2.6Α ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α΄ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ. – ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

41. ΘΕΩΡΗΜΑ (2004 Β΄, 2009, 2014)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

42. ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

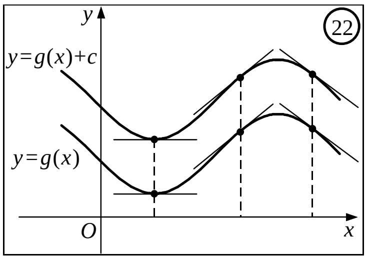
- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη :

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



Σχόλιο :

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμα του **ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.** **(2019)**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1\,, & x<0\\ 1\,, & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

43. ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΣΕΛ. 252)
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$,τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in R$. Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο Δ και ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Όταν μια συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει ότι $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν μπορούμε να βρούμε μια τιμή $f(x_0)$ σε κάποιο $x_0 \in \Delta$, τότε είναι $c = f(x_0)$ οπότε θα ισχύει : $f(x) = f(x_0)$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και : $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

i. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνέχων. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Έχω : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2$ (1). Επίσης από εκφώνηση : $xf'(x) = 3x - 2f(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{3x - 2f(x)}{x}$. Άρα η σχέση (1) γίνεται : $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + x^2 \frac{3x - 2f(x)}{x} - 3x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g'(x) = 2xf(x) + 3x^2 - 2xf(x) - 3x^2 \Leftrightarrow g'(x) = 0$. Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Η $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ άρα ισχύει : $g(x) = c$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Άρα και $g(4) = c \Leftrightarrow 4^2 f(4) - 4^3 = c \Leftrightarrow 16 \cdot 3 - 64 = c \Leftrightarrow c = -16$. Άρα $g(x) = -16 \Leftrightarrow x^2 f(x) - x^3 = -16 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 16}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $\frac{f'(x)}{2} = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, x>0 , είναι σταθερή.

ii. Αν $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f.

3) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 4e^{-2}$ και : $2\sqrt{x} \cdot f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ για κάθε $x \geq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot f(x)-\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0,+\infty)$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

4) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\Re$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

5) Δίνεται συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\left|e^{f(x)}-e^{f(y)}-\ln x+\ln y\right|\le(x-y)^{2016}$ για κάθε $x,y\in(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(e)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

- $0=(c)'$
- $c=(cx)'$
- $x^{\alpha}=\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$, $\alpha\neq-1$
- $\dfrac{1}{x}=(\ln|x|)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{x^2}=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$, $x\neq0$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=(\sqrt{x})'$
- $\eta\mu x=(-\sigma\upsilon\nu x)'$
- $\sigma\upsilon\nu x=(\eta\mu x)'$
- $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=(\varepsilon\varphi x)'$
- $-\dfrac{1}{\eta\mu^2x}=(\sigma\varphi x)'$
- $e^x=(e^x)'$
- $\alpha^x=\left(\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right)'$
- $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$
- $\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

ΤΥΠΟΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln|f(x)|\right)'$
- $e^{f(x)} \cdot f'(x) = \left(e^{f(x)}\right)'$
- $f^{\nu}(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right)'$ π.χ. $f(x) \cdot f'(x) = \left(\dfrac{f^2(x)}{2}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'$
- $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \left(\sqrt{f(x)}\right)'$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \mathbb{R}$ αν ισχύει : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 3$.

Λύση : Έχω : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + c$

Για $x = 1$ έχουμε : $f(1) = \sqrt{1} + \ln 1 + \dfrac{1}{1} + c \Leftrightarrow 3 = 1 + 1 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + \dfrac{1}{x} + 1,\ D_f = (0,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 2x + 3$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$
ii. $f'(x) = 3x^2 + x + 1$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
iii. $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in \Delta = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2$
iv. $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$
v. $f'(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0,+\infty)$ και $f(1) = 2e$
vi. $f''(x) = 12x - 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(1) = 7$ και $f(1) = 3$
vii. $f''(x) = 6x + 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ και $f(1) = -3$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ – ΠΗΛΙΚΟΥ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ αν ισχύει : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2$ $x\in\Delta=(1,+\infty)$ και $f(e)=e^2$

Λύση :

Έχω : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}=2x \Leftrightarrow \left(f(x)\ln x\right)'=(x^2)' \Leftrightarrow$

$f(x)\ln x=x^2+c$. Για $x=e$ έχω : $f(e)\ln e=e^2+c \Leftrightarrow e^2=e^2+c \Leftrightarrow c=0$ άρα

$f(x)\ln x=x^2 \overset{\substack{\ln x\neq 0\Leftrightarrow\\ \ln x\neq\ln 1\Leftrightarrow\\ x\neq 1}}{<====>} f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ με $x\in(1,+\infty)$ και $x\neq 1$ άρα $D_f=(1,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $(1+x^2)\cdot f'(x)=2x\cdot f(x)$, $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

ii. $x\cdot f'(x)-f(x)=2x^3$, $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

iii. $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=0$

iv. $f'(x)=2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=1$

v. $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=3$

10) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-1$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x<1$
- $(x-1)f'(x)+|f(x)|=0$ για κάθε $x<1$.

Να δείξετε ότι $f(x)=x-1$, $x\leq 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι : $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

(3ο Πανελλήνιες 2005)

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω :

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow \left(2e^{f(x)}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$2e^{f(x)} = e^x + c$. Για $x = 0$ έχω : $2e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow 2e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα

$$2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right),\ D_f = \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

12)Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = -\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

13)Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση : $f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = \ln 3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \to \Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$.

ii. $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$.

iii. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

iv. $f'(x) - e^x\sqrt{f(x) - 1} = 0$, $f(x) > 1$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

v. $f'(x) = f^2(x)\sigma\upsilon\nu x$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = \frac{1}{2}$.

