1.8Α ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

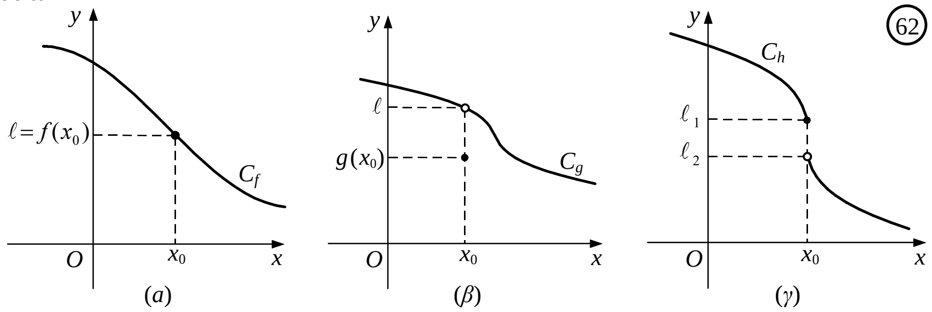
Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2006 ΟΜΟΓ., 2009 Β΄, 2010 ΟΜΟΓ., 2015)**

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$.

Σχόλια :

α) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

— Η συνάρτηση *g* είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq g(x_0)$.

— Η συνάρτηση *h* είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της *f* δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση *f*.

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα,

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$, οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=3$. ***(2019)***

γ) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

δ) — Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\dfrac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\text{συν}x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\text{ημ}x=\text{ημ}x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\text{συν}x=\text{συν}x_0$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\ne 1$ είναι συνεχείς.

21. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση :

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις :

i. $f+g$, ii. $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, iii. $f\cdot g$, iv. $\dfrac{f}{g}$, v. $|f|$ και vi. $\sqrt[\nu]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Σχόλιο :Τα αντίστροφα των i., iii., iv., v., και ii., για $c=0$, δεν ισχύουν. Δηλαδή, μπορεί οι συναρτήσεις : $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$, $0\cdot f$ να είναι συνεχείς στο x_0 και οι f,g να μην είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο 0, όμως οι συναρτήσεις :

- $(f+g)(x)=0$, $x\in\Re$,
- $(f\cdot g)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $|f(x)|=1$, $x\in\Re$,
- $0\cdot f(x)=0$, $x\in\Re$

είναι συνεχείς στο 0.

22. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση :

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 .

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2008, 2012, 2012 ΕΣΠ., 2017)**

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Σχόλιο :

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα (α,β) και (β,γ), τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και σε μια περιοχή του x_0 .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΣ

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε ως προς τη συνέχεια μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, εργαζόμαστε ως εξής :

- Εξηγούμε γιατί είναι συνεχής κάθε κλάδος της συνάρτησης ξεχωριστά, στα ανοιχτά διαστήματα που ορίζεται.
- Εξετάζουμε (με τον ορισμό) τη συνέχεια στα σημεία που αλλάζει ο τύπος. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχείς στο x_0, αλλιώς όχι. Τονίζουμε ότι για την εύρεση του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ εργαζόμαστε με πλευρικά όρια. Η f **δεν** είναι συνεχείς στο x_0, αν :
  - ✓ Δεν υπάρχει κάποιο από τα πλευρικά όρια ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι ίσα, όχι όμως ίσα με το $f(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 2 σελ. 197 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x $_0$ τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2+4, x<2 \\ x^3, x\geq 2 \end{cases}$ αν x $_0$ =2

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x<1 \\ \sqrt{3+x}, x\geq 1 \end{cases}$ αν x $_0$ =1

iii. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2 \\ -3, x=-2 \end{cases}$ αν x $_0$ =-2

Λύση :

i. Είναι : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4) = 8$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^3) = 8$, $f(2) = 2^3 = 8$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 8$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ii. Είναι : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3+x} = 2$, $f(1) = \sqrt{3+1} = 2$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

i. Είναι : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-1) = -3$, $f(-2) = -3$

Άρα $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = -3$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

2. (Άσκηση 4 σελ. 198 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3, x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, x>1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, x\geq 0 \end{cases}$

Λύση :

i. Αν $x<1$, $f(x)=2x^2-3$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Αν $x>1$, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ (σημείο αλλαγής τύπου)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-3)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}+1=2$

$f(1)=-1$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$

ii. Αν $x<0$, $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνέχων

Αν $x>0$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ (σημείο αλλαγής τύπου)

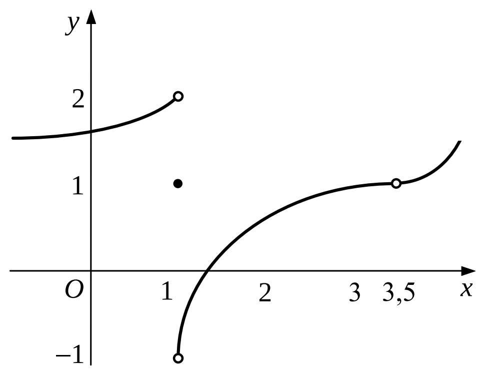
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

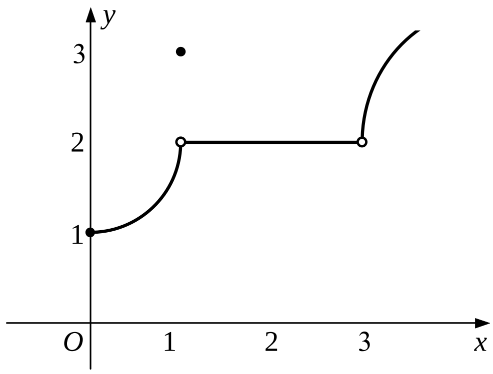
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$

$f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$. Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

3. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\ln x+2x^2-3, & x>1\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}, & 0<x\le 1\end{cases}$

5. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x}-2, x\le 0\\ \dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x-2}, 0<x<2\\ 3\sqrt{1+3\sigma\upsilon\nu(x-2)}, x\ge 2\end{cases}$

6. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$ στο $x_0=1$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2\\ -3, x=-2\end{cases}$ στο $x_0=-2$

7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

   i. $f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\leq 1\\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$

   iii. $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$

   iv. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leq 0\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$.

8. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, x<1\\ 2x-3, x\geq 1\end{cases}$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, x<1\\ 5x^3-3, x\geq 1\end{cases}$

   iii. $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\ln(x^2+1), x<0\\ e^{2x}+x-1, x\geq 0\end{cases}$

   iv. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

   v. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ xe^{1-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x+\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ 2, & x=0\\ x^2-\eta\mu x+5, & x>0\end{cases}$.

   i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

   ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.

10. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ με $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \\ xe^{\frac{1}{x}}, x<0\end{cases}$.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii. Να βρείτε τα όρια : α. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

13. Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι παρακάτω συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

i. $f(x)=5x^2-x+4$ ii. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ iii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ iv. $f(x)=\ln(x-1)$

v. $f(x)=e^{x^2-1}$ vi. $f(x)=\eta\mu\dfrac{1}{x^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μια συνάρτηση μας δίνεται ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ζητείται να προσδιορίσω κάποιες παραμέτρους τότε κάνω χρήση του ορισμού : Η f είναι συνεχής στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Αν χρειαστεί κάνω χρήση του ορισμού με τα πλευρικά όρια : Η f είναι συνεχής στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14. Για ποια τιμή του *α* η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2\alpha}, & \textbf{αν} \quad \boldsymbol{x\leq 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{\eta\mu x}{x}}, & \textbf{αν} \quad \boldsymbol{x>0}\end{cases}$ είναι συνεχής;

Λύση :

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=x^2+2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή αρκεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Έχουμε όμως : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2\alpha)=2\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $f(0)=2\alpha$. Επομένως, αρκεί $2\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$.

