{ή} \quad 8x = 24 \quad \text{ή} \quad x = 3 \text{ cm.}$$

- 2.** Τα τρίγωνα  $\Delta \text{AG}$ ,  $\Delta \text{AB}$  έχουν: **a)**  $\hat{\Delta \text{A}} = \hat{\Delta \text{B}}$  ως συμπληρώματα της  $\hat{\Delta \text{B}}$ .

- β)**  $\hat{\Delta \text{A}} = \hat{\Delta \text{B}} = 90^\circ$ . Άρα είναι όμοια. Έτσι:  $\Delta \text{GA} \approx \Delta \text{AB}$ , οπότε:

$$\frac{\Delta \text{G}}{\Delta \text{A}} = \frac{\Gamma \text{A}}{\Delta \text{B}} = \frac{\Delta \text{A}}{\Delta \text{B}} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta \text{G}}{\Delta \text{A}} = \frac{\Delta \text{A}}{\Delta \text{B}} \quad \text{ή} \quad \frac{9}{\Delta \text{A}} = \frac{\Delta \text{A}}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta \text{A}^2 = 36 \quad \text{ή} \quad \Delta \text{A} = 6 \text{ cm.}$$

- 3.** **a)** Εξετάζω αν ισχύει  $\frac{\Delta \text{A}}{\Delta \text{E}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{G}}$  ή  $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$  που ισχύει. Άρα  $\Delta \text{E} \parallel \Delta \text{B}$

- β)** Από a)  $\Delta \text{E} \parallel \Delta \text{B}$  άρα  $\hat{\Delta \text{A}} = \hat{\Delta \text{B}}$  (εντός και επι τα αντά) και είναι ορθογώνια, οπότε είναι όμοια.

- 4.** Τα τρίγωνα  $\Delta \text{AB}$ ,  $\Delta \text{EG}$  είναι όμοια διότι: **a)** είναι ορθογώνια, **β)**  $\hat{\Delta \text{A}} = \hat{\Delta \text{E}}$  ως κατά κορυφήν, άρα είναι όμοια. Οπότε:  $\Delta \text{AB} \approx \Delta \text{GE}$  και έχουμε :

$$\frac{\Delta \text{A}}{\Delta \text{G}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{E}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{G}}, \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta \text{A}}{\Delta \text{G}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{E}} \quad \text{ή} \quad \frac{12}{28,8} = \frac{\Delta \text{B}}{60} \quad \text{ή} \quad 28,8 \cdot \Delta \text{B} = 720 \quad \text{ή} \quad \Delta \text{B} = 25$$

- 5.** Τα τρίγωνα  $\Delta \text{AE}$ ,  $\Delta \text{EB}$  έχουν: **a)**  $\hat{\Delta \text{B}} = \hat{\Delta \text{A}}$  (είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), **β)**  $\hat{\Delta \text{B}} = \hat{\Delta \text{A}}$  (είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), άρα

- είναι όμοια. Οπότε:  $\Delta \text{EB} \approx \Delta \text{AE}$  και έχουμε:  $\frac{\Delta \text{E}}{\Delta \text{A}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{E}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{G}}$  ή

$$\frac{\Delta \text{E}}{\Delta \text{A}} = \frac{\Delta \text{B}}{\Delta \text{G}} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{3x} = \frac{x}{6} \quad \text{ή} \quad 3x^2 = 48 \quad \text{ή} \quad x^2 = 16 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

6. Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΔΓ είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες. Άρα ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με το λόγο των πλευρών και ίσος με το λόγο των υψών. Εποιηθείτε  $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{16,8}{0,4}$  ή  $\frac{\Gamma\Delta}{0,5} = \frac{16,8}{0,4}$  ή  $\Gamma\Delta = 0,5 \cdot 42$  ή  $\Gamma\Delta = 21\text{m}$
7. Τα τρίγωνα ΒΗΕ έχουν: **a)**  $\hat{H}\hat{B}\hat{E} = \hat{\Theta}\hat{E}\hat{\Gamma}$  (εντός και επι τα αυτά)  
**b)**  $\hat{B}\hat{E}\hat{H} = \hat{\Theta}\hat{\Gamma}\hat{E}$  (εντός και επι τα αυτά), άρα είναι όμοια δηλαδή  
 $BHE \approx E\Theta\Gamma$  οπότε  $\frac{BH}{E\Theta} = \frac{HE}{\Theta\Gamma} = \frac{BE}{EG} \quad \text{ή} \quad \frac{HE}{\Theta\Gamma} = \frac{BE}{EG} \quad \text{ή} \quad \frac{x}{28 - (12 + x)} = \frac{9}{15}$   
 $= \frac{x}{16 - x} = \frac{9}{15} \quad \text{ή} \quad 15x = 9(16 - x) \quad \text{ή} \quad 15x = 144 - 9x \quad \text{ή} \quad 24x = 144 \quad \text{ή} \quad x = 6$
8. Η σκιά του πατέρα είναι 5 m, ενώ του γιού 4 m. Από την ομοιότητα τριγώνων έχουμε:  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{v_1}{1,36} = 1,25 \quad \text{ή} \quad v_1 = 1,25 \cdot 1,36 \quad \text{ή} \quad v_1 = 1,7 \text{ m}$

## 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

### Ερωτήσεις κατανόησης

1.  $E_1 = 4E_2, E_1 = 4E_2, E_1 = 4E_2$
2. **a)** εννέα **b)** τέσσερις **c)** τέσσερις
3.  $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$ . Άρα είχε δίκιο ο Γιάννης.

### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$   
Άρα  $\frac{(ADE)}{(ABG)} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ .
2. Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{DE}{BG} = \frac{3}{5}$ , οπότε:  
 $\frac{(ADE)}{(ABG)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{18}{(ABG)} = \frac{9}{25} \quad \text{ή} \quad 9(ABG) = 25 \cdot 18 \quad \text{ή} \quad (ABG) = 50\text{cm}^2$ .

- 3.** Τα τρίγωνα  $\Delta AOB$ ,  $\Delta O\Gamma$  είναι όμοια (έχουν τις γωνίες ίσες) με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{1}{5}$ . Οπότε :  $\frac{(\Delta AOB)}{(\Delta O\Gamma)} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$  ή  $\frac{(\Delta AOB)}{(\Delta O\Gamma)} = \frac{1}{25}$  ή  $(\Delta O\Gamma) = 25(\Delta AOB)$
- 4.** **a)** Τα  $\Delta AZE$ ,  $\Delta AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγους ομοιότητας  $\lambda = \frac{1}{2}$ , οπότε:  $\frac{(\Delta AZE)}{(\Delta AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  ή  $\frac{(\Delta AZE)}{(\Delta AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ .
- b)** Τα τρίγωνα  $\Delta AZE$ ,  $\Delta ZE\Delta$  είναι ίσα (έχουν τις πλευρές τους ίσες), οπότε  $\frac{(\Delta ZE\Delta)}{(\Delta AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ .
- 5.** Τα τρίγωνα  $\Delta A\Delta Z$ ,  $\Delta AB\Gamma$  είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ . Οπότε :  $\frac{(\Delta A\Delta Z)}{(\Delta AB\Gamma)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$  ή  $\frac{E_1}{E} = \frac{4}{9}$  ή  $\frac{4}{9} = \frac{4}{9}E$ . Τα  $\Delta B\Delta H$ ,  $\Delta AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{B\Delta}{BA} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ . Οπότε :  $\frac{(\Delta B\Delta H)}{(\Delta AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$  ή  $\frac{E_2}{E} = \frac{1}{9}$  ή  $E_2 = \frac{1}{9}E$ . Ισχύει :  $E_1 + E_2 + E_3 = E$  ή  $\frac{4}{9}E + \frac{1}{9}E + E_3 = E$  ή  $E_3 = E - \frac{5}{9}E$  ή  $E_3 = \frac{4}{9}E = E_1$
- 6.** Τα τρίγωνα  $\Delta AB\Delta$ ,  $\Delta A\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{3}$ , οπότε  $\frac{(\Delta AB\Delta)}{(\Delta A\Gamma)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ . Βρίσκω την υποτείνουσα  $B\Gamma$ .  $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$  ή  $B\Gamma^2 = 3^2 + 4^2$  ή  $B\Gamma^2 = 9 + 16$  ή  $B\Gamma^2 = 25$  ή  $B\Gamma = 5$ . Τα  $\Delta AB\Delta$ ,  $\Delta A\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{5}$ , οπότε  $\frac{(\Delta AB\Delta)}{(\Delta A\Gamma)} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
- 7.** Στο τρίγωνο  $\Delta OAB$ , Δ μέσον του  $OA$ , Ε μέσον του  $OB$  άρα  $E\Delta = \frac{AB}{2}$ . Ομοίως  $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$ ,  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ . Οπότε τα  $\Delta EZ$ ,  $\Delta AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Άρα  $\frac{(\Delta EZ)}{(\Delta AB\Gamma)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  ή  $\frac{(\Delta EZ)}{(\Delta AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$  ή  $(\Delta EZ) = \frac{1}{4}(\Delta AB\Gamma)$ . Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:  $(\Delta AB\Gamma) - (\Delta EZ) = (\Delta AB\Gamma) - \frac{1}{4}(\Delta AB\Gamma) = \frac{3}{4}(\Delta AB\Gamma)$
- 8.** **a)** Ο λόγος ομοιότητας είναι  $\lambda = 1,2$ . Άρα  $\frac{E'}{E} = 1,2^2$  ή  $\frac{E'}{40} = 1,44$  ή  $E' = 40 \cdot 1,44$  ή  $E' = 57,6 \text{ cm}^2$
- b)** Ο λόγος ομοιότητας είναι  $\lambda = 0,75$ . Άρα  $\frac{E'}{E} = (0,75)^2$  ή  $\frac{E'}{40} = 0,5625$  ή  $E' = 40 \cdot 0,5625$  ή  $E' = 22,5 \text{ cm}^2$

9. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι α τότε τότε θα γίνει  $1,3\alpha$ , οπότε ο λόγος ομοιότητας είναι  $\lambda=1,3$ . Έτσι  $\frac{E'}{E}=1,3^2=1,69$  ή  $E'=1,69E$ . Άρα το εμβαδόν θα αυξηθεί κατά 69%
10. Αν οι διαστάσεις ήταν  $x$ ,  $\psi$  τότε θα γίνουν :  $0,8x$  ,  $0,8\psi$  . Έτσι ο λόγος ομοιότητας είναι:  $\lambda = 0,8$ . Έτσι  $\frac{E'}{E}=0,8^2=0,64$  ή  $E'=0,64E$  . Άρα το εμβαδόν θα ελαττωθεί κατά 36%

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Το  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  (1). Το  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές, άρα  $\hat{\Delta} = \hat{E}$  (2), οπότε  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{A}$  ως παραπληρώματα ίσων γωνιών.  
 Τα τρίγωνα  $B\Delta A$  ,  $A\Gamma E$  έχουν τις δύο γωνίες ίσες άρα θα είναι:  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{A}$   
 Τα  $B\Delta A$  ,  $A\Gamma E$  έχουν: **a)**  $AB = AG$  , **b)**  $A\Delta = AE$  , **γ)**  $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{A}$   
 Οπότε είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ) άρα θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα  $B\Delta = E\Gamma$  .
2. **a)** Τα τρίγωνα  $ABE$ ,  $A\Delta Z$  έχουν: 1)  $AZ = BE$ , 2)  $AB = A\Delta$  , 3) είναι ορθογώνια άρα είναι ίσα, οπότε  $\Delta Z = AE$ .  
**b)** Από **a)** τα  $ABE$ ,  $A\Delta Z$  είναι ίσα οπότε  $\hat{A}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{E}\hat{B}$ . Αν  $K$  είναι το σημείο τομής των  $AE$ ,  $\Delta Z$  τότε:  $\hat{K}\hat{A}\hat{Z} + \hat{Z}\hat{K}\hat{A} = \hat{K}\hat{A}\hat{Z} + \hat{A}\hat{E}\hat{B} = 90^\circ$ .  
 Οπότε  $\Delta Z \perp AE$
3. Τα τρίγωνα  $\Gamma BZ$ ,  $BHA$  έχουν: **a)**  $AB = BZ$ , **b)**  $BH = B\Gamma$ ,  
**γ)**  $\hat{A}\hat{B}\hat{H} = \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma-\Pi$ ), οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, άρα  $AH = \Gamma Z$ .
4. Τα τρίγωνα  $BMG$ ,  $B'M'T'$  έχουν: **a)**  $MB = M'B'$ , **b)**  $B\Gamma = B'T'$   
**γ)**  $\hat{M}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{M}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$  Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma \Pi$ ). Οπότε θα έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ . Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'T'$  έχουν: **a)**  $B\Gamma = B'T'$  **b)**  $\hat{B} = \hat{B}'$  **γ)**  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ , οπότε είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο ( $\Pi-\Gamma -\Pi$ )
5. **a)** Ισχύει :  $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{OB}{OA}$  (1) ή  $\frac{O\Delta}{6} = \frac{8}{5}$  ή  $5O\Delta = 48$  ή  $O\Delta = \frac{48}{5} = 9,6\text{cm}$ .  
 Ισχύει :  $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{OE}{OB}$  ή  $\frac{9,6}{6} = \frac{OE}{8}$  ή  $6OE = 76,8$  ή  $OE = 12,8\text{ cm}$

**β)** Ακόμη :  $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{OE}{OB}$  (2). Από (1) και (2)  $\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OB}$  ή  $OB^2 = OA \cdot OE$ .

- 6.** Έστω α είναι η πλευρά του άλλου τριγώνου . Τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{6}{a}$ . Οπότε :  $\frac{E}{2E} = \left(\frac{6}{a}\right)^2$  ή  $\frac{1}{2} = \frac{36}{a^2}$  ή  $a^2 = 72$  ή  $a = \sqrt{72}$  ή  $a = 6\sqrt{2}$  cm
- 7.** Βρίσκω την διαγώνιο  $B\Delta$  . Από το ορθογώνιο και ισοσκελές  $AB\Delta$  έχουμε :  $B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$  ή  $B\Delta^2 = 64 + 64$  ή  $B\Delta = \sqrt{128}$  ή  $B\Delta = 8\sqrt{2}$  . Τα τρίγωνα  $\Delta BA$ ,  $\Delta ME$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{\Delta M}{\Delta B} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$
- Οπότε :  $\frac{(ME\Delta Z)}{(AB\Gamma\Delta)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$  ή  $\frac{(ME\Delta Z)}{64} = \frac{9}{16}$  ή  $16(\Delta EMZ) = 64 \cdot 9$  ή  $(\Delta EMZ) = 36 \text{ cm}^2$ .

- 8. α)** Είναι  $AG^2 = x^2 + x^2$  ή  $AG^2 = 2x^2$  ή  $AG = x\sqrt{2}$  . Τα τετράγωνα έχουν λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$  . Οπότε :  $\frac{(AGEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = (\sqrt{2})^2$  ή  $\frac{(AGEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = 2$ .
- β)** Από α)  $\frac{(AGEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = 2$  ή  $\frac{200}{x^2} = 2$  ή  $2x^2 = 200$  ή  $x^2 = 100$  ή  $x = 10$  cm.

- 9.** Τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{3}{3+x}$ , οπότε :
- $$\frac{(ADE)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{9}{16} = \frac{9}{(3+x)^2} \quad \text{ή} \quad (3+x)^2 = 16 \quad \text{ή} \quad 3+x=4 \quad \text{ή} \quad 3+x=-4$$
- άρα  $x=1$  cm ή  $x=-7$  απορρίπτεται .

- 10. α)** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$   $\Delta Z // AG$  άρα  $\frac{B\Delta}{BA} = \frac{BZ}{B\Gamma}$  (1),  $EH//AB$  άρα  $\frac{GE}{GA} = \frac{GH}{GB}$  (2)
- $$\Delta E // B\Gamma \quad \text{άρα} \quad \frac{B\Delta}{BA} = \frac{GE}{GA} \quad \text{οπότε από (1) και (2)} \quad \frac{BZ}{B\Gamma} = \frac{GH}{GB}, \quad \text{άρα} \quad BZ = GH.$$
- β)** Τα  $BZ\Delta$ ,  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{B\Delta}{BA} = \frac{2}{7}$ , άρα
- $$\frac{(BZ\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{4}{49} \quad \text{ή} \quad (BZ\Delta) = \frac{4}{49} (AB\Gamma) \quad (1).$$
- Τα  $GEH$ ,  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{4}{49} (AB\Gamma)$  (2).
- Τα  $ADE$ ,  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda = \frac{5}{7}$ , άρα
- $$\frac{(ADE)}{(AB\Gamma)} = \frac{25}{49} \quad (3) \quad \text{ή} \quad (ADE) = \frac{25}{49} (AB\Gamma).$$
- Από (1) (2) (3) και την ισότητα  $(\Delta EHZ) = (AB\Gamma) - (B\Delta Z) - (HEG) - (ADE)$  έχουμε:
- $$(\Delta EHZ) = (AB\Gamma) - \frac{4}{49} (AB\Gamma) - \frac{4}{49} (AB\Gamma) - \frac{25}{49} (AB\Gamma) \quad \text{ή} \quad (\Delta EHZ) = \frac{16}{49} (AB\Gamma)$$



# Τριγωνομετρία



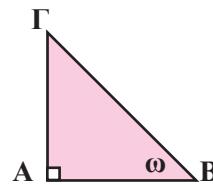


Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, που γνωρίζουμε τις πλευρές του είναι: το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη που ορίζονται ως εξής:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων ως εξής:

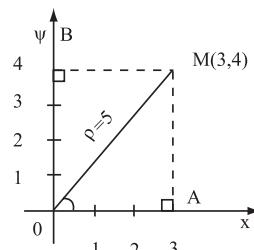
Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ πάρουμε ένα σημείο  $\hat{\text{O}}$ . Μ(3,4) φέρουμε  $MA \perp x'$  και  $MB \perp \psi'$ , τότε έχουμε  $OA = 3$  και  $OB = AM = 4$ .

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega = x \hat{\text{O}} M$  υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο  $OAM$ . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $OAM$  έχουμε:  $OM = \rho$  οπότε  $\rho^2 = OA^2 + AM^2$  ή  $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2}$  ή  $\rho = 5$ . Άρα

$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O},$$

$$\sigma\nu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O}$$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{3} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M}$$



### Παρατηρήσεις:

- Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές δηλ. είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου τότε: το ημίτονο της μιάς οξείας γωνίας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και το συνημίτονο της μιάς είναι ίσο με το ημίτονο της άλλης.

Δηλ. ισχύει:  $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\nu\omega$ ,  $\sigma\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

- 2) Όσο αυξάνει η οξεία γωνία αυξάνει το ημίτονο και η εφαπτομένη ενώ ελαττώνεται το συνημίτονο.

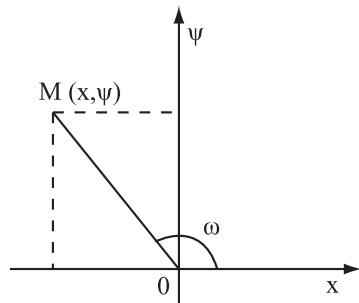
Με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω όταν αυτή είναι αμβλεία.

Εστω έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $O_{x\psi}$ , έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή O, η μία πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιαξόνα  $O_x$  και η άλλη πλευρά της να βρεθεί στο  $2^{\text{nd}}$  τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο  $M(x,\psi)$  διαφορετικό από το O, τότε για την απόσταση  $\rho = OM$  ισχύει:  $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$  και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\etaμω = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{\psi}{\rho}$$

$$\sigmaυω = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilonφω = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{\psi}{x}$$



Αν η γωνία είναι οξεία τότε: όλοι οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί είναι θετικοί

Διότι:  $x > 0, \psi > 0, \rho > 0$ .

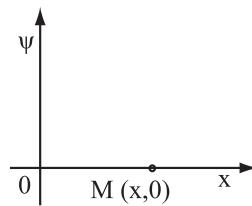
Αν η γωνία είναι αμβλεία τότε: μόνο το ημίτονο είναι θετικό ενώ οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αρνητικοί.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}$  ως εξής:

- a) Για τη γωνία  $0^{\circ}$

Έστω το σημείο M, τότε για να σχηματίζεται γωνία  $0^{\circ}$ , πρέπει το M να είναι σημείο του θετικού ημιαξονα  $O_x$  δηλ θα έχει την μορφή  $M(x,0)$  με  $x > 0$ , οπότε

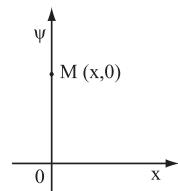
$$\rho = OM = x, \text{άρα } \etaμ0^{\circ} = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0, \sigmaυν0^{\circ} = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{x} = 1, \epsilonφ0^{\circ} = \frac{\psi}{x} = \frac{0}{x} = 0.$$



**β)** Έστω το σημείο  $M$  τότε για να σχηματίζεται γωνία  $90^\circ$ , πρέπει το  $M$  να είναι **Τριγωνομετρία σημείο του θετικού ημιάξονα** Οψ δηλ θα έχει την μορφή  $M(0, \psi)$  με  $\psi > 0$ ,

$$\rho = OM = \psi, \text{ ára } \eta\mu 90^\circ = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi}{\psi} = 1, \sigma\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$$

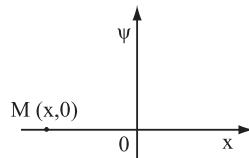
η εφ $90^\circ$  δεν ορίζεται διότι  $x = 0$ .



**γ)** Έστω το σημείο  $M$  τότε για να σχηματίζεται γωνία  $180^\circ$ , πρέπει το  $M$  να είναι σημείο του αρνητικού ημιάξονα  $Ox'$  δηλ θα έχει την μορφή  $M(x, 0)$  με  $x < 0$  οπότε  $\rho = OM = -x$ , ára  $\eta\mu 180^\circ = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{-x} = 0$ ,

$$\sigma\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{-x} = -1,$$

$$\varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{0}{x} = 0$$



Δίνουμε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:  
 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

$\omega$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
σνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται

- 1** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$ . Αν  $AB=12$ ,  $B\Gamma=13$ . Να βρείτε

- a)**  $\eta\mu B$ ,  $\sigma\nu\Gamma$   
**b)**  $\eta\mu(90^\circ-\Gamma)$ ,  $\varepsilon\phi B$

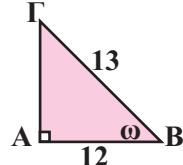
### Λύση

**a)** Θα βρούμε με το πυθαγόρειο θεώρημα την κάθετη πλευρά  $A\Gamma$ .

$$A\Gamma^2=B\Gamma^2-AB^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2=13^2-12^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2=169-144 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2=25 \quad \text{ή} \quad A\Gamma=5.$$

$$\text{Οπότε } \eta\mu B=\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \eta\mu B=\frac{5}{13}, \quad \sigma\nu\Gamma=\frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \text{ή} \quad \sigma\nu\Gamma=\frac{12}{13}$$

$$\text{b)} \eta\mu(90^\circ-\Gamma)=\sigma\nu\Gamma=\frac{12}{13}, \quad \varepsilon\phi B=\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{5}{12}$$



- 2** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega=x \hat{\Omega} M$ , όταν: **a)**  $M(-6,8)$ , **b)**  $M(-4,0)$ , **c)**  $M(0,5)$

### Λύση

**a)** Για την απόσταση  $OM=\rho$  έχουμε:  $\rho=\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ .

$$\text{Αρα: } \eta\mu\omega=\frac{\psi}{\rho}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}, \quad \sigma\nu\omega=\frac{x}{\rho}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}, \quad \varepsilon\phi\omega=\frac{\psi}{x}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}.$$

**b)** Για την απόσταση  $OM=\rho$  έχουμε:  $\rho=\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$ .

$$\text{Αρα: } \eta\mu\omega=\frac{\psi}{\rho}=\frac{0}{4}=0, \quad \sigma\nu\omega=\frac{x}{\rho}=\frac{-4}{4}=-1, \quad \varepsilon\phi\omega=\frac{\psi}{x}=\frac{0}{-4}=0$$

**c)** Για την απόσταση  $OM=\rho$  έχουμε:  $\rho=\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{0^2+5^2}=5$

$$\text{Αρα: } \eta\mu\omega=\frac{\psi}{\rho}=\frac{5}{5}=1, \quad \sigma\nu\omega=\frac{x}{\rho}=\frac{0}{5}=0, \quad \text{η εφω δεν ορίζεται.}$$

- 3** Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) όταν:  $A\Gamma=6 \text{ cm}$  και  $\eta\mu B=\frac{3}{5}$ .

### Λύση

$$\text{Είναι } \eta\mu B=\frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{6}{B\Gamma}=\frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad 3B\Gamma=30 \quad \text{ή} \quad B\Gamma=10 \text{ cm}.$$

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε:

$$B\Gamma^2=A\Gamma^2+AB^2 \quad \text{ή} \quad 10^2=6^2+AB^2 \quad \text{ή} \quad AB^2=64 \quad \text{ή} \quad AB=8 \text{ cm}.$$

**A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας είναι καθαροί αριθμοί
2. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει  $\eta\omega = \alpha^2 + 2$ , όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός.
3. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει  $\varepsilon\varphi\omega = 1000$
4. Ισχύει  $\frac{\eta\mu 20^0}{\sin 70^0} = 1$
5. Η διαφορά  $\sin 85^0 - \sin 75^0$  έχει θετικό πρόσημο.
6. Η διαφορά  $\varepsilon\varphi 150^0 - \varepsilon\varphi 20^0$  έχει αρνητικό πρόσημο
7. Ισχύει  $2 \cdot \eta\mu 30^0 = \eta\mu 60^0$
8. Αν  $\omega + \varphi = 90^0$  τότε  $\eta\mu 2\omega = \sin 2\varphi$
9. Το γινόμενο  $\eta\mu 45^0 \cdot \sin 152^0$  είναι θετικός αριθμός.