15)Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(3x-1) = 2x + 1$. Αν f(2)=5 , να βρείτε τον τύπο της f .

16)Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την όποια ισχύει : $f'(x^2) = 3x - 1$ για κάθε x>0. Αν f(1)=1 , να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{g(x)}$

- Αν έχουμε ισότητα της μορφής : $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$ (1)

  πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1) με $e^{G(x)}$ και ισοδύναμα έχουμε :

  $$(1) \Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + g(x) \cdot e^{G(x)} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + G'(x) \cdot e^{G(x)} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow e^{G(x)} \cdot f'(x) + \left(e^{G(x)}\right)' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{G(x)} \cdot f(x)\right)' = 0.$$

- Ειδικότερα ισχύει η ισοδυναμία : $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, με $f(0)=1$. Αν ισχύει : $f'(x)=2xf(x)$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$ έχω :

$$f'(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=0 \overset{\substack{g(x)=-2x \\ \acute{\alpha}\rho\alpha \\ G(x)=-x^2}}{\underset{\cdot e^{-x^2}}{<====>}} e^{-x^2}\cdot f'(x)-2xe^{-x^2}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f'(x)+\left(e^{-x^2}\right)'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-x^2}\cdot f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-x^2}\cdot f(x)=c$, για $x=0$ έχω : $e^0\cdot f(0)=c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $e^{-x^2}\cdot f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$, $D_f=\mathbb{R}$.

18)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$ και : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε : $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2\Leftrightarrow f'(x)+3x^2=f(x)+x^3\Leftrightarrow$

$\left(f(x)+x^3\right)'=f(x)+x^3$, άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)+x^3=c\cdot e^x$ (1) $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)+0^3=c\cdot e^0\Leftrightarrow c=3$, άρα η (1) γίνεται : $f(x)+x^3=3e^x\Leftrightarrow f(x)=3e^x-x^3$, $x\in\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f'(x)-f(x)=e^x$ όταν $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=2$
ii. $f'(x)\cdot e^x=2x-x^2$, όταν $x\in\Delta=\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

20)Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(x)+f(x)=x^2+2x$ $x\in\mathbb{R}$
ii. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=e$ και $f'(x)-2xf(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$
iii. $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\dfrac{1-e}{e}$ και $x^2f'(x)-f(x)=1$ $x>0$
iv. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(x)=3x^2f(x)$, $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

21)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x)>0$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=f(x)\cdot\ln f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

22)Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x)=\dfrac{x+1}{x}f(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f.

23)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$, και $xf'(x)=(x-1)f(x)$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

24)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$, και $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

25)Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

ii. $\left(f(x)e^x\right)'=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

iii. ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. (Πανελλήνιες 2001)

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5</u> : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν στην ίδια ισότητα περιέχονται οι συναρτήσεις : $f(x)+g(x)$ και $f'(x)+g'(x)$ ή $f(x)+g(x)$ και $f''(x)+g''(x)$, (όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση) και ζητείται να βρούμε τον τύπο της $f(x)$, τότε θέτω $h(x)=f(x)+g(x)$ και με αντιπαραγώγιση βρίσκω την $h(x)$ και στη συνέχεια την $f(x)$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

26)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, $f(x)\neq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

<u>Λύση :</u>

[στη σχέση που δίνεται εμφανίζεται : $f(x)-x^2$ και $f'(x)-2x$]

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω : $f'(x)-2x+2x\left(f(x)-x^2\right)=0$, έστω $g(x)=f(x)-x^2$

<u>1ος Τρόπος</u>

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0$

(Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.)

Έχουμε : $g'(x)+2xg(x)=0\overset{\cdot e^{x^2}}{\Leftrightarrow} e^{x^2}\cdot g'(x)+2xe^{x^2}\cdot g(x)=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(g(x)\cdot e^{x^2}\right)'=0$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x)\cdot e^{x^2}=c$

Για $x=0$ είναι : $g(0)\cdot e^0=c\Leftrightarrow f(0)-0=c\Leftrightarrow c=1$, άρα :

$g(x)\cdot e^{x^2}=1\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{e^{x^2}}\Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>2ος Τρόπος</u>

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $g'(x)+2xg(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=-2xg(x)$

Η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και $g(x)\neq 0$ (καθώς $f(x)\neq x^2$) άρα η g διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τελικά : $g'(x)=-2xg(x)\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{g'(x)}{g(x)}=-2x\Leftrightarrow\left(\ln g(x)\right)'=(-x^2)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $\ln g(x)=-x^2+c$ (1), και για $x=0$, $\ln g(0)=c\Leftrightarrow \ln 1=c\Leftrightarrow c=0$

Άρα : $\ln g(x)=-x^2\Leftrightarrow g(x)=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)-x^2=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $\left(xf'(x)-1\right)\cdot\left(f(x)-\ln x\right)=x^2$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=1$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 6 : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f''(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

28)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=2f'(0)=1$ και : $f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε :

$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow f''(x)f(x)+f'(x)f'(x)=f(x)f'(x)\Leftrightarrow$
$\left(f'(x)f(x)\right)'=f(x)f'(x)$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f(x)f'(x)=c\cdot e^x$ (1) $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ η (1) γίνεται : $f(0)f'(0)=c\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$ άρα η (1) γίνεται : $f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(e^x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει : $f^2(x)=e^x+c_2$, $x\in\mathbb{R}$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $f^2(0)=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα η (2) γίνεται τελικά : $f^2(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=0$ αδύνατο)