15. (Άσκηση 1 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa), x\le 2\\ \kappa x+5, x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

<u>Λύση :</u>

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-\kappa)(x+\kappa)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-\kappa^2)=4-\kappa^2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+5)=2\kappa+5$

$f(2)=(2-\kappa)(2+\kappa)=4-\kappa^2$

Άρα $4-\kappa^2=2\kappa+5 \Leftrightarrow \kappa^2+2\kappa+1=0 \Leftrightarrow \kappa=-1$

16. (Άσκηση 2 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12, x<1\\ 5, x=1\\ \alpha x+\beta, x>1\end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Λύση</u> :

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha^2x^2+\beta x-12)=\alpha^2+\beta-12$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta)=\alpha+\beta$

$f(1)=5$

Άρα $\begin{cases}\alpha^2+\beta-12=5, (1)\\ \alpha+\beta=5, (2)\end{cases}$

$(2): \alpha+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5-\alpha$

$(1)\xrightarrow{(2)}\alpha^2+5-\alpha-12=5 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-12=0 \Leftrightarrow \alpha=4, ή, \alpha=-3$

- Για $\alpha=4$, (2) : $\beta=5-4 \Leftrightarrow \beta=1$
- Για $\alpha=-3$, (2) : $\beta=5+3 \Leftrightarrow \beta=8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, x<1 \\ \beta+1, x=1 \\ ax^2-1, x>1 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\alpha x^2-\beta & ,x<1 \\ \eta\mu(\pi x)+2 & ,1\le x\le 2 \\ \ln(x-1)+2\beta\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\alpha & ,x>2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

19. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε να είναι συνεχής οι συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 2x+\alpha^2 x}{x}, x<0 \\ x^2+3\alpha, x\ge 0 \end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3\alpha x-1, x<1 \\ x^2+\alpha^2+2, 1\le x\le 2 \\ \alpha x^2+x+\alpha-2, x>2 \end{cases}$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{a-1}+\ln x, 0<x\le 1 \\ \ln(3x-2)+e^{3a-3}, x>1 \end{cases}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΙΜΗΣ Ή ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΗΣ $f(x)$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0\in D_f$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα

- αν μας ζητείται η τιμή $f(x_0)$, τότε αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- αν μας ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε αρκεί να βρούμε το $f(x_0)$
- αν η f είναι συνεχής στο x_0 και μας δίνεται μια ανισοτική σχέση, τότε το $f(x_0)$ το βρίσκουμε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια και καταλήγοντας στις σχέσεις $f(x_0)\ge\alpha$, $f(x_0)\le\alpha$, οπότε $f(x_0)=\alpha$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την τιμή f(2). Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Λύση :

Είναι $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αν $x\neq 2$ τότε $(x-2)f(x)=x^2-5x+6 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. Για να βρούμε το $f(2)$ θα χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της $f(x)$. Δηλ.

Η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει :

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}= \lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Άρα για τον τύπο της $f(x)$ ισχύει : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, x\neq 2\\ -1, x=2\end{cases}$.

22. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το f(2).

Λύση :

Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ (1)

- Για $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ έχω :

$$(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow f(x)\leq \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\frac{x^2-2x}{x-2} \text{ κοντά στο } 2^+$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\leq \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\leq \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\leq 1+2 \Leftrightarrow f(2)\leq 3$ (2) $\quad$ (* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\underset{\substack{\acute{o}\tau\alpha\nu: x\to 2,\ u\to 0\\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon: u\to 0}}{\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\\ x-2=u}}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$)

- Για $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ έχω :

$$(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow f(x)\geq \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\frac{x^2-2x}{x-2} \text{ κοντά στο } 2^-$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\geq \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\geq \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\geq 1+2 \Leftrightarrow f(2)\geq 3$ (3). Άρα από (2) και (3) έχω ότι $f(2)=3$.

23. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$.

Λύση :

Έστω : $g(x)=\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ με $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=4$ έτσι :

$$g(x)=\frac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow (x-1)f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}$, άρα είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \overset{*}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{\sqrt{x}+1} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{2} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Επειδή όμως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει : $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 3$

$$(^{*}\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \underset{\substack{\acute{o}\tau\alpha\nu: x\to 1,\ u\to 0 \\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon: u\to 0}}{\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \\ x-1=u}}{=\!=\!=\!=\!=}} \lim \frac{\eta\mu u}{u} = 1)$$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

<u>Λύση :</u>

Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right) = x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{f^2(x)+1} \quad (1)$$

Είναι : $|f(x)| = \left|\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}\right| = \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1} \le \frac{|x^2-1|}{1} = |x^2-1|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)\ge 0 \Leftrightarrow f^2(x)+1\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1}\le 1 \Leftrightarrow \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1}\le |x^2-1|$.

Επομένως : $|f(x)| \le |x^2-1| \Leftrightarrow -|x^2-1| \le f(x) \le |x^2-1|$

Έτσι : $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1}\left(-|x^2-1|\right) = 0 \\ \lim_{x\to 1}\left(|x^2-1|\right) = 0\end{array}\right\}$ από κριτήριο παρεμβολής : $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Επίσης : $f(1) = \frac{1^2-1}{f^2(1)+1} = 0$, άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

25. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή f(2).

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το f(0).

27. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $x^2 f(x) + x = x\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\sqrt{x^2+1} = 2\eta\mu^2 x + f(x)$, για κάθε $x\neq 0$. Αν f(0)=4, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

30. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x-1}$, για κάθε $x\neq 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,4)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

31. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$, για κάθε $x\neq -2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-2,3)$.
   i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

32. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x)\leq \eta\mu x+x^2-4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το f(0).

33. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f^2(x)+2x\eta\mu x\leq 2xf(x)+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να βρείτε το f(0)
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0.

34. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $(x-1)f(x)\geq x^2-3x+2$ για κάθε $x\in\Re$. Αν f συνεχής στο $x_0=1$, να βρεθεί η τιμή f(1).

35. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)\cdot\eta\mu x\geq x^2+3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το f(0).

36. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x)-\eta\mu 3x\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε το f(0).

37. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3-2x^2\leq f(x)\leq 3+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

38. Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=4$, να βρεθεί η τιμή $f(4)$ όταν για κάθε $x\geq 0$, ισχύει : $4\sqrt{x}-8\leq (x-4)f(x)\leq x-4$.

39. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)+x^2-1}{\sqrt{x}-1}=12$. Να βρεθεί το $f(1)$.

40. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$ να βρεθεί το $f(0)$.

41. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(1,2). Αν επιπλέον ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)+\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=\dfrac{9}{16}$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

42. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=8$. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα y'y.

43. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)f(x)-x+1}{x^2\eta\mu(x-1)}=3$.

44. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|xf(x)-3x+\eta\mu 3x|\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να βρείτε το f(0)
   ii. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\ne 0\\ \alpha, x=0\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

45. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+6f(x)+9\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

46. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)-4xf(x)\le -3x^2-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.
   ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

47. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, ώστε $f^3(x)+f(x)=\ln x$ (1), για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in\Re$.
   i. Να βρείτε το f(0).
   ii. Να βρείτε το α ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x+2xf(x)}{x^2+\eta\mu x\cdot f(x)}=3$

49. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x}{x^2}=2$.
   i. Να βρείτε το f(0) και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$
   ii. Να βρείτε το λ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\lambda f^2(x)}{3x^2+x\eta\mu x}=3$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$, περιττή και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2}{(x-1)^2}=3$.

i. Να βρείτε το f(1). ii. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=-1$.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-3}{x^2+1+2x}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Όταν μια συνάρτηση f δίνεται μέσα από μια συναρτησιακή σχέση και γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο α, τότε για να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού Α, αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0\in A$, χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή σχέση με αλλαγή μεταβλητής στην εύρεση του ορίου.

- Αν δίνεται $f(x+y)=...$ τότε για να δείξω ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ξεκινάω με $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και θέτω $x=x_0+h$, έτσι : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)$, στη συνέχεια χρησιμοποιώ τη σχέση $f(x+y)=...$
- Αν δίνεται $f(x\cdot y)=...$ τότε για να δείξω ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ξεκινάω με $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και θέτω $x=x_0\cdot h$, έτσι : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 1}f(x_0\cdot h)$, στη συνέχεια χρησιμοποιώ τη σχέση $f(x\cdot y)=...$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

51. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$

i. Να βρείτε το f(0).

ii. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι :

α. η f είναι συνεχής στο 0, β. η f είναι συνεχής στο $\Re$.

52. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$, να δείξετε ότι :

i. $f(1)=0$.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

53. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε την τιμή :

i. $f(2)$, όταν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}=12$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$.

ii. $f(3)$, όταν $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(3h)}{h-1}=6$ και στη συνέχεια να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{\sqrt{x^2+7}-4}$ και β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x-3}$

1.8B ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση : (2013 ΟΜΟΓ., 2014 ΕΣΠ. Β΄, 2020 Π.Σ.)

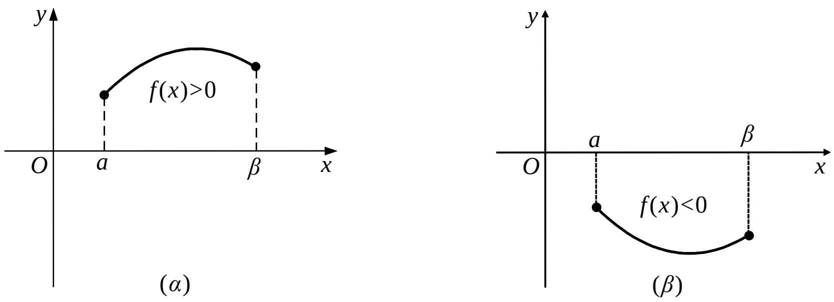
Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

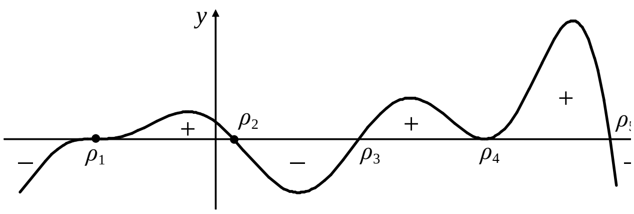
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Σχόλια :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.



- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

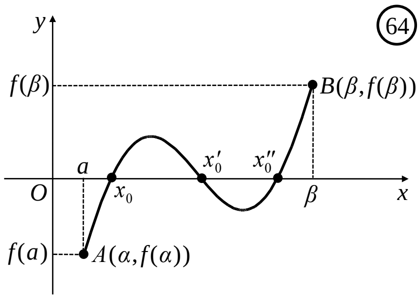
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano, δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ που έχει ρίζα στο (α,β) αλλά δεν είναι συνεχής στο [α,β] ή δεν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

25. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση :

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α.** Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια **τουλάχιστον** ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) ακολουθούμε τα εξής βήματα :
- ➢ φέρνουμε όλους τους όρους στο α' μέλος
- ➢ θεωρούμε το α' μέλος ως μια συνάρτηση f
- ➢ εξασφαλίζουμε για την f τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [α,β].

Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x+2=3\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,π).

Λύση :

Έχω $4x+2-3\sigma\upsilon\nu x=0$, έστω $f(x)=4x+2-3\sigma\upsilon\nu x$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [0,π]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,π] ως πράξεις συνέχων (π.σ.)
- $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=4\pi+2-3\sigma\upsilon\nu\pi=4\pi+2+3=4\pi+5>0$

Άρα $f(0)\cdot f(\pi)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

55. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις :
   i. $x^3-3x^2-x+3=0$ στο (0,2) ii. $3x+\ln x^4=x^2+4$ στο (1,e)
   iii. $x\ln\sqrt{x}+x^2\ln x=2$ στο (1,e) iv. $2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 3x=0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$

56. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x-x+1$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0,π). (Υποδ. Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα)

57. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$ τέμνει τον άξονα x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (1,3).

58. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\Re$, ώστε $f(0)<1$ και $f(1)>3$, τότε η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,1).

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ και $g(x)=xe^x-3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) . (Υποδ. Οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο αν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την $h(x)$ δείχνω ότι η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.)

60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\ln x+3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) .

61. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις *f*, να βρείτε έναν ακέραιο *α* τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα
   i. $f(x)=x^3+x-1$ ii. $f(x)=x^5+2x+1$
   iii. $f(x)=x^4+2x-4$ iv. $f(x)=-x^3+x+2$

62. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $0<f(x)<1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x)-2f(x)+2x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) .

63. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\Re$, όπου $\beta,\gamma\in\Re$ με $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1). (Πανελλήνιες 2001)

64. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g συνεχής στο [α,β]. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $\alpha<g(x)<\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)+x=f(x)+g(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β.** Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει περισσότερες ρίζες, τότε εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία σε περισσότερα διαστήματα, είτε χωρίζοντας το αρχικό διάστημα, είτε εντοπίζοντας νέα διαστήματα. Τα διαστήματα δεν πρέπει να έχουν κοινά εσωτερικά στοιχεία.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2x^2=1$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα (-1,1).