**B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

1. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^0$ ) ισχύει:  $VG = 20\text{cm}$ ,  $\sin B = \frac{3}{10}$  τότε η πλευρά ΑΒ είναι:
  - a.** 6 cm, **b.** 3 cm, **c.** 12 cm, **d.** τίποτα από τα παραπάνω .
2. Η παράσταση  $\frac{\eta\mu 3^0}{\sin 87^0} - \frac{\sin 87^0}{\eta\mu 3^0}$  είναι ίση με:
  - a.** 0, **b.** 2, **c.** 2, **d.** δεν προσδιορίζεται .
3. Δίνεται ότι ισχύει:  $\eta\mu x + \eta\mu y = 2$ . Τότε μπορεί να ισχύει:
  - a.**  $\eta\mu x = 2,5$  και  $\eta\mu y = -0,5$ , **b.**  $\eta\mu x = 1$  και  $\eta\mu y = 1$ , **c.**  $\eta\mu x = 0,5$  και  $\eta\mu y = 1,5$  **d.** Τίποτα από τα παραπάνω .
4. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy, για ένα σημείο M ισχύει  $\sin(x\hat{O}M) > 0$ . Τότε η OM μπορεί να διέρχεται από το σημείο:
  - a.** (1,3), **b.** (-1,4), **c.** (0,4), **d.** (-2,5)

- 1** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $ABC$  με πλευρά  $a = 4\text{cm}$ . Φέρνουμε το ύψος  $AD$ . Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:  $30^\circ, 60^\circ$ .
- 2** Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονοκό σύστημα αξόνων τα σημεία  $A(4,3)$ ,  $B(-2,0)$ ,  $\Gamma(-3,4)$ . Να υπολογίσετε  $\eta_{x\hat{O}A}$ ,  $\sigma_{v\hat{x}OB}$ ,  $\epsilon_{ph\hat{O}\Gamma}$ .
- 3** Δίνεται η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση:  $2x + 3y = 6$
- a)** Να κάνετε την γραφική της παράσταση και να βρείτε το σημείο  $M$  που έχει τεταγμένη 4.
- b)** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega = x\hat{O}M$
- 4** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ). Να αποδείξετε ότι:
- a)**  $\eta_{\mu B} < \epsilon_{phB}$    **b)**  $\frac{\eta_{\mu B}}{\eta_{\mu \Gamma}} = \frac{\beta}{\gamma}$
- 5** Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:  
 $A = \eta_{\mu} 17^\circ + \eta_{\mu} 35^\circ - \sigma_{v\hat{n}} 73^\circ - \sigma_{v\hat{n}} 55^\circ$   
 $B = \frac{\sigma_{v\hat{n}} 56^\circ}{\eta_{\mu} 34^\circ} + \frac{\eta_{\mu} 50^\circ}{\sigma_{v\hat{n}} 40^\circ} - 4$
- 6** Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων  
 $A = 3\eta_{\omega} + 5$ ,  $B = 4 - 2\sigma_{v\hat{n}\omega}$
- 7** **a)** Να κατασκευασθεί μία γωνία γνωρίζοντας ότι:  $\epsilon_{phA} = \frac{4}{5}$   
**b)** Να κατασκευασθεί μία γωνία  $\omega$  τέτοια ώστε:  $\eta_{\mu}(90^\circ - \omega) = 0,8$
- 8** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ), να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:      **a)**  $\eta_{\mu B} + \eta_{\mu \Gamma} = \sigma_{v\hat{n}B} + \sigma_{v\hat{n}\Gamma}$   
**b)**  $\eta_{\mu B} \cdot \sigma_{v\hat{n}\Gamma} = \eta_{\mu \Gamma} \cdot \sigma_{v\hat{n}B}$
- 9** Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:
- a)**  $\eta_{\mu} 38^\circ, \eta_{\mu} 65^\circ$   
**b)**  $\sigma_{v\hat{n}} 87^\circ, \sigma_{v\hat{n}} 10^\circ$   
**c)**  $\epsilon_{ph} 25^\circ, \epsilon_{ph} 89^\circ$   
**d)**  $\eta_{\mu} 10^\circ, \sigma_{v\hat{n}} 30^\circ$

## 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Τριγωνομετρία

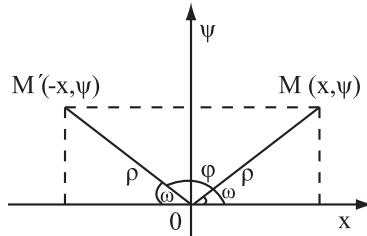
Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα  $180^0$ . Έστω ένα σημείο  $M(x, \psi)$  στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Το συμμετρικό του  $M$  ως προς τον  $\psi$ 'ψ είναι το σημείο  $M'(-x, \psi)$ . Αν ονομάσουμε ω τη γωνία  $x\hat{O}M$ , τότε λόγω συμμετρίας είναι  $x'\hat{O}M = \omega$ , οπότε για τη γωνία  $\varphi = x'\hat{O}M$  ισχύει  $\varphi = 180^0 - \omega$ , άρα οι γωνίες  $\omega$ ,  $\varphi$  είναι παραπληρωματικές, διότι  $\varphi + \omega = 180^0$  -  $\omega + \omega = 180^0$ .

Επειδή  $OM = OM'$  θα έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{OM'}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{\psi}{OM'}.$$

$$\sin\omega = \frac{x}{OM}, \quad \sin\varphi = \frac{-x}{OM'}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{x}{\psi}, \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{-x}{\psi}$$



Οπότε οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

**Γενικά:** Για δύο παραπληρωματικές γωνίες  $\omega$  και  $180^0 - \omega$  ισχύουν:

$$\eta\mu(180^0 - \omega) = \eta\mu\omega, \quad \sin(180^0 - \omega) = -\sin\omega, \quad \varepsilon\varphi(180^0 - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

**Παρατήρηση:** Αν δύο γωνίες είναι από  $0^0$  μέχρι  $180^0$  και έχουν το ίδιο ημίτονο τότε είναι ίσες ή είναι παραπληρωματικές.

Για την γωνία  $\omega$  με  $0^0 \leq \omega \leq 180^0$  ισχύουν:

$0 \leq \eta\mu\omega \leq 1, -1 \leq \sin\omega \leq 1, \eta\mu\omega$  μπορεί να πάρει οποιδήποτε πραγματικό αριθμό.

### ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{3\eta\mu(180^0 - \omega) + 2\sin(90^0 - \omega)}{4\eta\mu\omega - 3\eta\mu(180^0 - \omega)}$$

$$B = \sin(90^0 - 2\omega) \cdot \sin(180^0 - 2\omega) + \eta\mu 2\omega \cdot \eta\mu(90^0 - 2\omega)$$

#### Λύση

Ισχύει  $\eta\mu(180^0 - \omega) = \eta\mu\omega$ ,  $\sin(90^0 - \omega) = \eta\mu\omega$ ,  $\sin(90^0 - 2\omega) = \eta\mu 2\omega$ ,  $\sin(180^0 - 2\omega) = -\sin 2\omega$ ,  $\eta\mu(90^0 - 2\omega) = \sin 2\omega$ . Οπότε έχουμε:

$$A = \frac{3\eta\mu(180^0 - \omega) + 2\sin(90^0 - \omega)}{4\eta\mu\omega - 3\eta\mu(180^0 - \omega)} = \frac{3\eta\mu\omega + 2\eta\mu\omega}{4\eta\mu\omega - 3\eta\mu\omega} = \frac{5\eta\mu\omega}{\eta\mu\omega} = 5$$

$$B = \sin(90^0 - 2\omega) \cdot \sin(180^0 - 2\omega) + \eta\mu 2\omega \cdot \eta\mu(90^0 - 2\omega) =$$

$$\eta\mu 2\omega \cdot (-\sin 2\omega) + \eta\mu 2\omega (\sin 2\omega) = -\eta\mu 2\omega \cdot \sin 2\omega + \eta\mu 2\omega \cdot \sin 2\omega = 0$$

## Τριγωνομετρία 2

Να βρείτε τη γωνία χ όταν:

**α)**  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$     **β)**  $(\eta\mu x + 2)(2\sin vx + 1) = 0$

### Λύση

**α)** Επειδή  $\eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  θα έχουμε:  $\eta\mu x = \eta\mu 60^0$  άρα  $x = 60^0$  ή  $x = 180^0 - 60^0$   
ή  $x = 120^0$

**β)**  $(\eta\mu x + 2)(2\sin vx + 1) = 0$  ή  $\eta\mu x + 2 = 0$  ή  $2\sin vx + 1 = 0$  άρα  $\eta\mu x = -2$  άτοπο ή  
 $x = -\frac{1}{2}$ . Επειδή  $\sin v 120 = -\frac{1}{2}$  άρα  $\sin vx = \sin v 120$  άρα  $x = 120$ .

## 3

Να υπολογίσετε:  $\eta\mu 135^0$ ,  $\sin v 135^0$ ,  $\varepsilon\varphi 150^0$ .

### Λύση

$$\eta\mu 135^0 = \eta\mu(180 - 45^0) = \eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin v 135^0 = \sin v(180 - 45^0) = -\sin v 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 150^0 = \varepsilon\varphi(180 - 30^0) = -\varepsilon\varphi 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

## 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ αποδείξτε ότι ισχύει:

**α)**  $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$ ,    **β)**  $\sin v(B + \Gamma) + \sin v A = 0$

### Λύση

**α)** Ισχύει:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$ , άρα οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\Gamma}$  είναι παραπληρωματικές

Οπότε  $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$

**β)**  $\sin v(B + \Gamma) = -\sin v A$  ή  $\sin v(B + \Gamma) + \sin v A = 0$ .

## Ερωτήσεις κατανόησης

### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$
2. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει  $\eta\mu(A + B) = 1$  τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
3. Αν  $\eta\mu 138^0 = 0,66$ , τότε  $\eta\mu 42^0 = 0,66$
4. Αν  $\sin v \varphi = \eta\mu 70^0$  και  $0^0 < \varphi < 90^0$  τότε  $\varphi = 20^0$

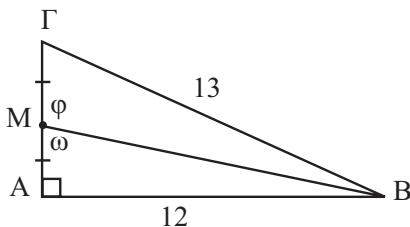
5. Ο μεγαλύτερος από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: ημ $50^0$ , ημ $189^0$  είναι Τριγωνομετρία το ημ $189^0$
6. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας  $\phi$  με  $0^0 < \phi < 90^0$  είναι όλοι θετικοί αριθμοί.

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- Αν  $\eta\mu\phi = \eta\mu45^0$  τότε:  
 α)  $\phi = 45^0$ , β)  $\phi = 135^0$ , γ)  $\phi = 45^0$  ή  $135^0$ , δ) καμία από τα παραπάνω.
- Η εφ $135^0$  ισούται με:  
 α) 1, β) -1, γ)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , δ)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Η παράσταση  $A = \eta\mu120^0 \cdot \sin55^0 + \sin125^0 \cdot \eta\mu60^0$  είναι ίση με:  
 α) 0, β) -1, γ) 1, δ) καμία από τα παραπάνω.
- Αν  $0^0 \leq x \leq 180^0$  και  $2\eta\mu x = \sqrt{2}$  τότε η τιμή του  $x$  είναι:  
 α)  $x = 45^0$ , β)  $x = 135^0$ , γ)  $x = 45^0$  ή  $x = 135^0$ , δ)  $x = 60^0$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- Να υπολογίσετε: ημ $120^0$ ,  $\sin120^0$ , ημ $135^0$ ,  $\sin150^0$
- Αν  $0^0 \leq x \leq 180^0$ , να υπολογίσετε το  $x$  όταν:  
 α)  $4\eta\mu^2x = 3$ , β)  $2\sin^2x = 1$
- Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $\omega$  και  $\phi$



Τριγωνομετρία 4

Να αποδείξετε ότι:

- a)**  $\eta\mu(90^\circ + x) = \sigma v x$
- b)**  $\sigma v(90^\circ + x) = -\eta\mu x$
- c)**  $\epsilon\varphi(90^\circ + x) = -\epsilon\varphi x$

5 Αν  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$  και το  $\sigma v x$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $\omega^2 - \frac{3}{2}\omega - 1 = 0$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ .

6 Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, να αποδειχθεί ότι:  
**a)**  $\eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma$ , **b)**  $\sigma v(A + \Gamma) + \sigma vB = 0$ , **c)**  $\epsilon\varphi(A + B) = -\epsilon\varphi\Gamma$

7 Αν σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει  $\sigma v(B + \Gamma) = 0$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8 Αν  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$  να βρείτε τις τιμές του  $x$ :

**a)**  $(\eta\mu x - 2)(2\eta\mu x - 1) = 0$ , **b)**  $(\sigma v x + 2)(\sigma v x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ .

9 Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  και  $6\eta\mu^2 x = \eta\mu x + 1$  να βρείτε το  $x$ .

10 Να αποδείξετε ότι: **a)**  $\eta\mu(150^\circ + \omega) = \eta\mu(30^\circ - \omega)$ ,  
**b)**  $\eta\mu(150^\circ - \omega) = \eta\mu(30 + \omega)$  **c)**  $\sigma v(140^\circ + \omega) = -\sigma v(40^\circ - \omega)$ ,  
**d)**  $\sigma v(170^\circ - \omega) = -\sigma v(10^\circ + \omega)$

11 Να αποδείξετε ότι: **a)**  $\eta\mu 150^\circ + \sigma v 165^\circ + \eta\mu 75^\circ - \sigma v 60^\circ = 0$   
**b)**  $\eta\mu 89^\circ + \eta\mu 91^\circ - 2\sigma v 1^\circ = 0$

12 Να τοποθετήσετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:  
 $\eta\mu 30^\circ$ ,  $\eta\mu 140^\circ$ ,  $\sigma v 10^\circ$ ,  $\sigma v 120^\circ$

13 Να βρείτε την οξεία γωνία  $\omega$  που επαληθεύει κάθε μία από τις ισότητες:  
**a)**  $4\eta\mu\varphi = \frac{1}{\eta\mu\varphi}$ , **b)**  $4\sigma v\varphi = \frac{3}{\sigma v\varphi}$

## 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

### Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:

**α)**  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$

**β)**  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega}$

**Απόδειξη:**

**α)** Έστω ένα σημείο  $M(x, \psi)$  τότε αν  $\omega = \hat{x} \hat{O} M$  ισχύει:  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho}$  όπου  $\rho = OM = \sqrt{x^2 + \psi^2}$

Από την ισότητα  $\rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$  έχουμε:  $\rho^2 = x^2 + \psi^2$ , αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με  $\rho^2$  τότε έχουμε:  $\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\psi^2}{\rho^2}$  ή  $1 = (\frac{x}{\rho})^2 + (\frac{\psi}{\rho})^2$  (1)

Επειδή  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho}$  η (1) δίνει  $1 = (\eta\mu\omega)^2 + (\sigma\nu\omega)^2$  δηλ  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$

**β)** Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ , με την προϋπόθεση  $\sigma\nu\omega \neq 0$ , έχουμε:  $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{\frac{\psi}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{\psi \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{\psi}{x} = \varepsilon\varphi\omega$

### ΑΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\sigma\nu^2 55^\circ + \eta\mu^2 125^\circ = 1$ , **β)**  $\sigma\nu^2 21^\circ + \sigma\nu^2 69^\circ = 1$ , **γ)**  $\sigma\nu^2 140^\circ - \eta\mu^2 130^\circ = 0$

**Λύση**

**α)** Επειδή  $\eta\mu 125^\circ = \eta\mu(180^\circ - 55^\circ) = \eta\mu 55^\circ$ . Άρα  $\sigma\nu^2 55^\circ + \eta\mu^2 125^\circ = \sigma\nu^2 55 + \eta\mu^2 55 = 1$ .

**β)** Επειδή  $\sigma\nu 21^\circ = \eta\mu(90^\circ - 21^\circ) = \eta\mu 69^\circ$ . Άρα  $\sigma\nu^2 21^\circ + \sigma\nu^2 69^\circ = \eta\mu^2 69^\circ + \sigma\nu^2 69^\circ = 1$ .

**γ)**  $\sigma\nu 140^\circ = \sigma\nu(180^\circ - 40^\circ) = -\sigma\nu 40^\circ$ ,  $\sigma\nu 40^\circ = \eta\mu(90^\circ - 40^\circ) = \eta\mu 50^\circ$ ,  $\eta\mu 130^\circ = \eta\mu(180^\circ - 50^\circ) = \eta\mu 50^\circ$ .

Άρα:  $\sigma\nu^2 140^\circ - \eta\mu^2 130^\circ = (-\sigma\nu 40^\circ)^2 - \eta\mu^2 50^\circ = \sigma\nu^2 40^\circ - \eta\mu^2 50^\circ = \eta\mu^2 50^\circ - \eta\mu^2 50^\circ = 0$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\sin^2 \omega - \sin^4 \omega}{\eta \mu^4 \omega - \eta \mu^2 \omega} = -1 \quad \beta) \frac{\eta \mu x + \sin x}{1 + \varepsilon \varphi x} = \sin x$$

### Λύση

$$\alpha) \frac{\sin^2 \omega - \sin^4 \omega}{\eta \mu^4 \omega - \eta \mu^2 \omega} = \frac{\sin^2 \omega (1 - \sin^2 \omega)}{\eta \mu^2 \omega (\eta \mu^2 \omega - 1)} = \frac{\sin^2 \omega \cdot \eta \mu^2 \omega}{\eta \mu^2 \omega \cdot (-\sin^2 \omega)} = -1$$

$$\beta) \frac{\eta \mu x + \sin x}{1 + \varepsilon \varphi x} = \frac{\eta \mu x + \sin x}{1 + \frac{\eta \mu x}{\sin x}} = \frac{\eta \mu x + \sin x}{\frac{\sin x + \eta \mu x}{\sin x}} = \frac{\sin x (\eta \mu x + \sin x)}{\sin x + \eta \mu x} = \sin x$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Υπάρχει γωνία  $\omega$  για την οποία ισχύει  $\eta \mu \omega = 0$  και  $\sin \omega = 0$ .
2. Υπάρχει γωνία  $\omega$  για την οποία ισχύει  $= -\frac{3}{5}$  και  $\sin \omega = \frac{4}{5}$
3. Ισχύει  $\eta \mu 110^\circ = \frac{\eta \mu 110^\circ}{\sin 70^\circ}$
4. Ισχύει  $\eta \mu 70^\circ \cdot \varepsilon \varphi 20^\circ = \eta \mu 20^\circ$
5. Οι αριθμοί  $\eta \mu 160^\circ$  και  $\sin 70^\circ$  είναι ίσοι.
6. Ισχύει:  $\sin 137^\circ \cdot \sin 91^\circ < 0$
7. Ισχύει:  $\sin 135^\circ + \sin 45^\circ = 0$
8. Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει:  $-1 \leq \eta \mu \omega \leq 1$
9. Η μέγιστη τιμή του  $3 \sin \omega + 3$  είναι το 3

1. Αν οι γωνίες  $x$ ,  $\psi$  είναι παραπληρωματικές τότε η παράσταση  $A = \sin^2(180 - x) + \sin^2(90 - \psi)$  είναι ίση με:  
 α. 0, β. 1, γ. 2, δ. δεν ορίζεται.
2. Η παράσταση  $A = \eta\mu^3x + \eta\mu x \cdot \sin^2x$  ισούται με:  
 α. 1, β.  $\eta\mu x$ , γ.  $\epsilon\varphi x$ , δ.  $\sin vx$
3. Η ελάχιστη τιμή της  $3\eta\mu x + 3$  είναι:  
 α. 0, β. 2, γ. 6, δ. τίποτα από τα παραπάνω

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

- 1** Να δείξετε ότι:
- α)  $4\eta\mu^2\omega + 4\sin^2\omega = 4$ , β)  $\sin^2x = 1 - \eta\mu^2x$ , γ)  $\eta\mu^2x = 1 - \sin^2x$   
 δ)  $1 + \epsilon\varphi^2x = \frac{1}{\sin^2x}$ , ε)  $\eta\mu^2x - \sin^2x = 1 - 2\sin^2x$ .
- 2** Να αποδείξετε ότι :
- α)  $(2\eta\mu\omega - 3\sin\omega)^2 + (3\eta\mu\omega + 2\sin\omega)^2 = 13$   
 β)  $\eta\mu^4\omega - \sin^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$   
 γ)  $\frac{1 + 2\eta\mu\alpha\sin\omega}{\eta\mu\alpha + \sin\omega} = \eta\mu\alpha + \sin\omega$
- 3** Να αποδείξετε ότι: α)  $\sin^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$ , β)  $\frac{\epsilon\varphi^2\omega - 1}{\epsilon\varphi^2\omega + 1} = \eta\mu^2\omega - \sin^2\omega$
- 4** Αν  $\sin vx = -\frac{3}{5}$  και  $90^\circ < x < 180^\circ$ , να υπολογίσετε το  $\eta\mu x$  και  $\epsilon\varphi x$
- 5** Αν  $\eta\mu x = \frac{5}{13}$  και  $90^\circ < x < 180^\circ$  να βρείτε:  $\sin vx$ ,  $\epsilon\varphi x$  και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης  $\frac{2\epsilon\varphi x - 2\sin vx}{3\eta\mu x}$
- 6** Αν  $\epsilon\varphi x = 2$ , να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:
- $A = \frac{\eta\mu x + \sin vx}{\sin vx - \eta\mu x}$
- 7** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- Α =  $\eta\mu(180^\circ - x) \cdot \sin vx \cdot \epsilon\varphi(180^\circ - x)$   
 Β =  $\eta\mu(90^\circ - x) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ - x) \cdot \sin vx$

Τριγωνομετρία 2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

**Ποιος είναι ο νόμος των ημιτόνων.**

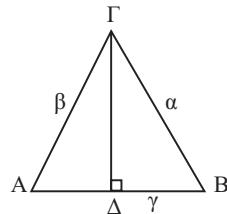
$$\text{Σε κάθε τρίγωνο } \Delta ABC \text{ ισχύει: } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu C}$$

**Απόδειξη:**

Έστω το τρίγωνο  $\Delta ABC$  είναι οξυγώνιο. Τότε στο τρίγωνο  $\Delta ABC$  φέρνουμε το ύψος  $CD$ . Έτσι από τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta ACD$  και  $\Delta CBD$  έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \beta \cdot \eta\mu A \quad (1)$$

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \Gamma\Delta = \alpha \cdot \eta\mu B \quad (2)$$



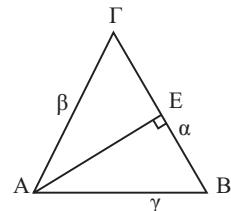
$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } \beta \cdot \eta\mu A = \alpha \cdot \eta\mu B \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \quad (3).$$

Φέρνουμε το ύψος  $AE$ . Έτσι από τα ορθογώνια τρίγωνα  $\Delta AEG$  και  $\Delta EAB$

$$\text{έχουμε: } \eta\mu G = \frac{AE}{\beta} \quad \text{ή} \quad AE = \beta \cdot \eta\mu G \quad (4), \quad \eta\mu B = \frac{AE}{\gamma} \quad \text{ή} \quad AE = \gamma \cdot \eta\mu B \quad (5)$$

$$\text{Από (4) και (5) } \beta \cdot \eta\mu G = \gamma \cdot \eta\mu B \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu G} \quad (6).$$

$$\text{Από (3) και (6) } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu G}$$



Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει ο νόμος των ημιτόνων σε αμβλυγώνιο και ορθογώνιο τρίγωνο.

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε το συμπέρασμα ότι:

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με τον νόμο των ημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα πρωτεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, όταν γνωρίζουμε: μία πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μία άλλη πλευρά ή γωνία του.

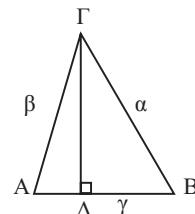
**Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων**

Σε κάθε τρίγωνο  $\Delta ABC$  ισχύουν:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \sin B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \sin C$$



**Απόδειξη:**

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΓΔ. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:  $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta\text{B}^2$  (1). Επειδή  $\Delta\text{B} = \gamma - \text{A}\Delta$  ή ισότητα (1) γράφεται:  $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - \text{A}\Delta)^2$  ή  $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \text{A}\Delta + \text{A}\Delta^2$  (2). Από το ορθογώνιο ΑΔΓ έχουμε:  $\Delta\Gamma^2 + \text{A}\Delta^2 = \beta^2$  και  $\sin\text{A} = \frac{\text{A}\Delta}{\beta}$  ή  $\text{A}\Delta = \beta \cdot \sin\text{A}$

Οπότε η ισότητα (2) γράφεται:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \beta \cdot \sin\text{A}$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει ο νόμος των συνημιτόνων σε αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο τρίγωνο.

Με το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα πρωτεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, όταν γνωρίζουμε: τις τρείς πλευρές του τριγώνου ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους.

Αν από τους παραπάνω τύπους λύσουμε ως προς το συνημίτονο τότε

$$\text{παίρνουμε: } \sin\text{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \sin\text{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \quad \sin\text{G} = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1**

Σε ένα τρίγωνο είναι  $\hat{\text{B}} = 60^\circ$ ,  $\beta = 8\text{cm}$ ,  $\gamma = 12\text{cm}$ . Να υπολογίσετε τους τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

**Λύση**

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:  $\frac{\beta}{\eta\mu\text{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\text{G}}$  ή  $\frac{8}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{12}{\eta\mu\text{G}}$

ή  $8\eta\mu\text{G} = 12\eta\mu 60^\circ$  ή  $8\eta\mu\text{G} = 12 \cdot \frac{1}{2}$  ή  $\eta\mu\text{G} = \frac{3}{4}$ . Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες  $\hat{\text{G}} = 49^\circ$  ή  $\hat{\text{G}} = 131^\circ$  απορρίπτεται διότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Οπότε  $\hat{\text{A}} = 180^\circ - 60^\circ - 49^\circ = 71^\circ$ .

Από το νόμο συνημιτόνων  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin\text{A}$  ή  $\alpha^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 0,326$

$$\alpha^2 = 208 - 5,216 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 202,784 \quad \text{ή} \quad \alpha = 14,2 \text{ cm}$$

**2**

Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:  $\frac{\alpha}{\eta\mu\text{G}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\text{A}}$  τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**Λύση**

Από τον νόμο των ημιτόνων είναι:  $\frac{\alpha}{\eta\mu\text{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\text{G}}$  έχουμε:

$$\alpha = \eta \mu A \cdot \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma}, \text{ οπότε: } \frac{\alpha}{\eta \mu \Gamma} = \frac{\gamma}{\eta \mu A} \text{ ή } \alpha \eta \mu A = \gamma \eta \mu \Gamma \text{ ή}$$

$$\eta \mu A \cdot \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma} \cdot \eta \mu A = \gamma \eta \mu \Gamma \text{ ή } \eta \mu^2 A = \eta \mu^2 \Gamma \text{ άρα } \eta \mu A = \eta \mu \Gamma, \text{ οπότε } \hat{A} = \hat{\Gamma}$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

### A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει:  $\eta \mu A = 3 \eta \mu B$  τότε  $\alpha = 3\beta$
2. Αν σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει:  $\sin A = 2 \sin B$  τότε  $\alpha = 2\beta$
3. Αν στο τρίγωνο  $ABC$  ισχύει  $A = 60^\circ$  τότε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
4. Σε κάθε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει:  $\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C}$
5. Υπάρχει τρίγωνο  $ABC$  με  $A = 45^\circ$ ,  $\alpha = 10$  cm,  $\beta = 20$  cm.
6. Αν σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει:  $\eta \mu A = \eta \mu B$  τότε  $\alpha = \beta$ .
7. Αν σε τρίγωνο  $ABC$  είναι  $\hat{A} > 90^\circ$  τότε ισχύει:  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
8. Ο νόμος των ημιτόνων δεν ισχύει σε ορθογώνιο τρίγωνο.
9. Ο νόμος συνημιτόνων ισχύει σε οποιοδήποτε τρίγωνο.

### B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Αν σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύουν:  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 50^\circ$ , και  $\alpha = 10\sqrt{3}$ , τότε η πλευρά  $\beta$  είναι ίση με:
  - α.  $3\eta \mu 50^\circ$ ,
  - β.  $3 \sin 50^\circ$ ,
  - γ.  $20\eta \mu 50^\circ$
  - δ. τίποτα από τα παραπάνω.
2. Σε κάθε τρίγωνο  $ABC$  η παράσταση  $K = \alpha \cdot \sin \Gamma + \gamma \cdot \sin A$  είναι ίση με:
  - α.  $\alpha + \gamma$ ,
  - β.  $\gamma$ ,
  - γ.  $\alpha$ ,
  - δ. τίποτα από τα παραπάνω.
3. Δίνεται ότι για τις πλευρές του τριγώνου  $ABC$  ισχύει:
 
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma, \text{ τότε } \text{η γωνία } \hat{A} \text{ είναι ίση με:}$$
  - α.  $120^\circ$ ,
  - β.  $60^\circ$ ,
  - γ.  $30^\circ$ ,
  - δ.  $150^\circ$

- 1** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  με  $\alpha = \sqrt{48}$ ,  $\beta = 8$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία του τριγώνου .
- 2** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  να αποδείξετε ότι:
  - a)**  $\operatorname{Av} \hat{A} = 60^\circ$  τότε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
  - b)**  $\operatorname{Av} \hat{A} = 120^\circ$  τότε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$
- 3** Αν σε ένα τρίγωνο  $ABC$  ισχύει  $\alpha \cdot \operatorname{sin} G = \gamma \cdot \operatorname{sin} A$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 4** Δίνεται τρίγωνο  $ABC$ . Να υπολογίσετε:
  - a)** Τη γωνία  $\hat{A}$  όταν:  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 8$
  - b)** Όλες τις γωνίες όταν:  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 3$
- 5** Σε κάθε τρίγωνο  $ABC$  να αποδείξετε ότι:
  - a)**  $\alpha = \beta \operatorname{sin} G + \gamma \operatorname{sin} B$ .
  - b)**  $\frac{\operatorname{sin} A}{\alpha} + \frac{\operatorname{sin} B}{\beta} + \frac{\operatorname{sin} G}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$
- 6** Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο  $ABC$  είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \sqrt{3}$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ . Να βρείτε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου .
- 7** Σε ένα τρίγωνο  $ABC$  είναι  $\alpha + \beta = 12$ ,  $\hat{A} = 30^\circ$  και  $\hat{B} = 45^\circ$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές του .

### ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1.** Αν για τις πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  γ ενός τριγώνου  $ABC$  ισχύει  $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) = \alpha\beta$ , να αποδείξετε ότι:
  - a)** Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο **b)** Να βρείτε τη γωνία  $\hat{G}$
- 2.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3x + \eta\mu\theta - 1 = 0$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε  $\theta$  με  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .
- 3.** Αν υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  ώστε να ισχύει:  $\eta\mu\theta = 4\lambda - 7$  και  $\operatorname{sin} 2\theta = 7\lambda - 11$  να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ .
- 4.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\kappa \in \mathbb{R}$  υπάρχει γωνία  $\omega$  ώστε να ισχύει:
 
$$\eta\mu\omega = \frac{\kappa}{\kappa-1}, \quad \operatorname{sin}\omega = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$
- 5.** Αν  $\eta\mu x + \operatorname{sin} x = -\frac{1}{5}$ . Να υπολογίσετε:
  - a)**  $\eta\mu x \cdot \operatorname{sin} x$  , **b)**  $\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\operatorname{sin} x}$  , **c)**  $\eta\mu^3 x \cdot \operatorname{sin} x + \eta\mu x \cdot \operatorname{sin}^3 x$

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- a)** Να αποδείξετε ότι:  $\epsilon \varphi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma \nu \omega}$  για κάθε  $\omega$  με  $0^0 \leq \omega \leq 90^0$  και  $\omega \neq 90^0$ .
- β)** Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων;
- γ)** Τί ξέρετε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- a)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2\eta \mu x - \sqrt{3})(2\sigma \nu x - 1) = 0$$

- β)** Αν σε ένα τρίγωνο ABC ισχύει:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \gamma$  να βρείτε τη γωνία  $\hat{A}$ .

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Αν είναι  $\eta \mu \omega = \frac{1}{2} \frac{2}{3}$ ,  $90^0 < \omega < 180^0$

- α)** Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
- β)** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\eta \mu (180^0 - \omega) + \sigma \nu (90^0 - \omega)}{\epsilon \varphi (180^0 - \omega) - \epsilon \varphi \omega}$$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

- α)** Αν υπάρχει γωνία  $\theta$  με  $0^0 \leq \theta \leq 180^0$  ώστε να ισχύει:  $\eta \mu \theta = 4\lambda - 7$  και  $\sigma \nu 2\theta = 7\lambda - 11$  να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ .
- β)** Αν  $\sigma \nu x = -\frac{3}{5}$  και  $90^0 < x < 180^0$ , να υπολογίσετε το  $\eta \mu x$  και  $\epsilon \varphi x$ .

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α)** Να διατυπώσετε το νόμο των ημιτόνων. Πότε τον χρησιμοποιούμε.
- β)** Υπάρχει γωνία  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$  ώστε  $\eta\omega = \frac{2}{3}$ ,  $\sigma\omega = \frac{1}{3}$ .  
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ)** Να συμπληρώσετε:  
**i)** Αν  $\eta\omega = 0,71$  τότε  $\sigma(90^\circ - \omega) = \dots$   
**ii)** Αν  $\sigma\omega = -0,7$  τότε  $\sigma(180^\circ - \omega) = \dots$   
**iii)** Αν  $\epsilon\omega = 5$  τότε  $\epsilon(180^\circ - \omega) = \dots$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι:

- α)**  $\eta\mu 150^\circ + \sigma v 165^\circ + \eta\mu 75^\circ - \sigma v 60^\circ = 0$   
**β)**  $\eta\mu 89^\circ + \eta\mu 91^\circ - 2\sigma v 1^\circ = 0$

**B.** Αν  $\hat{A} = 60^\circ$  τότε:  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ .

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Αν  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$  και το  $\sigma v x$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $\omega^2 - \frac{3}{2}\omega - 1 = 0$ ,  
να υπολογίσετε την γωνία  $x$ .

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Αν  $\eta\mu x + \sigma v x = -\frac{1}{5}$ . Να υπολογίσετε:

- α)**  $\eta\mu x \cdot \sigma v x$ , **β)**  $\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma v x}$ , **γ)**  $\eta\mu^3 x \cdot \sigma v x + \eta\mu x \cdot \sigma v^3 x$

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ 

## Ερωτήσεις κατανόησης

1.  $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{5}{13}$ ,  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{5}$

2.  $\eta\mu\omega > 0$ ,  $\sigma\nu\omega < 0$ ,  $\varepsilon\varphi\omega < 0$

3.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$\sigma\tau$	$\zeta$	$\eta$
3	2	1	1	1	1	3	1

4.

a)	b)	c)	d)
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$

## Προτεινόμενες ασκήσεις - Προβλήματα

1. a)  $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Άρα  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{4}{5}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}$ ,  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{4}{3}$ .

b)  $\rho = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ . Άρα  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{12}{13}$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-5}{13}$ ,  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$

c)  $\rho = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ . Άρα  $\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{3}{3} = 1$ ,  $\sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{3} = 0$ , η  $\varepsilon\varphi\omega$  δεν ορίζεται (γιατί  $x=0$ )

2. a) Για  $x=-1$  έχουμε :  $\psi=-2(-1)$  ή  $\psi=2$ , άρα  $M(-1,2)$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} . \text{Άρα } \eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sigma\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

3. Εστω το πλοίο έχει συντεταγμένες  $\Pi(x,\psi)$  τότε :  $\eta\mu30^\circ = \frac{\psi}{O\Pi}$  ή  $\psi = \eta\mu30^\circ \cdot O\Pi$  ή  $\psi = \frac{1}{2} \cdot 10$  ή  $\psi = 5$ .  $\sigma\nu30^\circ = \frac{x}{O\Pi}$  ή  $x = \sigma\nu30^\circ \cdot O\Pi$  ή  $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10$  ή  $x = 5\sqrt{3}$ . Οπότε οι συντεταγμένες είναι :  $\Pi(5\sqrt{3}, 5)$

4. **a)** Έστω  $M(x, \psi)$  τότε : Φέρνουμε το ύψος MK οπότε θα είναι και διάμεσος Τριγωνομετρία άρα  $K(-1, 0)$ , άρα  $x = -1$ .  
Στο ορθογώνιο MKO έχουμε :  $\epsilonφ60^0 = \frac{MK}{KO}$   
ή  $MK = \epsilonφ60^0 \cdot KO$  ή  $MK = \sqrt{3} \cdot 1$  ή  $MK = \sqrt{3}$  άρα  $\psi = \sqrt{3}$ . Οπότε  $M(-1, \sqrt{3})$ .
- b)** Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο άρα  $MO = BM = BO = 2$  Οπότε:  
Η γωνία  $\hat{OM} = 120^0$ . Έτσι θα έχουμε :  
 $\etaμ120^0 = \frac{\psi}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $συν120^0 = \frac{x}{OM} = \frac{-1}{2}$ ,  $\epsilonφ120^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$
5. Έστω  $M(x, \psi)$  με  $x < 0$ . Φέρνουμε το ύψος MK τότε  $x = -OK$ ,  $\psi = MK$   
Στο ορθογώνιο MKO :  $\etaμ30^0 = \frac{MK}{MO}$  ή  $MK = \etaμ30^0 \cdot MO$  ή  $MK = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ .  
 $συν30^0 = \frac{OK}{MO}$  ή  $OK = συν30^0 \cdot MO$  ή  $OK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$  ή  $OK = \sqrt{3}$ . Άρα  $M(-\sqrt{3}, 1)$ .  
**b)**  $\etaμ150^0 = \frac{\psi}{ρ} = \frac{1}{2}$ ,  $συν150^0 = \frac{x}{ρ} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ,  $\epsilonφ120^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$
6. **a)** Έστω  $M(-1, \psi)$  τότε :  $\epsilonφω = \frac{\psi}{-1}$  ή  $-\frac{3}{4} = -\frac{\psi}{-1}$  ή  $\psi = \frac{3}{4}$ . Άρα  $M(-1, \frac{3}{4})$   
**b)**  $ρ = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{3}{4})^2}$  ή  $ρ = \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$  ή  $ρ = \sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ . Οπότε  
 $\etaμω = \frac{\psi}{ρ} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$ , ή  $συνω = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$
7. Είναι  $\Sigma_1(10, 7)$ ,  $\Sigma_2(20, 18)$  άρα  $\epsilonφω_1 = \frac{7}{10} = 0,7$  άρα  $\omega_1 = 35^0$ ,  $\epsilonφω_2 = \frac{18}{20} = 0,9$   
άρα  $\omega_1 = 42^0$  οπότε η γωνία είναι  $42^0 - 35^0 = 7^0$

## 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

### Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α)	β)	γ)	δ)	ε)	στ)
Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ

2. **a)**  $x = 60^0$  ή  $x = 120^0$ , **b)**  $x = 160^0$ , **c)**  $x = 150^0$

3.

α	β	γ
1	5	6

1.

**α)**  $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sigma\nu v 120^\circ = \sigma\nu v(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\nu v 60^\circ = -\frac{1}{2}$   
 $\varepsilon\varphi 120^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$

**β)**  $\eta\mu 135^\circ = \eta\mu(180^\circ - 45^\circ) = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sigma\nu v 135^\circ = \sigma\nu v(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\nu v 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$

**γ)**  $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma\nu v 150^\circ = \sigma\nu v(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\nu v 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\varepsilon\varphi 150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. **α)**  $\eta\mu 108^\circ + \sigma\nu v 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\nu v 103^\circ = \eta\mu 72^\circ + \sigma\nu v 77^\circ - \eta\mu 72^\circ - \sigma\nu v 77^\circ = 0$

**β)**  $\varepsilon\varphi 122^\circ - \varepsilon\varphi 58^\circ \cdot \varepsilon\varphi 135^\circ = -\varepsilon\varphi 58^\circ - \varepsilon\varphi 58^\circ \cdot (-\varepsilon\varphi 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 58^\circ + \varepsilon\varphi 58^\circ \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi 58^\circ(-1 + \varepsilon\varphi 45) = \varepsilon\varphi 58^\circ(-1 + 1) = 0$

3. **α)**  $\sigma\nu v^2 45^\circ + \sigma\nu v^2 135^\circ = \sigma\nu v^2 45^\circ + (-\sigma\nu v 45^\circ)^2 = 2 \sigma\nu v^2 45^\circ = 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

**β)**  $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = \eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 30^\circ = 2\eta\mu^2 30^\circ + 2\eta\mu^2 60^\circ = 2(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

4.  $\eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(180^\circ - (140^\circ + x)) = \eta\mu(40^\circ - x)$  και  
 $\sigma\nu v(158^\circ - x) = -\sigma\nu v(180^\circ - (158^\circ - x)) = -\sigma\nu v(22^\circ + x)$

5. **α)**  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  άρα  $x = 45^\circ$  ή  $x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

**β)**  $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$  ή  $2\eta\mu x = 1$  ή  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$  άρα  $x = 30^\circ$  ή  $x = 150^\circ$

**γ)**  $\sigma\nu v x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  άρα  $x = 30^\circ$ , δ)  $\sigma\nu v x = -\frac{1}{2}$  άρα  $x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

**ε)**  $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$  άρα  $x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

**τ)**  $2\varepsilon\varphi x = 1 + \varepsilon\varphi x$  ή  $\varepsilon\varphi x = 1$  άρα  $x = 45^\circ$

6. Επειδή οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ισες ή παραπληρωματικές θα έχουν ίδιο ημίτονα και τα συνημίτονα δεν θα είναι πάντα ίδια.

7. Οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{G}$  είναι παραπληρωματικές άρα  $\eta\mu A = \eta\mu G$  και  $\sigma\nu v A = -\sigma\nu v G$  και  $\varepsilon\varphi A = -\varepsilon\varphi G$ .

Έτσι: **α)**  $\eta\mu A + \sigma\nu v A - \eta\mu G + \sigma\nu v G = \eta\mu A - \eta\mu G + \sigma\nu v A + \sigma\nu v G = 0$

**β)**  $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi G = -\varepsilon\varphi G + \varepsilon\varphi G = 0$

8. Από το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:  $BG=10\text{cm}$ . Έτσι  $\eta\mu\omega=\frac{8}{10}$ ,  $\sigma\nu\omega=\frac{6}{10}$ ,  $\varepsilon\phi\omega=\frac{8}{6}$ . Οι γωνίες  $\omega$ ,  $\varphi$  είναι παραπληρωματικές άρα  $\eta\mu\varphi=\eta\mu\omega=\frac{8}{10}$ ,  $\sigma\nu\varphi=-\sigma\nu\omega=-\frac{6}{10}$ ,  $\varepsilon\phi\varphi=-\varepsilon\phi\omega=-\frac{8}{6}$

9. Αν φέρουμε το ύψος  $AK$  τότε αυτό ισούται με:  $3\sqrt{3}$  και η  $A\Delta=2\sqrt{7}$   
Στο ορθογώνιο  $AK\Delta$   $\eta\mu\omega=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$   $\sigma\nu\omega=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$ ,  $\varepsilon\phi\omega=3\sqrt{3}$   
Οι γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  είναι παραπληρωματικές άρα :  
 $\eta\mu\varphi=\eta\mu\omega=\frac{3\sqrt{21}}{14}$ ,  $\sigma\nu\varphi=-\sigma\nu\omega=-\frac{\sqrt{7}}{14}$ ,  $\varepsilon\phi\varphi=-\varepsilon\phi\omega=-3\sqrt{3}$

### 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

#### Ερωτήσεις κατανόησης

1.

α)	β)	γ)	δ)
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$

2. Έχει δίκιο. Διότι αν υπάρχει τότε θα ισχύει:  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$ , άρα  $0+0=1$  άτοπο.
3. **α)** Αν  $\eta\mu\omega = 1$  τότε  $\sigma\nu\omega = 0$   
**β)** Αν  $\eta\mu\omega = 0$  τότε  $\sigma\nu\omega = \pm 1$
4. **δ)**

#### Προτεινόμενες ασκήσεις

1.

Από την ταυτότητα:  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$  έχουμε:  $\sigma\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$  ή  $\sigma\nu^2\omega = 1 - (\frac{5}{13})^2$   
ή  $\sigma\nu^2\omega = 1 - \frac{25}{169}$  ή  $\sigma\nu^2\omega = \frac{144}{169}$  ή  $\sigma\nu\omega = \pm \frac{12}{13}$ . Επειδή η γωνία είναι οξεία  
 $\sigma\nu\omega = \frac{12}{13} \cdot \varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

2.

Από την ταυτότητα :  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$  έχουμε:  $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\nu^2\omega$  ή  $\eta\mu^2\omega = 1 - (-\frac{1}{3})^2$   
 ή  $\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{9}$  ή  $\eta\mu^2\omega = \frac{8}{9}$  ή  $\eta\mu\omega = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$  ή  $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{8}}{3}$ .  
 $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{-1}{3}} = -\sqrt{8}$

3.

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$  ή  $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{3}{4}$  ή  $\eta\mu\omega = \frac{3}{4}\sigma\nu\omega$ . Από την ταυτότητα :  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$   
 $(\frac{3}{4}\sigma\nu\omega)^2 + \sigma\nu^2\omega = 1$  ή  $\frac{9}{16}\sigma\nu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$  ή  $9\sigma\nu^2\omega + 16\sigma\nu^2\omega = 16$  ή  
 $25\sigma\nu^2\omega = 16$  ή  $\sigma\nu^2\omega = \frac{16}{25}$  ή  $\sigma\nu\omega = \pm \frac{4}{5}$ . Επειδή η γωνία ω είναι οξεία  
 $\sigma\nu\omega = \frac{4}{5}$ , άρα  $\eta\mu\omega = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$  ή  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

4.

Θα βρούμε  $\sigma\nu\omega$ ,  $\varepsilon\varphi\omega$ . Από την ταυτότητα :  $\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1$  έχουμε :

$$\sigma\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \quad \text{ή} \quad \sigma\nu^2\omega = 1 - (\frac{4}{5})^2 \quad \text{ή} \quad \sigma\nu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\nu^2\omega = \frac{9}{25} \quad \text{ή} \quad \sigma\nu\omega = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Επειδή η γωνία είναι αμβλεία } \sigma\nu\omega = -\frac{3}{5}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{1}{10} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{4}{15} - \frac{6}{15} + \frac{2}{15} = 0$$

5. **a)**  $\eta\mu^3\omega + \eta\mu\omega\sigma\nu^2\omega = \eta\mu\omega(\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega) = \eta\mu\omega \cdot 1 = \eta\mu\omega$   
**b)**  $\sigma\nu^2\omega - \sigma\nu^4\omega = \sigma\nu^2\omega(1 - \sigma\nu^2\omega) = \sigma\nu^2\omega \cdot \eta\mu^2\omega$

6. **a)**  $x\sigma\nu\omega + \psi\eta\mu\omega = 3\sigma\nu\omega\sigma\nu\omega + 3\eta\mu\omega\eta\mu\omega = 3\sigma\nu^2\omega + 3\eta\mu^2\omega = 3(\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega) = 3$

**b)**  $x^2 + \psi^2 = (3\sigma\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega)^2 = 9\sigma\nu^2\omega + 9\eta\mu^2\omega = 9(\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega) = 9$

7. **a)**  $\sigma\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\nu^2\alpha - (1 - \sigma\nu^2\alpha) = \sigma\nu^2\alpha - 1 + \sigma\nu^2\alpha = 2\sigma\nu^2\alpha - 1$ .

**b)**  $\eta\mu^2\alpha\sigma\nu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta + \sigma\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha(\sigma\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta) + \sigma\nu^2\alpha = \eta\mu^22\alpha + \sigma\nu^2\alpha = 1$

8. **a)**  $\eta\mu\omega + \sigma\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\nu\omega)^2 =$

$$\eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\nu\omega + \sigma\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega - 2\eta\mu\omega\sigma\nu\omega + \sigma\nu^2\omega = 2\eta\mu^2\omega + 2\sigma\nu^2\omega = 2(\eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\beta) (\alpha \mu \omega + \beta \sin \nu \omega)^2 + (\beta \eta \mu \omega - \alpha \sin \nu \omega)^2 = \\ = \alpha^2 \eta \mu^2 \omega^2 + 2\alpha \eta \mu \omega \sin \nu \omega + \beta^2 \sin^2 \nu \omega + \beta^2 \eta \mu^2 \omega^2 - 2\beta \eta \mu \omega \sin \nu \omega + \alpha^2 \sin^2 \nu \omega = \\ (\alpha^2 + \beta^2) \eta \mu^2 \omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 \nu \omega = (\alpha^2 + \beta^2)(\eta \mu^2 \omega^2 + \sin^2 \nu \omega) = \alpha^2 + \beta^2.$$

9. a)  $\sin \nu^2 x \cdot \epsilon \varphi^2 x + \sin \nu^2 x = \sin \nu^2 x \cdot \frac{\eta \mu^2 x}{\sin \nu^2 x} + \sin \nu^2 x = \eta \mu^2 x + \sin \nu^2 x = 1$

β)  $\frac{\eta \mu x + \sin \nu x}{1 + \epsilon \varphi x} = \frac{\eta \mu x + \sin \nu x}{1 + \frac{\eta \mu x}{\sin \nu x}} = \frac{\eta \mu x + \sin \nu x}{\frac{\sin \nu x + \eta \mu x}{\sin \nu x}} = \frac{\sin \nu x (\eta \mu x + \sin \nu x)}{\sin \nu x + \eta \mu x} = \sin \nu x$

10. a)  $\frac{\sin \nu^2 x}{1 + \eta \mu x} = \frac{1 - \eta \mu^2 x}{1 + \eta \mu x} = \frac{(1 - \eta \mu x)(1 + \eta \mu x)}{1 + \eta \mu x} = 1 - \eta \mu x$

β)  $\epsilon \varphi x + \frac{\sin \nu x}{1 + \eta \mu x} = \frac{\eta \mu x}{\sin \nu x} + \frac{\sin \nu x}{1 + \eta \mu x} = \frac{\eta \mu x(1 + \eta \mu x) + \sin \nu x \cdot \sin \nu x}{\sin \nu x (1 + \eta \mu x)} = \\ \frac{\eta \mu x + \eta \mu^2 x + \sin \nu^2 x}{\sin \nu x (1 + \eta \mu x)} = \frac{\eta \mu x + 1}{\sin \nu x (1 + \eta \mu x)} = \frac{1}{\sin \nu x}$

11. a)  $\eta \mu 50^\circ \eta \mu 130^\circ - \sin \nu 50^\circ \sin \nu 130^\circ = \eta \mu 50^\circ \eta \mu 50^\circ - \sin \nu 50^\circ (-\sin \nu 50^\circ) = \\ \eta \mu^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ = 1$

β)  $\eta \mu^2 14^\circ + \eta \mu^2 114^\circ + \sin \nu^2 166 + \sin \nu^2 66^\circ = \\ \eta \mu^2 14^\circ + \eta \mu^2 66 + \sin \nu^2 14 + \sin \nu^2 66 = \\ \eta \mu^2 14^\circ + \sin \nu^2 14 + \eta \mu^2 66 + \sin \nu^2 66 = 1 + 1 = 2$

12.

a)  $\epsilon \varphi 70^\circ \sin \nu 70^\circ - \epsilon \varphi 110^\circ \sin \nu 110^\circ = \frac{\eta \mu 70^\circ}{\sin \nu 70^\circ} \sin \nu 70^\circ - \frac{\eta \mu 110^\circ}{\sin \nu 110^\circ} = \eta \mu 70^\circ - \eta \mu 110^\circ \\ \eta \mu 70^\circ - \eta \mu 70^\circ = 0.$

β)  $\epsilon \varphi^2 40^\circ \sin \nu^2 40 + \sin \nu^2 140^\circ = \frac{\eta \mu^2 40^\circ}{\sin \nu^2 40^\circ} \sin \nu^2 40^\circ + \sin \nu^2 40^\circ = \eta \mu^2 40^\circ + \sin \nu^2 40^\circ = 1$

13.  $\eta \mu^2 x \cdot \eta \mu 30^\circ \eta \mu 60^\circ + \sin \nu^2 x \cdot \sin \nu 30^\circ \sin \nu 60^\circ = \eta \mu^2 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \nu^2 x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \eta \mu^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \nu^2 x = \frac{\sqrt{3}}{4} (\eta \mu^2 x + \sin \nu^2 x) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

14. Από την ταυτότητα  $\eta \mu^2 + \sin \nu^2 \omega = 1$  έχουμε:  $(\frac{\lambda+1}{\lambda+2})^2 + (\frac{\lambda}{\lambda+2})^2 = 1$

ή  $(\lambda+1)^2 + \lambda^2 = (\lambda+2)^2$  ή  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$  ή  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$  ή  $\lambda = -1$  ή  $\lambda = 3$

Για  $\lambda = -1$  τότε  $\eta \mu \omega = 0$ ,  $\sin \nu \omega = -1$  άρα  $\omega = 180^\circ$ . Για  $\lambda = 3$  τότε  $\eta \mu \omega = \frac{5}{4}$   $\sin \nu \omega = \frac{5}{3}$

Απορρίπτεται διότι η γωνία δεν είναι οξεία.

## Ερωτήσεις κατανόησης

1.  $\frac{x}{\eta \mu 80^0} = \frac{\psi}{\eta \mu 30^0} = \frac{\omega}{\eta \mu 70}$

2. α)  $\frac{A B}{\eta \mu 70^0} = \frac{B \Delta}{\eta \mu 30^0} = \frac{A \Delta}{\eta \mu 80^0}$  β)  $\frac{A \Gamma}{\eta \mu 110^0} = \frac{A \Delta}{\eta \mu 50^0} = \frac{\Delta \Gamma}{\eta \mu 20}$ .

3.

a)	β)	γ)	δ)	ε)
Σ	Λ	Σ	Λ	Σ

4.  $x^2 = \omega^2 + \psi^2 - 2\omega\psi \cdot \sin 75^0$ ,  $\psi^2 = \omega^2 + x^2 - 2\omega x \cdot \sin 60^0$ ,  
 $\omega^2 = \psi^2 + x^2 - 2\psi x \cdot \sin 45^0$

5.

α) Υπολογίζεται από τον νόμο των ημιτόνων από την ισότητα:  $\frac{10}{\eta \mu x} = \frac{12}{\eta \mu 60^0}$

β) Υπολογίζεται από τον νόμο των συνημιτόνων από την ισότητα:  
 $x^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^0$

γ) Υπολογίζεται από τον νόμο των συνημιτόνων από την ισότητα:

$$\sin x = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4}$$

δ) Υπολογίζεται από τον νόμο των ημιτόνων από την ισότητα:

$$\frac{10}{\eta \mu 70^0} = \frac{x}{\eta \mu 50^0}$$

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. α) Από το νόμο ημιτόνων:  $\frac{x}{\eta \mu 30^0} = \frac{4}{\eta \mu 45^0}$  ή  $x = \frac{4}{\eta \mu 45^0} \cdot \eta \mu 30^0$   
 $x = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$  ή  $x = \frac{4}{\sqrt{2}}$  ή  $x = \frac{4\sqrt{2}}{2}$  ή  $x = 2\sqrt{2}$

β) Από το νόμο ημιτόνων:  $\frac{x}{\eta \mu 45^0} = \frac{15}{\eta \mu 120^0}$  ή  $x = \frac{15}{\eta \mu 120^0} \cdot \eta \mu 45^0$  ή

$$x = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{15 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3} \quad \text{ή} \quad x = 5 \cdot \sqrt{6}$$

γ) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{x}{\eta \mu 120^\circ} = \frac{8}{\eta \mu 45^\circ}$  ή  $x = \frac{8}{\eta \mu 45^\circ} \cdot \eta \mu 120^\circ$   
 $\text{ή } x = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $x = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  ή  $x = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2}$  ή  $x = 4 \cdot \sqrt{6}$

2.

α) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{8}{\eta \mu x} = \frac{4}{\eta \mu 30^\circ}$  ή  $4 \cdot \eta \mu x = 8 \eta \mu 30^\circ$  ή  $\eta \mu x = 2 \frac{1}{2}$   
 $\text{ή } \eta \mu x = 1 \text{ ή } x = 90^\circ$

β) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{5}{\eta \mu x} = \frac{5\sqrt{3}}{\eta \mu 120^\circ}$  ή  $5\sqrt{3} \cdot \eta \mu x = 5 \cdot \eta \mu 120^\circ$  ή  
 $5\sqrt{3} \cdot \eta \mu x = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $\eta \mu x = \frac{1}{2}$  ή  $x = 30^\circ$  ή  $x = 150^\circ$  απορρ.

γ) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{6}{\eta \mu x} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta \mu 60^\circ}$  ή  $3\sqrt{3} \cdot \eta \mu x = 6 \eta \mu 60^\circ$  ή  
 $3\sqrt{3} \cdot \eta \mu x = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $\eta \mu x = 1$  άρα  $x = 90^\circ$

3.

α) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B}$  έχουμε :  $\frac{2}{\eta \mu A} = \frac{\sqrt{2}}{\eta \mu 30^\circ}$  ή  
 $\sqrt{2} \cdot \eta \mu A = 2 \cdot \eta \mu 30^\circ$  ή  $\sqrt{2} \eta \mu A = 2 \frac{1}{2}$  ή  $\eta \mu A = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ή  $\eta \mu A = \frac{\sqrt{2}}{2}$  άρα  
 $\hat{A} = 45^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 105^\circ$  ή  $\hat{A} = 135^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 15^\circ$

β) Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma} = \frac{\beta}{\eta \mu B}$  έχουμε :  $\frac{\sqrt{3}}{\eta \mu 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\eta \mu B}$  ή  
 $\sqrt{3} \cdot \eta \mu B = \sqrt{2} \eta \mu 60^\circ$  ή  $\sqrt{3} \cdot \eta \mu B = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $\eta \mu B = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ή  $\hat{B} = 45^\circ$  ή  
 $\hat{B} = 135^\circ$  απορρίπτεται. Όταν  $\hat{B} = 45^\circ$  τότε  $\hat{A} = 75^\circ$

4.

Από το νόμο ημιτόνων :  $\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B}$  έχουμε :  $\frac{10\sqrt{3}}{\eta \mu A} = \frac{10}{\eta \mu 30^\circ}$  ή  
 $10 \cdot \eta \mu A = 10\sqrt{3} \cdot \eta \mu 30^\circ$  ή  $10 \eta \mu A = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$  ή  $\eta \mu A = \frac{\sqrt{3}}{2}$  άρα  $\hat{A} = 60^\circ$  οπότε  
το τρίγωνο είναι ορθογώνιο (η γωνία  $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) ή  $\hat{A} = 120^\circ$  οπότε  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , άρα  
θα είναι ισοσκελές.

5. Από το νόμο ημιτόνων:  $\frac{x}{\eta\mu 130^0} = \frac{200}{\eta\mu 20^0}$  ή  $x \cdot \eta\mu 20^0 = 200 \cdot \eta\mu 130^0$  ή  $x \cdot 0,342 = 200 \cdot 0,766$  ή  $x = 447,95 \text{ m}$
6. Από το νόμο ημιτόνων:  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$  ή  $\frac{12}{\eta\mu A} = \frac{6}{\eta\mu 60^0}$  ή  $6\eta\mu A = 12\eta\mu 60^0$   
 $\eta\mu A = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $\eta\mu A = \sqrt{3}$  άτοπο
7. Στο τρίγωνο OFF<sub>2</sub> εφαρμόζω τον νόμο των ημιτόνων  
 $\frac{F_2}{\eta\mu 28^0} = \frac{F}{\eta\mu 117}$  ή  $\eta\mu 117^0 \cdot F_2 = \eta\mu 28^0 \cdot 10$  ή  $0,891 \cdot F_2 = 0,469 \cdot 10$  ή  $F_2 = 5,26 \text{ N}$ .
- Στο τρίγωνο OFF<sub>1</sub> εφαρμόζω τον νόμο των ημιτόνων  
 $\frac{F_1}{\eta\mu 35^0} = \frac{F}{\eta\mu 117}$  ή  $\eta\mu 117^0 \cdot F_1 = \eta\mu 35^0 \cdot 10$  ή  $0,891 \cdot F_1 = 0,574 \cdot 10$  ή  $F_1 = 6,42 \text{ N}$
8. Στο τρίγωνο ΓΖΕ εφαρμόζω το νόμο των ημιτόνων  
 $\frac{EZ}{\eta\mu 46^0} = \frac{AZ}{\eta\mu 44^0}$  ή  $AZ = \frac{EZ}{\eta\mu 46^0} \eta\mu 44^0 \quad (1)$
- Στο τρίγωνο ΔΕΖ  
 $\frac{\Delta Z}{\eta\mu E} = \frac{EZ}{\eta\mu \Delta}$  ή  $\frac{\Delta Z}{\eta\mu 64^0} = \frac{EZ}{\eta\mu 26^0}$  ή  $\Delta Z = \frac{EZ}{\eta\mu 26^0} \eta\mu 64^0 \quad (2)$
- Αν διαιρέσουμε τις (1), (2)  $\frac{\Gamma Z}{\Delta Z} = \frac{\eta\mu 44^0 \cdot \eta\mu 26^0}{\eta\mu 64^0 \cdot \eta\mu 46^0}$  ή  $\frac{\Gamma Z}{30 + \Gamma Z} = \frac{0,695 \cdot 0,4384}{0,899 \cdot 0,7193}$  ή  
 $0,646\Gamma Z = 0,304\Gamma Z + 9,14$  ή  $0,342\Gamma Z = 9,14$  ή  $\Gamma Z = 26,72$   
άρα (1) δίνει  $EZ = \frac{\Gamma Z \cdot \eta\mu 46^0}{\eta\mu 44^0}$  ή  $EZ = 27,65 \text{ m}$ .
- Άρα το ύψος είναι  $27,65 + 1,4 = 29,05 \text{ m}$ .
- 9.
- α) Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $x^2 = 7^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \eta\mu 45^0$  ή  
ή  $x^2 = 49 + 9 - 42 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$  ή  $x^2 = 49 + 18 - 42$  ή  $x^2 = 25$  ή  $x = 5$
- β) Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \sigma v x$   
ή  $49 = 9 + 25 - 30 \sigma v x$  ή  $30 \sigma v x = 34 - 49$  ή  $30 \sigma v x = -15$  ή  $\sigma v x = -\frac{1}{2}$  ή  $x = 120^0$
- γ) Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $x^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 - 22 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \sigma v 30^0$   
ή  $x^2 \cdot 3 = 16 + 4 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ή  $x^2 = 28 - 8 \cdot 3$  ή  $x^2 = 4$  ή  $x = 2$ .
- δ) Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $13^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \sigma v x$   
ή  $169 = 144 + 25 - 20 \sigma v x$  ή  $10 \sigma v x = 0$  ή  $\sigma v x = 0$  ή  $x = 90^0$ .

- 10.** Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A$  ή  
 $(3\sqrt{3})^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A \cdot 3 = 2\beta \cdot 3 \cdot \sin A$  ή  $9^2 - 2\beta^2 \sin 120^\circ = 27 = 2\beta^2 - 2\beta^2 \left(-\frac{1}{2}\right)$  ή  
 $27 = 2\beta^2 + \beta^2$  ή  $3\beta^2 = 27$  ή  $\beta^2 = 9$  ή  $\beta = 3$ . Άρα  $\beta = \gamma = 3$
- 11.** Το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές με  $\angle AOB = 120^\circ$ . Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ$  ή  
 $AB^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$  ή  $AB^2 = 100 + 100 + 100 = 300$  ή  
 $AB = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$
- 12.** Είναι  $AB = \Gamma\Delta = 4$ ,  $B\Gamma = A\Delta = 3$ ,  $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ .  
Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  από το νόμο συνημιτόνων έχουμε:  
 $B\Delta^2 = A\Delta^2 + AB^2 - 2A\Delta \cdot AB \cdot \sin 120^\circ$  ή  $B\Delta^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$  ή  
 $B\Delta^2 = 9 + 16 + 12 = 37$  ή  $B\Delta = \sqrt{37}$ .  
Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  από το νόμο συνημιτόνων έχουμε:  
 $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - \Delta\Gamma \cdot 2A\Delta \cdot \sin 60^\circ$  ή  $A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$  ή  
 $A\Gamma^2 = 9 + 16 - 12 = 13$  ή  $A\Gamma = \sqrt{13}$
- 13.** Υπολογίζετε από το νόμο των συνημιτόνων  
 $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \sin 73^\circ$  ή  $AB^2 = 10000 + 23716 - 2 \cdot 100 \cdot 154 \cdot 0,292$   
ή  $AB^2 = 33717 - 8.993,6$  ή  $AB^2 = 24.723,4$  ή  $AB = 157,23 \text{ m}$
- 14.** Από το νόμο των συνημιτόνων  
 $\sin A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$  ή  $\sin A = \frac{1,3^2 + 0,7^2 - 1,8^2}{2 \cdot 1,3 \cdot 0,7}$  ή  $\sin A = \frac{2,18 - 3,24}{1,82}$   
ή  $\sin A = -\frac{1,06}{1,82}$  ή  $\sin A = -0,582$ , άρα  $\hat{A} = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$

1.

**α)**  $(1-\eta\mu x + \sigma v x)^2 = 1 + \eta\mu^2 x + \sigma v^2 x - 2\eta\mu x + 2\sigma v x - 2\eta\mu x \sigma v x =$

$1 + 1 - 2\eta\mu x + 2\sigma v x - 2\eta\mu x \sigma v x = 2 - 2\eta\mu x + 2\sigma v x - 2\eta\mu x \sigma v x =$

$2(1 + \sigma v x) - 2\eta\mu x(1 + \sigma v x) = (1 + \sigma v x)(2 - 2\eta\mu x) = 2(1 + \sigma v x)(1 - \eta\mu x)$

**β)**  $\frac{1 + \sigma v x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma v x} = \frac{(1 + \sigma v x)(1 + \sigma v x)}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} + \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} =$   
 $= \frac{1 + \sigma v x + \sigma v x + \sigma v^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} = \frac{1 + 2\sigma v x + 1}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} = \frac{2 + 2\sigma v x}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} =$   
 $= \frac{2(1 + \sigma v x)}{\eta\mu x(1 + \sigma v x)} = \frac{2}{\eta\mu x}.$

2.

Έστω  $M(-5, \psi)$  τότε :  $13 = \sqrt{(-5)^2 + \psi^2}$  ή  $169 = 25 + \psi^2$  ή  $\psi^2 = 144$  ή  $\psi = \pm 12$

Επειδή  $\psi > 0$ ,  $\psi = 12$ . Οπότε συνω =  $\frac{x}{OM} = \frac{-5}{13}$ . Από τον νόμο

των συνημιτόνων :  $AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2 \cdot OM \cdot OA \cdot \cos \theta$  ή

$AM^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \left( -\frac{5}{13} \right)$  ή  $AM^2 = 169 + 16 + 40$  ή  $AM^2 = 225$  ή  $AM = 15$

3.

Στο τρίγωνο  $ABG$   $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$ . Άρα η γωνία  $A\hat{\Delta}G = 75^\circ$ . Οπότε το

τρίγωνο  $AG\Delta$  είναι ισοσκελές με  $AG = A\Delta$ . Στό τρίγωνο  $ABG$  από το

νόμο ημιτόνων έχουμε :  $\frac{B\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B}$  ή  $\frac{30}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu 45^\circ}$  ή  
 $A\Gamma = \eta\mu 45^\circ \cdot \frac{30}{\eta\mu 60^\circ}$  ή  $A\Gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{30}{\sqrt{3}}$  ή  $A\Gamma = \frac{\sqrt{2} \cdot 30}{\sqrt{3}}$  ή  $A\Gamma = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 30}{3}$

$\text{ή } A\Gamma = 10\sqrt{6}$ . Άρα  $A\Delta = 10 \cdot \sqrt{6}$

4.

**α)** Στο τρίγωνο  $AB\Delta$  εφαρμόζω τον νόμο των ημιτόνων και έχουμε :

$$\frac{B\Delta}{\eta\mu A_1} = \frac{AB}{\eta\mu \varphi} \quad \text{ή} \quad \frac{B\Delta}{\eta\mu A_1} = \frac{\gamma}{\eta\mu \varphi} \quad \text{ή} \quad \frac{\gamma}{B\Delta} = \frac{\eta\mu \varphi}{\eta\mu A_1} \quad .(1)$$

**β)** Στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  εφαρμόζω τον νόμο των ημιτόνων και έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{\eta\mu A_2} = \frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu \omega} \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\eta\mu A_2} = \frac{\Gamma\Delta}{\eta\mu \omega} \quad \text{ή} \quad \frac{\beta}{\Gamma\Delta} = \frac{\eta\mu \omega}{\eta\mu A_2} \quad .(2)$$

**γ)** Επειδή οι γωνίες  $\varphi$ ,  $\omega$  είναι παραπληρωματικές θα ισχύει :

$\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega$  ακόμη  $\eta\mu A_1 = \eta\mu A_2$ . Οπότε από (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{\gamma}{B\Delta} = \frac{\beta}{\Gamma\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

5.

**a)**  $E = \frac{1}{2} AB \cdot \Gamma\Delta$  (1). Στο ορθογώνιο  $A\Delta\Gamma$   $\eta\mu\Gamma A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A}$  ή  $\eta\mu\Gamma A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{\beta}$

Επειδή οι γωνίες  $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ ,  $\hat{\Delta}$ , είναι παραπληρωματικές  $\eta\mu\Gamma A\Delta = \eta\mu A$ .

Οπότε  $\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \cdot \eta\mu\Gamma A\Delta = \beta \eta\mu A$ . Άρα  $E = \frac{1}{2} \beta AB \cdot \eta\mu A$  ή  $E = \frac{1}{2} \gamma \beta \cdot \eta\mu A$

**b)** Από το νόμο των συνημιτόνων στο  $AB\Gamma$  έχουμε :

$$\text{συν}A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \quad \text{ή} \quad \text{συν}A = \frac{12^2 + 20^2 - 28^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \quad \text{ή} \quad \text{συν}A = \frac{144 + 400 - 784}{480}$$

$$\text{ή} \quad \text{συν}A = -\frac{240}{480} \quad \text{ή} \quad \text{συν}A = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } \hat{A} = 120^\circ.$$

Από το α) ερώτημα  $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \eta\mu 120 = \frac{1}{2} \cdot 240 \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$  τ.μ.

**6. a)** Από τον νόμο ημιτόνων έχουμε :  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \kappa > 0$  και

$$\text{έχουμε} : \eta\mu A = \frac{\alpha}{\kappa}, \eta\mu B = \frac{\beta}{\kappa}, \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\kappa}, \text{ οπότε} : \eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\kappa}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha^2}{\kappa^2} = \frac{\beta^2}{\kappa^2} + \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο}.$$

**b)** Επειδή  $\eta\mu(B+\Gamma) \leq 1$  και  $\text{συν}(B-\Gamma) \leq 1$  άρα από την ισότητα

$$\eta\mu(B+\Gamma) + \text{συν}(B-\Gamma) = 2 \quad \text{θα έχουμε ότι} : \eta\mu(B+\Gamma) = 1 \quad \text{άρα } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \quad \text{οπότε} \\ \hat{A} = 90^\circ, \text{ οπότε είναι ορθογώνιο και } \text{συν}(B-\Gamma) = 1, \hat{B} - \hat{\Gamma} = 0^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ \text{οπότε είναι και ισοσκελές}.$$

7.

Από το νόμο των ημιτόνων έχουμε :  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad \text{έχουμε} :$

**a)**  $\alpha(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta(\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma(\eta\mu A - \eta\mu B) =$

$$\alpha\eta\mu B - \alpha\eta\mu\Gamma + \beta\eta\mu\Gamma - \beta\eta\mu A + \gamma\eta\mu A - \gamma\eta\mu B =$$

$$\beta\eta\mu A - \gamma\eta\mu A + \gamma\eta\mu B - \beta\eta\mu A + \gamma\eta\mu A - \gamma\eta\mu B = 0$$

**b)**

$$\beta\text{συν}\Gamma + \gamma\text{συν}B = \beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \\ = \frac{2\alpha}{2\alpha} = \alpha.$$

$$\gamma) \alpha(\beta\sin\Gamma - \gamma\sin\beta) = \alpha\beta\sin\Gamma - \alpha\gamma\sin\beta = \alpha\beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} - \alpha\gamma \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} =$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2} = \beta^2 - \gamma^2$$

$$\delta) \frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{\sin\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

8.

Οι πλευρές θα είναι :  $\gamma$  ,  $\gamma+1$  ,  $\gamma+2$  οπότε από το νόμο των συνημιτόνων ν  
 $\gamma^2 = (\gamma+1)^2 + (\gamma+2)^2 - 2(\gamma+1)(\gamma+2)\sin\Gamma$  ή  $\gamma^2 = \gamma^2 + 2\gamma + 1 + \gamma^2 + 4\gamma + 4 - 2(\gamma^2 + 3\gamma + 2) \frac{3}{4}$   
 ή  $\gamma^2 = 2\gamma^2 + 6\gamma + 5 - \frac{3\gamma^2}{2} - \frac{9\gamma}{2} - 3$  ή  $\gamma^2 - 3\gamma - 4 = 0$  ή  $\gamma = -1$  απορρ. ή  $\gamma = 4$

Άρα οι πλευρές είναι  $\alpha=5$  ,  $\beta=6$  ,  $\gamma=4$  ή  $\alpha=6$  ,  $\beta=5$  ,  $\gamma=3$

9.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε από το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{AB}{\eta\mu\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\eta\mu A} \quad \text{ή} \quad \frac{30}{\eta\mu 25^\circ} = \frac{B\Gamma}{\eta\mu 49^\circ} \quad \text{ή} \quad B\Gamma \cdot \eta\mu 25^\circ = 30 \cdot \eta\mu 49^\circ \quad \text{ή}$$

$$0,4226 \cdot B\Gamma = 30 \cdot 0,755 \quad \text{ή} \quad B\Gamma = 53,59.$$

Στο ΑΔΒ εφαρμόζω νόμο ημιτόνων

$$\frac{BD}{\eta\mu A} = \frac{AB}{\eta\mu D} \quad \text{ή} \quad \frac{BD}{\eta\mu 107^\circ} = \frac{30}{\eta\mu 21^\circ} \quad \text{ή} \quad \eta\mu 21^\circ \cdot BD = \eta\mu 107^\circ \cdot 30 \quad \text{ή} \quad 0,3584 \cdot BD = 0,956 \cdot 30 \quad \text{ή} \quad BD = 80,04$$

Στο ΒΔΓ εφαρμόζω νόμο συνημιτόνων

$$\Delta\Gamma^2 = BD^2 + BG^2 - 2BD \cdot BG \cdot \sin 54^\circ \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma^2 = 80,04^2 + 53,59^2 - 2 \cdot 80,04 \cdot 53,59 \cdot 0,5878 \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma^2 = 6.406,4 + 2.871,9 - 5.042,5 \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma^2 = 4.235 \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma = 65,08m$$



# Λύσεις των Ασκήσεων του Βιβλίου



## Μέρος πρώτο

### Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

#### 1.1 Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

##### Ερωτήσεις κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ

B. 1. ε) , 2. α) , 3. β) , 4. α) , 5. α) , 6. ε) , 7. β)

Γ. Ακέραιοι : -4, 8,  $\sqrt{16}$ , 0. Ρητοί : -4, 8, 3,  $\bar{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 0,  $\frac{1}{3}\sqrt{16}$ . Αρρητοί :  $\sqrt{5}$ ,  $\pi$

##### Ασκήσεις για λύση

1. Φυσικοί : +3,  $\sqrt{9}$ . Ακέραιοι : +3, -2,  $\sqrt{9}$ . Ρητοί :  $\frac{3}{5}$ ,  $2,2\bar{3}$ ,  $\frac{2}{3}$

Αρρητοί :  $\pi$ ,  $\sqrt{3}$ .

2. Άρτιοι :  $2v$ ,  $v(v+1)$ . Περιττοί :  $2v+1$ ,  $2v+3$ ,  $4v+1$ ,  $4v+3$ .

3. α) 38 , β) 5 , γ) 0 , δ) -2 . 4. A=12 , B=-48 , Γ=-8+2γ . 5. γ)  $\alpha=\frac{192}{5}$  ,  $\beta=\frac{64}{5}$ .

6.  $A=\alpha+\beta+\gamma+\beta+2\gamma=2001+6=2007$  .  $B=\alpha+2\beta+3\gamma+\beta+2\gamma=2007+6=2013$ .

7. α)  $A=\frac{2(1+2+3+\dots+50)}{5(1+2+3+\dots+50)}=\frac{2}{5}$  , β)  $A=4(50+49+\dots+1)-2(99+98+97+\dots+1)=$

$$=4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 100 \cdot 51 - 99 \cdot 100 = 100(51-99) = 100(-48) = -4800$$

8.  $A=\frac{-(2\alpha-\beta+3\gamma-2\gamma+\alpha-\beta)-(-3\alpha+2\beta-\gamma+2007)}{-(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta+2\gamma)-(-3\beta-2\gamma)}=$   
 $=\frac{-2\alpha+\beta-3\gamma+2\gamma-\alpha+\beta+3\alpha-2\beta+\gamma-2007}{\alpha-2\beta-\alpha-\beta-2\gamma+3\beta+2\gamma}=-2007$  .

9.  $A=\frac{100-3\alpha+3\beta-2\alpha+4\beta-5+15\alpha+3\beta-6}{-4\alpha+2\beta-12\beta+4+4\alpha+10\beta}=\frac{89+10(\alpha+\beta)}{4}=\frac{129}{4}$

10.  $x+\psi=\alpha-2\beta-8+2+4\alpha+4+7\beta+2=5(\alpha+\beta)=0$  .

11.  $3x\psi-3x\psi+3x-x+\psi+7-3\psi=2(x-\psi)+7=2(850,35+150,65)+2=2004$ .

12.  $\kappa=0$  ή  $\kappa=1$ .

13.  $\delta=-1$ ,  $\gamma=3$ ,  $\beta=5$  ,  $\alpha=15$ . Οπότε  $\alpha+\beta+\gamma+\delta=22$  .

#### Β. Δυνάμεις πραγματικών

##### Ερωτήσεις κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ

**Λύσεις** Β. 1. δ) , 2. β) , 3. γ) , 4. β) , 5. α) , 6. α) , 7. α) , 8. γ) , 9. γ) , 10. β)

### Ασκήσεις για λύση

1. Θετικοί :  $8^{-3}$ ,  $4^0$ . Αρνητικοί :  $-7^{-2}$ ,  $(-3)^{-5}$ ,  $(-20)^5$ ,  $-4^4$
2. α)  $\alpha^9$ , β)  $-\alpha^7$ , γ)  $\alpha^2$ , δ)  $(\alpha \cdot \beta)^5$ , ε)  $2^{-5}$ , στ) 6
3.  $A=3^{78}$ ,  $B=2^{100}$ ,  $\Gamma=2^{98}$ ,  $\Delta=6^{17}$
4. α)  $x=\frac{5}{3}$ , β)  $x=1$ , γ)  $x=\frac{4}{3}$ , δ)  $x=3$ , ε)  $x=2$ , στ)  $x=-2$
5. α)  $\alpha>\beta$ , β)  $\alpha>\beta$ , γ)  $\alpha>\beta$ , δ)  $\alpha<\beta$ , ε)  $\beta=(243)^7$ , α=(3125)<sup>7</sup>, άρα  $\alpha>\beta$ .
6. α)  $x=-3$ , β)  $A=0$ . 7.  $x=1$ ,  $\psi=1$ ,  $A=\frac{2}{9}$ . 8.  $A=2$ . 9.  $A=-3^9$ . 10.  $A=-2^{2000}$
11. α)  $A=10 \cdot 2^y = \pi \text{ολλαπλάσιο του } 10$ . β)  $\alpha = 6 \cdot (4^{6y} + 2) = \pi \text{ολλαπλάσιο του } 6$
12.  $A=-7$ ,  $B=5$ . 13.  $A=(-1)^{y+2}$  οπότε : i) Αν ν άρτιος τότε  $A=1$ , ii) Αν ν περιττός  $A=-1$ .
14.  $A=\frac{2}{13}$ .
15.  $A=\frac{3}{2}$ , άρα ο αντίθετος είναι  $-\frac{3}{2}$  και ο αντίστροφος ο  $\frac{2}{3}$ .  $B=4$ , άρα ο αντίθετος είναι  $-4$  και ο αντίστροφος  $\frac{1}{4}$ .

### Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

---

#### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

B. 1. β) , 2. α) , 3. β) 4. α) 5. γ) , 6. γ)  
Γ.

$\alpha$	$\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
4	49	2	7	$\sqrt{53}$	9	14	14
25	324	5	18	$\sqrt{359}$	23	90	90
169	196	13	14	$\sqrt{365}$	27	182	182

### Ασκήσεις για λύση

1.  $A=12$ ,  $B=3,5$ ,  $\Gamma=7$ .
2. A.  $x \geq -1$ , B.  $x \leq \frac{4}{3}$ , Γ.  $2 \leq x \leq 3$ , Δ.  $x \leq \frac{3}{2}$ .
3. Αρκεί να δείξουμε ότι:  $(2+\sqrt{5})^2 = 9+4\sqrt{5}$ . 4.  $A=4$ ,  $B=2$ ,  $\Gamma=12$ .

5.  $A=2$ ,  $B=12$

6.  $A=-2(2+\sqrt{5})$ ,  $B=-2(2-\sqrt{5})$ , οπότε:  $A \cdot B = -4$ ,  $A-B = -4\sqrt{5}$

7. i)  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{3}}{3}$

ii)  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 4(\sqrt{3}+\sqrt{2}), \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

8. i) Αρκεί:  $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ , ii) Αρκεί:  $(1+\sqrt{5})^2 = 6+2\sqrt{5}$

9. i)  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ii)  $x=3$ , iii)  $x=6$ ,  $x=0$ . 10.  $BE = \sqrt{63}$

11. Ισχύει  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$  άρα i)  $\alpha^2 - \beta^2$  ii)  $\beta + \alpha + \gamma$

12. Αρκεί  $(4+\sqrt{5}) \cdot \frac{4-\sqrt{5}}{11} = 1$ . 13. α)  $\Pi = 20\text{cm}$ ,  $E = 17\text{cm}^2$ , β)  $\alpha = \sqrt{17}$

14. Αν  $\beta = \gamma$  και  $\alpha$  είναι η υποτείνουσα τότε  $24 = \frac{1}{2}\beta^2$  ή  $\beta^2 = 48\text{cm}^2$  οπότε  $\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2$  ή  $\alpha^2 = 96$  άρα  $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2$  ή  $\delta^2 = 192$  ή  $\delta = \sqrt{192}\text{ cm}$ .

15. α)  $A\Delta = 3$ , β)  $GE = \frac{\sqrt{73}}{2}$

## 1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

### A. Αλγεβρικές παραστάσεις

#### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8
$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$

B. 1. β), 2. δ), 3. β), 4. δ), 5. β)

#### Ασκήσεις για λύση

1. α), β), δ), ε), ζ)

2.

Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς $x$	Βαθμός ως προς $\psi$	Βαθμός ως προς $x, \psi$
1	$x\psi^4$	1	4	5
$\frac{2}{3}$	$x^6\psi^2$	6	2	8
$-\sqrt{3} - 2$	$x$	1	0	1
5	$x^6\psi^2$	6	2	8

- Λύσεις**
3. Επιφάνεια :  $6x^2$  , συντελεστής 6 , κύριο μέρος  $x^2$  , βαθμός 2 .  
Όγκος :  $x^3$  , συντελεστής 1 , κύριο μέρος  $x^3$  , βαθμός 3 .  
Για  $x=3$  Επιφάνεια :  $6 \cdot 3^2 = 54$  τετραγωνικές μονάδες .  
Όγκος :  $3^3 = 27$  κυβικές μονάδες
  4. α) Αν  $\lambda=3$  τότε : Ο βαθμός ως προς α είναι το 5 , ως προς β το 3 και ως προς α , β το 8 . β) Αν  $\lambda=2$  τότε  $B=5x^2\psi^3$  οπότε : βαθμός ως προς x το 2 , ως προς ψ το 3 και ως προς x,ψ το 5 . Αν  $\lambda=-3$  τότε  $B=-5x^3\psi^2$  οπότε : βαθμός ως προς x το 3 , ως προς ψ το 2 και ως προς x,ψ το 5 .
  5. α)  $4x^4\psi^2$  , β)  $x^3\psi^4$  , γ)  $x^7\psi^9$  . 6. α)  $v=2\sqrt{6}x$  , β)  $E=8\sqrt{6}x^2$  , Π=18x

## Πρόσθεση

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$

### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $-2x^3\psi$  , β)  $\frac{41}{10}x^2$  , γ) 0 , δ)  $\frac{7}{10}x^2$  , ε)  $3x^2$  , στ)  $5,9x\psi$
2. α)  $-24x^4$  , β)  $-4x^3\psi^3$  , γ)  $6x\psi^5$  , δ)  $-40x^5\psi^4$  , ε)  $-\frac{5}{2}x^3\psi^3$  , στ)  $-x^3\psi^6$
3. α)  $\frac{3}{4}\alpha$  , β)  $\frac{16}{3}\alpha^3\beta$  , γ)  $-\frac{1}{x^2}$  , δ)  $-\frac{3}{\psi}$  , ε)  $\frac{\psi^3}{x\omega^5}$  , στ)  $-3\frac{\beta}{\alpha}$

---

### 1.3-1.4 Πολυώνυμα – Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

---

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$

- B. 1. γ) , 2. γ) , 3) β

### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $B$  , Δ , E . β)  $B=-x^3+x^2-2x-1$  , Δ=0 ,  $E=\frac{3}{5}$  γ) B: 3<sup>ου</sup> βαθμού , Δ : δεν έχει βαθμό , E : μηδενικού βαθμού .
2. α)  $12x^5-8x^4+12x^3-8x^2$  , β)  $x^9-2x^6+4x^2-4x$  , γ)  $x^3-5x^2+6x$  , δ)  $\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3-3\alpha^2+7\alpha-2$
3. α)  $a=-4$  , β)  $x=27$

4. α)  $-4x^4 + 12x^3 + 2x^2 - 8x + 6$ , β)  $4x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 10x - 8$ , γ)  $4x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 15x - 5$

5. α)  $\alpha = -2$ , β)  $\beta = 10$ , γ)  $\gamma = -12$ .

6. α)  $2^{οο} \beta \alpha \theta \mu ού$ , β)  $P(P(x)) = P(2x^2) = 2 \cdot (2x^2)^2 = 2 \cdot 4x^4 = 8x^4$ , άρα  $P(P(x)) - 1 = 8x^4 - 1$

7. Αν  $P(x)$  είναι το πολυώνυμο τότε:  $5x^2 - 2x + 1 - P(x) = 4x^2 - 3x + 5$  ή  $P(x) = x^2 + x - 4$

8. α)  $\lambda = -4$ , β)  $\kappa = 3$ .

9.  $Q(x) = (\alpha + 1)x^3 - 3x^2 + \alpha x - 27$  άρα  $\alpha = 8$

10. α) Ισχύει: Κέρδος = Έσοδα - Κόστος, άρα αν  $P(x)$  είναι το κέρδος τότε:  
 $P(x) = -2x^2 + 1500x - 50.000$ . β) Για  $x = 0$ ,  $K(0) = 50.000$ . Είναι το κόστος για τα λειτουργικά έξοδα (ενοίκια, ασφάλιση, κ.λ.π.). γ) Για  $x = 100$   
 $P(100) = -2 \cdot 100^2 + 1500 \cdot 100 - 50.000 = 80.000$  Ευρώ.

## 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

---

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ

B. 1. β), 2. β), 3. β), 4. β), 5. α), 6. γ), 7. β), 8. ε), 9. α), 10. γ), 11. β)

### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $9x^4 + 12x^3 + 4x^2$ , β)  $\frac{4}{9}x^4 + 16x^2 - \frac{16}{3}x^3$ , γ)  $9x^6 - 12x^4 + 4x^2$ , δ)  $16x^4\psi^2 + 16x^3\psi^3 + 4x^2\psi^4$

ε)  $9x^2 + 12x^4\psi + 4x^6\psi^2$ , στ)  $\frac{1}{\alpha^2} + 2 + \alpha^2$

2. α)  $\alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 + 8\beta^3$ , β)  $8\alpha^6 + 36\alpha^5\beta^3 + 54\alpha^4\beta^6 + 27\alpha^3\beta^9$ , γ)  $27\alpha^3 - 54\alpha^2\beta^2 + 36\alpha\beta^4 - 8\beta^6$

δ)  $\frac{27}{64}\alpha^6 - \frac{27}{4}\alpha^5 + 36\alpha^4 - 64\alpha^3$ , ε)  $8x^3 - 24x + \frac{24}{x} - \frac{8}{x^3}$ , στ)  $15\sqrt{3} - 26$

3. α)  $16x^2 - \psi^2$ , β)  $9x^4 - \psi^2$ , γ)  $x^2 - \psi^2 + 4\psi z - 4z^2$ , δ)  $16x^2 - x^6$ , ε)  $-(x^4 - \psi^4)$

4. α)  $(2x-2)(4x^2+4x+4)$ , β)  $(3x-4\psi)(9x^2+12x\psi+16\psi^2)$ , γ)  $(2x+4)(4x^2+8x+16)$   
 δ)  $(4-2x)(16+8x+4x^2)$ , ε)  $2\beta(27\alpha^2+18\alpha\beta)$

5. α)  $-5x^2 + 12x + 10$ , β)  $-21\alpha\beta$ , γ)  $0$ , δ)  $6x^2 + 2$

6. α)  $3x^2 - 65x + 351$ , β)  $12x^2 - 26x + 13$ , γ)  $3x^2 - 3x - 1$

**Λύσεις**

7. Από την ταυτότητα :  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$  έχουμε :  $P(x) = (x^3 - 1 - x^3 - 1)^2 = (-2)^2 = 4$   
 Από την ταυτότητα :  $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$  έχουμε :  $Q(x) = (x^2 + 1 + 1 - x^2)^3 = 2^3 = 8$
8. α)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot (-4) = 9 + 8 = 17$   
 β)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 3^3 - 3 \cdot (-4) \cdot 3 = 27 + 36 = 63$
9. α)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \cdot 4 = 25 - 8 = 17$   
 β)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 5^3 - 3 \cdot 5 \cdot 5 = 125 - 60 = 65$   
 γ)  $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 17^2 - 2 \cdot 4^2 = 257$
10. Από την ταυτότητα :  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$  έχουμε :  
 2( $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ ) =  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$  άρα : α)  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -9$   
 β) 3( $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ ) - 2007 = 3 · (-9) - 2007 = -27 - 2007 = -2034
11. α) Από την ταυτότητα :  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$  έχουμε :  $\alpha\beta = -5$   
 β) Από την ταυτότητα :  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$  έχουμε ότι:  $\alpha^3 + \beta^3 = 186$
12. α) Από την ταυτότητα :  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$  έχουμε :  $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2x \frac{1}{x} = 2^2 - 2 = 2$ . β) Από την ταυτότητα :  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$  έχουμε :  
 $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3x \frac{1}{x} (x + \frac{1}{x}) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$   
 γ)  $x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + (\frac{1}{x^2})^2 = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2x^2 \frac{1}{x^2} = 2^2 - 2 = 2$
13. α) Από την ταυτότητα :  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$  έχουμε :  $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2x \frac{1}{x} = 2^2 + 2 = 6$ . β)  $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 6 + 2 = 8$ . γ) Από β)  $(x + \frac{1}{x})^2 = 8$   
 άρα  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{8}$  ή  $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{8}$ , επειδή  $x > 0$  άρα  $\frac{1}{x} > 0$  οπότε :  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{8}$
14. α)  $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)(\alpha^8 + 1) = (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)(\alpha^8 + 1) = (\alpha^4 - 1)(\alpha^4 + 1)(\alpha^8 + 1)$   
 $= (\alpha^8 - 1)(\alpha^8 + 1) = \alpha^{16} - 1$ . β)  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2 =$   
 $= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 = 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2$   
 γ)  $(\frac{\alpha + \beta}{\alpha})^2 - (\frac{\alpha - \beta}{\alpha})^2 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{4\beta}{\alpha}$
15. α)  $(x + 1)^2 + (\psi + 2)^2 = 0$  άρα  $x + 1 = 0$  και  $\psi + 2 = 0$  οπότε :  $x = -1$  και  $\psi = -2$   
 β)  $(x + 3)^2 + (\psi + 4)^2 = 0$  άρα  $x + 3 = 0$  και  $\psi + 4 = 0$  οπότε :  $x = -3$  και  $\psi = -4$   
 γ)  $(2x + 1)^2 + (\psi + 1)^2 = 0$  άρα  $2x + 1 = 0$  και  $\psi + 1 = 0$  οπότε :  $x = -\frac{1}{2}$  και  $\psi = -1$
16. α)  $\alpha^2 - (\alpha - 2)(\alpha + 2) = \alpha^2 - (\alpha^2 - 4) = \alpha^2 - \alpha^2 + 4 = 4$ . β) Για  $\alpha = 2007$  από α) έχουμε :  
 $2007^2 - (2007 - 2)(2007 + 2) = 4$ .
17.  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 4x + 4) = (x^3 - 2^3)(x^3 + 2^3) = x^6 - 2^6$
18. Θέτω  $2007 = \alpha$ , οπότε  $\alpha^2 + \alpha^2(\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2 + \alpha = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha =$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = (\alpha + 1)^3 = 2008^3$$

19. α)  $(3\alpha + x)^3$  , β)  $[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$

20. α)  $\alpha\beta = 2$  , β)  $\alpha^2 + \beta^2 = 8$  , γ)  $\alpha^2 - \beta^2 = -4\sqrt{3}$  . 21. α)  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

β)  $(x-2)^2 = x^2 + 4 - 4x$  , γ)  $(2x+3\psi)^2 = 4x^2 + 12x\psi + 9\psi^2$  , δ)  $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

22. α)  $4x^2 - \psi^4 = (2x - \psi^2)(2x + \psi^2)$  , β)  $(x^4 - 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$  , γ)  $x^3 - \psi^3 = (x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2)$   
δ)  $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$  .

23. α)  $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  , β)  $(\psi - 2)^3 = \psi^3 - 6\psi^2 + 12\psi - 8$  ,

24.  $3^9 + 1 = (3^3)^3 + 1 = 27^3 + 1^3 = (27+1)(27^2 - 2 \cdot 27 \cdot 1 + 1^2) =$   
 $= 28(27^2 - 2 \cdot 27 + 1) = \text{πολλαπλάσιο του } 28$  .

25. α)  $\kappa = 2$  και  $\lambda = 1$  , β)  $\kappa = -1$  και  $\lambda = 2$

26.  $\beta + \gamma = \sqrt{20}$  άρα  $\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 20$  ή  $\alpha^2 + 2\beta\gamma = 20$  ή  $16 + 2\beta\gamma = 20$  ή  $\beta\gamma = 2$  άρα  $E = 1$  τετρ.μον.

27. Av v, v+1 είναι οι διαδοχικοί ακέραιοι τότε :  $(v+1)^2 - v^2 = v^2 + 2v + 1 - v^2 = 2v + 1$  περιττός.

## 1.6 Παραγοντοποίηση

---

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ

B. 1. α) , 2. α)

### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $3x(x+2)$  , β)  $4x^2(x-1)$  , γ)  $3(x-1)(x+1)$  , δ)  $5x(x^2 - 2x - 1)$  , ε)  $4x\psi(x-3)$   
στ)  $(x-\psi)(3+\alpha-1)$  , ζ)  $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

2. α)  $(\alpha+1)\cdot\alpha$  , β)  $(x+1)(x^2+1)$  , γ)  $(x-4)(\alpha+\beta-1)$  , δ)  $(x-\psi)^2$  , ε)  $(5x-\psi)^2$  , στ)  $(x+\psi-3)^2$

3. α)  $(2-\alpha)(2+\alpha)$  , β)  $(4-\alpha)(4+\alpha)$  , γ)  $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$  , δ)  $x(x-1)(x+1)$  ,  
ε)  $2(3x-2\psi)(3x+2\psi)$  , στ)  $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)$  , ζ)  $(7x-\psi)(7\psi-x)$

4. α)  $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$  , β)  $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$  , γ)  $x(x-1)(x^2+x+1)$  ,  
δ)  $(x^2+7)(x-5)$  , ε)  $x(x-2)(x+2)$

5. α)  $(x+2)^2(x^2-5x+1)$  , β)  $2(x-3)^2(9-x)$  , γ)  $(2x-1-3\psi)(2x+1+3\psi)$  ,  
δ)  $(\alpha+\beta+x-\psi)(\alpha+\beta-x+\psi)$  , ε)  $(\beta-2)(\alpha-2-\beta)$  , στ)  $(x+2)(x^2-3x+4)$  , ζ)  $(x-3)(x^2+3x+8)$

**Λύσεις**

6. α)  $(x-1)(3\alpha+2\beta)$  , β)  $(x+\psi)(\alpha+\beta-\nu)$  , γ)  $(\alpha-\beta)(x+\psi)(\alpha+\beta-x+\psi)$
7. α)  $(x-1)(x-2)$  , β)  $(x-1)(x-6)$  , γ)  $3(x-1)(x+\frac{1}{3})$  , δ)  $-(x-1)(x-6)$  ,  $(x-2)^2$
8. α)  $(x+\sqrt{3})(x+3)$  , β)  $(x+3\kappa)(x+\lambda)$  , γ)  $(x+4)(x-\sqrt{5})$
9. α)  $(x+1)(x-3+\alpha)$  , β)  $(x-1)(x-6+\alpha)$  , γ)  $(x-4)(x-3+\psi)$
10. α)  $x(x-1)(x-3)$  , β)  $x(x-2)(x-4)$  , γ)  $2x(x-2)(x-3)$  , δ)  $(\frac{x}{5} + \frac{\psi}{4})^2$
11. α)  $(2x-3\psi)(4x^2+6x\psi+9\psi^2)$  , β)  $(x-2\psi)(x^2+2x\psi+4\psi^2)$  , γ)  $2(3x+2\psi)(9x^2-6x\psi+4\psi^2)$   
 $\varepsilon) (\alpha^3-1)(\alpha^3+1) = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)$  , στ)  $2x(2x+1)(4x^2-2x+1)$
12. α)  $A=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$  , β)  $A=0$  ή  $x=0$  ή  $x=2$  ή  $x=3$
13. α)  $x=10$  ή  $x=-10$  , β)  $x=0$  ή  $x=\frac{1}{4}$  ή  $x=-\frac{1}{4}$  , γ)  $x=0$  ή  $x=1$  , ή  $x=-5$   
δ)  $x=3$  ή  $x=4$  ή  $x=2$  , ε)  $x=1$  ή  $x=-1$  , στ)  $x=2$  ή  $x=-2$
14. α)  $(\alpha+2\beta-2)(\alpha+2\beta+2)$  , β) -1
15.  $A=(\alpha-2\beta-4)(\alpha-2\beta+4)$  ,  $B=(2\alpha-\beta-2)(2\alpha-\beta+2)$  ,  $\Gamma=x^2-4x\psi-5\psi^2=x^2-4x\psi+4\psi^2-9\psi^2$   
 $(x-2\psi)^2-(3\psi)^2=(x-5\psi)(x+\psi)$  ,  $\Delta=3\alpha^2-4\alpha+1-2\alpha\beta-\beta^2=4\alpha^2-4\alpha+1-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=$   
 $(2\alpha-1)^2-(\alpha+\beta)^2=(3\alpha+\beta-1)(\alpha-\beta-1)$
16.  $A=x^4+4\psi^4=x^4+4\psi^4+4x^2\psi^2-4x^2\psi^2=(x^2+2\psi^2)^2-(2x\psi)^2=(x^2+2\psi^2-2x\psi)(x^2+2\psi^2+2x\psi)$   
 $B=x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$   
 $\Gamma=x^4+9-7x^2=x^4+9-6x^2-x^2=(x^2-3)^2-x^2=(x^2-x-3)(x^2+x-3)$   
 $\Delta=x^4+\psi^4-3x^2\psi^2=x^4+\psi^4-2x^2\psi^2-x^2\psi^2=(x^2-\psi^2)-(x\psi)^2=(x^2-\psi^2-x\psi)(x^2-\psi^2+x\psi)$
17.  $A=x^3-7x+6=x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=x(x-1)(x+1)-6(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)$   
 $= (x-1)(x-2)(x+3)$  .  $B=2x^3-5x+3=2x^3-2x-3x+3=2x(x^2-1)-3(x-1)=$   
 $= 2x(x-1)(x+1)-3(x-1)=(x-1)(2x^2+2x-3)$  .  $\Gamma=x^2-4x+3=x^2-x-3x+3=$   
 $= x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$  .  $\Delta=x^3+2x^2-1=x^3+x^2+x^2-1=x^2(x+1)+(x-1)(x+1)=$   
 $= (x+1)(x^2+x-1)$
18. α)  $x^\nu(x-1)(x^2+x+1)$  , β)  $x^\mu(x-1)(x+1)$  , γ)  $x(x^\nu-x^{\mu+1})$  , δ)  $x^2(x^{\nu+1}-x^\mu-x^\kappa)$
19. α)  $(x-1)^2$  , β)  $(2\alpha-1)(\alpha-\beta)$  γ)  $(x-4)^2$
20. α) 2.007.000 , β) 990.000 , γ) 999.997 , δ) 159.999 , ε) 1

## 1.7 Διαίρεση πολυνομών

### Ερωτήσεις κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

- B. 1. δ) , 2. α) , 3. β) , 4. α) , 5. α)

1. α)  $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = (x-2)(x^2 - 3x + 1)$ , β)  $5x^2 + 16x + 3 = (x+2)(5x+6) - 9$ ,  
 γ)  $x^3 + x^2 - x - 6 = (x-3)(x^2 + 4x + 11) + 27$ , δ)  $2x^4 + 4x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 1)(2x^2 + 4x + 2) - x + 4$   
 ε)  $x^6 = (x-2)^2(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 32x + 80 + 192x - 320)$
2. i) α)  $\Pi(x) = 3x^2 - 3$ ,  $v(x) = -4x + 5$ , β)  $\Pi(x) = x^3 - 4x$ ,  $v(x) = -4x + 5$   
 ii)  $x = -2$  ή  $x = -1$  ή  $x = 0$  ή  $x = 1$  ή  $x = 2$
3. α)  $x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ , για  $x = 10$ ,  $10^5 + 1 = 11(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1) = \piολλ. του 11$   
 β)  $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ , για  $x = 20$ ,  $20^5 - 1 = 19(20^4 + 20^3 + 20^2 + 20 + 1) = \piολλ. του 19$
4. β) Από α) και την ταυτότητα της ευκλείδειας διαιρεσης  
 $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4 = (x^2 - 3x + 4)(2x - 1)$
5. β)  $2x^3 - 7x^2 + 6 = (2x-1)(x^2 - 3x - \frac{3}{2}) - \frac{9}{2}$ , γ) Από β)  $2x^3 - 7x^2 + 6 = (2x-1)(x^2 - 3x + 2) + \frac{9}{2}$   
 ή  $2x^3 - 7x^2 + \frac{3}{2} = (2x-1)(x^2 - 3x + \frac{3}{2})$
6.  $P(x) = (x^2 - 3x - 2)(x^2 - 2x) + 3x + 2$ , άρα  $P(-2) = 60$
7.  $P(x) = (3x^3 - 2x - 1) \cdot \Pi(x) + 3x - 1$ , άρα  $P(1) = 2$
8. Αν κάνουμε την διαιρεση  $P(x)$ :  $(x^2 + 1)$  βρίσκουμε  $v(x) = (\beta - 1)x + 1 - \alpha$ , άρα για να είναι τέλεια πρέπει  $v(x) = 0$ , οπότε  $\beta - 1 = 0$  και  $1 - \alpha = 0$  άρα  $\beta = 1$  και  $\alpha = 1$
9. α) Για  $x = 1$ ,  $Q(1) = -4$  άρα  $\alpha^2 + \beta + \beta^2 + \alpha + \alpha + \beta - 2 = -4$  ή  $(\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 = 0$  άρα  $\alpha = \beta = -1$   
 β) Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = -1$ ,  $Q(x) = -2x - 2$  1<sup>ου</sup> βαθμού  
 γ)  $P(x) = Q(-2x - 2) = -2(-2x - 2) = 4x + 4$  1<sup>ου</sup> βαθμού

## **1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων**

---

### **Ερωτήσεις κατανόησης**

1. α) 2 , β) 3 , γ) 1

2.

A B	2x	$3x(x-2)$	$9(x-1)^2$
18x	18x	$18x(x-2)$	$18x(x-1)^2$
$x^2 - 4$	$2x(x^2 - 4)$	$3x(x^2 - 4)$	$9(x-1)^2(x^2 - 4)$
$3x^2(x^2 - 1)$	$6x^2(x^2 - 1)$	$3x^2(x^2 - 1)(x-2)$	$9x^2(x-1)^2(x+1)$

3. α) 2 , β) 4 , γ) 1 , δ) 3x

A B	3x(x-1) <sup>3</sup>	4x <sup>2</sup>	x <sup>5</sup>
9x(x <sup>2</sup> -1)	3x(x-1)	x	x
6x(x-1) <sup>3</sup>	3x(x-1) <sup>3</sup>	2x	x
x <sup>4</sup> (x-1) <sup>5</sup>	x(x-1) <sup>3</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>4</sup>

**Ασκήσεις για λύση**

1. α) E.K.Π.  $12x^3\psi^3\omega^3$ , M.K.Δ.  $2x\psi^2\omega$  . β) E.K.Π.  $24x^3\psi^3$ , M.K.Δ.  $2x\psi^3$   
 γ) E.K.Π.  $24\alpha^4\beta\gamma^3$ , M.K.Δ.  $4\beta$
2. α) E.K.Π.  $6(x-\psi)(x+\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)$ , M.K.Δ.  $(x-\psi)$   
 β) E.K.Π.  $(x-2)(x+2)^2(x-3)(x+3)$ , M.K.Δ.  $(x+2)(x-3)$   
 γ) E.K.Π.  $x(x-1)(x+1)$ , M.K.Δ.  $(x+1)$
3. α) E.K.Π.  $(x-1)(x-2)(x-3)$ , M.K.Δ. 1 . β) E.K.Π.  $(x-2)^2(x+3)(x+2)$ , M.K.Δ.  $(x-2)$   
 γ) E.K.Π.  $(x-1)^2(x+1)^2$ , M.K.Δ.  $(x-1)$
4. α) E.K.Π.  $\alpha(\alpha-2)^2(\alpha+2)$ , M.K.Δ.  $(\alpha-2)$ .  
 β) E.K.Π.  $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-3)$ , M.K.Δ.  $(\alpha-2)$

---

**1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις**

---

**Ασκήσεις για λύση**

1. α)  $x \neq 2$  , β)  $x \neq -1$  , γ)  $x \neq -1$  και  $x \neq 1$  , δ) Ορίζεται για κάθε  $x$  , ε)  $x \neq -1$  και  $x \neq 1$   
 στ)  $x \neq 0$  και  $x \neq 1$  .

2. α)  $\psi=1$  , β)  $x=1$  και  $x=-1$  , γ)  $x=0$  και  $x=1$  και  $x=-1$  , δ)  $x=2$  και  $x=-2$ .

3. α)  $\frac{2}{3x}$  , β)  $\frac{3\psi}{x^2}$  , γ)  $\frac{3x}{x+1}$  , δ)  $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$  , ε)  $\frac{x+1}{x^2+x+1}$
4. α)  $\frac{6}{3x-1}$  , β)  $\frac{x}{x-3\omega}$  , γ)  $\frac{x-3}{2x^2}$  , δ)  $\frac{\alpha-5}{2}$
5. α)  $\frac{x-3}{x+2}$  , β)  $\frac{x}{x-4}$  , γ)  $\frac{x(x+1)}{x-1}$  , δ)  $\frac{a}{\alpha-\beta}$  , ε)  $\alpha^2+3\alpha+9$  , στ) 1
6.  $A = \frac{1}{x}$  ,  $B = 1$  ,  $\Gamma = 1$  . 7.  $A = \frac{\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$  ,  $B = (\alpha-\beta)^2$

**Ασκήσεις για λύση**

1. α)-1 , β)α+2 , γ)  $\frac{1}{3\alpha}$  .

2. α)  $4(x-4)$  , β)  $\frac{2(2x+1)}{5}$  , γ)  $\frac{1}{2}$  , δ)  $\frac{x-3}{x-2}$  ε)  $\frac{(x^2+x+1)(x-2)}{(x+2)(x-1)}$

3. α)  $\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$  , β)  $\frac{2x^2-x-5}{(x+1)(x^2-2)}$  , γ)  $\frac{(2x+1)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x+1)(x^2-x+1)}$

**Γενικές ασκήσεις 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου**

1. -2007 .

2. α) Αν  $x=0$  τότε  $0^2+0+1=0$  ή  $1=0$  άτοπο , άρα  $x \neq 0$  . β) Από την ταυτότητα  $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$  έχουμε :  $x^3-1=(x-1) \cdot 0$  ή  $x^3-1=0$  ή  $x^3=1$  γ)  $x^{2005}(1+x+x^2)=x^{2005} \cdot 0=0$  .

3. α)  $B=(x-6)(x+2)=x^2+2x-6x-12=x^2-4x-12=x(x-4)-12=A-12$  . β)  $A \cdot B+36=A \cdot (A-12)+36=A^2-12A+36=(A-6)^2=[x(x-4)-12]^2$  γ)  $x(x-6)(x-4)(x+2)+36=A \cdot B+36=[x(x-4)-12]^2$

4. α) Πρέπει :  $x^2-1=0$  και  $2-2x=0$  και  $x^2-x=0$  άρα  $x=1$   
β) Αν θέσουμε :  $x^3+3x^2+3x=\psi$  τότε :  $\psi(\psi+2)+1=0$  ή  $(\psi+1)^2=0$  άρα  $\psi=-1$  οπότε  $x^3+3x^2+3x=-1$  ή  $(x+1)^3=0$  άρα  $x=-1$

5. α=10 άρα  $\beta+\gamma=14$  οπότε  $(\beta+\gamma)^2=196$  ή  $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma=196$  ή  $\alpha^2+2\beta\gamma=196$  ή  $100+2\beta\gamma=196$  ή  $\beta\gamma=48$  άρα  $E=24cm^2$

6. Επειδή οι βάσεις είναι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1 και οι εκθέτες είναι μη αρνητικοί η κάθε δύναμη θα είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1 άρα πρέπει :  $(x-1)^2+(\psi-1)^2=0$  και  $(x-1)^4+(\psi-1)^2=0$  . Οπότε :  $x=1$  και  $\psi=1$  .

7. α)  $P(0)+P(-1)+P(1)+P(-x)=x$  ή  $-1-3+1-2x-1=x$  ή  $x=-\frac{4}{3}$

β)  $\lambda \cdot P\left(\frac{1}{2}\right)-2P\left(\frac{\lambda}{2}\right)=3-\frac{\lambda}{2}$  ή  $0-2(\lambda-1)=3-\frac{\lambda}{2}$  ή  $\lambda=\frac{2}{5}$

8.  $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\frac{\lambda}{2} \left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\lambda}{2} \left(x+\frac{\lambda}{2}+x-\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{2}{x} \cdot 2x=\lambda^2$

9. α)  $E_{\text{ολ}}=224$  ή  $\alpha^2+\beta^2+10^2+\frac{1}{2}\alpha\beta=224$  ή  $10^2+10^2+E_{\text{tp}}=224$  άρα  $E_{\text{tp}}=24cm^2$

β) Ισχύει :  $\alpha^2+\beta^2=100$  (1) και  $\alpha\beta=48$  οπότε  $2\alpha\beta=96$  (2) Με πρόσθεση (1)και (2)  $(\alpha+\beta)^2=196$  ή  $\alpha+\beta=14$  (3) . Με αφαίρεση (1)-(2)  $(\alpha-\beta)^2=4$  ή  $\alpha-\beta=2$   
Οπότε  $\alpha=8$  και  $\beta=6$  ή  $\alpha=6$  και  $\beta=8$  .