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι : $f^2(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\sqrt{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

29)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(2)=e$, $f'(0)=0$
- $f(x)>0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

30)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=\frac{e}{2}$, $f'(1)=\frac{3e}{2}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x-\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

31)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=-f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\ln 2$, $f'(0)=\frac{1}{2}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

32)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φόρες παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $f(x)f''(x)-f(x)f'(x)=\left(f'(x)\right)^2$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=e$, $f'(0)=e$
- $f(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

33)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. (Θέμα Γ΄ 2011)

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 7</u> : ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f(x)$ ΚΑΙ $g(x)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

34)Έστω $f,g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x)=e^{-g(x)}$, $g'(x)=e^{-f(x)}$, για κάθε $x>-1$
- $f(0)=g(0)=0$

Να δείξετε ότι $f=g$ και στη συνέχεια να βρείτε τις συναρτήσεις : f,g.

<u>Λύση :</u> Για κάθε $x>-1$,

είναι : $f'(x)=e^{-g(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{g(x)}}\Leftrightarrow f'(x)e^{g(x)}=1$ (1), ομοίως : $g'(x)e^{f(x)}=1$ (2)

Άρα από (1) και (2) είναι : $f'(x)e^{g(x)}=g'(x)e^{f(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{g'(x)}{e^{g(x)}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=g'(x)e^{-g(x)}\Leftrightarrow\left(-e^{-f(x)}\right)'=\left(-e^{-g(x)}\right)'$ (1), άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. η (1) γίνεται : (1) : $-e^{-f(x)}=-e^{-g(x)}+c$ (2). Για $x=0$ η (2) γίνεται : $-e^{-f(0)}=-e^{-g(0)}+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα : $-e^{-f(x)}=-e^{-g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x>-1$.

Άρα η δοσμένη σχέση γίνεται : $f'(x)=e^{-g(x)} \Leftrightarrow f'(x)=e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=(x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $e^{f(x)}=x+c_2$ (3)

Για $x=0$ η (3) γίνεται : $e^{f(0)}=0+c_2 \Leftrightarrow c_2=1$, άρα $e^{f(x)}=x+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln(x+1)$ με $x>-1$. Αρα τελικά : $f(x)=g(x)=\ln(x+1)$, $x>-1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35)Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=g(0)=1$,
- $f(x)\cdot g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις : f,g.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 8 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x)=\alpha g(x)$

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x)=ag(x)$, $x\in\Delta$, τότε θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-ag(x)$, $x\in\Delta$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή, δηλ. $h(x)=c$ και στη συνέχεια δείχνω ότι $c=0$.

(σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να συμφέρει περισσότερο να θέσω $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$, $x\in\Delta$ *και να δείξω ότι ότι είναι σταθερή, δηλ.* $h(x)=\alpha$*)*

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

36)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x)\cdot f'(-x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση :

Έστω : $g(x)=f(x)\cdot f(-x)-1$, θα δείξω ότι $g(x)$ σταθερή, άρα $g(x)=c$ και μετά $c=0$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και επιπλέον $g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-f(x)\cdot f'(-x) \Leftrightarrow g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-1$

Στη σχέση : $f(x)\cdot f'(-x)=1$ αν θέσω όπου x το –x έχω : $f(-x)\cdot f'(x)=1$

Άρα : $g'(x)=f'(x)\cdot f(-x)-1 \Leftrightarrow g'(x)=1-1=0$, άρα $g(x)$ είναι σταθερή για κάθε $x\in\Re$, δηλ. $g(x)=c$, $x\in\Re$. Όμως $g(0)=f(0)\cdot f(0)-1=0$, άρα $g(0)=c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα : $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

37)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $x^2 f'(x)=(x-\ln x)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$. Να δείξετε ότι : $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$, $x>0$.

38)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $xf'(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι : $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

39)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x)\cdot f'(-x)=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$.
ii. Να δείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.
iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 9 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Αν Δ_1,Δ_2 διαστήματα με $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ και έχουμε : $f'(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in\Delta_1,\Delta_2$, τότε

- Αν $x\in\Delta_1$, τότε $f(x)=g(x)+c_1$
- Αν $x\in\Delta_2$, τότε $f(x)=g(x)+c_2$

Δηλαδή : $f(x)=\begin{cases} g(x)+c_1, & x\in\Delta_1 \\ g(x)+c_2, & x\in\Delta_2 \end{cases}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Έστω $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1$, για κάθε $x\neq 0$ και $f(1)=5$, $f(-1)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\neq 0$, $x^3 f'(x)+x^2 f(x)=2x^3+1 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=2x+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (xf(x))'=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$ με $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άρα : $xf(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{x}+c_1, & x<0 \\ x^2-\frac{1}{x}+c_2, & x>0 \end{cases}$ δηλαδή : $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_1}{x}, & x<0 \\ x-\frac{1}{x^2}+\frac{c_2}{x}, & x>0 \end{cases}$

Όμως $f(-1)=2 \Leftrightarrow -1-1-c_1=2 \Leftrightarrow c_1=-4$ και $f(1)=5 \Leftrightarrow 1-1+c_2=5 \Leftrightarrow c_2=5$.

