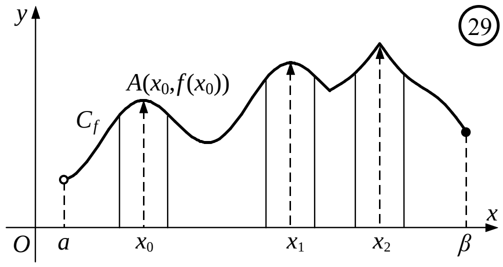
2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

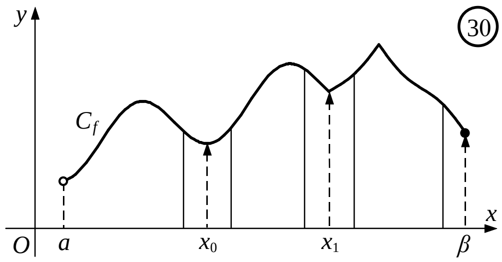
45. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο ; **(2012, 2015, 2020 Ν.Σ. ΕΠΑΝ)**

Απάντηση :

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**.



β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε : $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**.



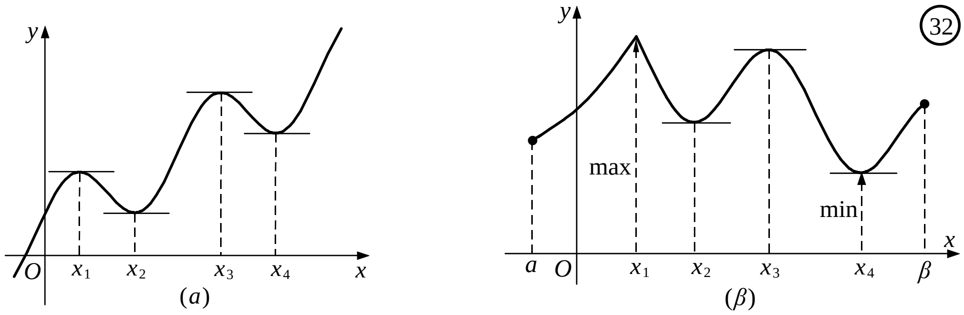
Σχόλια :

- Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο,** το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

- Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

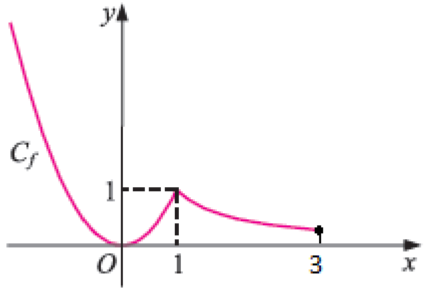
- Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων.** Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



- Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

<u>**Για παράδειγμα**</u> : Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , 1<x\le 3 \end{cases}$



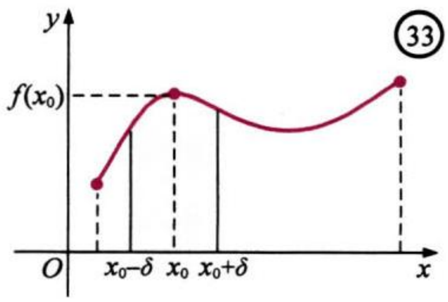
- στο $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.
- στο $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1$.
- στο $x_3=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat</u> (2004, 2011, 2013 Β΄ μόνο διατύπωση, 2016 Β΄, 2017 Β΄, 2019 μόνο διατύπωση)

46. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0)=0$

<u>**Απόδειξη :**</u>

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Άρα :

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική ερμηνεία :

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

47. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; **(2013 Β΄)**
β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση :

α) Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα ε σ ω τ ε ρ ι κ ά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της). (Τα άκρα των κλειστών διαστημάτων)

48. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

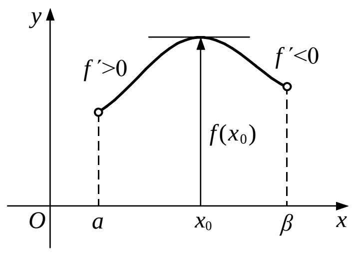
i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α,x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. **(2016, 2020 Π.Σ. ΕΠΑΝ)**

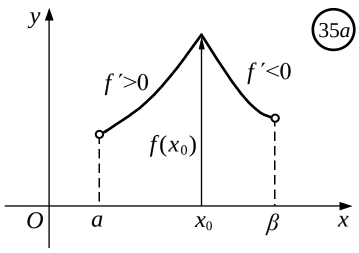
ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α,x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). **(2014 Β΄)**

Απόδειξη :

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha,x_0]$. (1) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0,\beta)$. (2)

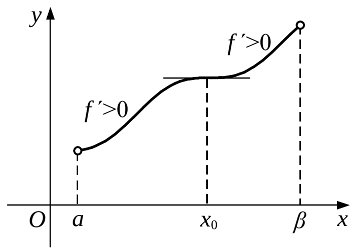


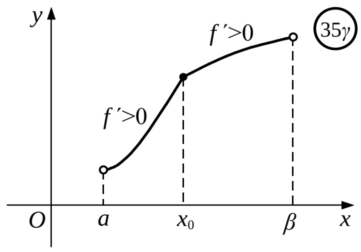


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$.

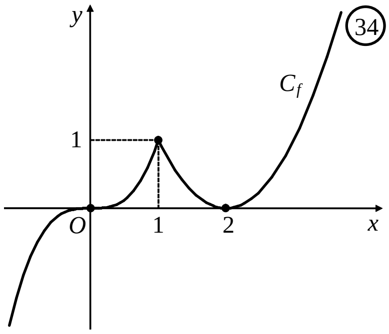
<u>Παράδειγμα 1</u> : Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$ (διπλή) ή $x = 3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
f	↘		↘	Ο.Ε.	↗

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = -27$.

Παράδειγμα 2 : Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<1 \\ (x-2)^2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}.$$



Η f είναι συνεχής στο $\Re$ και παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1\}$,

με : $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & , \quad x<1 \\ 2(x-2) & , \quad x>1 \end{cases}$.

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
f	↗		↗	**Τ.Μ.**	↘	**Τ.Ε.**	↗

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της *f* είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της *f*.

Σχόλια :

- ΄Οπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της *f* στο (α,β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της *f* στο (α,β).

- Αν μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8), η *f* παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

Παρατηρήσεις : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο ***ανοιχτό*** διάστημα Δ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

- Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0)=0$.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)\neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.
- Αν για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f'(x)\neq 0$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.
- Αν $x_0\in\Delta$ και $f'(x_0)=0$, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0.
- Αν $x_0\in\Delta$, τότε δεν είναι ισοδύναμες οι προτάσεις : «Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0» και «Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x»

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

➢ **(Θεώρημα Fermat)**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0)=0$.

➢ Οι πιθανές θέσεις που μπορεί να παρουσιάσει ακρότατα μια συνεχής συνάρτηση f είναι :

1)Τα **σημεία** που η **παράγωγος της f είναι ίση με 0**

2)Τα **σημεία** του πεδίου ορισμού της f στα οποία η **f δεν είναι παραγωγίσιμη** (συνήθως τα σημεία αλλαγής τύπου δικλαδης συνάρτησης)

3)Τα **άκρα των κλειστών διαστημάτων** που περιέχονται στο πεδίο ορισμού της f. Αν π.χ. το πεδίο ορισμού της f είναι [α,β] και η f είναι γνησίως αύξουσα τότε :

a)τοπικό ελάχιστο στο α το f(α).

b)τοπικό μέγιστο στο β το f(β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ – ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f παρουσιάζει μέγιστο Μ και ελάχιστο m και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[m,\mathrm{M}]$. Για την εύρεση του μέγιστου Μ και ελάχιστου m εργαζόμαστε ως εξής :

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της *f*.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της *f* στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της *f*.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+4$, $x\in[-1,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση :

i. Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,2]$ με $f'(x) = 6x^2 - 6x$, οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$. Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα 0 και 1.

ii. Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f στο διάστημα $[-1,2]$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f και τα άκρα του διαστήματος $[-1,2]$. Δηλαδή οι αριθμοί : $-1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ και\ \ 2$.

iii. Η f είμαι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [-1,2]$, επομένως έχει σύνολο τιμών : $f(\Delta) = [m, \mathrm{M}]$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή της f, δηλαδή η μικρότερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων και Μ είναι η μέγιστη τιμή της f, δηλαδή η μεγαλύτερη τιμή της f στις θέσεις των πιθανών ακροτάτων. Έχουμε : $f(-1) = -1$, $f(0) = 4$, $f(1) = 1$ και $f(2) = 8$, επομένως $m = -1$ και $\mathrm{M} = 8$ δηλαδή $f(\Delta) = [-1,8]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $x \in [-2,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot |x-1|$, $x \in [0,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x) \cdot e^{x-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ \ln x & , x > 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2-\beta x+1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=3$ το -1.