10.  $1 \cdot (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=$   
 $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=(\alpha^4-\beta^4)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)=(\alpha^8-\beta^8)(\alpha^8+\beta^8)=\alpha^{16}-\beta^{16}.$

**Λύσεις**

11. α)  $x + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 + 1 = x \quad \text{ή} \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad . \quad \beta) x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$$\text{ή} \quad x^3 + 1 = (x+1) \cdot 0 \quad \text{ή} \quad x^3 + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^3 = -1 \quad , \quad x^{2001} = (x^3)^{667} = (-1)^{667} = -1 \quad , \quad x^{-2004} = \frac{1}{x^{2004}} =$$

$$= \frac{1}{x^{2001} \cdot x^3} = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1 \quad . \quad \text{Αρ} \alpha \quad x^{2001} + x^{-2004} = -1 + 1 = 0$$

12. α)  $v^2 - (v+1)(v-1) = v^2 - (v^2 - 1) = 1 \quad . \quad \beta) \text{Για } v = 6,78695 \text{ στην } \alpha \text{ έχουμε :}$   
 $6,78695^2 - 7,78695 \cdot 5,78695 = 1$

13. α)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{3}{14}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{98}\right) = \frac{9}{196} + \frac{10}{98} = \frac{9}{196} + \frac{20}{196} = \frac{29}{196}$

$$\beta) 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 + 1 + 4\beta^2 - 4\beta + 28(\alpha + \beta) = 4(\alpha^2 + \beta^2) - 4(\alpha + \beta) + 2 + 28(\alpha + \beta) =$$

$$= 4 \cdot \frac{29}{196} - 4 \left(-\frac{3}{14}\right) + 2 + 28 \left(-\frac{3}{14}\right) = -\frac{145}{49}$$

14.  $A = 2007^2 + 4015 = 2007^2 + 2 \cdot 2007 + 1 = (2007 + 1)^2 = 2008^2$

### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

α) Θεωρία , β) Θεωρία , γ)  $V = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = P(x)$

δ)  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{ή} \quad 2\alpha\beta = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$

#### Θέμα 2

α) Αν κάνουμε την διαίρεση  $2x^2 + 7x + 3: (2x+1)$  βρίσκουμε πηλίκο  $x+3$  που είναι και το πλάτος . β) i)  $\alpha - \beta = 2 \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta)^2 = 4 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \quad \text{ή} \quad 20 - 2\alpha\beta = 4 \quad \text{ή} \quad \alpha\beta = 8$  .

$$\text{ii) } \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = 2 \cdot (20 + 8) = 56 \quad . \quad \text{γ) i) } x^3(\alpha - \beta) - 27(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$\text{ii) } (3x - 2\psi + 3)^2 + 2(3x - 2\psi + 3) + 1 = (3x - 2\psi + 4)^2 \quad , \quad \text{δ) } 3x^2 + 5x + 3 = \Gamma x^2 + (B - 2\Gamma)x + A - B + \Gamma \\ \text{άρα } \Gamma = 3 \quad , \quad B = 11 \quad \text{και } A = 11.$$

#### Θέμα 3

$$\text{α) } \frac{25\alpha}{6(\alpha-1)(\alpha+1)} \quad , \quad \beta) \alpha - \beta = -1 \quad , \quad A = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{2007} = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^{2007} = \\ = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^{2007} = (-1)^2 + (-1)^{2007} = 1 - 1 = 0 \quad . \quad \gamma) A = 10$$

#### Θέμα 4

$$\text{α) } \frac{\beta}{\alpha + \gamma} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\beta(\alpha + \beta) - \gamma(\alpha + \gamma)}{(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)} = 0 \quad \text{ή} \quad \beta\alpha + \beta^2 - \alpha\gamma - \gamma^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha(\beta - \gamma) + (\beta - \gamma)(\beta + \gamma) = 0 \\ \text{ή} \quad (\beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = \gamma$$

$$\beta) \text{i) } \frac{3(1+2+3+\dots+100)}{2(1+2+3+\dots+100)} = \frac{3}{2} \quad , \quad \text{ii) } \frac{3x(1+2+3+\dots+100)}{2x(1+2+\dots+100)} = \frac{3}{2}$$

### 2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

α) Θεωρία , β) Θεωρία , γ) i)  $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$  , ii)  $(\alpha - 5)^2 = \alpha^2 + 25 - 10\alpha$

$$\delta) P(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)^2 - 3(\sqrt{2}-1) + 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 - 3\sqrt{2} + 3 + 1 = 7 - 5\sqrt{2}$$

**Θέμα 2**

α) Αρκεί  $(3+\sqrt{5})^2=14+6\sqrt{5}$  . β)  $A=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$  .  $B=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$  .  $A-B=(x-1)(x+1)(x+1)(x-2)$

γ) i) Αν ο κ είναι άρτιος τότε :  $\kappa=2\lambda$  όπου λ φυσικός αριθμός . Οπότε :  $\kappa^2+7\kappa=(2\lambda)^2+7\cdot2\lambda=4\lambda^2+14\lambda=2(2\lambda^2+7\lambda)$  άρτιος . Αν ο κ είναι περιττός τότε :  $\kappa=2\lambda+1$  όπου λ φυσικός αριθμός . Οπότε :  $\kappa^2+7\kappa=(2\lambda+1)^2+7(2\lambda+1)=4\lambda^2+4\lambda+1+14\lambda+7=4\lambda^2+18\lambda+8=2(2\lambda^2+9\lambda+4)$  άρτιος .

ii) Έστω  $\kappa=2\alpha+1$  και  $\lambda=2\beta+1$  όπου α,β είναι φυσικοί αριθμοί . Τότε :  $\kappa^2-\lambda^2+1=(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)+1=(2\alpha-2\beta)(2\alpha+1+2\beta+1)+1=2(\alpha-\beta)(2\alpha+2\beta+2)+1$  περιττό

**Θέμα 3**

α)  $P(x)=(3+x)(3-x)=9-x^2$  , β)  $0 \leq x < 3$  , γ) Επειδή  $x^2 \geq 0$  άρα  $-x^2 \leq 0$  ή  $9-x^2 \leq 9$  ή  $E \leq 9$

δ) Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν  $x=0$

**Θέμα 4**

α)  $P(x)=\Pi(x) \cdot (x^2-x)+3x+1$  ,  $P(0)=1$  ,  $P(1)=4$

β) Το πηλίκο θα είναι 1<sup>ο</sup> βαθμού .

**Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>****2.1 Η εξίσωση  $ax+\beta=0$** **Ερωτήσεις κατανόησης**

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ

B. 1. β , 2. δ , 3. α. , 4. β , 5. α , 6. β , 7. β , 8. γ , 9. γ , 10. α. , 11. α

**Ασκήσεις για λύση**

1. Είναι. Η εξίσωση είναι 1<sup>ο</sup> βαθμού και έχει μοναδική λύση το 2 , οπότε η  $x=3^{2007}$

δεν είναι ρίζα . 2. α) αδύνατη (η  $x=4$  απορρίπτεται ) β)  $x=\frac{4}{13}$  , γ)  $x=-\frac{31}{8}$

3. α)  $x=0$  , β) αόριστη , γ) αδύνατη , δ)  $x=1$  , ε)  $x=-\frac{1}{41}$

4. α)  $x=\pm 1$  , β)  $x=0$  , γ)  $x=\pm 2$  . 5. α)  $x=4$  , β)  $x=3$  , γ)  $x=5$  , δ)  $x=7$  , ε)  $x=-1$  .

6. α)  $x=10$  , β)  $x=7$  , γ)  $x=\frac{52}{9}$  . 7. A=7. 8.  $A(x+3)=\frac{x+5}{3} - 4x-12$  , β)  $x=-\frac{31}{11}$  , γ)  $x=-1$

9.  $x=1$  . 10. α)  $x=1$  , β)  $\beta=3$  , α=3

1. Μετά από 32 χρόνια. 2. Απάντησε σε 35 ερωτήσεις. 3. Θα αφαιρέσουμε το 11.  
4. Οι αριθμοί είναι : ο 563 και ο 140. 5. Η τιμή του είναι 1200 ευρώ. 6. 36 μαθητές.

## 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

---

### A. Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ

### B. Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. β , 2. α , 3. γ , 4. α , 5. α , 6. β .

### Ερωτήσεις κατανόησης

1. a)  $x=\pm 3$ , b)  $x=\pm 4$ , γ)  $x=\pm \sqrt{5}$ , δ)  $x=\pm 3$ , ε)  $x=\pm \sqrt{7}$ , στ) αδύνατη, ζ) αδύνατη  
η) αδύνατη. 2. a)  $x=0$  ή  $x=\frac{2}{3}$ , b)  $x=0$  ή  $x=16$ , γ)  $x=0$  ή  $x=2\sqrt{2}$ , δ)  $x=0$  ή  $x=-1$   
ε)  $x=0$  ή  $x=1$ , στ)  $x=0$  ή  $x=2$ , ζ)  $x=0$  ή  $x=\frac{1}{2}$ , η)  $x=0$  ή  $x=-\frac{1}{2}$   
3. a)  $x=\pm 5$ , b)  $x=0$  ή  $x=-\frac{4}{3}$ , γ) αδύνατη, δ)  $x=5$  ή  $x=8$  ή  $x=-1$  στ) αδύνατη,  
ζ) αδύνατη  
4. a)  $x=\frac{13}{3}$ , ή  $x=1$ , b)  $a=8$  ή  $a=-4$ , γ)  $\lambda=\pm 1$ , δ)  $x=\pm \frac{1}{2}$   
5. a)  $x=0$  ή  $x=4$ , b)  $x=1$  ή  $x=-2$ , γ) αδύνατη, δ)  $x=\pm 1$   
6. a)  $x=0$  ή  $x=-1$  ή  $x=6$ , b)  $x=0$  ή  $x=-1$  ή  $x=3$ , γ)  $x=2$  ή  $x=-1$ , δ)  $x=3$  ή  $x=-2$ , ε)  $x=-2$   
7. a)  $x=\sqrt{2}+2$  ή  $x=\sqrt{2}+1$ , b)  $x=-\sqrt{5}$  ή  $x=-\sqrt{3}$ , γ)  $x=1$  ή  $x=\sqrt{3}$ , δ)  $x=\sqrt{3}$  ή  $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$   
8. a)  $x=\frac{3}{2}$  ή  $x=\frac{4}{5}$ , b)  $x=1$  ή  $x=-5$ , γ)  $x=25$ , δ)  $x=1$  ή  $x=4$ , ε)  $x=\pm 1$  ή  $x=\pm \sqrt{2}$   
9. a)  $\lambda < \frac{1}{12}$ , b)  $\lambda = \frac{1}{12}$ , γ)  $\lambda > \frac{1}{12}$ . 10.  $\lambda=-2$  ή  $\lambda=-5$ . 11.  $\lambda=-1$ . 12. A=5, B=15  
13.  $\lambda=2$ . 14.  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq 2$ . 15.  $x=\frac{9}{2}$  ή  $x=\frac{3}{2}$ . 16. Av Δ=0 τότε  $x=0$ . Av Δ=9 τότε

x=6 ή x=3 . 17. α)  $6(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$  , β)  $(x+1)(x-2)$  , γ)  $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$  , δ)  $(2x-1)^2$

ε)  $\frac{1}{3}(x+3)^2$  στ) δεν αναλύεται , ζ)  $3(x-1)(x-\frac{1}{3})$

18.  $A=\frac{3(x+\frac{2}{3})}{x+2}$  ,  $B=\frac{x(x-2)}{2(x+\frac{1}{2})}$  ,  $\Gamma=\frac{x+7}{2(x+\frac{1}{2})}$

19. α)  $\lambda \leq 5$  , β)  $\lambda > 5$  , γ)  $\lambda = 5$  . 20. α)  $x(x-1)(x-5)$  , β)  $x^2(x+1)(x-6)$

### Προβλήματα

1. x=4 , 2. α) 15 αγώνες , β) 45 αγώνες , 190 αγώνες , γ)  $\frac{v(v-1)}{2}$  , παιδιά

3. Βάση 5cm , ύψος 3 cm . 4. α) 5 , β) 7 . 5. Οι πλευρές είναι : 4cm και 6 cm.

6. Οι πλευρές είναι : 10cm και 11cm. 7. Οι άνδρες είναι 50 και οι γυναίκες 40.

8. t=2 sec . 9. x=7cm . 10. P(x)=x<sup>2</sup>-20x-300 , x=30.

11. α) v=-4 , β) t=0 ή t=1 ή t=4 12. x=6 .

## 2.4 Κλασματικές εξισώσεις

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4
Λ	Λ	Λ	Λ

B. 1. γ , 2. β , 3. 1

### Ασκήσεις για λύση

1. α) x=-1 , β) x=0 ή x=7 , γ) x=-1 , δ) αδύνατη.

2. α)  $x=\frac{7}{3}$  , β) αδύντη , γ) x=1 ή  $x=\frac{3}{8}$  , δ) x=0 ή  $x=\frac{5}{3}$  ,

3. α)  $x=-\frac{2}{3}$  , β) x=1 , γ) x=1 ή  $x=\frac{2}{3}$  , δ) x=5 ή x=-9 ,

4. α=2 ή β=3 x=2 ή  $x=\frac{5}{4}$  , 5. x=5 ή x=-1 , 6. 9 και 3 , 7. x=5 , 8. x=3 ,

9. 15 άνδρες και 10 γυναίκες. 10 x=25km/h

## 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

**Λύσεις**      B. 1.  $\gamma$  , 2.  $\beta$  , 3.  $\varepsilon$  , 4.  $\gamma$  , 5.  $\beta$

### Ασκήσεις για λύση

1. α) (+), β) (-) , 2. α)  $5\alpha - 5x < 5\beta - 5x$  , β)  $\frac{3\alpha + 4x}{-5} > \frac{3\beta + 4x}{-5}$  , 3. Πράξεις
4. α)  $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$  , β)  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1} < \frac{\alpha}{\alpha + \beta} < 1$  . 5. α)  $-1 < x < 0$  , β)  $3 < -3\psi < 6$  , γ)  $-2 < x + \psi < 0$ , δ)  $1 < x - \psi < 3$  , ε)  $3 < x - 3\psi < 7$ .
6. α) Πράξεις , β) Από α) , 7. α)  $x < \frac{39}{20}$  , β)  $x > \frac{207}{155}$  , γ)  $x < \frac{9}{10}$  , δ)  $x < \frac{11}{7}$  , 8. α)  $-1 < x < 10$  , β)  $-1 < x \leq -\frac{1}{8}$
9. α)  $x=3$  ,  $x=4$  , β)  $x=2$  ή  $x=3$  , 10. α)  $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{5}$  , β) Δεν υπάρχουν
11.  $\lambda = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6$ . 12.  $x=10$  , 13. α)  $x=10$  , β)  $x=\frac{1}{4}$
14. α)  $x=26$  , β)  $x=-2$  , 15.  $x=4$  ,  $x=5$  ,  $x=6$  , 16.  $x=23$  , 17.  $x=-4$
18. Τουλάχιστον 8 . 19. 4 παιδιά , 20. α)  $x \leq 5$  , β)  $x \geq \frac{10}{3}$  , δ)  $x > \frac{5}{3}$  , ε)  $x \geq \frac{5}{3}$

### Γενικές ασκήσεις 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου

1. α)  $v=14$  , β)  $v=5$  , γ)  $x=1$  , 2. α) 1. Αν  $\alpha=0$  είναι αδύνατη . 2. Αν  $\alpha \neq 0$  τότε έχει μοναδική λύση την  $x = \frac{\alpha-5}{\alpha}$  , β)  $\alpha=-1$  ,  $\alpha=-5$  , 3. Πράξεις
4. α)  $\alpha=-1$  και  $\beta=-2$  , β)  $\alpha=-1$  και  $\beta=1$  , 5. α)  $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$  β)  $(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta-\sqrt{2})(\alpha+\beta+\sqrt{2})$  . 6. α)  $\lambda=1$  , β)  $\lambda=2$  , γ) Για  $\lambda=2$  ,  $x=-1$

### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

- A. α) θεωρία , β) θεωρία , γ) θεωρία , δ) θεωρία  
B. α)  $x=1$  ή  $x=3$  , β)  $x=1$  ή  $x=-6$

#### Θέμα 2

- α) A:  $x \neq -1$  , B:  $x \neq 1$  , Γ:  $x \neq \pm 1$  , β)  $x = \frac{7}{17}$

#### Θέμα 3

- α)  $-\frac{23}{7} \leq x < \frac{5}{2}$  , β)  $x=1$  ,  $x=2$  .

#### Θέμα 4

- α)  $\rho_1 = 2\lambda + 1$  ,  $\rho_2 = 2\lambda - 1$  , β)  $0 < \lambda \leq 1$

**2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης****Θέμα 1**

Α. α) θεωρία , β) θεωρία , γ) θεωρία

Β. α) θεωρία , β)  $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$  ,  $3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)(x - \frac{1}{3})$

**Θέμα 2**

ω)  $11 \leq 2x + 3\psi \leq 29$  , β)  $-33 \leq 2x - 5\psi \leq -7$  , γ)  $\frac{1}{7} \leq \frac{x}{\psi} \leq \frac{7}{3}$  , δ)  $\frac{2}{11} \leq \frac{3x-1}{2\psi-3} \leq \frac{11}{3}$

**Θέμα 3**

ω)  $\alpha=1$  , β)  $x=1$  ή  $x=3$

**Θέμα 4**

ω)  $x=-\frac{3}{2}$  , β) 15 ευρώ

**Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>****3.1 . Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ

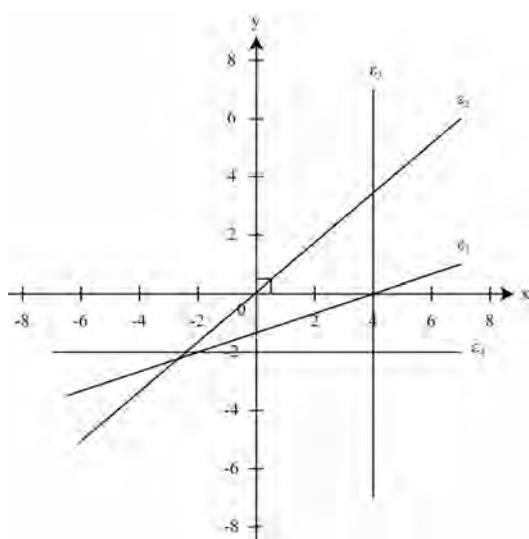
**Ερωτήσεις κατανόησης**

Α.

Β. 1. β , 2. γ , 3. β , 4. γ , 5. α , 6. β , 7. β , 8. β , 9. α.

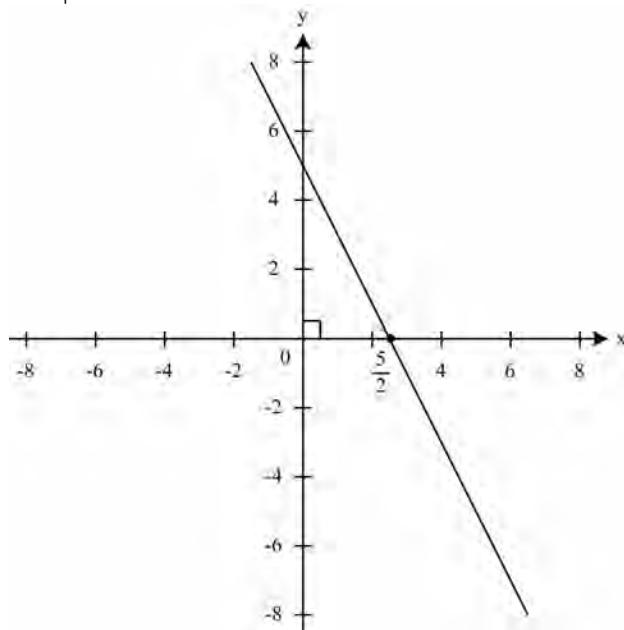
**Ασκήσεις για λύση**

1.

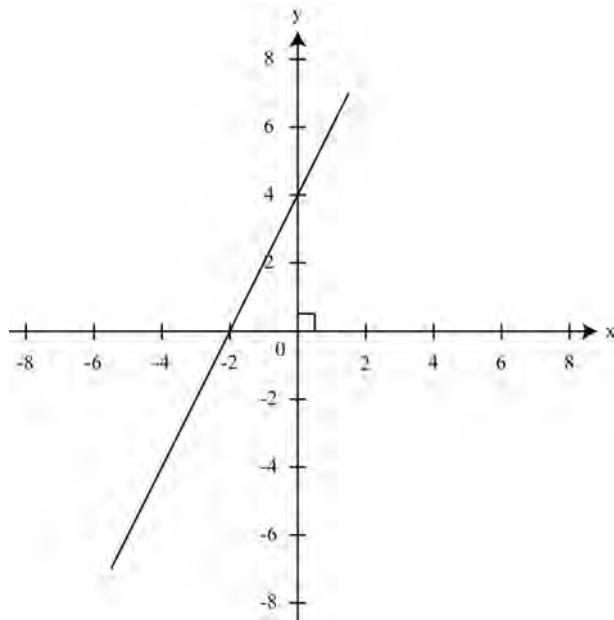


**Λύσεις**

2. a)  $\alpha = \pm 2$   
 b) Για  $\alpha = 2$   $2x + \psi = 5$



3. a)  $A(8,0)$ ,  $B(0,-2)$ , β)  $x=8$ , 4. a)  $\alpha=5$ , β)  $E=2$  τετραγωνικές μονάδες.  
 5. a)  $\alpha \neq 1$ , β)  $\alpha = -1$ , γ) Δεν υπάρχει α.  
 6. a)  $\alpha \neq 2$ , β)  $\alpha = -2$   
 7.  $\lambda=1$  ή  $\lambda=2$ . Για  $\lambda=1$   $2x - \psi + 4 = 0$



**Ερωτήσεις κατανόησης**

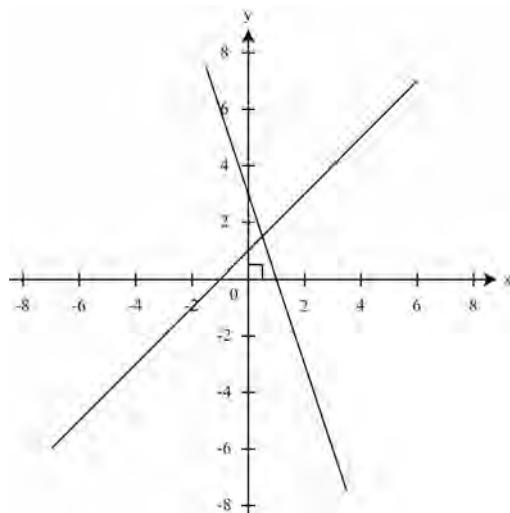
A.

1	2	3	4	5	6	7	8
Λ	Λ	Λ	$\Sigma$	$\Sigma$	Λ	Λ	Λ

B. 1.α , 2. α , 3. γ , 4. α

**Ασκήσεις για λύση**

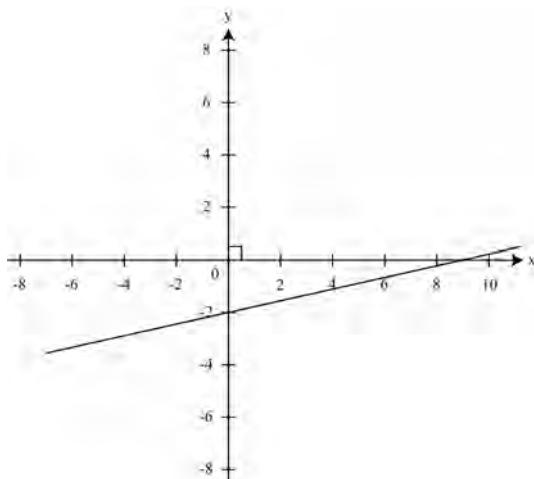
1. α)



τέμνονται στο A(1,1), άρα η λύση είναι  $(x,y)=(1,1)$

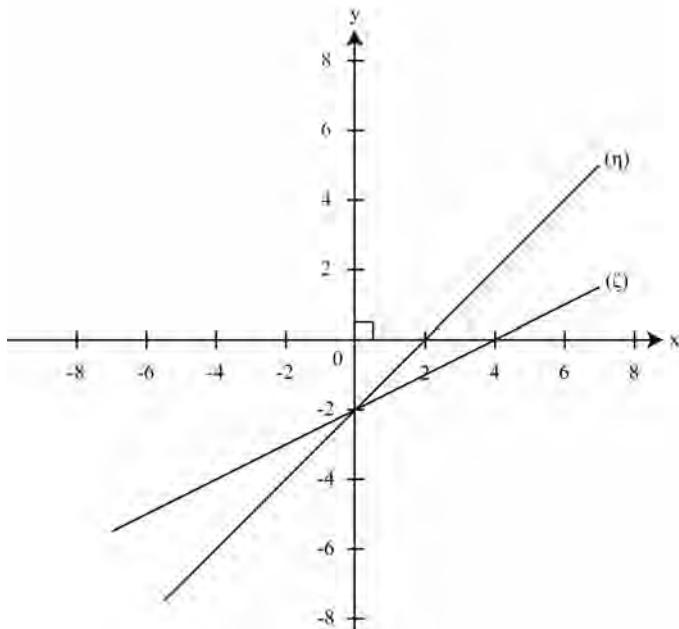
β) Περνάει

2. α)



**Λύσεις**

- β)  $B(8,0)$  ,  $\Gamma(0,-2)$  γ)  $\Delta(20,3)$   
 3. α)  $E = \frac{3}{2}$  τετραγωνικές μονάδες  
 β)



γ) Όχι

### 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

**Ερωτήσεις κατανόησης**

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

Β . 1. α , 2. α , β. α , 4. β

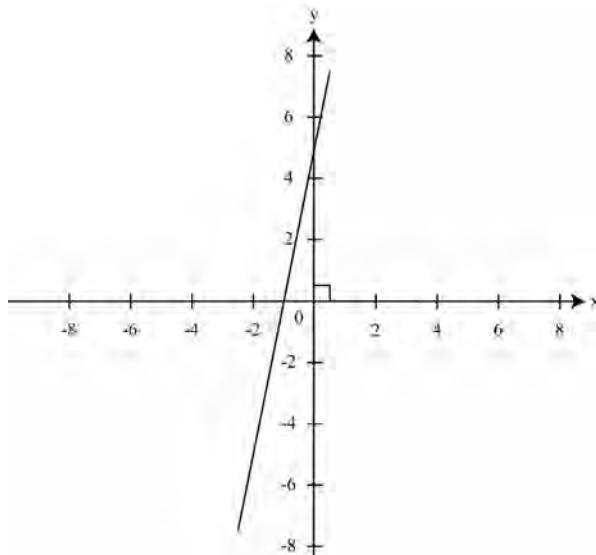
**Ασκήσεις για λύση**

1. α)  $(x, \psi) = (1, 1)$  , β)  $(x, \psi) = (1, 0)$  , γ)  $(x, \psi) = (1, 0)$  , δ)  $(x, \psi) = (1, 6, 2, 2)$
2. α)  $(x, \psi) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$  , β)  $(x, \psi) = \left(\frac{258}{109}, \frac{269}{109}\right)$ , 3.α)  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  , β) αδύνατο
4. α)  $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{30}{29}, -\frac{75}{29}\right)$  , β)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{10}{9}, \frac{40}{9}\right)$  , γ)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{48}{19}, \frac{16}{19}\right)$
5. α)  $(x, \psi) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$  , β)  $(\alpha, \beta) = (2, 4)$  .
6. α)  $(\varepsilon)$  :  $\psi = -3x + 5$  , β) Είναι
7. α)  $A(1, 3)$  , β)  $\lambda = \frac{7}{10}$  ,

8. α)  $K\left(\frac{10}{6}, \frac{7}{6}\right)$ , β)  $\psi = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

9. α)  $(\alpha, \beta) = (1, 2)$

β)



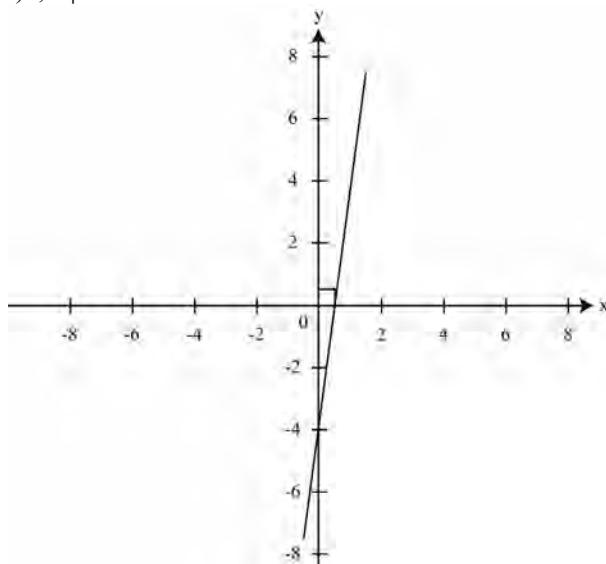
10. 20 κότες και 30 κουνέλια

11. α)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{17}{13}, -\frac{19}{13}\right)$ , β)  $\psi = 12x - \frac{67}{13}$ , 12.  $(\kappa, \lambda) = \left(\frac{7}{3}, 3\right)$

13. Η ευθεία  $AB$  είναι:  $\psi = -\frac{4}{5}x + \frac{28}{5}$  και το Γ ανήκει στην  $AB$ , β) για  $\psi = 0$   $K(7, 0)$

14. Το σημείο τομής των  $(\varepsilon)$  και  $(\zeta)$  είναι:  $(x, \psi) = (1, 1)$  από το οποίο διέρχεται η  $(\zeta)$ .