Λύση :

Έχω $x^4+2x^2-1=0$, έστω $f(x)=x^4+2x^2-1$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1). Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0] & [0,1]

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0]

- $f(x)$ συνεχής στο [-1,0] ως πολυωνυμηκή
- $f(-1)=2>0$, $f(0)=-1<0$ Άρα $f(-1)\cdot f(0)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,0)

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμηκή
- $f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$ Άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

66. Να δειχθεί ότι έχουν δυο τουλάχιστον ρίζες οι επόμενες εξισώσεις :

i. $4x^3-3x^2-8x+6=0$ στο (0,2)

$x-3-5\eta\mu x=0$ στο $(-\frac{\pi}{2},\pi)$

ii. $(3-x)\ln x=x^3-5x^2+5x$ στο (1,4)

67. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^x-(x+2)$ έχει :

i. μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3)

ii. δυο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ.** Αν η εξίσωση περιέχει παρανομαστές και η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο άκρο, τότε πρώτα απαλείφουμε τους παρανομαστές και μετά θέτουμε συνάρτηση f(x).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

68. (Άσκηση 5β) σελ. 200 Ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

Λύση : Αν θέσουμε ως συνάρτηση $f(x)$ το 1ο μέλος της εξίσωσης δεν θα ορίζονται τα $f(1), f(2)$ με αποτέλεσμα να μην μπορώ να εφαρμόσω Θ.Β. Γι’ αυτό κάνω πρώτα απαλοιφή παρανομαστών : $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)=0$, έστω $f(x)=e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)$, $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [1,2]

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως π.σ.
- $f(1)=-e<0$, $f(2)=\ln 2>0$ Άρα $f(1)\cdot f(2)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

69. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις : :

i. $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^3+1}{x-2}=0$ στο (1,2) ii. $\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$ στο (1,2)

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Δ.** Αν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β] (Δηλ. ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$) τότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(\alpha)f(\beta)\le 0$ και διακρίνω τις περιπτώσεις

- αν $f(\alpha)f(\beta)=0$, τότε θεωρούμε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$
- αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε ισχύει το Bolzano

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα [-3,3] και για κάθε $x\in[-3,3]$ ισχύει $|f(x)|\le 3$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3].

Λύση : Έχω $f(x)-x=0$, έστω $g(x)=f(x)-x$, $D_g=[-3,3]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]. Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $g(x)$ στο [-3,3]

- $g(x)$ συνεχής στο [-3,3] ως π.σ.
- Από εκφώνηση : $|f(x)|\le 3 \Leftrightarrow -3\le f(x)\le 3$ (1) για κάθε $x\in[-3,3]$
  Άρα $g(-3)=f(-3)+3\ge 0$ (Από (1) : $-3\le f(-3)\le 3 \Leftrightarrow 0\le f(-3)+3\le 6$)
  Και $g(3)=f(3)-3\le 0$ (Από (1) : $-3\le f(3)\le 3 \Leftrightarrow -6\le f(3)-3\le 0$)

Άρα $g(-3)\cdot g(3)\le 0$

- Αν $g(-3)\cdot g(3)=0 \Leftrightarrow g(-3)=0 \Leftrightarrow$ το -3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
  ή $g(3)=0 \Leftrightarrow$ το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(-3)\cdot g(3)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-3,3)

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α,β] με $f(\alpha)+f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

72. Έστω $f:\Re\to\Re$ συνεχής συνάρτηση με $f(1)+f(2)=7$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^2=4x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1,2].

73. Έστω $f:\Re\to[0,6]$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-6f(x)+9x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ε.** Αν σε κάποιο άκρο (ή και στα δυο) δεν ορίζεται η f(x) τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της τιμής της f από όριο :

- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l<0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l>0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\dfrac{1}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση : Έστω $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x-1}$, $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=(-\infty)-\dfrac{1}{0-1}=-\infty$, οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)<0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=0-(-\infty)=+\infty$, οπότε υπάρχει β κοντά στο 1^- τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(0,1)$ και επιπλέον $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

75. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

76. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-4x+2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1).

77. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)+\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΜΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ (ή $\xi \in (\alpha,\beta)$) που να ικανοποιεί μια ισότητα, εργαζόμαστε ως εξής :

- Στην ισότητα που δίνεται, (αν χρειάζεται κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θέτουμε όπου x_0 το x.
- Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)$ το πρώτο μέλος.
- Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την $g(x)$ στο [α,β] και δείχνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Από την ισότητα $g(x_0)=0$ οδηγούμαστε στη ζητούμενη ισότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

78. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(\alpha,-1)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε : $x_0\left(f(x_0)-1\right)=\beta f(x_0)-\alpha$.

<u>Λύση :</u> Θα δείξω ότι η εξίσωση $x\left(f(x)-1\right)=\beta f(x)-\alpha$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Έστω $g(x)=x\left(f(x)-1\right)-\beta f(x)+\alpha$, $D_g=[\alpha,\beta]$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Θ.Β. για τη $g(x)$ στο [α,β]

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $\mathrm{A}(\alpha,-1)$ άρα $f(\alpha)=-1$,
$g(\alpha)=\alpha(f(\alpha)-1)-\beta f(\alpha)+\alpha=-2\alpha+\beta+\alpha=\beta-\alpha>0$ ($\alpha<\beta$ άρα και $\alpha\neq\beta$)
$g(\beta)=\beta(f(\beta)-1)-\beta f(\beta)+\alpha=\beta f(\beta)-\beta-\beta f(\beta)+\alpha=\alpha-\beta<0$

Άρα έχω $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

79. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $f(x-2)=f(x+2)$ (1). Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha-1,\alpha+1]$ ώστε να είναι $f(x_0-1)=f(x_0+1)$.

<u>Λύση :</u> Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x-1)=f(x+1)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Έστω $g(x)=f(x-1)-f(x+1)$, $D_g=\Re$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Θ.Β. για τη $g(x)$ στο $[\alpha-1,\alpha+1]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ ως π.σ.
- $g(\alpha-1)=f(\alpha-1-1)-f(\alpha-1+1)=f(\alpha-2)-f(\alpha)$

$g(\alpha+1)=f(\alpha+1-1)-f(\alpha+1+1)=f(\alpha)-f(\alpha+2)\overset{(1)}{=}f(\alpha)-f(\alpha-2)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]$

Άρα έχω $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]^2\leq 0$

- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=0\Leftrightarrow g(\alpha-1)=0\Leftrightarrow$ το α-1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
ή $g(\alpha+1)=0\Leftrightarrow$ το α+1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha-1,\alpha+1)$

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

80. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0)<g(0)$ και $f(1)>g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

81. **Έστω $f:\Re\to\Re$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει : $(x^2-4x+2)f(x)\le f(0)+f(4)$. Να αποδείξετε ότι :
   i. $f(0)=f(4)$
   ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,2]$ τέτοιο ώστε : $f(\xi^2)=\xi\cdot f(2\xi)$.

82. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{\eta\mu\xi}{\xi-1}=1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\xi-3}$.

83. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(\alpha)>g(\alpha)$ και $f(\beta)<g(\beta)$, να αποδεδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

84. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-4f^2(x)+5f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ ώστε $f(\xi)=0$.

85. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν $f(0)<1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0\eta\mu\dfrac{1}{x_0}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ ΣΤΟ (α,β)

Για να δείξω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο (α,β):

1ο Βήμα : Δείχνω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) με Θ. Bolzano

2ο Βήμα : Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β), οπότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

86. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x=2-x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

Λύση : Έχω : $e^x=2-x\Leftrightarrow e^x+x-2=0$, έστω $f(x)=e^x+x-2$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ο Βήμα : θ.δ.ο. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Θ.Β. για την $f(x)$ στο [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως π.σ.
- $f(0)=-1<0$, $f(1)=e-1>0$ άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

2ο Βήμα : θ.δ.ο. η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1,x_2\in\Re$ με :

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$ (2), προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

87. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο (1,e).

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα (2,3).

90. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ Θ. BOLZANO

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

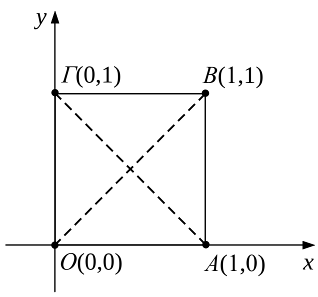
91. Ένας πεζοπόρος ξεκάνει από ένα χωριό Α στις 6 π.μ. και φτάνει σε ένα άλλο χωριό Β στις 11 π.μ. Την επόμενη μέρα ξεκάνει από το χωριό Β στις 6 π.μ. και φτάνει στο χωριό Α στις 11 π.μ., κάνοντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

92. Ένα αυτοκίνητο ξεκάνει στις 7 π.μ. από μια πόλη Α και φτάνει στις 12 μ.μ. σε μια πόλη Β. Την επόμενη μέρα ξεκάνει στις 7 π.μ. από την πόλη Β και φτάνει στις 12 μ.μ. στην πόλη Α ακλουθώντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

93. Δίνεται το τετράγωνο *ΟΑΒΓ* του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση *f* της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.

   i. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου

   ii. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.



1.8γ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γ. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

26. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του ενδιαμέσων τιμών.

Διατύπωση :

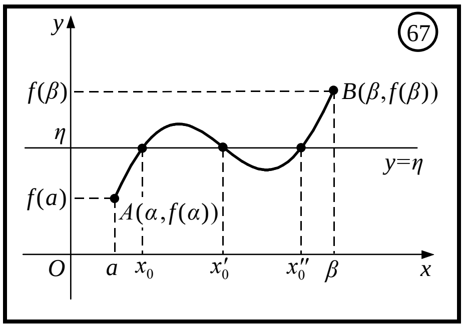
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

Απόδειξη : **(2001 ΟΜΟΓ., 2005, 2010 ΕΣΠ. Β΄, 2013 ΕΣΠ., 2015, 2020 Ν.Σ.)**

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:



- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

Αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

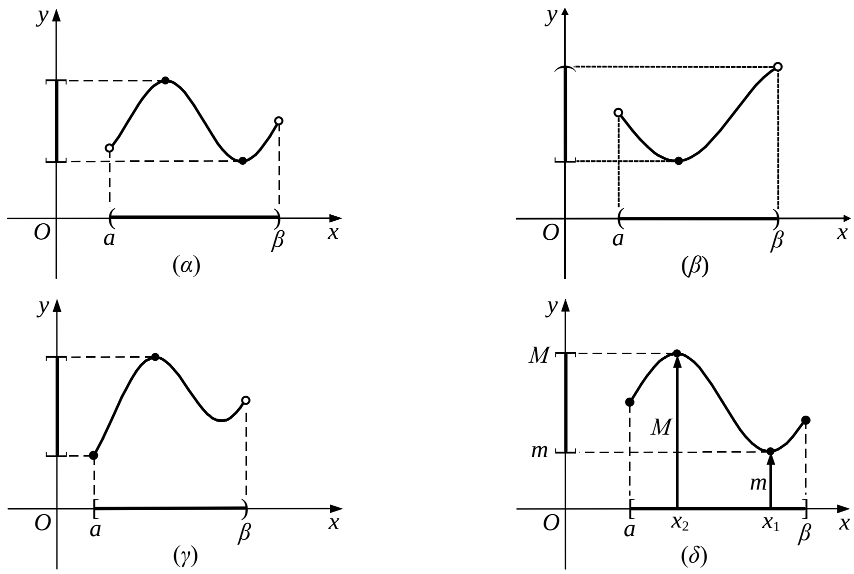
Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y=\eta$, τότε η C_f τέμνει την ευθεία $y=\eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0,\eta)$ με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Σχόλια :

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



27. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση :

Στην ειδική περίπτωση που το *Δ* είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

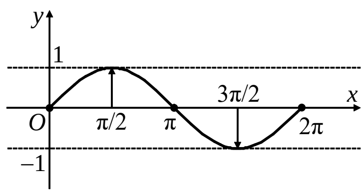
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}$, για κάθε $\boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}$.

Σχόλιο :

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m,M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

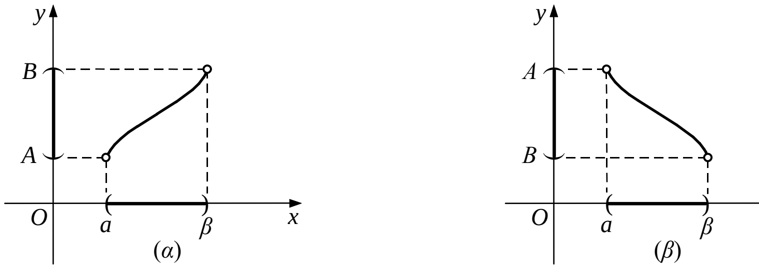
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $\mathrm{M} = 1$.



- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση *f* είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου $\mathrm{A} = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η *f* είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).

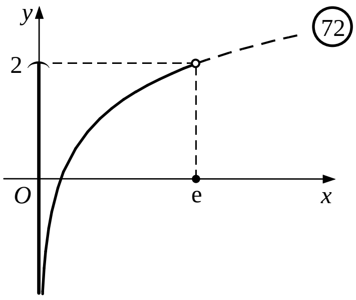


71

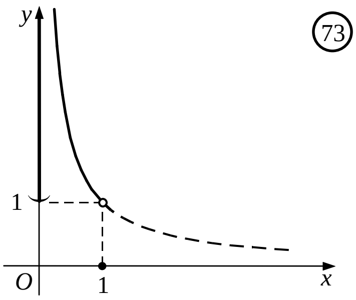
Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x+1$, $x\in(0,e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty,2)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x)=2.$$



72



73

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Θ.Ε.Τ. – ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ & ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε : $f(x_0)=\eta$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παίρνει δυο τιμές διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η f παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες (Θ.Ε.Τ.). Άρα αν η f δεν είναι σταθερή, τότε το σύνολο τιμών της f(Δ) είναι επίσης διάστημα.

Β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu\in[\alpha,\beta]$ ώστε : $f(x_\varepsilon)=\mu\leq f(x)\leq \mathrm{M}=f(x_\mu)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ που σημαίνει ότι τα μ, Μ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$

Γ. Ένα θεωρητικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω θεωρήματα είναι ότι «Αν η f είναι συνεχείς και ¨1-1¨ σε διάστημα Δ, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ».

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική
- $f(1)\neq f(2)$ (αφού $f(1)=15,\quad f(2)=80$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(1)<50<f(2)$, η εξίσωση $f(x)=50$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

2ος Τρόπος : Έστω $g(x)=f(x)-50$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζοντας Θ.Bolzano στη $g(x)$ στο [1,2] …

95. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1]. Αν f(0)=2 και f(1)=4 να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία y=3 , τέμνει τη C_f , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$

ii. Υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

(ΘΕΜΑ Β 2000)

Λύση :

i. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1]

- $f(0) \neq f(1)$ (αφού $f(0)=2, f(1)=4$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(0)<3<f(1)$, η εξίσωση $f(x)=3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και μοναδική.