Λύση :

Έχω : $f(x)=ax^2-\beta x+1$ με $D_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=(ax^2-\beta x+1)'=2ax-\beta$

- το $x_0=3$ είναι εσωτερικό του $D_f=\mathbb{R}$
- η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(3)=0 \Leftrightarrow 6\alpha-\beta=0$ (1)

Επίσης επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=3$ το -1, είναι $f(3)=-1 \Leftrightarrow 9\alpha-3\beta+1=-1 \Leftrightarrow 9\alpha-3\beta=-2$ (2)

Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases} 6\alpha-\beta=0 \\ 9\alpha-3\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{2}{9} \\ \beta=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^3-\beta x^2+2x$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

7) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a\ln(x-1)-\beta x^2-4x+1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$.

8) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=1$ το f(1)= -1.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Η f ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα τότε δουλεύουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο σημείο x_0 οπότε από Θ. Fermat ισχύει $f'(x_0)=0$ από όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\Re$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$, άρα από Θ. Fermat ισχύει : $f'(x_0)=0$. Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2$ (2)

Στη (2) για $x=x_0$ έχω : $3f^2(x_0)\cdot f'(x_0)+f'(x_0)=3x_0^2+2\Leftrightarrow 3x_0^2+2=0$ αδύνατη. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{e^x}$ δεν έχει ακρότατα.

11) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)=x^3-3x^2+6x-2$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2<2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ $\rightarrow$ FERMAT (ΚΡΥΦΟ FERMAT)

Όταν μας δίνεται δεδομένη μια ανισότητα της μορφής $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε :

- 1ον μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και έχουμε : $f(x)-g(x) \le 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 2ον θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x \in \Delta$, οπότε $h(x) \le 0$, $x \in \Delta$
- 3ον βρίσκουμε ένα x_0 για το οποίο ισχύει $h(x_0)=0$, οπότε έχουμε : $h(x) \le h(x_0)$, $x \in \Delta$
- 4ον άρα η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 και αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat έχουμε : $h'(x_0)=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha \ln x - x^2 \le x-2$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι α=3.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ είναι $\alpha \ln x - x^2 \le x-2 \Leftrightarrow \alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0$ (1).

Έστω $f(x)=\alpha \ln x - x^2 - x + 2$, $x>0$, με $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x}-2x-1$.

Η (1) γίνεται $\alpha \ln x - x^2 - x + 2 \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le 0$ (2) όμως παρατηρούμε ότι $f(1)=0$

Άρα για κάθε $x>0$: $(2) \Leftrightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1 \in (0,+\infty)$
- το $x_0=1$ είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(1)=0 \Leftrightarrow \alpha-2-1=0 \Leftrightarrow \alpha=3$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, όπου $\alpha>0$ και $\alpha \ne 1$. Αν $f(x) \ge 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. *(Θέμα 3ο Πανελλήνιες 2009)*

Λύση :

Είναι $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $A_f=(-1,+\infty)$ και $f'(x)=\alpha^x \cdot \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$

Για κάθε $x>-1$ είναι $f(x) \ge 1$ (1) όμως παρατηρούμε ότι $f(0)=1$

Άρα για κάθε $x>-1$: $(1) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(0)$. Επομένως :

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0 \in (-1,+\infty)$
- το $x_0=0$ είναι εσωτερικό του $(-1,+\infty)$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε :

$f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha-1=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \ln\alpha=\ln e \Leftrightarrow \alpha=e$.

15) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x^2-x+1)-f(1)\ge x-x^2$, για κάθε $x>0$, (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\zeta): y=-x$.

Λύση : Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$, για να ισχύει $(\varepsilon)//(\zeta): y=-x$, αρκεί να δείξω ότι $\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Για κάθε $x>0$, $(1)\Leftrightarrow f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2\ge 0$.

Έστω $g(x)=f(x^2-x+1)-f(1)-x+x^2$, $x>0$, άρα ισχύει $g(x)\ge 0$, για κάθε $x>0$.
Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)-f(1)-1+1=0$, δηλ. $g(x)\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$, για κάθε $x>0$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Επομένως :

- η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$
- το $x_0=1$ είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $g'(1)=0$.

Έχουμε $g'(x)=(2x-1)\cdot f'(x^2-x+1)-1+2x$, άρα
$g'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)+1=0 \Leftrightarrow f'(1)=-1$.

16) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ και την $f(x)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|\ge 0$, παρατηρώ ότι $f(0)=|1-1|=0$, άρα $f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλ.

- η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$
- το $x_0=0$ είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(0)=0$ (1).

Είναι : $$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{x}\overset{\substack{x>0\\ x=|x|}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|e^x+(\kappa-1)x-1\right|}{|x|}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x+(\kappa-1)x-1}{x}\right|==\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x-1}{x}+\kappa-1\right|\overset{*}{=}|1+\kappa-1|=|\kappa|$$

$$*\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=e^0=1.$$

Τελικά $f'(0)=0\Leftrightarrow|\kappa|=0\Leftrightarrow\kappa=0$ επομένως $f(x)=\left|e^x-x-1\right|$, $x\in\mathbb{R}$.

Όμως από βασική ανισότητα για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $e^x\ge x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\ge 0$, άρα :
$f(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17) Αν για κάθε x>0 ισχύει $\ln x+\dfrac{a}{x}\geq a$, να βρείτε το α.

18) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $\ln(x^2+1)\geq f(x)-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(0,1).

19) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $(1+e^{1-x})f(x)+\sigma\upsilon\nu\pi x\geq 3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(1,2).

20) Αν για τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-\ln x$, ισχύει $f(x)\geq f(1)$ για κάθε x>0, να βρείτε το α.

21) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
- $f(0)=1,\quad f(2)=3$
- $f^2(x)-4f(x)+3\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι : $f'(0)=f'(2)=0$.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, τέτοιο, ώστε : $f''(\xi)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

Λύση : Είναι $f(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=f(2)=0$, δηλαδή $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)\geq f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία $x_1=1,\ x_2=2$.
Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Όμως στα άκρα $x_1=1,\ x_2=2$ του διαστήματος $[1,2]$ η f έχει ελάχιστη τιμή, επομένως η μέγιστη τιμή θα είναι σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[1,2]$. Τελικά η $[1,2]$ έχει δυο θέσεις ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο (1,2).

23) Έστω $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[1,2]$ και $f(\mathrm{A})=[-2,5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1)=2,\ f(2)=4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στο $\mathrm{A}=[1,2]$, άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. έχει μέγιστο και ελάχιστο. Όμως $f(\mathrm{A})=[-2,5]\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 5$ για κάθε $x\in\mathrm{A}=[1,2]$. Όμως $f(1)=2>-2\ \textit{και}\ f(2)=4<5$, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $1,2$ του $\mathrm{A}=[1,2]$. Δηλαδή η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο σε εσωτερικά σημεία του $\mathrm{A}=[1,2]$. Έστω $x_1,x_2\in(1,2)$ με $x_1<x_2$ τα σημεία που η f παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο). Τότε :

- η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1,x_2
- τα x_1,x_2 είναι εσωτερικά του $\mathrm{A}=[1,2]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1,x_2

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Fermat οπότε : $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Επομένως για να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$, θα εφαρμόσω Θ.Rolle για την f' στο $[x_1,x_2]$.

- η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- η f' είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επομένως από Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

24) Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2\cdot\ln^2 x$, $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

25) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $\mathrm{A}=[0,1]$ και $f(\mathrm{A})=[-1,3]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=1,\ f(1)=2$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Β. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f .

ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.

iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.

iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.

v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.

vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η $f(x)$ γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα

i. Αν η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν σε μια ρίζα της $f'(x)=0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο.

ii. Αν η $f'(x)$ δεν έχει ρίζες, διαστήματα μονοτονίας είναι τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της f.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$

iii. $f(x)=xe^x$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1$, $D_f=\Re$, $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,3]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[3,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=3$, το $f(3)=3^2-6\cdot 3+1=-8$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $D_f=\Re$, $f'(x)=3x^2+6x-9$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3, ή, x=1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(-\infty,-3]$ και για κάθε $x\in[1,+\infty)$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[-3,1]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-3$, το $f(-3)=34$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$, το $f(1)=2$

iii. $f(x)=xe^x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=e^x+xe^x$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x+xe^x=0 \Leftrightarrow e^x(1+x)=0 \Leftrightarrow \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x+xe^x>0 \Leftrightarrow e^x(1+x)>0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^x+xe^x<0 \Leftrightarrow e^x(1+x)<0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x<0 \Leftrightarrow x<-1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$, το $f(-1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$.

iv. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0 \overset{\substack{x^2>0\\ \text{για}\\ \text{κάθε}\\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow x<e$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0 \overset{\substack{x^2>0\\ \text{για}\\ \text{κάθε}\\ x\in(0,+\infty)}}{\Longleftrightarrow} 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in(0,e]$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=e$, το $f(e)=\frac{1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=-x^2+6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$

iii. $f(x)=x^3-x^2$ iv. $f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ v. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$ vii. $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$

28) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

ii. $f(x)=-x^3+3x^2+1$

iii. $f(x)=2x^3-6x+5$ iv. $f(x)=x^3-x^2+x-5$ v. $f(x)=-x^3+x^2-2x+5$

29) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x-x+1$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}+x$ να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

31) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-1}$

ii. $f(x)=e^x(x^2-5x+7)$

iii. $f(x)=e^x-x$

iv. $f(x)=e^x-ex$

v. $f(x)=\ln x-x$ vi. $f(x)=\ln(8x-x^2)$ vii. $f(x)=\ln(x^2-2x)$

viii. $f(x)=\frac{x}{e^x}$ ix. $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ x. $f(x)=x\ln x$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

33) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-4x+1$ στο [1,4] ii. $f(x)=x^2-2x+2$ στο [-2,3]

iii. $f(x)=x^3-12x+7$ στο [0,3] iv. $f(x)=\ln x-x$ στο[1,e]

v. $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ vi. $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$

vii. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$

34) Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-9x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+\lambda$, $x,\lambda\in\Re$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

36) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-3x^2+6\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\Re$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=-2$ και είναι $f(-2)=98$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-6$ και $\beta=54$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (-1,2) (ΕΣΠΕΡΙΝΑ 2004)

37) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2+1-\ln x$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΚΛΑΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου :

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Βρίσκουμε την $f'(x)$ για $x < x_0$ και την $f'(x)$ για $x > x_0$ και τις μελετάμε ως προς το πρόσημο και τις ρίζες.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα γράφω τις ρίζες της $f'(x)$ και τα σημεία αλλαγής τύπου της f.
- Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0, τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, το $f(x_0)$.
- Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε για να εξετάσουμε αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0, έχουμε τις εξής περιπτώσεις :
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0)$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
  - Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \ge f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, x \le 1 \\ x^2 - 6x + 7, x > 1 \end{cases}$$

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Έχω :

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + 4x - 3) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 - 6x + 7) = 2$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

- Για $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) = (x^2 + 4x - 3)' = 2x + 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x^2 - 6x + 7)' = 2x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Άρα τελικά :

x	- ∞	-2		1		3	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[1, 3]$
Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 1]$ και $[3, +\infty)$
Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -2$ το $f(x_1) = f(-2) = -7$ και στο $x_2 = 3$ το $f(x_2) = f(3) = -2$
Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 1$ το $f(x_3) = f(1) = 2$

39) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8\,, & x\le -1 \\ x^2-2x-2\,, & -1<x<3 \\ x^2-8x+14\,, & x\ge 3 \end{cases}$:

Λύση : Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο -1 και στο 3. Έχουμε :

- $f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+6x+8)=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-2x-2)=1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο -1.
- $f(3)=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x-2)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-8x+14)=-1$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο 3.
- Για $x\in(-\infty,-1)$ είναι, $f'(x)=2x+6$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+6=0\Leftrightarrow x=-3$
- Για $x\in(-1,3)$ είναι, $f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(3,+\infty)$ είναι, $f'(x)=2x-8$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-8=0\Leftrightarrow x=4$

Άρα τελικά :

x	- ∞	-3		-1		1		3		4	+ ∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+		-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

- $f\downarrow(-\infty,-3]$,
- $f\uparrow[-3,-1]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[-3,-1]$ (f συνεχής στο $(-3,-1)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$)
- $f\downarrow(-1,1]$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο -1
- $f\uparrow[1,3)$ αφού η f δεν είναι συνεχής στο 3
- $f\downarrow[3,4]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ (f συνεχής στο $(3,4)$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=-1$)
- $f\uparrow[4,+\infty)$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -3 το $f(-3)=-1$, στο 1 το $f(1)=-3$ και στο 4 το $f(4)=-2$.
- Στα σημεία -1 και 3 η f δεν είναι συνεχής. Έχουμε :
  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=3$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1<3=f(-1)$, άρα στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1>f(3)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-1=f(3)$, άρα στο 3 δεν μπορεί η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και γενικά τοπικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

40) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-3, x\le 1 \\ x^2-6x+7, x>1 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, x\le 3 \\ x^2-8x+22, x>3 \end{cases}$

iii. $f(x)=x^3-3x|x|$ iv. $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8\,, & x\le -1 \\ x^2-2x-2\,, & -1<x<3 \\ x^2-8x+14\,, & x\ge 3 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- Η Εξίσωση : $f(x)=\kappa$

Όταν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο ίσο με κ μόνο στη θέση $x=x_0$, τότε :
$f(x)=\kappa \Leftrightarrow x=x_0$ και $f(g(x)))=\kappa \Leftrightarrow g(x)=x_0\,, g(x)\in \mathrm{A}$.

- Η Εξίσωση : $f(x)=g(x)$

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$ τότε : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=x_0$.

<u>Απόδειξη</u> :

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{A}$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x=x_0$. Επίσης επειδή η g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $\mathrm{g}(x)\le g(x_0)$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{A}$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Έτσι : $f(x)=g(x) \overset{f(x_0)=g(x_0)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(x_0)+g(x_0)-g(x)=0$

$\underbrace{\left(f(x)-f(x_0)\right)}_{\ge 0}+\underbrace{\left(g(x_0)-g(x)\right)}_{\ge 0}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow x=x_0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mathrm{g(x)-g(x_0)=0\Leftrightarrow g(x)=g(x_0)\Leftrightarrow x=x_0} \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \mathrm{x=x_0}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-2x+e$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Λύση :

i. $f(x) = x\ln x - 2x + e$ με $D_f = (0,+\infty)$, έχω

$f'(x) = (x\ln x - 2x + e)' = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,e)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(0,e]$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (e,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[e,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = e$, το $f(e) = e\ln e - 2e + e = 0$

ii. Από το i. ισχύει ότι $f(e) = 0$ άρα η $x = e$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0 = e$ το $f(e) = 0$, άρα $f(x) \geq f(\mathrm{e}) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $\mathrm{x} \in (0,+\infty)$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = e$, δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{e}$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{\mathrm{x}^2 + 1}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $f(x) = 3$ β. $f(\mathrm{x}^2 - 1) = 3$ γ. $f(3 - \mathrm{f}(\mathrm{x}-1)) = 3$.

Λύση :

i. $\mathrm{D_f} = \Re$, $f'(x) = -\dfrac{6x}{(\mathrm{x}^2+1)^2}$, $\mathrm{x} \in \Re$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Ε.	γν. φθίνουσα

Τελικά η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$ το $f(0) = 3$.

ii. Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x} = 0$ το $f(0) = 3$, άρα $f(\mathrm{x}) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 3$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$. Έτσι :

α. $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

β. $f(\mathrm{x}^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $\mathrm{x} = -1$

γ. $f(3 - \mathrm{f}(\mathrm{x}-1)) = 3 \Leftrightarrow 3 - \mathrm{f}(\mathrm{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}-1) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 1$.

43) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=2x-x^2$ και $g(x)=\ln\left((x-1)^2+1\right)+1$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα των f, g.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=2x-x^2$

Λύση :

i. $D_f=D_g=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

- $f'(x)=2-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	-∞	1	+∞
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο $x=1$ το $f(1)=1$.

- $g'(x)=\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	-∞	1	+∞
$g'(x)$	-	0	+
g	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$.

ii. Η εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=2x-x^2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (1) ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=1$ το $f(1)=1$, άρα $f(x)\le 1 \Leftrightarrow 1-f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.

Η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$, άρα $g(x)\ge 1 \Leftrightarrow g(x)-1\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.

Έτσι

$$(1) \Leftrightarrow f(x)-1=g(x)-1 \Leftrightarrow \left(g(x)-1\right)+\left(1-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 1-f(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iii. Αν ισχύει $f(\alpha+\beta)=-f(3\alpha+4\beta)$, να βρείτε τα α,β.