15.  $(\alpha, \beta) = (30, -2)$ ,  $\psi = 60x - 4$



- Λύσεις**
16. α)  $(x,\psi)=(3,8)$  ή  $(x,\psi)=(8,3)$  , β)  $(x,\psi)=(7,5)$  ή  $(x,\psi)=(-5,-7)$  , γ)  $(x,\psi)=(3,8)$   
 ή  $(x,\psi)=(8,3)$  δ)  $(x,\psi)=(2,0)$  ή  $(x,\psi)=(-4,3)$  .
17. A( $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ ) , B(2,4) ,  $\Gamma(\frac{7}{11}, \frac{19}{11})$  , 18.  $(\alpha, \beta) = (2, -\frac{4}{3})$  , 19.  $(x, \psi) = (5, 6)$  ή  
 $(x, \psi) = (6, 5)$

### Γενικές ασκήσεις 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου

1. α)  $\lambda = \frac{5}{6}$  , β)  $\lambda = \frac{7}{3}$  , 2. α)  $(\alpha, \beta) = (-2, -5)$  , 3.  $(\alpha, \beta) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$  , 4.  $(\alpha, \beta) = (1, -1)$
5.  $(\alpha, \beta) = (\frac{13}{7}, -\frac{11}{7})$  , 6. K(2,5) , 7.  $\psi = -\frac{4}{5}x + 4$  , 8.  $(\alpha, \beta) = (0, \frac{2}{3})$  , 9.  $(\alpha, \beta) = (3, 1)$
10. α)  $(\alpha, \beta) = (-2, 1)$  , β)  $(x, \psi) = (-\frac{46}{15}, \frac{14}{15})$  , 11. α)  $(x, \psi) = (\frac{\alpha+3}{3}, \frac{\alpha-3}{3})$ , β)  $\psi_1 = -1$   
 ή  $\psi_2 = 2$  , 13.  $(x, \psi) = (\frac{1}{7}, \frac{4}{7})$

### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

- α)  $2x - \psi = 4$  , A(1,-2) , B(2,0) , β) θεωρία , γ) θεωρία

#### Θέμα 2

- A. α)  $\psi = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  , β) B(3,0) ,  $\Gamma(0, \frac{3}{2})$  . B. α)  $(\alpha, \beta) = (4, -2)$  , β) Από α)  $(x, \psi) = (1, 1)$

#### Θέμα 3

- A. α) 25 δίκλινα και 15 τρίκλινα , β)  $(\alpha, \beta) = (5, 1)$  , B .  $(x, \psi) = (3, 2)$

#### Θέμα 4

- α)  $\alpha = 1$  , β) A( $\frac{1}{4}, 0$ )

### 2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

- α) Θεωρία , β) Θεωρία , γ) Περνάνε από το (0,0)

#### Θέμα 2

- A. α)  $(x, \psi) = (\frac{2-9\lambda}{11}, \frac{6\lambda+6}{11})$  , β)  $\lambda = -\frac{76}{21}$  , B. α)  $(x, \psi) = (1, 1)$  , β)  $\psi = -x + 2$

#### Θέμα 3

- A. α)  $(\alpha, \beta) = (4, 1)$  , β) Όχι , B. Υπάρχουν 40 ποδήλατα και 60 αυτοκίνητα

#### Θέμα 4

- α)  $(\alpha, \beta) = (5, -19)$  , β) A( $-\frac{4}{15}, 0$ ) , B( $0, \frac{2}{19}$ )

### 4.1 Η συνάρτηση $\psi=ax^2$ με $a\neq 0$

**Ερωτήσεις κατανόησης**

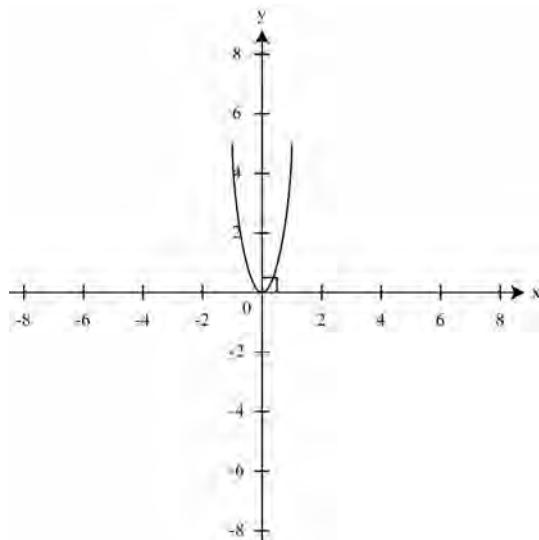
A.

1	2	3	4	5	6	7
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$

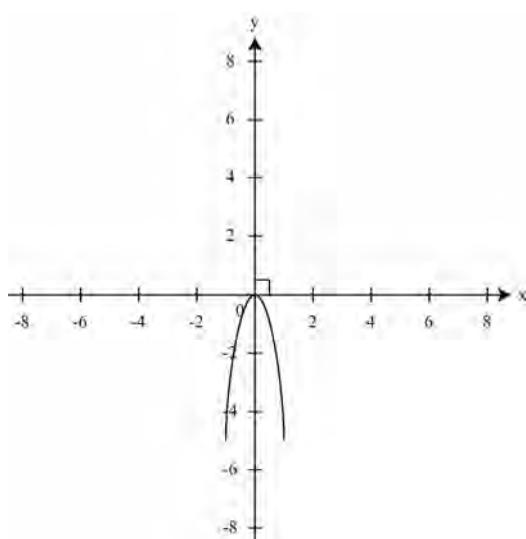
B. 1.  $\alpha$  , 2.  $\gamma$  , 3.  $\gamma$  , 4.  $\beta$  , 5.  $\alpha$  .

**Ασκήσεις για λύση**

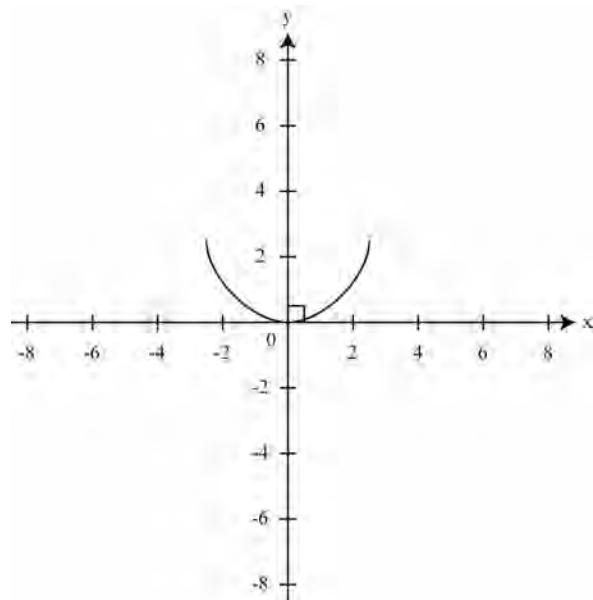
1. α)



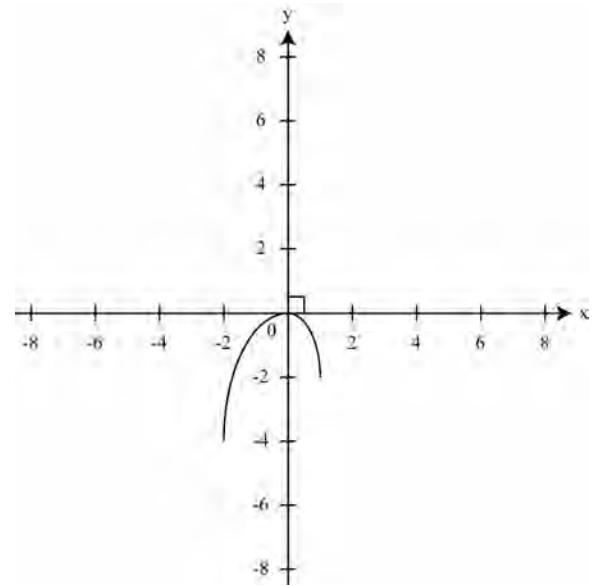
β)



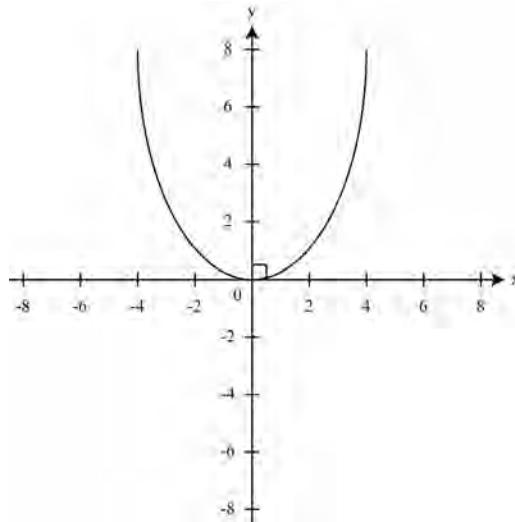
Λύσεις γ)



2. α)



β)



3.  $\alpha=2$  ,  $\psi=-4x^2$  , 4.  $\lambda > \frac{1}{7}$  , 5. α)  $\alpha=\frac{4}{3}$  , β)  $\alpha=\frac{2}{9}$  , 6. α)  $\lambda=-1$  ,  $\lambda=4$  , β)  $\psi=6x^2$

7.  $\alpha < -\frac{1}{2}$

#### 4.2 Η συνάρτηση $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ , με $\alpha \neq 0$

**Ερωτήσεις κατανόησης**

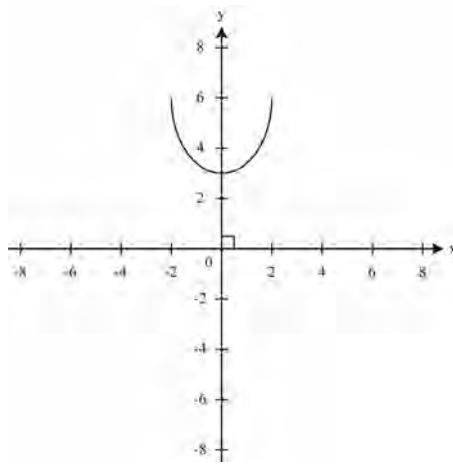
A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$

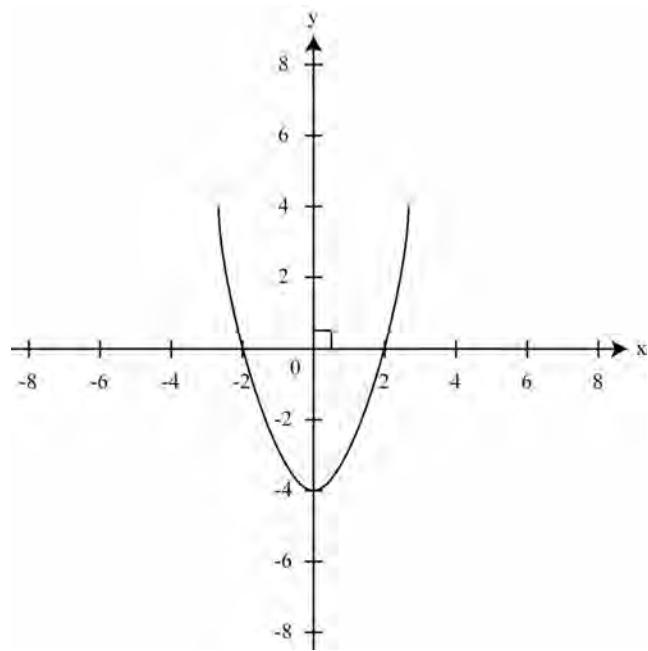
B. 1.  $\beta$  , 2.  $\gamma$  , 3.  $\beta$  , 4.  $\alpha$  , 5.  $\gamma$  , 6.  $\gamma$

**Ασκήσεις για λύση**

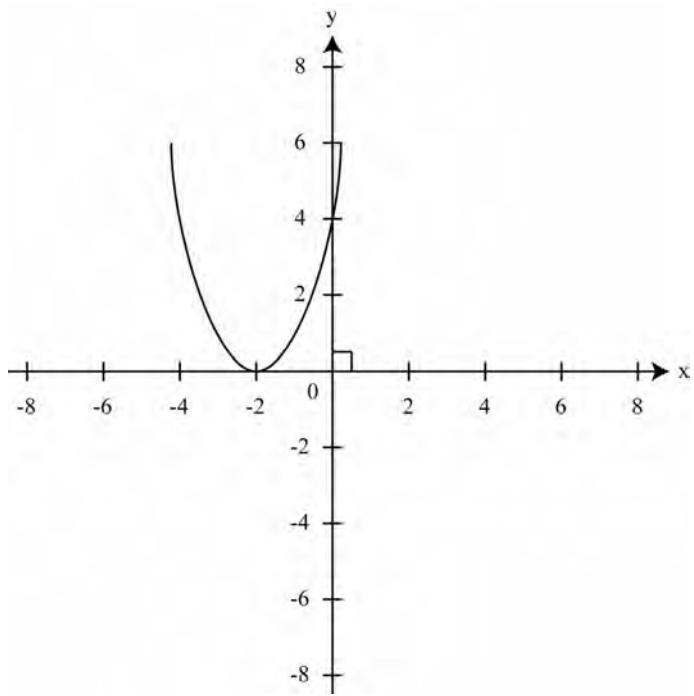
1. α)



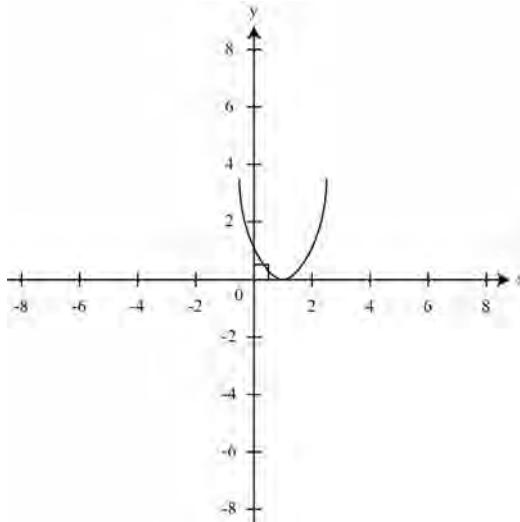
**Λύσεις** β)



γ)



δ)



2. α) το  $\psi=6$  , β) το  $\psi=3$  , 3. α) Επειδή  $\alpha=1 > 0$  έχουμε ελάχιστο , β)  $\lambda=1$  ή  $\lambda=2$   
 γ) το  $\psi=1$  , 4.  $\lambda=1$  , 5. α)  $\lambda=5$  , β)  $\psi=4$  , 6.  $\alpha=8$  ,  $\beta=-10$  , 7. α) είναι 5 , 5 , β) 5 , 5 .  
 8.  $\psi=\frac{65}{8}$  , 9. δεν υπάρχει , 10. α)  $\psi=-\frac{1}{4}\lambda^2-2\lambda$  , β)  $\lambda=-4$  , 11.  $x=20$  στρέμματα

#### Γενικές ασκήσεις 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου

1. α) Επειδή  $\alpha=1>0$  έχουμε ελάχιστο , επειδή  $\alpha=-2$  έχουμε μέγιστο.

$$\beta) \lambda=0, 2. \lambda=2 \text{ ή } \lambda=3, 3. x=\frac{5}{4}, \psi=\frac{10}{4}, 4. x=5, \psi=15,$$

5. Πρέπει :  $3\lambda-6>0$  ή  $\lambda>2$ . Άρα  $\lambda>2$  ή  $-\lambda<-2$  ή  $1-\lambda<-1<0$  οπότε έχουμε μέγιστο.

6. α)  $\lambda=5$  , β)  $\psi=-2x+4$  , 7.  $x=6$  άρα το M βρίσκεται στο μέσο του AB.

#### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

##### Θέμα 1

α) θεωρία , β) θεωρία , γ) θεωρία

##### Θέμα 2

α)  $\alpha=3$  , γ)  $\psi=-3x^2$

##### Θέμα 3

α) A(1,0) , B(2,0) , Γ(0,2) , β) ελάχιστο το  $\psi=-\frac{1}{4}$  , γ)  $E=\frac{1}{8}$  τετραγωνικές μονάδες

##### Θέμα 4

α)  $\alpha<2$  , β)  $\alpha=1$  ή  $\alpha=-3$

## Λύσεις 2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα 1

α) θεωρία , β) θεωρία α) θεωρία , β) θεωρία , γ)  $\beta=0$  ,  $\gamma=4$  ,  $\alpha \neq 0$

### Θέμα 2

α)  $\lambda=0$  , β) το  $\psi=2$

### Θέμα 3

$\alpha=-3$  ,  $\beta=0$  ,  $\gamma=0$

### Θέμα 4

α)  $B+\beta=30-v$  , β)  $E=\frac{1}{2}(30-v) \cdot v$  , γ)

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

### 5.1 Σύνολα

#### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$

B. 1. α , 2. α , 3. α , 4.δ

#### Ασκήσεις για λύση

- α)  $A=\{-1,0,1\}$  ,  $B=\{-1,1\}$  , β)  $A \cup B=\{-1,0,1\}$  ,  $A \cap B=\{-1,1\}$
- i) α)  $A'=\{-4,-2,1\}$  ,  $B'=\{-4,-2,1\}$  , β)  $A \cup B=\{0,1,2,3\}$  ,  $A \cap B=\{0\}$   
 $(A \cap B)'=\{-4,-2,1,2,3\}$
- α)  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq 3$  , β)  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq 3$  , γ)  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq -1$  και  $\lambda \neq 0$  .
- 8 στοιχεία , 5.  $v=2$  ,  $\lambda=3$  . 6. α)  $A=\{-1,1\}$  , β)  $B=\{1,3\}$   
 $\gamma) A'=\{0,2,3\}$  ,  $B'=\{-1,0,2\}$  ,  $(A \cup B)'=\{0,2\}$
- $A=\{2,3,4,5,6\}$  . 8. α)  $A \cup B=\{1,2,3,4\}$   $A \cap B=\{1\}$  , β)  $A'=\{4,6,8\}$   
 $(A \cup B)'=\{6,8\}$  ,  $(A \cap B)'=\{2,3,4,6,8\}$

### 5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

#### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8
$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

B. 1. α , 2. δ , 3. β

1. α)  $\Omega = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6\}$  β)  $A = \{K_3, K_4, K_5, K_6\}$   
 $B = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$ , γ)  $A' = \{K_1, K_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6\}$ ,  
 $B' = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \Gamma_5, \Gamma_6\}$ ,  $(A \cup B)' = \{K_1, K_2, \Gamma_5, \Gamma_6\}$ , δ)  $A \cap B = \emptyset$
2. α)  $A'$ : Ο μαθητής δεν είναι άριστος στην Χημεία .  
β)  $B'$ : Ο μαθητής δεν είναι άριστος στην Ιστορία .  
γ)  $A \cup B$ : Ο μαθητής είναι άριστος στην Χημεία ή στην Ιστορία .  
δ)  $A \cup B$ : Ο μαθητής είναι άριστος και στην Χημεία και στην Ιστορία  
ε)  $A \cap B'$ : Ο μαθητής είναι άριστος στην Χημεία και δεν είναι στην Ιστορία στ)  
 $A \cup B$ : Ο μαθητής δεν είναι άριστος ούτε στην Χημεία ούτε και στην Ιστορία.

3.  
α)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- β)  $A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ ,  $B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$   
γ)  $A \cup B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ ,  $A \cup B = \{(6,1)\}$

4. α)  $\Omega = \{\Gamma K K, \Gamma K \Gamma, \Gamma \Gamma K, \Gamma \Gamma \Gamma, K K K, K K \Gamma, K \Gamma K, K \Gamma \Gamma\}$   
β)  $A = \{\Gamma K K, \Gamma K \Gamma, \Gamma \Gamma K, K K K, K K \Gamma, K \Gamma K, K \Gamma \Gamma\}$   
 $B = \{\Gamma K K, \Gamma K \Gamma, \Gamma \Gamma K, \Gamma \Gamma \Gamma, K K K, K \Gamma K, K \Gamma \Gamma\}$   
Γ= {KKK,ΓΓΓ}

5. α)  $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 9\}$ , β)  $A \cap B = \{0, 6\}$ , γ)  $(A \cup B)' = \{1, 5, 7, 8\}$

6. α)  $\Omega = \{A\alpha, A\pi, \Lambda\alpha, \Lambda\pi, T\alpha, T\pi\}$ , β)  $A = \{\Lambda\pi, \Lambda\alpha, T\alpha, T\pi\}$ ,  $B = \{T\alpha, T\pi\}$

### **5.3 Η έννοια της πιθανότητας**

**Ερωτήσεις κατανόησης**  
Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

**Λύσεις**

B. 1. δ , 2. α

### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $A' = \{0,1,2,5,6,7\}$ ,  $B' = \{0,3,5,6\}$ ,  $A \cup B = \{1,2,3,4,7,8\}$ ,  $A \cap B = \{4,8\}$   
 β)  $P(A') = \frac{6}{9}$ ,  $P(B') = \frac{4}{9}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{6}{9}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$
2. α)  $\frac{19}{20}$ , β)  $\frac{18}{30}$ , γ)  $\frac{2}{30}$ , δ)  $\frac{21}{30}$ , 3. α)  $\frac{72}{100}$ , β)  $\frac{65}{100}$
4. α)  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ , β)  $P(B) = \frac{7}{30}$
5. α)  $A \cap B = \frac{22}{35}$ , β)  $P((A \cup B)') = \frac{13}{35}$
6. α)  $\frac{2}{9}$ , β)  $\frac{2}{9}$ , γ)  $\frac{4}{9}$ , δ)  $\frac{1}{9}$ , ε) 0, 7.  $P(A) = \frac{1}{2}$
8. α)  $\frac{14}{40}$ , β)  $\frac{26}{40}$ , γ)  $\frac{32}{40}$ , 9.  $P(A) = \frac{4}{5}$ ,  $P(B) = \frac{2}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{14}{15}$ , 10.  $\frac{1}{4}$ .

### Γενικές ασκήσεις 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου

1.  $P(A) = \frac{2}{3}$ , 2. α) έχει 24 μπάλες, β) 4 πράσινες και 16 κίτρινες
3. α)  $\frac{4}{15}$ , β)  $\frac{11}{15}$ ,  $\frac{20}{120}$ , 4. α)  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ , β)  $\frac{1}{6}$
5.  $P(A) + P(B) = 2$ , άρα  $P(A) = 1$  και  $P(B) = 1$  οπότε τα A, B είναι βέβαια ενδεχόμενα.
6. 20 κόκκινες, 25 πράσινες, 15 άσπρες, 7.  $A \cap B = \emptyset$  άρα είναι ασυμβίβαστα.
- Για το λ ισχύει  $-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

### 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

#### Θέμα 1

Α. α) θεωρία, β) θεωρία, γ) θεωρία, Β. θεωρία

#### Θέμα 2

$P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{2}{3}$ ,  $P(\Gamma) = \frac{1}{3}$

#### Θέμα 3

$P(B) = \frac{3}{10}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

#### Θέμα 4

α) 0,6, β) 0,4

**Θέμα 1**

α) θεωρία , β) θεωρία , γ)θεωρία

**Θέμα 2**

α)  $\frac{1}{6}$  , β)  $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$  ,  $A' = \{3,5\}$  ,  $B' = \{1,2,6\}$

**Θέμα 3**

60

**Θέμα 4**

α) 24 μπάλες , β) 4 πράσινες και 16 κίτρινες μπάλες .

## Μέρος δεύτερο

### Γεωμετρία

#### 1.1 Ισότητα τριγώνων

##### Ερωτήσεις κατανόησης

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

Β. 1. β , 2. γ , 3. γ , 4. γ , 5.γ , 6. β , 7.γ

##### Ασκήσεις για λύση

1. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΔ , β) ΟΑ=ΟΓ , ΟΑ=ΟΒ

2. β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΚ , ΟΑΛ ,

3. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΕΛ , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΔΕΖ , γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΓ , ΑΛΖ .

4. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ , ΑΕΛ , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΓ , ΔΛΖ .  
γ) Από τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΔΕΖ και από τα α) , β)

5.α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ , Α'Β'Δ' , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ , Α'Δ'Γ'

6. Φέρνουμε ΑΚ  $\perp$  (ε) , ΒΛ  $\perp$  (ε) και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΜ , ΒΛΜ .

7. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΒ , ΜΓΕ , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΜΕ , ΑΜΓ.