2ος Τρόπος : Έστω $g(x)=f(x)-3$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1). Θ.Β. στη $g(x)$ στο [0,1] και μονοτονία…

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1], έχουμε : $0<x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x)<f(1)$ για κάθε $x \in (0,1)$. Άρα :

- $f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)<f(1)$ (1)
- $f(0)<f\left(\frac{2}{5}\right)<f(1)$ (2)
- $f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f(1)$ (3)
- $f(0)<f\left(\frac{4}{5}\right)<f(1)$ (4)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), (4) έχω :

$$4f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)<4f(1) \Leftrightarrow f(0)<\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}<f(1)$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)\neq f(1)$, επομένως :

από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, είναι και μοναδικό.

96. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$.

<u>Λύση</u> :

Επειδή η f είναι συνεχής στο [1,4], από Θ.Μ.Ε.Τ. θα έχει μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή m επομένως θα ισχύει $m \le f(x) \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in [1,4]$. Άρα :

- $m \le f(1) \le \mathrm{M}$ (1)
- $m \le f(2) \le \mathrm{M} \Leftrightarrow 2m \le 2f(2) \le 2\mathrm{M}$ (2)
- $m \le f(4) \le \mathrm{M} \Leftrightarrow 3m \le 3f(3) \le 3\mathrm{M}$ (3)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), έχω : $6m \le f(1)+2f(2)+3f(3) \le 6\mathrm{M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \le \dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} \le \mathrm{M}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Delta=[1,4]$, το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $f(\Delta)=[m,\mathrm{M}]$. Έτσι ο αριθμός $\eta=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, έτσι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(4)}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

98. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,3]\to\Re$ με $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ και $f(1)\cdot f(3)=10$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,3)

99. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(2)+f(3)<5<f(1)+f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi,\eta\in\Re$, ώστε $\xi+\eta=5$ και $f(\xi)+f(\eta)=5$.

100. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,5]$, τέτοιο ώστε : $f(x_0)=\dfrac{3f(2)+5f(3)+7f(4)}{15}$.

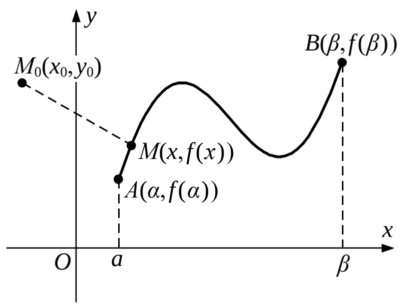
101. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$.

102. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(1)+2f(2)+3f(3)=6f(\xi)$.

103. Έστω συνάρτηση f συνεχής και $f\uparrow[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

104. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη στο [0,4] με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.
   i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f.
   ii. Αν $\alpha\in[1,7]$ να δείξετε ότι η $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο [0,4]
   iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)=\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$.

105. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη *C* είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.



   i. Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x)=(M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα, στα οποία χωρίζουν το πεδίο ορισμού οι διαδοχικές ρίζες της. Η διαδικασία που ακολουθούμε ώστε να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι η εξής :

- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, $x \in D_f$
- Σε πίνακα πρόσημου χωρίζουμε το πεδίο ορισμού σε διαστήματα, τοποθετώντας τις ρίζες και τα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού.
- Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που δημιουργούνται επιλέγουμε κατάλληλο αριθμό ξ και βρίσκουμε το πρόσημο της τιμής $f(\xi)$. Το πρόσημο αυτό έχει η f σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

106. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης : $f(x) = \etaμx - \sigmaυνx$, $x \in [0, 2\pi]$.

Λύση :

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x)=0$ στο $[0,2\pi]$. Έχουμε

$\mathrm{f(x)}=0 \Leftrightarrow \etaμx-\sigmaυνx=0 \Leftrightarrow \etaμx=\sigmaυνx \overset{\sigmaυνx\neq 0}{\Leftrightarrow} εφx=1 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$ και $x \in [0,2\pi]$ άρα $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το $[0,2\pi]$, δηλαδή στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	$f(0)=-1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	$f(2\pi)=-1$
Πρόσημο	$-$	$+$	$-$

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ είναι $f(x)<0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι $f(x)>0$.

107. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$

Λύση : $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$, πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $16-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-4,4]$ (2) άρα από (1) και (2) $D_f=[-3,4]$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1 \Leftrightarrow x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$ δεκτή

ή $\sqrt{16-x^2}=0 \Leftrightarrow 16-x^2=0 \Leftrightarrow x=4$ δεκτή ή $x=-4$ απορ.

x	-3	-2		4
$\sqrt{x+3}-1$	-	0	+	
$\sqrt{16-x^2}$	+		+	0
$f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$	-		+	

Άρα : $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-3,-2)$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,4)$ και $f(x)=0$ όταν $x=-2, ή, x=4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

108. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:A\to\Re$ με : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in A$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
   ii. Να βρεθούν οι ρίζες της f(x)=0
   iii. Να αποδειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (-3,3)

109. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν :
   i. $f(x)=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x-1,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   ii. $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi]$.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 2x+2(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-1$
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ στο [0,π].
   iii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο [0,π].

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΑΠΟ f^2.

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : $\boxed{f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in A}$

111. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=x^2+9$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, $f^2(x)=x^2+9 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+9}$, (1)

Όμως $\sqrt{x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$, άρα από (1) έχουμε : $|f(x)|\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=3>0$, συνεπώς $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

112. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=-3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=9+6xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)=9+6xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)-6xf(x)=9 \Leftrightarrow$ $f^2(x)-6xf(x)+9x^2=9x^2+9 \Leftrightarrow (f(x)-3x)^2=9x^2+9 \Leftrightarrow |f(x)-3x|=\sqrt{9x^2+9}$ (1)

Έστω η συνάρτηση : $g(x)=f(x)-3x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η (1) γίνεται : $|g(x)|=\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$ (2).

Όμως $\sqrt{9x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα από (2) έχουμε : $|g(x)|\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και g συνεχής, άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=f(0)-0=-3<0$, συνεπώς $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά η (2) γίνεται $-g(x)=\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow g(x)=-\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-3x=-\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=3x-\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

$\boxed{f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x \text{ ανήκει στο εσωτερικό το A και μηδενίζει στα άκρα του A}}$

113. (Άσκηση 7 σελ. 200 Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Έστω f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα [-1,1], για την οποία ισχύει : $x^2+f^2(x)=1$ για κάθε $x\in[-1,1]$

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$
ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).
iii. Να βρεθεί ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f.
iv. Αν $f(0)=1$, να βρείτε την f.

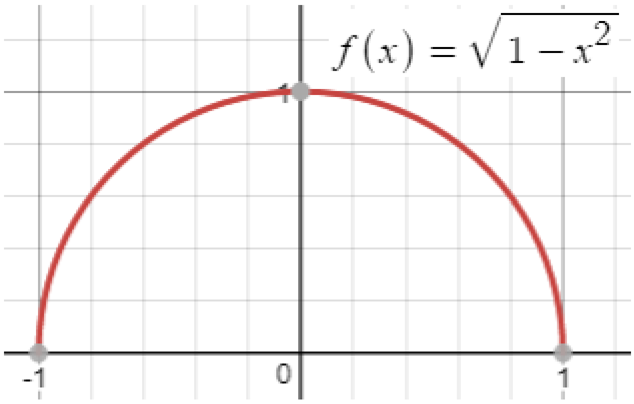
Λύση :

i. Έχω $x^2 + f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 - x^2$,
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, ή, x = -1$.