Τελικά : $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x}, & x<0 \\ x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}, & x>0 \end{cases}$

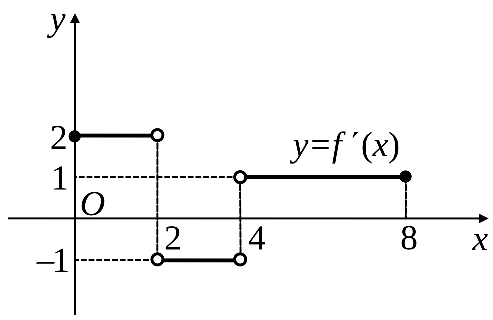
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

41)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-2f(x)=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=4$, $f(-1)=-2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

42)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $xf'(x)-f'(x)=2x^2-x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

43)Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $(x-1)f'(x)=2x^2+x-3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)=3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.



2.6Β ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Β΄ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

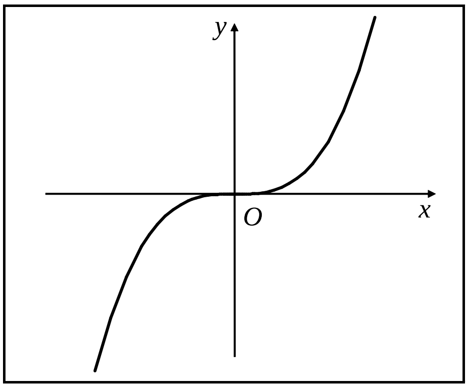
44. ΘΕΩΡΗΜΑ (2000, 2006, 2012, 2017, 2019, 2021)
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.
- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη :
- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$. Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.
- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Για παράδειγμα : $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Σχόλιο :
Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ. ***(2020 Ν.Σ.)***

Για παράδειγμα : η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για να εξετάσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

i. Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της D_f και εξετάζουμε αν είναι συνεχής.
ii. Βρίσκουμε την $f'(x)$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης.
iii. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.
iv. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίο πρέπει να περιέχονται το Π.Ο. της f καθώς και οι ρίζες της $f'(x)=0$.
v. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο μιας τιμής της $f'(x)$ σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της.
vi. Συμπληρώνουμε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$ ανάλογα με το πρόσημο της $f'(x)$. Ισχύει :
   - Αν $f'(x)>0$ τότε η f γνησίως αύξουσα
   - Αν $f'(x)<0$ τότε η f γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$
ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$
iii. $f(x)=xe^x$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+1$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,3)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,3]$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+6x-9$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3, ή, x=1$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ. όταν Δ>0 και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ. του συντελεστή του x^2)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-3]$ και στο $[1,+\infty)$
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-3,1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[-3,1]$.

iii. $f(x)=xe^x$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x+xe^x$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x+xe^x=0\Leftrightarrow e^x(1+x)=0\Leftrightarrow \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x=0\Leftrightarrow x=-1$

x	-∞	-1	+∞
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x+xe^x>0\Leftrightarrow e^x(1+x)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x>0\Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow e^x+xe^x<0\Leftrightarrow e^x(1+x)<0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}1+x<0\Leftrightarrow x<-1$ (Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)
Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

iv. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

x	0	e	+∞
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσω θα λύσω τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)>0 \overset{x^2>0 \text{ για κάθε } x\in(0.+\infty)}{<=====>} 1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln e\Leftrightarrow x<e$

$f'(x)<0\Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow x^2(1-\ln x)<0 \overset{x^2>0 \text{ για κάθε } x\in(0.+\infty)}{<=====>} 1-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln e\Leftrightarrow x>e$

(Με τη βοήθεια αυτών των ανισώσεων συμπληρώνουμε το παραπάνω πινακάκι)

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$
$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και η f είναι συνεχής, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

46) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$
ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$
iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$

Λύση :

i. $f(x)=x^5+e^{2x+1}+x-2014$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=5x^4+2e^{2x+1}+1>0$ για κάθε $x\in D_f=\Re$ και η f είναι συνεχής, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\Re$.

ii. $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}$, $D_f=[0,3]$, $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$ για κάθε $x\in(0,3)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=[0,3]$.

iii. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$, $D_f=\Re$, $f'(x)=x^2-2x+1$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\overset{\Delta=0}{\Leftrightarrow}x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και η f είναι συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$.

47) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Λύση :

i. $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x+1>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1=0$, παρατηρώ ότι η $x=0$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η $f\uparrow\mathbb{R}$ είναι και μοναδική.

Για το πρόσημο της f έχουμε :

- για $x<0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$
- για $x>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 SOS : Αν δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$, τότε βρίσκω την $f''(x)$, στη συνέχεια βρίσκω το πρόσημο της $f''(x)$, άρα και τη μονοτονία της $f'(x)$ και από τη μονοτονία της $f'(x)$ προσδιορίζω το πρόσημο της $f'(x)$ και άρα τη μονοτονία της $f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

48) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2$

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$

Λύση :

i. $f(x)=3e^x+x^2-3x+15$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=3e^x+2x-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=3e^x+2>0$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Για την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3e^x+2x-3=0$ έχω για $x=0$, $3e^0-3=0$, άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f'(x)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Τα πρόσημα για την $f'(x)$ προκύπτουν ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

ii. $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2=2ex\ln x-2ex-x^2$, $D_f=(0,+\infty)$,

$f'(x)=2e\ln x+2e-2e-2x=2e\ln x-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e\ln x-2x=0$. Η τελευταία εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους, για αυτό θα βρω την $f''(x)=\frac{2e}{x}-2$,

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}=2 \Leftrightarrow 2x=2e \Leftrightarrow x=e$