- Λύσεις**
8. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AEB$ ,  $AGZ$ , β) Από α)  $AE=AZ$ , γ) Φέρνω  $BK \perp AE$   $\Gamma L \perp AZ$  και συγκρίνουμε  $EBK$ ,  $\Gamma LZ$
  9. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $BDM$ ,  $MGE$  β) Από α)
  10. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $ABK$ ,  $B\Lambda\Delta$ , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AKG$ ,  $GNE$  γ) Από α), β)
  11. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $BKM$ ,  $MKG$ , β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $ABK$ ,  $AKG$ , γ) Από α).
  12. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $ADE$ ,  $BZG$  β) Από α) και από την σύγκριση των  $AEB$ ,  $\Delta ZG$ , γ) Από α)
  13. α) Αν  $K$  είναι το σημείο τομής της  $AD$  και  $AZ$  τότε το  $AK$  είναι ύψος και διχοτόμος .  
β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $ABD$ ,  $A\Delta Z$ , γ) Από β)
  14. Αν  $ABGD$  είναι το ορθογώνιο τότε συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $A\Delta G$ ,  $ABD$ .
  15. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $A\Delta K$ ,  $AKE$ , β) Από α)

## 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

---

**Ερωτήσεις κατανόησης**

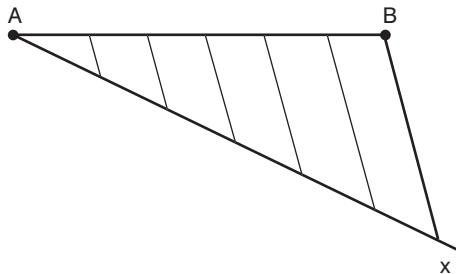
A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

B. 1.α , 2. δ , 3. α , 4. α , 5. α , 6. β.

**Ασκήσεις για λύση**

1. α)



β)



$$\gamma) \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{1}{6}, \quad \frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta} = 7, \quad \frac{ZE}{\Gamma\Delta} = \frac{9}{2}$$

2. α)  $\frac{AM}{AG} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , β)  $\frac{AM}{BG} = \frac{1}{2}$ , γ)  $\frac{AB}{AG} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. α)  $\frac{KD}{AD} = \frac{1}{2}$ , β)  $\frac{KB}{AB} = \frac{1}{2}$ , γ)  $\frac{KA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , δ)  $\frac{KA}{KD} = \sqrt{3}$

4. α) Στο τρίγωνο  $ABG$ , το  $E$  είναι μέσον του  $AB$  και  $EK//BG$  άρα το  $K$  είναι μέσον του  $AG$ . β) Από α)

5. α) Στο ορθογώνιο  $AKB$  η  $KZ$  είναι διάμεσος άρα  $KZ = \frac{AB}{2}$  (1). Στο τρίγωνο  $ABG$

το  $E$  είναι μέσον του  $AG$ , το  $\Delta$  είναι μέσον του  $AB$  άρα  $\Delta E = \frac{AB}{2}$  (2). Από (1) και (2)  $KZ = \Delta E$

β) Στο ορθογώνιο  $AKG$  η  $KE$  είναι διάμεσος άρα  $KE = \frac{AG}{2}$

γ) Στο τρίγωνο  $ABG$  το  $Z$  είναι μέσον του  $AB$ , το  $E$  μέσον του  $AG$  άρα  $ZE = \frac{BG}{2}$

6. α)  $\frac{AB}{AG} = \frac{4}{3}$ , β)  $\frac{AG}{BG} = \frac{3}{5}$ , γ)  $\frac{AM}{BG} = \frac{1}{2}$

7. Είναι  $AM = \frac{BG}{2} = 10\text{cm}$ . Το  $A\Delta M$  είναι ορθογώνιο και  $\Delta E$  είναι διάμεσος άρα

$$\Delta E = \frac{AM}{2} = 5\text{cm}.$$

8. Στο  $ABG$ : το  $K$  είναι μέσον του  $AB$  και το  $\Lambda$  είναι μέσον του  $BG$  άρα  $K\Lambda = \frac{AG}{2}$  και  $K\Lambda//AG$  (1)

Στο  $A\Delta G$ : το  $N$  είναι μέσον του  $A\Delta$  και το  $M$  είναι μέσον του  $\Gamma\Delta$  άρα  $MN = \frac{AG}{2}$

και  $MN//AG$  (2)

Από (1) και (2)  $K\Lambda = MN$  και  $K\Lambda//MN$ , άρα το  $K\Lambda MN$  είναι πραλληλόγραμμο.

### 1.3 Θεώρημα Θαλή

#### Ερωτήσεις κατανόησης

Α,

1	2	3	4	5
Λ	Σ	Λ	Λ	Λ

Β. 1. β , 2. α , 3. α

#### Ασκήσεις για λύση

1. α) Αν  $\eta (\varepsilon) // AB$  και περνάει από το  $O$  τότε  $AB//(\varepsilon)//\Delta\Gamma$  και εφαρμόζω το Θ. Θαλή

β) Οι ευθείες  $\varepsilon$ ,  $AB$ ,  $\Delta\Gamma$  είναι παράλληλες οπότε αν εφαρμόσουμε το Θ. του Θαλή προκύπτει το ζητούμενο.

**Λύσεις**

2. α)  $EK \perp BG$ ,  $A\Delta \perp BG$  άρα  $EK//A\Delta$ .

$$\beta) \text{Στο } AB\Delta \text{ } EK//A\Delta \text{ άρα } \frac{BE}{EA} = \frac{BK}{KA}$$

3. α) Στο τρίγωνο  $BEM$ ,  $A\Delta//EM$  άρα :  $\frac{B\Delta}{\Delta M} = \frac{BA}{AE}$ ,

$$\beta) \text{Στο τρίγωνο } A\Delta\Gamma \text{ } \frac{\Gamma M}{\Delta M} = \frac{\Gamma Z}{ZA},$$

4. Στο τρίγωνο  $AM\Gamma$ ,  $KZ//M\Gamma$  άρα :  $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{AK}{KM} = \frac{1}{3}$ ,

$$\text{οπότε : } \frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{1}{4} \text{ ή } \frac{AZ}{8} = \frac{1}{4} \text{ ή } AZ=2\text{cm}.$$

$$\text{Άρα : } \frac{AE}{EB} = \frac{AK}{KM} = \frac{1}{3} \text{ οπότε : } \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4} \text{ ή } \frac{AE}{12} = \frac{1}{4} \text{ ή } AE=3\text{cm}$$

5. Στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ ,  $EZ//A\Delta$  άρα :  $\frac{x+5}{12} = \frac{2x}{4}$  ή  $x=1$

$$\text{Στο τρίγωνο } AB\Gamma, E\Delta//AB \text{ άρα : } \frac{x+1}{12} = \frac{\psi}{2x+4} \text{ ή } \frac{2}{12} = \frac{\psi}{6} \text{ ή } \psi=1$$

6. Στο τρίγωνο  $MKN$  η  $AB$  είναι // στην  $KN$  άρα :  $\frac{MB}{BK} = \frac{MA}{AN}$  (1),

β) Στο τρίγωνο

$$MLN \text{ η } AG \text{ είναι // στην } LN \text{ άρα : } \frac{MG}{GL} = \frac{MA}{AN} \text{ (2),}$$

γ) Από (1) και (2)

$$\frac{MB}{BK} = \frac{MG}{GL} \text{ και επειδή } GL=BK \text{ θα έχουμε ότι : } MG=MB.$$

## 1.4 Ομοιοθεσία

### Ερωτήσεις κατανόησης

A

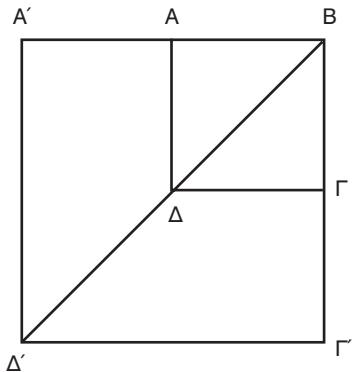
1	2	3	4	5	6	7
Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ

B. 1.α , 2.  $40^\circ$  , 3. α

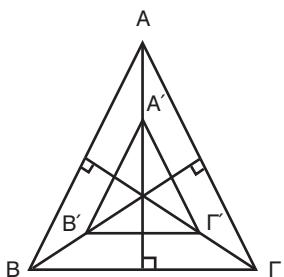
### Ασκήσεις για λύση

1. α) Είναι το ίδιο το τετράγωνο

β)

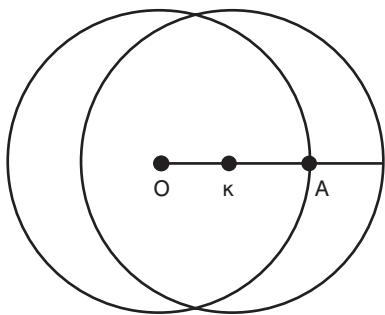


2. α)



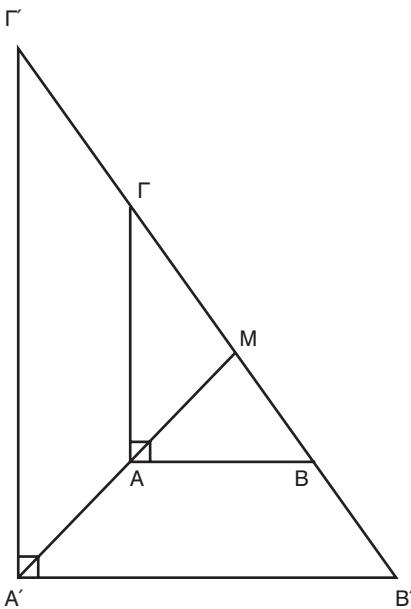
$$\beta) A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'A' = \frac{3}{2}$$

3.



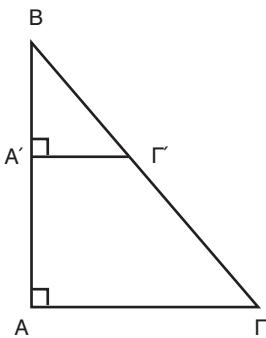
**Λύσεις**

4.



$$A'B' = 2AB = 12 \text{ cm}, B'\Gamma' = 2B\Gamma = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm}, A'\Gamma' = 2A\Gamma = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}$$

5.



$$BA' = \frac{1}{2} BA = 2, B\Gamma' = \frac{1}{2} B\Gamma = \frac{5}{2}, A'\Gamma' = \frac{1}{2} A\Gamma = \frac{3}{2}$$

### 1.5 Ομοιότητα

**Ερωτήσεις κατανόησης**

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

B. 1. 20 , 2. α , 3. α , 4. δ

**Ασκήσεις για λύση**

1. β)  $x = \frac{15}{2}$ ,  $x = \frac{35}{3}$ ,  $x = \frac{5}{2}$ , 2.α) Επειδή  $\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{4}$  θα έχουμε ότι :  $ΔE // BG$

2. β) Έχουν  $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{G} = \hat{E}$ , γ)  $BG = 16$

3. α)  $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\hat{B}$  κοινή .  $\frac{AD}{GE} = \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{EB}$

β)  $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$ ,  $\hat{A}$  κοινή .  $\frac{AG}{AB} = \frac{GE}{BZ} = \frac{AE}{AZ}$

4. α)  $\hat{K} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\hat{B}$  κοινή .  $\frac{AB}{BM} = \frac{AD}{KM} = \frac{BD}{KB}$

β)  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\hat{G}$  κοινή .  $\frac{AG}{MG} = \frac{AD}{ML} = \frac{DG}{LG}$

5. α)  $\hat{ABD} = \hat{E}\hat{G}$  εγγεγραμμένες σε ίδια τόξα ,  $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{D}\hat{G}\hat{E}$  εγγεγραμμένες σε ίδια τόξα

β)  $\hat{A}\hat{G}\hat{D} = \hat{D}\hat{B}\hat{E}$  εγγεγραμμένες σε ίδια τόξα,  $\hat{A}\hat{G}\hat{D} = \hat{D}\hat{E}\hat{B}$  εγγεγραμμένες σε ίδια τόξα

6.  $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{E} = 90^\circ$ ,  $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{A}\hat{E}\hat{G}$  εγγεγραμμένες σε ίδια τόξα .  $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AG} = \frac{BD}{EG}$

7. Τα  $A\Delta\Gamma$ ,  $A'\Delta'\Gamma'$  είναι όμοια διότι :

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ \text{ άρα } \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{AG}{AT'} = \frac{AD}{A'D'} = \lambda$$

8. α)  $\hat{K}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{K}\hat{M}\hat{B}$  (εντός εναλλάξ),  $\hat{K}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{K}\hat{B}\hat{M}$  (εντός εναλλάξ)

9. β)  $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{K}\hat{B}\hat{A}$  (εντός εναλλάξ),  $\hat{K}\hat{A}\hat{B} = \hat{K}\hat{\Lambda}\hat{\Delta}$  (εντός εναλλάξ)

**1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων****Ερωτήσεις κατανόησης**

A.

1	2	3	4	5	6
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ

B. 1. α , 2. α , 3. α

**Ασκήσεις για λύση**

1.  $(A\Delta E) = \frac{100}{9} \text{ cm}^2$  , 2. 51% , 3. 21% , 4. 20cm , 5.  $x=2$

**Γενικές ασκήσεις**

1. α)  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ,  $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\frac{BK}{KG} = \frac{EK}{KD} = \frac{BE}{DG}$ , β)  $(K\Delta\Gamma) = 4 \text{ cm}^2$

**Λύσεις**

2.  $\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2 = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 \text{ ή } \frac{12}{E_2} = \left(\frac{\sqrt{40}}{15}\right)^2 \text{ ή } \frac{12}{E_2} = \frac{40}{225} \text{ ή } E_2 = 67,5 \text{ cm}^2$
3. α) Είναι κανονικά με τον ίδιο αριθμό πλευρών , β)  $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{8}{4}\right)^2 = 4$  ,
4. Η ΚΛ είναι // στη ΒΓ . Στο τρίγωνο ΑΒΜ , το Κ είναι μέσο του ΑΒ και ΚΝ//ΒΜ  
άρα το Ν είναι μέσο του ΑΜ
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ , το Κ είναι μέσον του ΑΓ άρα  $KM = \frac{BG}{2}$  και  $KM//BG$  (1) .  
Στο τρίγωνο ΔΒΓ , το Ν είναι του ΒΔ , το Λ μέσο του ΔΓ , άρα  $N\Lambda = \frac{BG}{2}$   
και  $N\Lambda//BG$  (2) . Από (1) και (2)  $KM//N\Lambda$  και  $KM = N\Lambda$  , άρα το  $KM\Lambda N$   
είναι παραλληλόγραμμο .
6. α)  $\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta EO}$  ,  $\hat{AB\Delta} = \hat{EO\Delta}$  , β)  $\hat{BAO} = \hat{ZOG}$   $\hat{ABG} = \hat{OZG}$  ,  
γ) Από α) , β) και επειδή  $(EZ//AB)$  ισχύει  $\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma B}$  .

**1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης****Θέμα 1**

α) θεωρία , β) θεωρία , γ) θεωρία .

**Θέμα 2**

α) ( $\Pi$ -Γ-Π) , β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΜΓ , ΒΜΔ .

**Θέμα 3**

α)  $\hat{BAE} = \hat{ZAG}$  ,  $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$  ,  $\frac{AB}{AG} = \frac{BE}{GZ} = \frac{AE}{AZ}$  , β)  $1 \text{ cm}^2$

**Θέμα 4**

$(A\Delta E) = \frac{100}{9} \text{ cm}^2$

**2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης****Θέμα 1**

α) θεωρία , β) θεωρία , γ) θεωρία

**Θέμα 2**

α)  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{4}$  άρα  $ΔE//BG$  β)  $\hat{A\Delta E} = \hat{ABG}$  ,  $\hat{A}$  κοινή , γ)  $BG = 16 \text{ cm}$

**Θέμα 3**

α)  $\hat{ΔAB} = \hat{ΔEO}$  ,  $\hat{ABΔ} = \hat{EOΔ}$  , β)  $\hat{ΓAB} = \hat{ΓOZ}$  ,  $\hat{ABΓ} = \hat{OZΓ}$

γ) Από α) β) και επειδή (EZ//AB) ισχύει  $\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{EZ}{GB}$

#### Θέμα 4

α) Στο τρίγωνο KMN είναι AB//KN άρα  $\frac{MB}{BK} = \frac{MA}{AN}$

β) Στο τρίγωνο MNL ΓΑ//ΛΝ άρα  $\frac{MG}{GL} = \frac{MA}{AN}$

γ) Από α) και β)  $\frac{MB}{BK} = \frac{MG}{GL}$  και επειδή BK=GL έχουμε : MB=MG .

#### 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

#### **Ερωτήσεις κατανόησης**

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

B. 1. α , 2. α , 3. β , 4. β

#### **Ασκήσεις για λύση**

1. ημ30°=  $\frac{1}{2}$  , συν30°=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  , εφ30°=  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  , ημ60°=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  , συν60°=  $\frac{1}{2}$  , εφ60°=  $\sqrt{3}$

2. ημ X̂OA =  $\frac{3}{5}$  , συν X̂OB = -1 , εφ X̂OG = -  $\frac{4}{3}$

3. M(-3,4) ημ X̂OM =  $\frac{4}{5}$  , συν X̂OM = -  $\frac{3}{5}$  , εφ X̂OM = -  $\frac{4}{5}$

4. α) ημB=  $\frac{\beta}{\alpha}$  , εφB=  $\frac{\beta}{\gamma}$  , επειδή α>γ άρα  $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\gamma}$  δηλ , ημB<εφB

$$\beta) \frac{\eta_m B}{\eta_m G} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

5. A= ημ17°+ημ35°-συν73°-συν55°=0

$$B= \frac{\sin 56^\circ}{\eta_m 34^\circ} + \frac{\eta_m 50^\circ}{\sin 40^\circ} - 4 = \frac{\eta_m 34^\circ}{\eta_m 34^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} - 4 = -2$$

6. 5≤A≤8 , 2≤B≤6

7. α) Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 και 4 .

β) Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά 8 και υποτείνουσα 10

$$8. \alpha) \eta_m B + \eta_m G = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \sin B + \sin G$$

**Λύσεις**

$$\beta) \eta\mu B \cdot \sin\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\alpha^2}$$

9. α)  $\eta\mu 38^\circ < \eta\mu 65^\circ$ , β)  $\sin 87^\circ < \sin 10^\circ$ , γ)  $\varepsilon\varphi 25^\circ < \varepsilon\varphi 89^\circ$ , δ)  $\eta\mu 10^\circ < \sin 30^\circ$

## **2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών**

### **Ερωτήσεις κατανόησης**

A.

1	2	3	4	5	6
$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$

- B. 1.  $\gamma$ , 2.  $\beta$ , 3.  $\alpha$ , 4.  $\gamma$ .

### **Ασκήσεις για λύση**

1.  $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\eta\mu 135^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. α)  $x=60^\circ$ , β)  $x=45^\circ$  ή  $x=135^\circ$

3.  $A\Gamma=5$ ,  $MA=\frac{5}{2}$ ,  $MB=\frac{\sqrt{601}}{2}$ ,  $\eta\mu\omega=\frac{12 \cdot 2\sqrt{601}}{601}$ ,  $\sin\omega=\frac{5\sqrt{601}}{601}$ ,  $\varepsilon\varphi\omega=\frac{24}{5}$   
 $\eta\mu\varphi=\frac{12 \cdot 2\sqrt{601}}{601}$ ,  $\sin\varphi=-\frac{5\sqrt{601}}{601}$ ,  $\varepsilon\varphi\varphi=-\frac{24}{5}$

4. α)  $\eta\mu(90^\circ+x)=\eta\mu(180^\circ-(90^\circ-x))=\eta\mu(90^\circ-x)=\sin x$

β)  $\sin(90^\circ+x)=\sin(180^\circ-(90^\circ-x))=-\sin(90^\circ-x)=-\eta\mu x$

5.  $x=120^\circ$ ,

6. α) Οι γωνίες  $A+B$ ,  $\Gamma$  είναι παραπληρωματικές άρα :  $\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma$

β) Οι γωνίες  $A+\Gamma$ ,  $B$  είναι παραπληρωματικές άρα  $\sin(A+\Gamma)=-\sin B$  ή  
 $\sin(A+\Gamma)+\sin B=0$ , γ) Οι γωνίες  $A+B$ ,  $\Gamma$  είναι παραπληρωματικές άρα :  
 $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$ .

7.  $\sin(B+\Gamma)=0$  άρα  $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ$ , οπότε  $\hat{A}=90^\circ$ , άρα ορθογώνιο

8. α)  $x=150^\circ$ , β)  $x=150^\circ$ .

9.  $x=150^\circ$

10. α)  $\eta\mu(150^\circ+\omega)=\eta\mu(180^\circ-(30^\circ-\omega))=\eta\mu(30^\circ-\omega)$ , β), γ), δ) Ομοίως με α).

11. α)  $\eta\mu 150^\circ + \sigma v 165^\circ + \eta\mu 75^\circ - \sigma v 60^\circ = \eta\mu 30^\circ - \sigma v 15^\circ + \sigma v 15^\circ - \eta\mu 30^\circ = 0$   
 β)  $\eta\mu 89^\circ + \eta\mu 91^\circ - 2\sigma v 1^\circ = \sigma v 1^\circ + \eta\mu 89^\circ - 2\sigma v 1^\circ = \sigma v 1^\circ + \sigma v 1^\circ - 2\sigma v 1^\circ = 0$

12.  $\sigma v 120^\circ < \eta\mu 30^\circ < \eta\mu 140^\circ < \sigma v 10^\circ$

13. α)  $\varphi = 30^\circ$ , β)  $\varphi = 30^\circ$

### 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

---

#### Ερωτήσεις κατανόησης

A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

B. 1. β, 2. β, 3. δ

#### Ασκήσεις για λύση

1. α)  $4(\eta\mu^2\omega + \sigma v^2\omega) = 4$ , β)  $\sigma v^2x + \eta\mu^2x = 1$  (1), άρα  $\sigma v^2x = 1 - \eta\mu^2x$ ,

γ) Από (1)  $\eta\mu^2x = 1 - \sigma v^2x$ , δ)  $1 + \frac{\eta\mu^2x}{\sigma v^2x} = \frac{\eta\mu^2x + \sigma v^2x}{\sigma v^2x} = \frac{1}{\sigma v^2x}$ ,

ε)  $\eta\mu^2x - \sigma v^2x = 1 - \sigma v^2x - \sigma v^2x = 1 - 2\sigma v^2x$ .

2. α)  $4\eta\mu^2\omega - 12\eta\mu\sigma v\omega + 9\sigma v^2\omega + 9\eta\mu^2\omega + 12\eta\mu\sigma v\omega + 4\sigma v^2\omega = 13\eta\mu^2\omega + 13\sigma v^2\omega = 13$   
 β)  $\eta\mu^4\omega - \sigma v^4\omega = (\eta\mu^2\omega - \sigma v^2\omega)(\eta\mu^2\omega + \sigma v^2\omega) = \eta\mu^2\omega - \sigma v^2\omega = \eta\mu^2\omega - (1 - \eta\mu^2\omega) = 2\eta\mu^2\omega - 1$

$$\gamma) \frac{1 + 2\eta\mu\sigma v\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma v\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma v^2\alpha + 2\eta\mu\sigma v\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma v\alpha} = \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma v\alpha)^2}{\eta\mu\alpha + \sigma v\alpha} = \eta\mu\alpha + \sigma v\alpha$$

3. α)  $\frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma v^2\omega}} = \frac{\sigma v^2\omega}{\sigma v^2\omega + \eta\mu^2\omega} = \sigma v^2\omega$ ,

β)  $\frac{\varepsilon\varphi^2\omega - 1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} = \frac{\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma v^2\omega} - 1}{\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma v^2\omega} + 1} = \frac{\eta\mu^2\omega - \sigma v^2\omega}{\eta\mu^2\omega + \sigma v^2\omega} = \eta\mu^2\omega - \sigma v^2\omega$ ,

4.  $\eta\mu x = \frac{4}{5}$ ,  $\varepsilon\varphi x = -\frac{4}{3}$ ,

5.  $\sigma v x = -\frac{12}{13}$ ,  $\varepsilon\varphi x = -\frac{5}{12}$ , A=10, 6. A=-3, 7. A=- $\eta\mu^2x$ , B=- $\eta\mu x\sigma v x$ ,

**Ερωτήσεις κατανόησης**

Α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Λ	Λ	$\Sigma$	Λ	Λ	$\Sigma$	$\Sigma$	Λ	$\Sigma$

B. 1. γ , 2. δ , 3. α

**Ασκήσεις για λύση**

1.  $\hat{B} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ,  $\alpha = 4$

2. a) Από το νόμο των συνημιτόνων:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin 60^\circ = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$   
b) Από το νόμο των συνημιτόνων:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin 120^\circ = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$

3.  $\alpha \sin \Gamma = \gamma \sin \Alpha$  ή  $\alpha \cdot \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \gamma \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$  ή  $2\alpha^2 = 2\gamma^2$  άρα  $\alpha = \gamma$

4. a)  $\hat{\Alpha} = 120^\circ$ ,  $\beta$   $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\gamma$   $\hat{\Alpha} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 53^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 37^\circ$

5. a)  $\beta \sin \Gamma + \gamma \sin \Beta = \beta \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} = \alpha$

b)  $\frac{\sin \Alpha}{\alpha} + \frac{\sin \Beta}{\beta} + \frac{\sin \Gamma}{\gamma} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

6.  $\hat{B} = 120^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ,  $\gamma = 1$

7. Από το νόμο των ημιτόνων:  $\frac{\alpha}{\eta \mu \Alpha} = \frac{\beta}{\eta \mu \Beta}$  έχουμε  $\frac{\alpha}{\eta \mu 30^\circ} = \frac{12 - \alpha}{\eta \mu 45^\circ}$  ή  
 $\alpha \cdot \eta \mu 45^\circ = \eta \mu 30^\circ \cdot (12 - \alpha)$  ή  $\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} (12 - \alpha)$  ή  $\sqrt{2} \cdot \alpha = 12 - \alpha$  ή  $\alpha = \frac{12}{\sqrt{2} + 1}$

ή  $\alpha = 12(\sqrt{2} - 1)$ . Άρα  $\beta = 12 - 12(\sqrt{2} - 1) = 12(2 - \sqrt{2})$

Από το νόμο συνημιτόνων  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin 75^\circ$  βρίσκουμε ότι την πλευρά γ .**Γενικές ασκήσεις**

1. a)  $(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \alpha\beta$  ή  $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2 = \alpha\beta$  ή  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ . Επειδή  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma$

θα έχουμε:  $-2\alpha\beta \sin \Gamma = \alpha\beta$  άρα  $\sin \Gamma = -\frac{1}{2}$ , δηλ.  $\hat{\Gamma} > 90^\circ$ , β)  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ 

2.  $\Delta = 9 - 4(\eta \mu \theta - 1) = 9 - 4\eta \mu \theta + 4 = 13 - 4\eta \mu \theta > 0$ .

3. Πρέπει:  $0 \leq \eta \mu \theta \leq 1$  και  $-1 \leq \sin \Gamma \leq 1$  άρα  $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq \frac{12}{7}$

4.  $\kappa = 0$  ή  $\kappa = -4$

5. α)  $\eta\mu x \sin v = -\frac{12}{25}$ , β)  $\frac{5}{12}$ , γ)  $-\frac{12}{25}$

## 1<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα 1

α) θεωρία, β) θεωρία, γ) θεωρία.

### Θέμα 2

α)  $x=60^\circ$  ή  $x=120^\circ$  β)  $\hat{A} -120^\circ$

### Θέμα 3

α)  $\sigma v \omega = -\frac{5}{13}$ ,  $\varepsilon \varphi \omega = -\frac{12}{5}$ , β)  $A = \frac{5}{13}$

### Θέμα 4

α)  $\frac{5}{4} \leq \lambda \leq \frac{12}{7}$ , β)  $\eta \mu x = \frac{4}{5}$ , γ)  $\varepsilon \varphi x = -\frac{4}{3}$

## 2<sup>ο</sup> Κριτήριο αξιολόγησης

### Θέμα 1

α) θεωρία,

β) Όχι διότι:  $\eta \mu^2 \omega + \sigma v^2 \omega = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$

γ) i)  $\sigma v(90^\circ - \omega) = 0,71$ , ii)  $\sigma v(180^\circ - \omega) = 0,7$  iii)  $\varepsilon \varphi(180 - \omega) = -5$

### Θέμα 2

Α)  $\eta \mu 150^\circ = \eta \mu 30^\circ = \sigma v 60^\circ$ ,  $\sigma v 165^\circ = -\sigma v 15^\circ = -\eta \mu 75^\circ$

β)  $\eta \mu 89^\circ = \sigma v 1^\circ$ ,  $\eta \mu 91^\circ = \eta \mu 89^\circ = \sigma v 1^\circ$

Β. Από το νόμο συνημιτόνων  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \gamma \sigma v 60^\circ = \beta^2 + \gamma^2 - \beta \gamma$

### Θέμα 3

$x = 15^\circ$

### Θέμα 4

α)  $\eta \mu x \sin v = -\frac{12}{25}$ , β)  $\frac{5}{12}$ , γ)  $-\frac{12}{15}$