46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f

- Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο $\mu>0$, τότε ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$.
- Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο $M<0$, τότε ισχύει ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in A$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2e^{x+1}-x^2-3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση :

i. Έχω : $f(x)=2e^{x+1}-2x-3$ με $D_f=\mathbb{R}$, έχω $f'(x)=(2e^{x+1}-2x-3)'=2e^{x+1}-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2=0\Leftrightarrow e^{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα	Ο.Ε.	γν. αύξουσα

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2>0\Leftrightarrow e^{x+1}>1\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2<0\Leftrightarrow e^{x+1}<1\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f συνεχής, άρα η f γν. αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$, το $f(-1)=2e^0+2-3=1$

Άρα ισχύει $f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$, οπότε και $f(x)>0$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$.

ii. Έχω : $g(x)=2e^{x+1}-x^2-3x$ με $D_g=\mathbb{R}$, επίσης έχω : $g'(x)=(2e^{x+1}-x^2-3x)'=2e^{x+1}-2x-3=f(x)>0$ άρα g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in D_g=\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

48) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x)=2e^{x-1}-x^2$ ως προς τη μονοτονία.

49) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x-1$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της.

50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-2x+1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2x\ln x-x^2-x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

51)

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\phi(x)=2e^x+x^2-2x$ και να βρείτε το πρόσημο της.

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^x-1$ και $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Α : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ (ΖΗΤΟΥΜΕΝΗ ΑΝΙΣΟΙΣΟΤΗΤΑ→ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟ)

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

- Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. Αντίστοιχα μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 όταν $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

Αν θέλω να αποδείξω ότι ισχύει μια ανισότητα της μορφής $f(x)\ge g(x)$:
1ον Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
2ον Θεωρούμε το πρώτο μέλος συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$
3ον Βρίσκω τη μονοτονία της $h(x)$ και την εφαρμόζω στο αντίστοιχο διάστημα ώστε να αποδεδειχθεί η ανίσωση **ή**
3ον Βρίσκουμε το ολικό μέγιστο ή ελάχιστο της $h(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x-x^2+2013$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $x^2-2\ln x\ge 1$ για κάθε $x>0$.

Λύση :

i. $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{2}{x}-2x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2}{x}-2x=0\Leftrightarrow 2-2x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=1, ή, x=-1$ απορρίπτεται.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-2x>0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x}>0 \Leftrightarrow x(2-2x^2)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-2x^2>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ * Επειδή όμως πρέπει $x>0$, άρα $x\in(0,1)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-2x<0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{x}<0 \Leftrightarrow x(2-2x^2)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-2x^2<0 \Leftrightarrow 1-x^2<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ * Επειδή όμως πρέπει $x>0$, άρα $x\in(1,+\infty)$

*Για την ανίσωση $1-x^2>0$, έχω $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm1$

x	- ∞	-1		1	+ ∞
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=2012$

ii. Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=2012$, τότε ισχύει : $f(x)\le f(1) \Leftrightarrow 2\ln x-x^2+2013\le 2012 \Leftrightarrow 2\ln x-x^2\le -1 \Leftrightarrow x^2-2\ln x\ge 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

53) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x\ge x+1$ για $x\in\Re$

ii. $e^x-1\le xe^x$ για $x\in\Re$

iii. $e^{x-1}\ge 1+\ln x$ για $x>0$

iv. $2\ln x\le x^2-1$ για χ>0

v. $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$ για $x>0$

vi. $2e^x\ge 2+2x+x^2$ για $x\ge 0$ *(υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f', βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)*

54) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x-xe^x\le 1$ για $x\in\Re$

ii. $e^x\ge x+1$ για x<1

iii. $2\ln x\le x^2-1$ για x>0

iv. $\ln x\le x-1$ για x>0

v. $x^x\ge e^{x-1}$ για x>0 *(υπόδειξη : πρώτα λογαριθμίζω και τα 2 μέλη)*

55) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^x-2e^x$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $1+xe^{x-1}\ge 2e^{x-1}$, για κάθε $x\in\Re$.

56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$, $x>0$

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $e^x\cdot \nu^\nu\ge x^\nu\cdot e^\nu$, $\nu\in N^*$, $x>0$

57) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να αποδείξετε ότι : $x^e\le e^x$, για κάθε $x>0$.

58) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

i. τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$.

ii. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1)=1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)=x-\ln x$, $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

59) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Β : ΠΡΟΣΗΜΟ ΟΛΙΚΟΥ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f

- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, τότε ισχύει ότι : $\left(f(x)\geq 0,\ \text{για κάθε x}\in\mathrm{A}\right)\Leftrightarrow \min f\geq 0$
- Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε ισχύει ότι : $\left(f(x)\leq 0,\ \text{για κάθε x}\in\mathrm{A}\right)\Leftrightarrow \max f\leq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

60) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3x^4-4x^3+\alpha\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

61) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=x\ln x-\lambda x+1$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $\mathrm{M}(x,f(x))$ όπου x η θέση ελαχίστου της f.

iii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $x\ln x\geq\lambda x-1$ για κάθε $x>0$.

iv. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=x\ln x$.

62) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda>0$

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

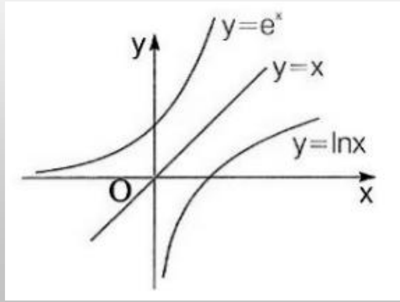
ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει : $e^x\geq\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10Γ : ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $\ln x \le x-1$

- Η ανισότητα $\boxed{\ln x \le x-1}$ ισχύει για κάθε $x>0$ και μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε (χωρίς απόδειξη) για να βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης. Στην παραπάνω ανισότητα το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=1$.

- Όπως μπορούμε να δούμε στην παρακάτω γραφική παράσταση, ισχύει ακόμα η παρακάτω ανίσωση (χρειάζεται απόδειξη) : $\boxed{\ln x < x < e^x}$ για κάθε $x>0$.



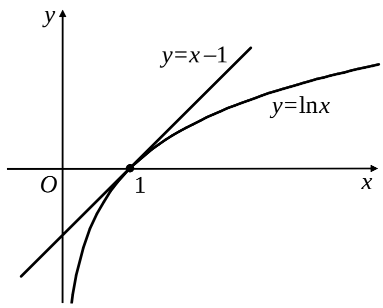
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63) Να δείξετε ότι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$.

Λύση :

Αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x \le x-1 \Leftrightarrow x-1-\ln x \ge 0$ για κάθε $x>0$. Έστω $f(x)=x-1-\ln x$, $x>0$

Έχουμε $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x=1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$		↘	0 min	↗	

επειδή η f για $x=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει :

$f(x)\ge f(1) \Leftrightarrow x-1-\ln x \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \le x-1$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

64) Να δείξετε ότι :

i. $\ln x < x$ για κάθε $x>0$ ii. $e^x > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ iii. $e^x \ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv. $e^x > \eta\mu x$ για κάθε $x>0$

Λύση :

i. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Επίσης $x-1<x$ για κάθε $x>0$, τελικά : $\ln x < x$ για κάθε $x>0$

ii. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x \le e^x-1 \Leftrightarrow x \le e^x-1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.
Άρα $e^x > x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

iii. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε : $\ln e^x \le e^x-1 \Leftrightarrow x\le e^x-1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

iv. Είναι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$. Άρα $\ln x < x \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^x \Leftrightarrow x < e^x$, $x>0$
Επίσης γνωρίζουμε ότι : $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=0$.
Άρα για $x>0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x \Rightarrow \eta\mu x<x$
Τελικά για κάθε $x>0$ είναι : $\left.\begin{matrix} x<e^x \\ \eta\mu x < x\end{matrix}\right\} \Rightarrow e^x > \eta\mu x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

65) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

66) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\ln(x-\ln x)$.

67) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{e^x-x}$.

68) Να αποδείξετε ότι :

i. $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$, $x>0$

ii. $e^{x-1}\ge x$, $x\in\mathbb{R}$

iii. $xe^{\frac{1}{x}} > x+1$, $x>0$

69) Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει

- $f(0)=1$
- $f^2(x)=e^x-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f .

70) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\ln(x+3)=x+2$

ii. $e^x-1=\ln(e^x-x)+x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 11 : ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για να βρούμε το πλήθος ριζών της $f(x)=0$

1ον Βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)$, $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_\kappa$ και μετά τα αντίστοιχα σύνολα τιμών : $f(\mathrm{A}_1), f(\mathrm{A}_2),..., f(\mathrm{A}_\kappa)$

2ον Αν $0\in f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

3ον Αν $0\notin f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

Ομοίως αν έχω την εξίσωση f(x)=κ

1ον Αν $\kappa\in f(\mathrm{A}_\iota)$, τότε στο A_ι η εξίσωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

2ον Αν $\kappa\notin f(\mathrm{A}_\iota)$, η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

71) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2002)*

Λύση :

i. Έστω $x_1,x_2\in D_g=\Re$ με

$$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)\Rightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\overset{f\circ g\ '1-1'}{\Rightarrow} x_1=x_2 .$$

Άρα η g είναι 1-1.

ii. $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)\overset{g:'1-1'}{\Leftrightarrow} f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1\Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Έστω $h(x)=x^3-3x+1$, θα δείξω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. $h(x)=x^3-3x+1$, με $D_h=\Re$, $h'(x)=(x^3-3x+1)'=3x^2-3$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

x	- ∞	-1		1	+ ∞
$h'(x)$	+	0	-	0	+
h	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$h'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ και στο $\mathrm{A}_3=[1,+\infty)$

$h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η h είναι συνεχής, άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}_2=[-1,1]$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ άρα $h(\mathrm{A}_1)=(\lim_{x\to-\infty}h(x),h(-1)]$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$, $h(-1)=3$

  Άρα $h(\mathrm{A}_1)=(-\infty,3]$. Το $0\in h(\mathrm{A}_1)$ άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathrm{A}_1=(-\infty,-1]$ που είναι αρνητική.

- Η h γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = (-1,1)$ άρα $h(A_2) = \left(h(1), h(-1)\right) = (-1,3)$, Το $0 \in h(A_2)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2 = (-1,1)$ (σε αυτή τη ρίζα δεν γνωρίζω το πρόσημο, μπορεί να είναι αρνητική αν ανήκει στο $(-1,0)$ ή θετική αν ανήκει στο $(0,1)$

- Η h γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_3 = [1,+\infty)$ άρα $h(A_3) = [h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x))$,
  $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$, $h(1) = -1$
  Άρα $h(A_3) = [-1,+\infty)$. Το $0 \in h(A_3)$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_3 = [1,+\infty)$ που είναι θετική.

Το μόνο που απομένει είναι να δείξω ότι ρίζα του $A_2 = [-1,1]$ είναι θετική, δηλαδή πρέπει να δείξω ότι ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $[0,1]$. Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, $h(0) = 1$, $h(1) = -1$ άρα $h(0)h(1) < 0$ από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Δηλαδή η ρίζα του $A_2 = [-1,1]$ είναι θετική και τελικά η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο θετικές και μια αρνητική ρίζα.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

i. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής στο 0, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. *(3ο Θέμα Πανελλήνιες 2008)*

Λύση :

i. Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$
-

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν.φθινουσα	ο.ε.	γν. αύξουσα

Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ και f συνεχής στο 0, άρα $f \downarrow \left[0, \frac{1}{e}\right]$

$f'(x) > 0$ για $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ δηλ. $f \uparrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

f γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_1 = \left[0, \frac{1}{e}\right]$, άρα $f(A_1) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$

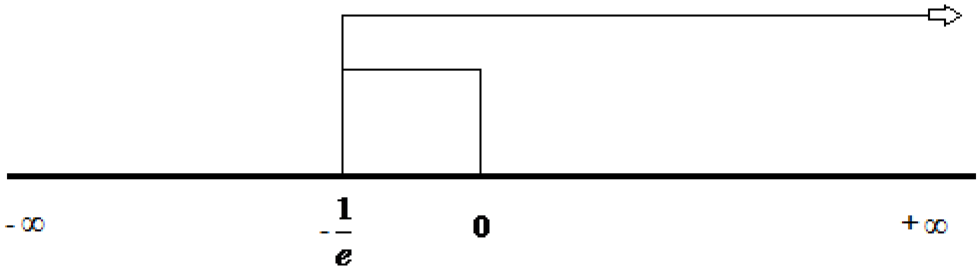
f γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_2=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, άρα

$f(A_2)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$.

Τελικά το σύνολο τιμών είναι : $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

ii. Για κάθε $x>0$ είναι : $x=e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}}\Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}\Leftrightarrow x\ln x=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Άρα έχουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωση $f(x)=\alpha$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.
Το σύνολο τιμών είναι :



- αν $\alpha\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ δεν έχει καμία ρίζα.
- αν $\alpha\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δυο ρίζες.
- αν $\alpha\in(0,+\infty)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μια ρίζα.
- αν $\alpha=-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{e}$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=\frac{1}{e}$, καθώς στο $x_0=\frac{1}{e}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$
- αν $\alpha=0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 & \alpha\pi o\rho.\\ \acute{\eta} & \\ \ln x=0\Leftrightarrow x=1 & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\end{cases}$

  έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

73) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x+2$. Να βρείτε :
  i. Τη μονοτονία της f
  ii. Το σύνολο τιμών της f
  iii. Το πλήθος ριζών της f(x)=0

74) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :
  ii. $2x^3-6x+1=0$
  iii. $x^3-3x-1=0$

75) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\Re$, ώστε η εξίσωση $x^3-3x^2+\alpha=0$ να έχει μια ακριβώς ρίζα στο (0,2).

76) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $x^3-3x^2-\alpha=0$.

77) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $3x^4-4x^3-12x^2+3=\alpha$.

78) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x-2}-\ln(x-1)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

79) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\eta\mu x+3x^2-4x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2010$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

80) Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)}=\dfrac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}-\ln x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

(4^{o} Θέμα Πανελλήνιες 2006)

81) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda>0$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f
ii. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$, για την οποία ισχύει $e^x\ge\lambda x$, για κάθε $x\in\Re$.
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$.

82) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x$, $\lambda>0$.

i. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f
ii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda>0$, για την οποία ισχύει $\ln x\le\lambda x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
iii. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα ii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x)=\ln x$.

83) Δίνεται η συνάρτηση(x)=x^3–3x–2ημ^{2}θ όπου θ ε IR μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, κ ε Z

i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο
ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

(3^{o} Θέμα Πανελλήνιες 2007)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 12 : ΥΠΑΡΞΗ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ

- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας.
- Για να δείξω ότι η f έχει ακριβώς δυο ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες και ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

84) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$. Να δείξετε ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος τους.

Λύση :

Αρχικά πρέπει $e^x-x\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$. Αυτό αποδεικνύεται από τη βασική ανισότητα : $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$. Αν θέσουμε όπου x το $e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$, έχουμε : $\ln e^x\leq e^x-1\Leftrightarrow x\leq e^x-1\Leftrightarrow e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\Re$, και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Άρα $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\Re$. (καθώς $x+1>x$ για κάθε $x\in\Re$)

Τελικά $A_f=\Re$ και $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$. Για να δείξω ότι η f έχει δυο, ακριβώς, τοπικά ακρότατα, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες όπου και αλλάζει το πρόσημο της f'.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0$. Έστω $g(x)=2e^x-xe^x-1$, $x\in\Re$.

Επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in\Re$, αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες. (εύρεση πλήθους ριζών για τη $g(x)=0$)

$g'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	γν. αύξουσα	ο.μ.	γν.φθίνουσα

Άρα $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο 1, άρα $g\uparrow(-\infty,1]$

$g'(x)<0$ για $x\in(1,+\infty)$ δηλ. $g\downarrow[1,+\infty)$

Για το σύνολο τιμών έχουμε :

- g γν. αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(-\infty.1]$, άρα $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$

καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{e^x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-x}}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-e^{-x}}\right)=0$.

Άρα : $g(A_1)=(-1,e-1]$, το $0\in g(A_1)=(-1,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in A_1=(-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

- g γν. φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[1,+\infty)$, άρα $g(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x)-1\right)=+\infty\cdot(-\infty)-1=-\infty$

Άρα : $g(A_2)=(-\infty,e-1]$, το $0\in g(A_2)=(-\infty,e-1]$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_2=[1,+\infty)$.

Δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in A_2=[1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_2)=0$.

Τελικά έχουμε :

- Αν $x<1$, Τότε για κάθε :

$x<x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_1) \Leftrightarrow g(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$

$x>x_1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_1) \Leftrightarrow g(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

- Αν $x>1$, Τότε για κάθε :

$x<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(x_2) \Leftrightarrow g(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

$x>x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_2) \Leftrightarrow g(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$

x	$-\infty$	x_1		1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
f	γν. φθίνουσα	Τ.Ε.	γν. αύξουσα	γν. αύξουσα	Τ.Μ.	γν. φθίνουσα

Τελικά όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ακριβώς δυο τοπικά ακρότατα, στο x_1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και στο x_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

85) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1+\dfrac{1}{x}$ με $x>0$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

86) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-2x+3$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο.

87) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $-\alpha$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 13 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να υπολογίσουμε το μέγιστο ή το ελάχιστο ενός μεγέθους που περιγράφεται μέσα από πρόβλημα, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αν το πρόβλημα έχει γεωμετρική φύση, κατασκευάζουμε το σχήμα.
ii. βρίσκουμε τη συνάρτηση του μεγέθους που αναφέρεται το ακρότατο. Αν η συνάρτηση περιέχει δυο μεταβλητές, βρίσκουμε μια σχέση που τις συνδέει (από την εκφώνηση του προβλήματος ή από το σχήμα) και αντικαθιστούμε τη μια συνάρτηση της άλλης.
iii. Από την εκφώνηση του προβλήματος βρίσκουμε τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η μεταβλητή, οι οποίοι καθορίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
iv. Τέλος κάνουμε μελέτη μονοτονίας και ακρότατων της συνάρτησης, απ' όπου προκύπτει και το αποτέλεσμα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

88) Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού $384cm^2$ έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι $3cm$ πάνω και κάτω και $2cm$ δεξιά και αριστερά. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει κάθε σελίδα, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο δυνατό χώρο της σελίδας.

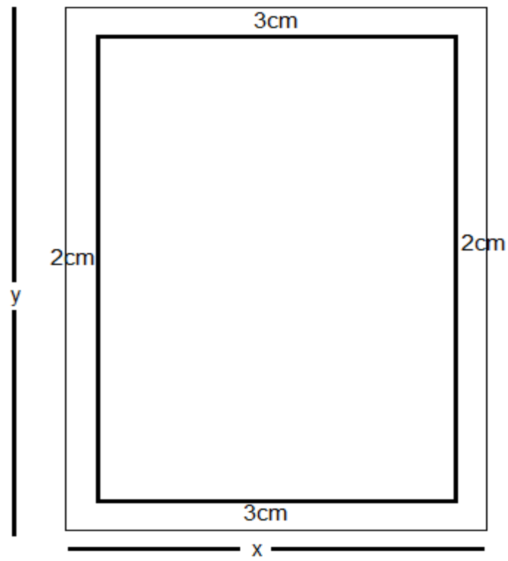
Λύση :

Έστω ότι οι διαστάσεις της σελίδας είναι x,y. Τότε θα είναι $E_{σελίδας} = 384 \Leftrightarrow xy = 384 \Leftrightarrow y = \dfrac{384}{x}$ (1)

Οι διαστάσεις του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι $μήκος = x-2-2 = x-4$ και $ύψος = y-3-3 = y-6$. Άρα το εμβαδόν του χώρου που καταλαμβάνει το κείμενο είναι :

$E_{κειμένου} = (x-4)(y-6)$. Ψάχνουμε τις τιμές των x,y ώστε το $E_{κειμένου}$ να γίνεται μέγιστο.

$$E(x)_{κειμένου} \overset{(1)}{=} (x-4)\left(\frac{384}{x}-6\right) = 384-6x-\frac{1536}{x}+24 = 408-6x-\frac{1536}{x}.$$



Το πεδίο ορισμού προκύπτει ως εξής : το μικρότερο μήκος x είναι $x_{\min} = 2+2 = 4$. Για να βρω τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος x θα πρέπει να λάβω υπόψη ότι $xy = 384 \Leftrightarrow y = \frac{384}{x}$. Άρα όσο μεγαλώνει το x τόσο μικραίνει το y. Άρα το μέγιστο x το βρίσκω θέτοντας το μικρότερο y που είναι $y_{\min} = 3+3 = 6$. Άρα $6 = \frac{384}{x_{\max}} \Leftrightarrow x_{\max} = 64$.

Άρα $D_{\text{Ε}_{κειμένου}} = (4,64)$

Θέλω να βρω τις τιμές του x για τις οποίες το $\text{Ε}(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου} = \left(408 - 6x - \frac{1536}{x}\right)' = -6 + \frac{1536}{x^2}$, $\text{Ε}'(x)_{κειμένου} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1536}{x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16, ή, x = -16$ απορ.

x	4	16	64
$\text{Ε}'(x)_{κειμένου}$	+	0	-
$\text{Ε}(x)_{κειμένου}$	γν. αύξουσα	Ο.Μ.	γν. φθίνουσα

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου} > 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) > 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 256 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-16,16)$ * , όμως $D_{\text{Ε}_{κειμένου}} = (4,64)$ άρα $x \in (4,16)$

$\text{Ε}'(x)_{κειμένου} < 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{1536}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1536 - 6x^2}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2(1536 - 6x^2) < 0 \Leftrightarrow 1536 - 6x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 256 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-16) \cup (16,+\infty)$ *, όμως $D_{\text{Ε}_{κειμένου}} = (4,64)$ άρα $x \in (16,64)$.

*Για την ανίσωση $256 - x^2 > 0$, έχω $256 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 16$

x	- ∞	-16		16	+ ∞
$256 - x^2$	-	0	+	0	-

Από το πινακάκι βλέπουμε ότι το $\text{Ε}(x)_{κειμένου}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $x = 16$ την $\text{Ε}(16)_{κειμένου} = 408 - 6 \cdot 16 - \frac{1536}{6} = 216cm^2$. Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι $x = 16cm$ και $y = \frac{384}{16} = 24cm$.

89) Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\boldsymbol{\Pi(x)}$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\boldsymbol{\Pi(x) = 40000 - 6x}$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Λύση :

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x$.

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι $K(x) = 4000x$.

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι : $K_{ολ}(x) = 4000x + 1200x = 5200x$.

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

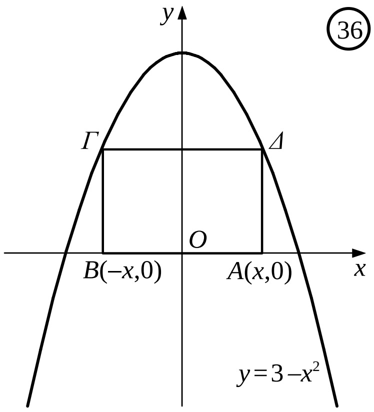
$$P(x)=E(x)-K_{ολ}(x)\ =-6x^2+40000x-5200x\ =-6x^2+34800x\ .$$

Έχουμε $P'(x)=-12x+34800$, οπότε η $P'(x)=0$ έχει ρίζα την $x=2900$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *P* στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

90) Να βρεθεί το $\boldsymbol{x\in[0,\sqrt{3}]}$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.



36

Λύση :
Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι
$E(x)=(AB)(A\Delta)=2x(3-x^2)=-2x^3+6x$.
Έχουμε $E'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$.
Οι ρίζες της $E'(x)=0$ είναι οι $x=-1$, $x=1$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της *E* φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		+	0	–	
$E(x)$	0 min	↗	4 max	↘	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91)Να βρείτε το σημείο της ευθείας y = 3χ-2 που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

92) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

93) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x\ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

94) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ η εφαπτομένη έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

95) Να βρείτε δυο αριθμούς x,y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

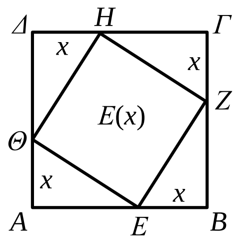
96) Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 400τ.μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

97) Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14μ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

98) Ένα σύρμα μήκους 1m κόβεται σε δυο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Να βρείτε τη πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

99) Με συρματόπλεγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

100) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ,



i. να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.
ii. να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνει ελάχιστο.

101) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y=\sqrt{x^2+1}$ που έχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Α (3,0).

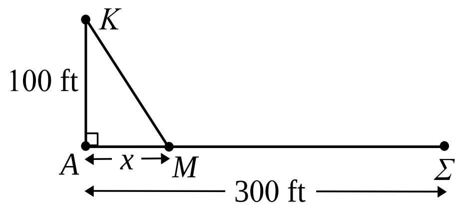
102) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης της $f(x)=\sqrt{3x^2+4}+3$ που η απόσταση του από το σημείου(0,3) να είναι ελάχιστη.