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	γν. αύξουσα -		γν. φθίνουσα -
f	γν. φθίνουσα		γν. φθίνουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Ψάχνω πρώτα το πρόσημο της $f''(x)$, αφού μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, θα μπορώ να λύσω και τις ανισώσεις : $f''(x)>0$, $f''(x)<0$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2>0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x>0 \Leftrightarrow x<e$, άρα $f'\uparrow$ στο $(0,e]$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2e}{x}-2<0 \Leftrightarrow \frac{2e-2x}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2e-2x<0 \Leftrightarrow x>e$, άρα $f'\downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<e \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $(0,e]$
- $x>e \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(e) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα $f\downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Τελικά η $f\downarrow$ στο $D_f=(0,+\infty)$.

iii. $f(x)=6e^x+x^3-3x^2-6x$, $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=6e^x+3x^2-6x-6$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+3x^2-6x-6=0$. Αυτή η εξίσωση δεν λύνεται με αλγεβρικούς τρόπους άρα θα βρω την $f''(x)=6e^x+6x-6$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ αλλά και αυτή η εξίσωση δεν λύνεται άρα θα βρω την $f'''(x)=6e^x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f''\uparrow\mathbb{R}$.

Για την εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6e^x+6x-6=0$ έχω για $x=0$, $6e^0-6=0$ άρα η $x=0$ προφανής ρίζα της $f''(x)=0$ και επειδή η $f''\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, θα είναι και μοναδική.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	+	0	+
$f''(x)$	γν. αύξουσα -	0	γν. αύξουσα +
$f'(x)$	γν. φθίνουσα +	0	γν. αύξουσα +
f	γν. αύξουσα		γν. αύξουσα

Το παραπάνω πινακάκι συμπληρώνεται ως εξής :

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f''(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(0) \Leftrightarrow f''(x)<0$ άρα $f'\downarrow$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f'':\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$ άρα $f'\uparrow$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Επειδή δεν μπορώ να λύσω την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικούς τρόπους, δε θα μπορώ να λύσω και την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$, οπότε ξεκινώ ανάποδα :

- $x<0 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f\uparrow$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- $x>0 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και η f συνεχής, άρα $f\uparrow$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Τελικά η $f\uparrow$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$

ΥΠΟΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 SOS : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν θέλουμε να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f και έχουμε :

$f'(x)=g(x)\cdot h(x)$ ή $f'(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ και η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε βρίσκουμε το πρόσημο της $h(x)$, άρα και της $f'(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

49) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0,\pi)$.

Λύση :

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Επειδή $\eta\mu^2 x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ με ενδιαφέρει αποκλειστικά το πρόσημο το αριθμητή της $f'(x)$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi)$ τότε $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$ και επειδή $g(x)$ είναι συνεχής στο 0 έχουμε $g(x)\uparrow[0,\pi)$.

Άρα για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχω : $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ άρα και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και άρα τελικά $f(x)\uparrow(0,\pi)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

50)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=-2x+3$
ii. $f(x)=-x^2+3x-1$
iii. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$
iv. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$
v. $f(x)=-x^3+x^2-x-1$

51)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
ii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$
iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ *(Ομογενείς 2014)*
v. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$
vi. $f(x)=x\ln x$
vii. $f(x)=x\cdot e^x$
viii. $f(x)=2e^x-x+1$
ix. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

x. $f(x)=x(3-2\ln x)$

xi. $f(x)=x-\ln x-\dfrac{x^2}{2}$

xii. $f(x)=\ln(x-2)-x+\dfrac{x^2}{2}$

xiii. $f(x)=\ln(x^2+1)-x$

xiv. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ *(Ομογενείς 2011)*

xv. $f(x)=e^{x^3+x}+x^3-6x^2+12x$

52)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

53)Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x-x\text{συν}x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii. $\text{ημ}x-x\text{συν}x>0$, για κάθε $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\text{ημ}x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

54)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=x^2(2\ln x-5)-4x(\ln x-3)$.

55)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=3e^x+x^2-3x+7$.

56)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=e^x+x\ln x-(e+1)x$.

57)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=2e^{x-1}-x^2+3$.

58)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-\dfrac{2+x^2e^x+2xe^x}{2e^x}$.

59)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-2x^2+4x-(x-1)\ln x$.

60)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=2e^x-x^2-2x$.

61)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$.

62)Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=6x^2\ln x-2x^3-3x^2+6x$.

63)Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\ln x+x^2-\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1]$.

ii. $f(x)=\ln x-\ln(1-x)\ ,\ x\in(0,1)$.

iii. $f(x)=\ln(1+x^2)$

64)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και μετά να βρείτε την αντίστροφη της.

ΠΟΛΥ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΤΗΣ f ΜΕ Θ.Μ.Τ.
Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, τότε μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, με $x_0\in(\alpha,\beta)$, στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$ με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65)Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$. Για να δείξω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, αρκεί να δείξω ότι $g'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Θα εφαρμόσω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f\ \text{συνεχής στο}\ [0,x]\\ \bullet\ f\ \text{παρ/μη στο}\ (0,x)\end{array}\right\}$$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$

Όμως $\xi\in(0,x)\Leftrightarrow\xi<x\overset{f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)<f'(x)\cdot x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\cdot x-f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Άρα $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

66)Δίνεται μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο σημείο που αλλάζει τύπο, αλλά δεν χρειάζεται να εξετάσω αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, καθώς δεν επηρεάζει τη μονοτονία της f.
- Βρίσκουμε την f΄(x) για $x < x_0$ και την f΄(x) για $x > x_0$.
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f΄(x) για $x < x_0$ και της f΄(x) για $x > x_0$.
- Σχηματίζω πίνακα με το πρόσημο της f΄ και την μονοτονία της f. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα γραφώ τις ρίζες της f΄(x)=0 και τα σημεία αλλαγής τύπου της f

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

67)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & , x\le 1\\ x+2 & , x>1\end{cases}$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Θα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. Έχω :

$f(1)=3$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(4-x^2)=3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

- Για $x\in(-\infty,1)$ είναι $f'(x)=(4-x^2)'=-2x$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$
- Για $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x+2)'=1$

x	-∞	0		1	+∞
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

68)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1, x\le 2\\ x^2-6x+1, x>2\end{cases}$.