103) Ένας ιχθυοκαλλιεργητικής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μια θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ.
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα περιφραχτεί δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-2x^2+600x$ (υποθέσουμε $0<x<300$)
ii. Να υπολογίσετε την τιμή x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής να γίνεται μέγιστο
iii. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού. (2000)

104) Η τιμή P (σε χιλιάδες €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{P}(t)=4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}$
i. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του.
ii. Να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η τιμή του συνεχώς αυξάνεται
iii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μεγίστη.
iv. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται χωρίς όμως να γίνει μικρότερη από την τιμή του τη στιγμή της εισαγωγής του. (2000)

105) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2},0\right)$.
i. Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.
ii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

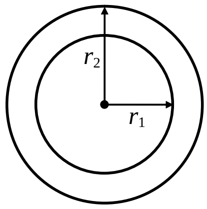
106) Ένας κολυμβητής K βρίσκεται στη θάλασσα 100ft[1] μακριά από το πλησιέστερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται 300ft μακρυά από το σημείο A. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5ft/s.



i. Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή $K M \Sigma$ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο $\mathrm{T}(x)=\dfrac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}+\dfrac{300-x}{5}$.

ii. Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του

107) Έστω E το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $r_1=3$cm και $r_2=5$cm και ότι για $t>0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i. πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii. πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

108) Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\dfrac{x^3}{4}$, $0<x<3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

109) Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t\geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μεγίστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ιση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β

ii. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ιση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. (2000)

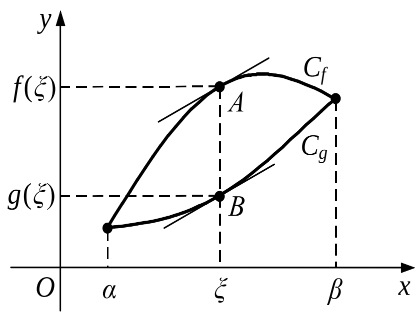
110) Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=\dfrac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ χιλιάδες δραχμές, $0\leq x\leq 105$. Η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x)=420x-2x^2$ χιλιάδες δραχμές. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

[1] 1ft = 30,48 cm

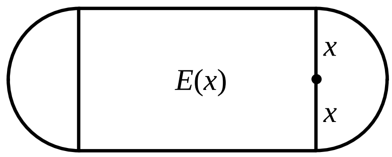
111) Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο : $C(x)=x^3-9\nu x^2+5\nu^3$ σε δεκάδες ευρώ, x>0. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι 10-ν δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

112) Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 100 χιλιάδες δραχμές το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 500 δρχ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα.

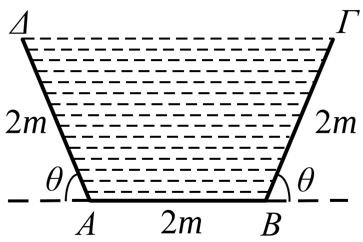
113) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Το σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi,f(\xi))$ και $\mathrm{B}(\xi,g(\xi))$ είναι παράλληλες.



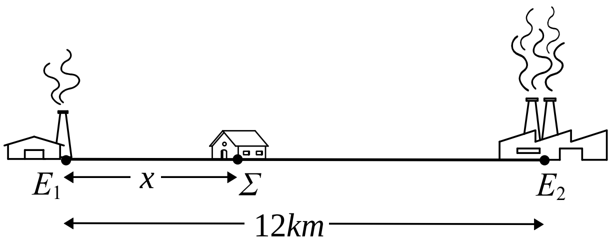
114) Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



115) Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
  i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής ΑΒΓΔ είναι ίσο με $\mathrm{E}=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\,\theta)$
  ii. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;



116) Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12km και εκπέμπουν καπνό με παροχές *P* και $8P$ αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση *d* από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης *d*, να βρείτε σε ποια απόσταση *x* από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).



ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.7

ΘΕΜΑ 2 #33633

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2 #27082

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)^3-3x,\quad x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #25124

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-x^3,\ x\in(-\infty,0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2 #23937

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1,f(1))$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 #29211

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $x<0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #34025

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f'(x)<0$ με $x\in(1,+\infty)$. (Μονάδες 4)

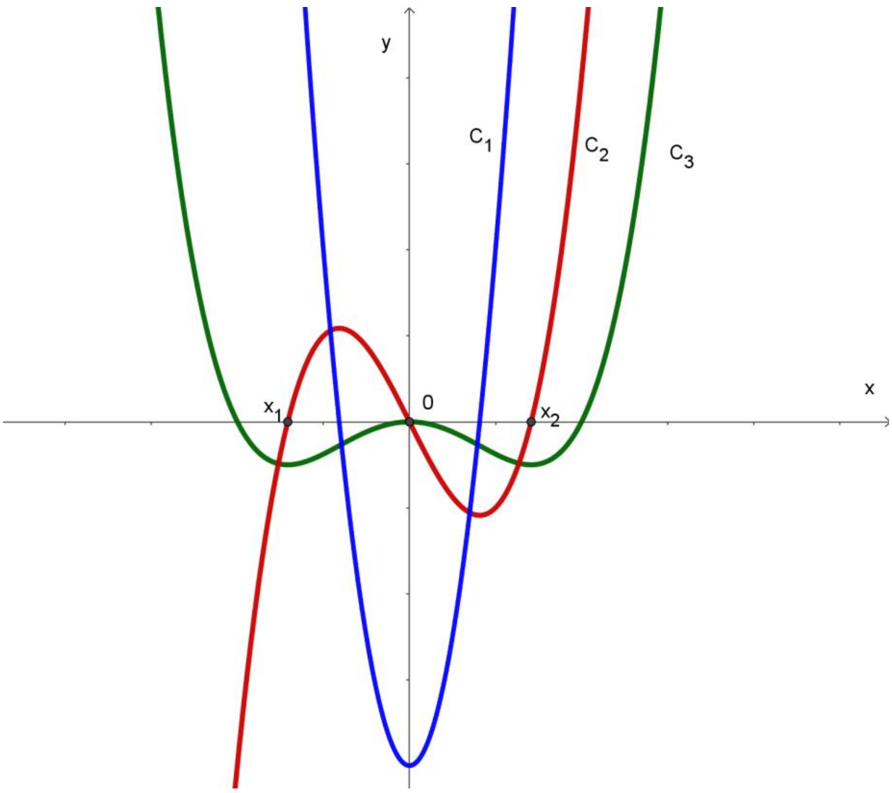
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6) β)

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #32694

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , $f\,'$ και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,



α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F\,'=f$		0	0	0	
F					

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F.
(Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $f\,'$ και F. (Μονάδες 07)

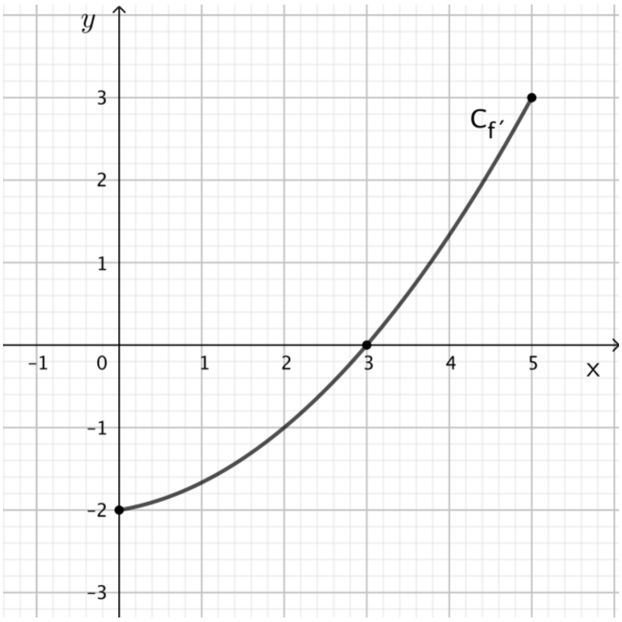
ΘΕΜΑ 2 #26707

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2 #32390

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #25764

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 #25761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1,\ x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2 #23197

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #29927

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → ℝ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #27455

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} -1, & x<2 \\ e^{x-2}-2, & x\geq 2 \end{cases}$ και

$g:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x\neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x)>g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #27319

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$, x∈(0, +∝)

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4 #23375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4 #23215

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$. (Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

ii.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 #36814

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\, m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x)=8x+\frac{3200}{x}, x>0$$

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #33596

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_0^2+\ln x_0-2=0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο Μ

i. είναι κάθετη στην ΑΜ. (Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_0^3-x_0,0)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #27092

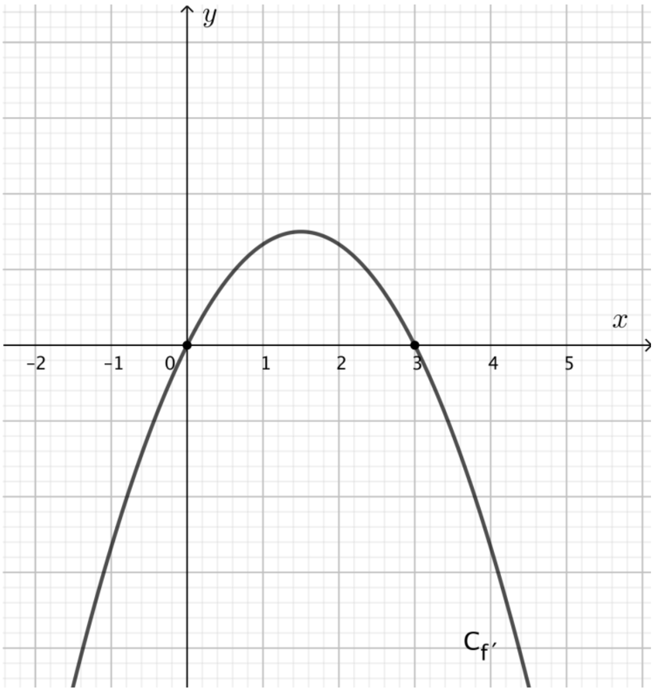
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f. (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f. (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$. (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4 #33642

Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. $f(x)=e^x+x^2, x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o)), x_o\in(-1,0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. (Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1}<m<2$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #29149

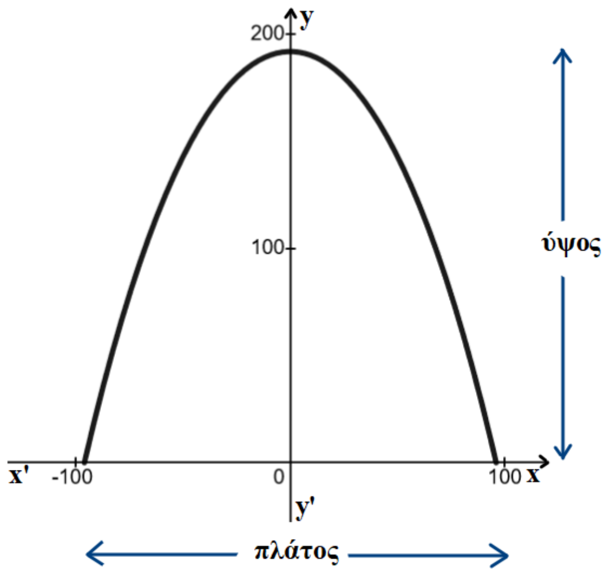
Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$. (Μονάδες 06)

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4 #34441

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι: $\mathrm{K}(x)=20x+\dfrac{2000}{x}+1220$ ευρώ με $x>0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #26633

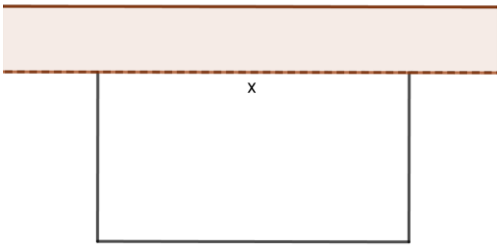
Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο: $E(x)=200x-\frac{1}{2}x^2$ με $0<x<400$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής. (Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4 #34440

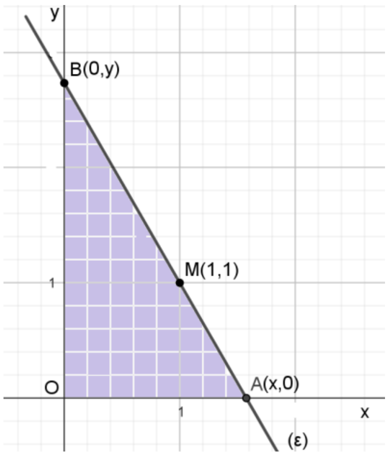
Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0),\ x>0$ και $B(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x\in(1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,E(3))$ και τα σημεία $\Gamma,\ \Delta$ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4 #29644

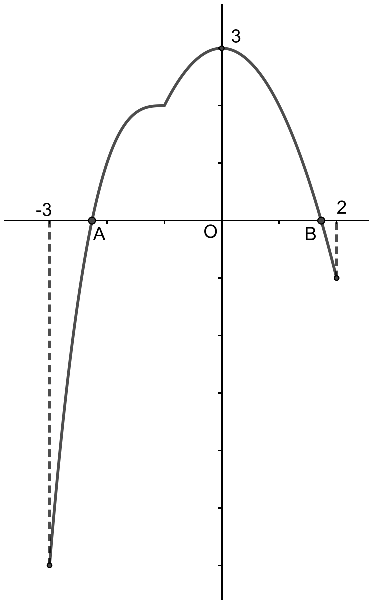
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A και B. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4 #28337

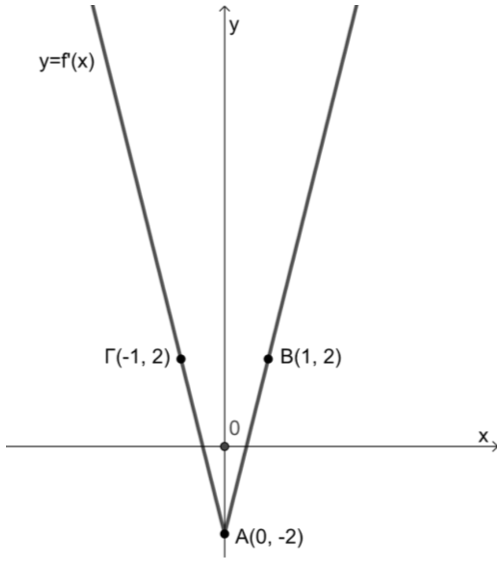
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο A$(0,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο B$(1,2)$ και η άλλη από το Γ$(-1,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

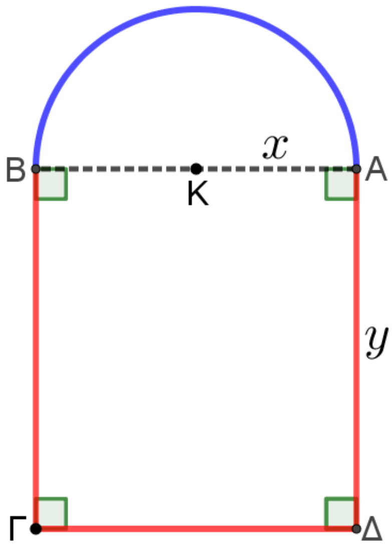
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Δ$(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4 #28534

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\,m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\,m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(AΔ) = y\,m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \to x_0} \frac{ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 #27650

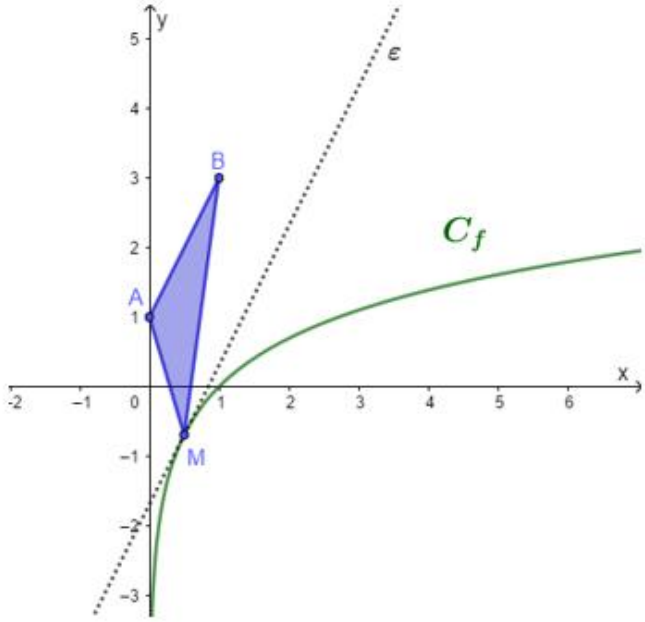
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.



(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #24587

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - lnx_0)$. (Μονάδες 05)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #23311

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

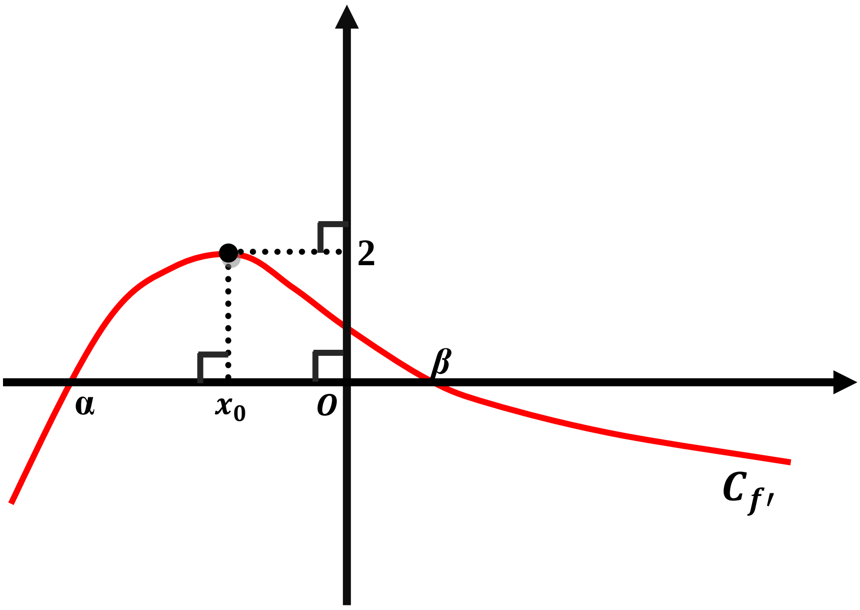
β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4 #23210

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0,\ f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)