Λύση : Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Θα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=2$. Έχω :

$f(2)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x-1)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-6x+1)=-7$.

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=2$

- Για $x\in(-\infty,2)$ είναι $f'(x)=(x^2-2x-1)'=2x-2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$
- Για $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

x	-∞	1		2		3	+∞
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(2,3]$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

69)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, x\le 3 \\ 2x-3, x>3 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, x\le 2 \\ x-3, x>2 \end{cases}$ iii. $f(x)=|x^2-1|$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μας ζητούν να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα τότε θέτουμε :

- $f'(x)\ge 0$ αν f είναι γνησίως αύξουσα
- $f'(x)\le 0$ αν f είναι γνησίως φθίνουσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70)Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x^2+\alpha^2)+2\alpha x+3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Λύση :

Είναι $f(x)=2\ln(x^2+\alpha^2)+2\alpha x+3$ και $A_f=\Re$ με :

$$f'(x)=2\frac{2x}{x^2+\alpha^2}+2\alpha=\frac{2\alpha x^2+4x+2\alpha^3}{x^2+\alpha^2}=\frac{2\left(\alpha x^2+2x+\alpha^3\right)}{x^2+\alpha^2}$$

Για να είναι f γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ θα πρέπει για κάθε $x\in\Re$ να ισχύει

$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\left(\alpha x^2+2x+\alpha^3\right)}{x^2+\alpha^2}\le 0 \Leftrightarrow \alpha x^2+2x+\alpha^3\le 0$ για κάθε $x\in\Re$.

Για να ισχύει αυτό πρέπει : $\alpha<0$ και $\Delta\le 0$

$\Delta\le 0\Leftrightarrow 4-4\alpha^4\le 0\Leftrightarrow 1-\alpha^4\le 0\Leftrightarrow (1-\alpha^2)(1+\alpha^2)\le 0\Leftrightarrow 1-\alpha^2\le 0\Leftrightarrow \alpha\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Επιπλέον $\alpha<0$ άρα τελικά $\alpha\in(-\infty,-1]$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ μόνο όταν $\alpha\in(-\infty,-1]\Leftrightarrow \alpha\le -1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71)Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+a^2}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

72)Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x)=3x^3-\alpha x^2+9x-1$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

73)Ομοίως για τη συνάρτηση : $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+(a-1)x^2-4x+1$ ώστε να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ισχύει ότι : Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα.
Για να επιλύσουμε μια <u>εξίσωση</u> η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (<u>προφανής</u>) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

(Υπόδειξη : αν δεν είναι εύκολο να βρω το πρόσημο της f' , βρίσκω την f'' μετά το πρόσημο της f'' δηλ. τη μονοτονία της f' από εκεί το πρόσημο της f' άρα τη μονοτονία της f)

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, της οποίας έχουμε βρει μια προφανή ρίζα ρ. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική, χωρίς η f να είναι γνησίως μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού της. Αρκεί η f να αλλάζει μονοτονία στο ρ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+\ln x-1-e$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x+\ln x=1+e$.

<u>Λύση :</u>

i. $D_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=e^x+1+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$.

ii. $e^x+x+\ln x=1+e \Leftrightarrow e^x+x+\ln x-1-e=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
Παρατηρώ ότι $f(1)=e+1+0-1-e \Leftrightarrow f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδική.

75)Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x = x-1$.

<u>Λύση :</u>

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x=x-1 \Leftrightarrow \ln x-x+1=0$. Έστω $f(x)=\ln x-x+1$, $D_f=(0,+\infty)$

Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-x+1=0$, παρατηρώ ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι (προφανής) ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για κάθε $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα

- Αν $x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$
- Αν $x>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$

  Οπότε είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, δηλ. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$. *(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2010)*

Λύση :

i. $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $A_f=\Re$ και $f'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, αφού ισχύει $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι έχω :

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln(x^4+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln(x^4+1)=2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2)\overset{f\uparrow\Rightarrow f\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

77) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^2+6\ln x=4x-3$

ii. $x^2+4x+5=5e^x$

iii. $x\ln x=2x-e$.

78) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-2x$

ii. $3x^2+2x=5-\ln x$

iii. $e^{x-1}+x^3=3-x$

79) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}=x^2-4$.

80) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3\ln x+3$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{3(\ln x+1)}{x}=4-x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

81) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x+3x^5-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^x+3x^5<2$
iii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5$

Λύση :

i. $D_f=\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^x+15x^4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=\mathbb{R}$.

ii. $2e^x+3x^5<2 \Leftrightarrow 2e^x+3x^5-2<0 \Leftrightarrow f(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $f(0)=2e^0+0-2 \Leftrightarrow f(0)=0$, άρα από (1) έχω : $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$

iii. $2e^{x^2-2x}-2e^{3x-6}>3(3x-6)^5-3(x^2-2x)^5 \Leftrightarrow$

$2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{x^2-2x}+3(x^2-2x)^5-2>2e^{3x-6}+3(3x-6)^5-2 \Leftrightarrow f(x^2-2x)>f(3x-6) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2-2x>3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0$, έχω $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, ή, x=3$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Επειδή θέλω $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

82) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^7-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^x>-x^7+1$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x^2-3}-e^{x^2+2x}<(x^2+2x)^7-(2x^2-3)^7$.

83) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1}\le 1-\ln x$ ii. $e^x+2x<e^{-x}-x^3$ iii. $x^2+4x>\ln\dfrac{1}{x+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής : $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) > g(x)$, με $x \in \Delta$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
3) μελετάμε την h ως προς τη μονοτονία
4) οι παρακάτω ιδιότητες για την κατάλληλη τιμή του α μας οδηγούν στη ζητούμενη ανισότητα :
   - $x > a \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(a)$ ή
   - $x > a \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(a)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

84)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{e^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Λύση :

i. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 4x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1, ή, x = 5$

x	-∞	-1		5	+∞
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα		γν. αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι :
$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (5,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[5,+\infty)$
$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,5]$.

ii. Πρέπει να αποδείξω ότι ισχύει η σχέση : $\dfrac{e^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi \Leftrightarrow$
$\dfrac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e > \dfrac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{3} - 2e^2 - 5e + 1 > \dfrac{\pi^3}{3} - 2\pi^2 - 5\pi + 1 \Leftrightarrow f(e) > f(\pi)$
Τα $e, \pi \in (-1,5)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα θα ισχύει : $e < \pi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi)$

85) Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 1 \geq 2\ln x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Λύση :

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε $x^2 - 1 \geq 2\ln x \Leftrightarrow 2\ln x - x^2 + 1 \leq 0$.

Έστω $f(x) = 2\ln x - x^2 + 1$ με $x \in (0,+\infty)$. Θα δείξουμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2-2x^2}{x} = \frac{2(1-x^2)}{x}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{ll} x = 1 & \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ x = -1 & \alpha\pi o\rho. \end{array} \right.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	γν. αύξουσα		γν.φθινουσα

- Για $x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$
- Για $x \ge 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

Συνεπώς για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \le 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

86)Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1} > 1+\ln x$, για κάθε x>1,

ii. $\ln(x+1) < e^x - 1$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$

87) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \ge 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

88)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

89)Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \Re$ με $f(1)=0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x>1$.

Λύση :

Για κάθε $x>0$ έχουμε : $xf'(x) - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > \frac{2\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) > 2\ln x \cdot (\ln x)' \Leftrightarrow f'(x) > (\ln^2 x)' \Leftrightarrow \left(f(x) - \ln^2 x\right)' > 0$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \ln^2 x$, $x>0$. Τότε ισχύει : $g'(x) > 0$ για κάθε $x>0$ άρα $g \uparrow (0,+\infty)$.

Οπότε για $x > 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - \ln^2 x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \ln^2 x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

90) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και $xf'(x)>2x^2+1$ για κάθε $x>0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>x^2+\ln x$ για κάθε $x>1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-x^2=\ln x$.

91)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=0$. Να δείξετε ότι $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

(Θέμα 4ο 2005 Επαναληπτικές)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=f(x+c)-f(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

92)Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2017)=f(1)$ και $f'\uparrow\mathbb{R}$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+2016)-f(x)=0$

ii. την ανίσωση : $f(2x+2016)>f(2x)$

Λύση :

i. Έστω $F(x)=f(x+2016)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Έχω να λύσω την εξίσωση $f(x+2016)-f(x)=0\Leftrightarrow F(x)=0$ παρατηρώ ότι $F(1)=f(1+2016)-f(1)=0$, δηλ. έχω να λύσω την εξίσωση $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)$. *(αρκεί ν.δ.ο. $F\uparrow\Re\Rightarrow F:"1-1"$)*

Είναι : $F'(x)=f'(x+2016)-f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα : για $x<x+2016\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x+2016)\Leftrightarrow f'(x+2016)-f'(x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F'(x)>0$ και F συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών, άρα $F\uparrow\mathbb{R}\Rightarrow F:"1-1"$.

Τελικά $F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)\overset{F"1-1"}{\Leftrightarrow} x=1$.

ii. $f(2x+2016)>f(2x)\Leftrightarrow f(2x+2016)-f(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>0\Leftrightarrow F(2x)>F(1)\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2x>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

93)Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, όταν $x\in[0,+\infty)$.

(Θέμα Γ Πανελλήνιες 2016)

Λύση :

i. $A_f = \Re$, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \acute{\eta} \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το $2x$ καθώς $e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$. Άρα :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

Άρα $\boxed{f \downarrow (-\infty, 0]}$ και $\boxed{f \uparrow [0, +\infty)}$.

Ακόμα : η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2 e^{x^2} \geq 0$ (*) για κάθε $x \in \Re$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x = 0$, όπου f' είναι συνεχής, άρα η $\boxed{f' \uparrow \Re}$.

(*) για κάθε $x \in \Re$ είναι $2(e^{x^2} - 1) \geq 0$ (από πριν) και $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

ii. Έστω $h(x) = f(x+3) - f(x)$, $x \in [0, +\infty)$,
h παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με : $h'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ έχουμε $x < x + 3 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και h συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα «1-1» στο $[0, +\infty)$. Έτσι :

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow h(|\eta\mu x|) = h(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$$

Καθώς : $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = 0$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u> :

94)Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(3) = f(2)$ και $f' \uparrow \mathbb{R}$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+1) - f(x) = 0$
ii. την ανίσωση : $f(5x+1) > f(5x)$
iii. την εξίσωση : $f(x^2 + 2) - f(x^2 + 1) = 0$

95)Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(2x^4 + 2) - f(2x^2 + 2) = f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1)$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^4 + 2) + f(x^2 + 3) > f(x^4 + 1) + f(x^2 + 4)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Η ΕΞΙΣΩΣΗ $f(x)=0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ Η΄ ΜΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ ΡΙΖΑ

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει :

- Το πολύ μια ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- Το πολύ δυο ρίζες, αρκεί να δείξουμε ότι η f΄ είναι γνησίως μονότονη.
- Για να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα δείχνω πρώτα ότι έχει τουλάχιστον 1 ρίζα (με προφανή ή με Bolzano ή με σύνολο τιμών κτλ) και μετά ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

96) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2+2\ln x=2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Λύση : $x^2+2\ln x=2x \Leftrightarrow x^2+2\ln x-2x=0$, έστω $f(x)=x^2+2\ln x-2x$ με $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Βήμα 1 : (Τουλάχιστον 1)

Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο $[1,2]$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνέχων
- $f(1)=-1<0$, $f(2)=4+2\ln 2-4=2\ln 2>0$, άρα $f(1)\cdot f(2)<0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[1,2]$

Βήμα 2 : (Το πολύ 1)

$f'(x)=(x^2+2\ln x-2x)'=2x+\frac{2}{x}-2=\frac{2x^2+2-2x}{x}=\frac{2(x^2-x+1)}{x}>0$ γιατί το τριώνυμο x^2-x+1 έχει $\Delta=-3<0$, άρα ισχύει $x^2-x+1>0$. Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in D_f=(0,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f=(0,+\infty)$. Άρα η ρίζα από το Θ. Bolzano είναι μοναδική.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση :

i. Είναι $A_f=(0,+\infty)$ και $f'(x)=\frac{1}{x}+e^{x-1}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα $f\uparrow(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(0,+\infty)$, άρα

$$f(A_f)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{*}{=}(-\infty,+\infty)=\Re$$

* $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x+e^{x-1}-1)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x+e^{x-1}-1)=+\infty$

Το $2017\in f(A_f)=\Re$, άρα η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $A_f=(0,+\infty)$ και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x+e^{x-1}-1=0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, άρα η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, και επειδή $f\uparrow(0,+\infty)$ θα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

98)Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $x^2+\ln(x-1)=4$

ii. $x^3+3x-1=0$ στο Δ=(0,1)

iii. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)

iv. $x^3+x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\Delta=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

99) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια το πολύ ρίζα.

i. $2x+1=\eta\mu x$

ii. $x^3-\lambda x^2+\lambda^2 x-2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$

100) Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)

ii. $3e^x+x^3=3x^2-3x$ στο $\Delta=(-1,0)$

101) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x\ln x-2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

102) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση :

Έχω : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ (1). Η συνάρτηση $f^3(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμες, ομοίως και η συνάρτηση x^3+2x-5 είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)+f(x))'=(x^3+2x-5)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+f'(x)=3x^2+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=3x^2+2\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2+2}{3f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\in\Re$, και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

103) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(\ln x)=f(1-x)$.

104) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^3+x)-f(2-\ln x)<0$.

105) Δίνεται μια συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα
iii. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία $45°$. *(Πανελλήνιες 2003)*

106) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x-x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2e^x+x)-f(2+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)=0$

107) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(e)=\dfrac{1}{e-1}$ και $xf'(x)+f(x)=\dfrac{1}{x}+f'(x)$ για κάθε $x>1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x+\sqrt{x}+1)^{e^x+1}=(e^x+2)^{2e^x+\sqrt{x}}$

108) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$ και $e^xg'(x)=e^x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τους τύπους των f και g,
ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)$ ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^x[\ln(x^2+1)+x+1]\geq 1$.

109) Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1)<0$
iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε : $f(\xi)+4\xi=\xi^2+3$.

110) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=e$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2}\leq\dfrac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 2.6

ΘΕΜΑ 4 #33388

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, \pi+1\right)$. (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x+1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)| \le 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \le 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4 #26605

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. f(x) = $\sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x ∈ $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-∞, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞). (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 #32524

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+x}{e - x\ln x - ex}$.

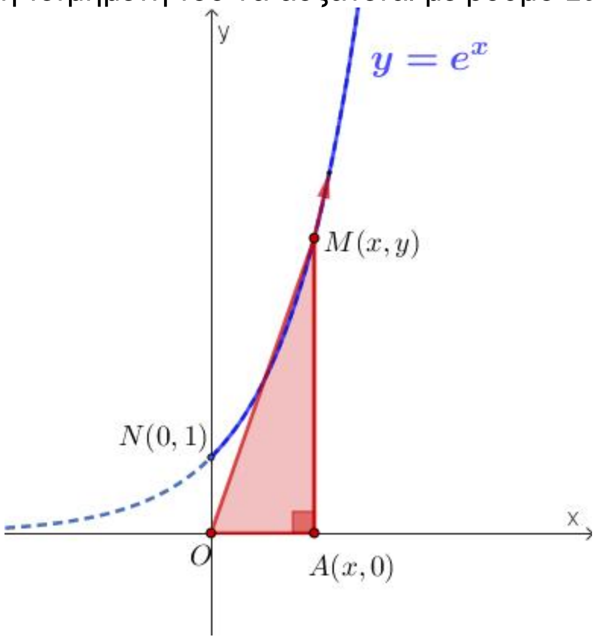
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4 #28685

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο Ν$(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.



i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0)$, $A(x, 0)$ και $M(x, y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #23376

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

ii. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1) + h\left(\ln\frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4 #23200

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$ (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1} + \ln x\right) = \ln 2$. (Μονάδες 6) δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #23199

Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$. (Μονάδες 8)