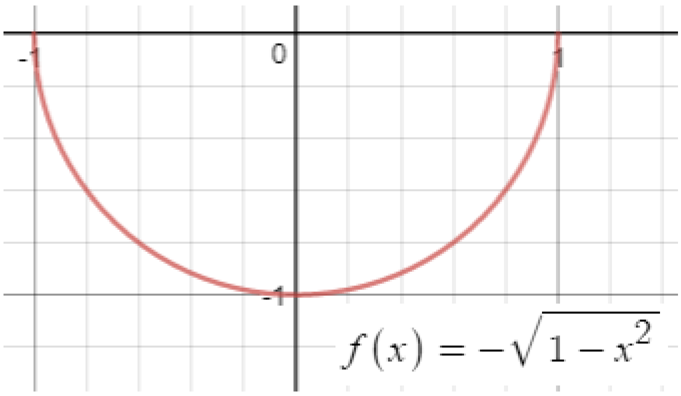
ii. Στο διάστημα (-1,1) η $f(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζει (αφού οι μόνες ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι $x = 1, ή, x = -1$) άρα η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).

iii. Η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1) άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

- Αν $f(x) > 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



- Αν $f(x) < 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow -f(x) = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



iv. Επειδή $f(0) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$.

114. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \Re$ με $f^2(x) - 3x - 4 = -x^2$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
iii. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση :

i. Για κάθε $x \in \mathrm{A}$ είναι : $f^2(x) = -x^2 + 3x + 4$, όμως $f^2(x) \geq 0$ άρα πρέπει $-x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,4]$ οπότε : $\mathrm{A} = [-1,4]$.

ii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad ή \quad x = 4$.

iii. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, δηλ. το σημείο $\mathrm{M}(0,-2) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = -2$.

Επίσης : $f^2(x) = -x^2 + 3x + 4 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

Όμως η f είναι συνεχής στο $(-1,4)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,4)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,4)$ και $f(0) = -2 < 0$ άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,4)$. Επίσης είναι $f(-1) = f(4) = 0$, οπότε : $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-1,4]$.

Έτσι έχουμε :

$|f(x)| = \sqrt{-x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow -f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ για κάθε $x \in [-1,4]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 :

Η f μηδενίζει σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του Α και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq x_0$

115. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \Re$.

Λύση :

Έχουμε : $f^2(x) = x^2$, $x \in \Re$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, δηλ. $f(0) = 0$

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

- Αν $f(x) < 0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x| \Leftrightarrow -f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) = x$ (1)
- Αν $f(x) > 0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x| \Leftrightarrow f(x) = -x$ (2)

Ομοίως η συνάρτηση f στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

- Αν $f(x) < 0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x| \Leftrightarrow -f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = -x$ (3)
- Αν $f(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x| \Leftrightarrow f(x) = x$ (4)

Συνδυάζοντας τα παραπάνω η $f : \Re \to \Re$ έχει έναν από τους παρακάτω τύπους :

$1^{ον}$ από (1), (3) $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ -x & ,x\geq 0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$2^{ον}$ από (1), (4) $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ x & ,x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$3^{ον}$ από (2), (3) $f(x)=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ -x & ,x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$4^{ον}$ από (2), (4) $f(x)=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ x & ,x\geq 0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

116. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\Re$ η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0=0$. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ που ικανοποιούν την σχέση : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\Re$. ΘΕΜΑ Γ (2016)

<u>Λύση :</u>

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0=0$, το $g(0)=0$, δηλ. $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Είναι : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow |f(x)|=|g(x)| \underset{Γ1.}{\overset{g(x)\geq 0}{\Leftrightarrow}} |f(x)|=g(x)$

- Για $x=0$ είναι : $|f(0)|=g(0)\Leftrightarrow |f(0)|=0\Leftrightarrow f(0)=0$
- Για $x>0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (1)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (2)
- Για $x<0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (3)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (4)

Τελικά :

$1^{ον}$ από (1), (3) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$2^{ον}$ από (1), (4) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$3^{ον}$ από (2), (3) $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

$4^{ον}$ από (2), (4) $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

117. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: A \to \Re$ με $x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in A$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

118. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: A \to \Re$ με $f^2(x) = 9 - x^2$ για κάθε $x \in A$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-3,3).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

119. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \Re \to \Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $(f(x) - 2\eta\mu x)(f(x) + 2\eta\mu x) = 4\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x \in \Re$

120. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \Re \to \Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση :
$f^2(x) = 2e^x f(x)$ για κάθε $x \in \Re$.

121. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \Re \to \Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $(f(x) - \sigma\upsilon\nu x)(f(x) + \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \Re$
   i. να αποδείξετε ότι $f^2(x) = 1$
   ii. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον χ'χ
   iii. να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο
   iv. να βρείτε τον τύπο της f

122. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x) + 2x = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \Re$.

123. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = 1$.

124. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ με την ιδιότητα : $f^2(x) - 1 = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \Re$.
   i. να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x) -x διατηρεί σταθερό πρόσημο
   ii. αν f(0)=1, τότε
   α. να βρείτε τον τύπο της f β. να υπολογίσετε το όριο A= $\lim_{x \to -\infty}(xf(x))$

125. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x) - 2xf(x) = 5$ για κάθε $x \in \Re$. Επίσης η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(2,-1).
   i. Να αποδείξετε ότι η $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Re$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f iii. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

126. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re^*$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε :

i. την τιμή f(1) ii. τον τύπο της f iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΙ $f(x) \neq 0$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

127. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[-2,4] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-2,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) + 16 = x^2 - 2f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4)

ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3 + 5x^2 - 3\right)$

Λύση :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5), άρα $f(-1) = -5$
Επίσης η f είναι συνεχής στο $[-2,4]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-2,4]$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-2,4]$. Όμως $f(-1) = -5 < 0$, άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [-2,4]$.

Έστω $g(x) = xf(x) + 2f(x) - x^2 + 16$ με $x \in [-2,4]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).
Θ.Bolzano για τη $g(x)$ στο $[-2,4]$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(-2) = -2f(-2) + 2f(-2) - 4 + 16 = 12 > 0$
  $g(4) = 4f(4) + 2f(4) - 16 + 16 = 6f(4) < 0$ καθώς $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [-2,4]$
  Άρα $g(-2)\cdot g(4) < 0$. Οπότε από Θ.Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3 + 5x^2 - 3\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3\right) = +\infty$ καθώς $f(\pi) < 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

128. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f και $f(2) < 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$.

Λύση :
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,3)$. Επιπλέον το $2 \in (1,3)$ και $f(2) < 0$, άρα $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (1,3)$.

Στο όριο $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$, θέτω $\frac{1}{f(x)} = y$. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \overset{f\ συνεχής}{=} f(3) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 3^-, έτσι : $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. Τελικά $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

129. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-1}+\frac{f(x)}{x-2}=2010$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

130. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε : $\frac{\eta\mu\xi}{f(\xi)}=\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}$.

131. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2}=8$.
   i. Να βρείτε την τιμή f(1).
   ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(2)x^3-2x^2+3x-5\right)$.

132. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)+\eta\mu^2 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=16$.
   i. Να βρείτε την τιμή f(0)
   ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(2010)x^3-3x^2+2x-1\right)$

133. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2,5).
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)-16=-x^2+f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,4).
   ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(3)x^5-2x^3+5x^2-1\right)$.

134. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf(x)=(x^2-4)e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (-2,2).

135. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $x^3 f^2(x)-2x^5 f(x)=-x^2+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να βρείτε το f(1)
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

136. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3,2). Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)<x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. ii. υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f(\xi)=1$.

137. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $f(2007)+f(2006)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

138. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1}-1}=2$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζες τις -1 και 3. Να βρείτε :

i. Την τιμή $f(0)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(e)\ln x\right)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+f(1)x\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για να βρούμε το σύνολο τιμών f(Δ) μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ=(α,β) κάνω τα εξής :

- Διαπιστώνω ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ=(α,β)
- Βρίσκω τα όρια : $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$ οπότε :
  - ✓ f(Δ)=(Α,Β) , αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή
  - ✓ f(Δ)=(Β,Α) , αν η f είναι γνησίως φθίνουσα

Αν κάποιο από τα άκρα του Δ είναι κλειστό, τότε και το αντίστοιχο του f(Δ) θα είναι κλειστό.

ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f	ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f
[α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$[f(\alpha), f(\beta)]$
[α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$[f(\beta), f(\alpha)]$
(α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x), f(\beta)\right]$
(α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x), f(\alpha)\right]$
(α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
(α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση : Πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ και $x>0$ άρα $A_f=(0,1]$

$A_f=(0,1]$, έστω $x_1,x_2\in A_f=(0,1]$ με :

$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \overset{x>0}{\Rightarrow} x_1^2<x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Rightarrow e^{x_1^2+1}<e^{x_2^2+1} \Rightarrow -e^{x_1^2+1}>-e^{x_2^2+1}$ (2)

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (3), προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και έχω: $\sqrt{1-x_1}-e^{x_1^2+1}-\ln x_1>\sqrt{1-x_2}-e^{x_2^2+1}-\ln x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_f=(0,1]$ άρα $f(A)=[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x))$

$f(1)=-e^2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x)\overset{1-e-(-\infty)}{=\!=\!=\!=\!=}+\infty$ άρα $f(A)=[-e^2,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^2+e^x$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5-\sqrt{x-1}-\ln x$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
   .

143. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα.
   i. $f(x)=3-2x$ στο [-1,2]
   ii. $f(x)=x^2+\ln x-1$ στο [1,e]
   iii. $f(x)=e^{-x}-2x+1$ στο [0,1)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ

1[ος] Τρόπος Με προφανή ρίζα.

2[ος] Τρόπος Αν ζητείται να δείξω ότι η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τότε εφαρμόζω το Θ.Bolzano για την f.

Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.

3[ος] Τρόπος Με τη βοήθεια του συνόλου τιμών. Αν το $0\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Γενικότερα αν το $\kappa\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=κ , $\kappa\in\Re$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και βρίσκω το $h(\Delta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ

1[ο] Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα με έναν από τους παραπάνω τρόπους

2[ο] Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα (συνήθως με μονοτονία) οπότε συμπεραίνω ότι έχει ακριβώς μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

144. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-1)+e^{x-2}=1$ έχει μια μόνο ρίζα. Στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

Λύση :

$\ln(x-1)+e^{x-2}=1\Leftrightarrow \ln(x-1)+e^{x-2}-1=0$, έστω $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}-1$ με $A_f=(1,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$.

έστω $x_1,x_2\in A_f=(1,+\infty)$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1)$ (1)

$x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\Rightarrow e^{x_1-2}<e^{x_2-2}\Rightarrow e^{x_1-2}-1<e^{x_2-2}-1$ (2)

προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω: $\ln(x_1-1)+e^{x_1-2}-1<\ln(x_2-1)+e^{x_2-1}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(1,+\infty)$ άρα $f(A)=(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=+\infty$

άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)=\Re$. Το $0\in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

Για να βρούμε τη ρίζα θα ψάξουμε να βρούμε την προφανή ρίζα. Παρατηρώ ότι για $x=2$, έχω $f(2)=\ln(2-1)+e^{2-2}-1=\ln1+1-1=0$, άρα η $x=2$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

145. (ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΘΕΜΑ) Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και 1-1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+e^{x-1}=1$ έχει μια μόνο ρίζα.
   iv. Να βρεθεί η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}-e^{-x}+x+1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα.

148. Για κάθε $\kappa\in\Re$ δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-\kappa x^2+10$
   i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(-\infty,0]$ να βρείτε το f(Δ)
   ii. Για κάθε $\alpha\in(14,15)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha-5$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x}$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα.

150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\ln(9-x)$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-\sqrt{x-1}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$.
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\sqrt{x}\cdot e^{x}=1+2012e^{x}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

154. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

   i. $f(x)=e^{x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ii. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f\big((\alpha,\beta)\big)=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\gamma$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\delta$.

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f\big((\alpha,\beta)\big)=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\delta$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=\gamma$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

155. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,1)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}$.

Λύση :

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Re$, οπότε έχει σύνολο τιμών $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

Τελικά : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right)}{x\left(1+\dfrac{2016}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right)}{1+\dfrac{2016}{x}}=\dfrac{-\infty(0+1)}{1+0}=-\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

156. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{x-1}$.

157. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+1$.

   i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
   iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

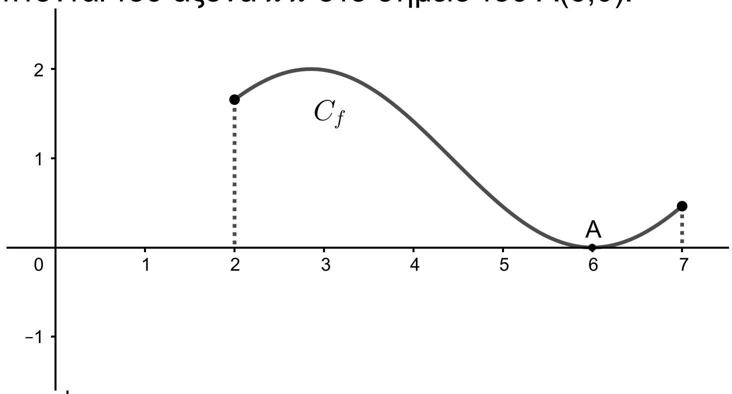
158. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+1$.

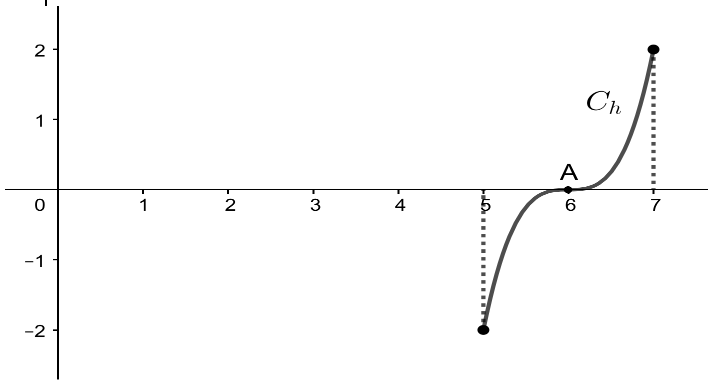
   i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.
   iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.8

ΘΕΜΑ 2 #36839

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του A(6,0).





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2 #29834

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+16}-\frac{5}{2}\ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 #31548

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)-2x|\le(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

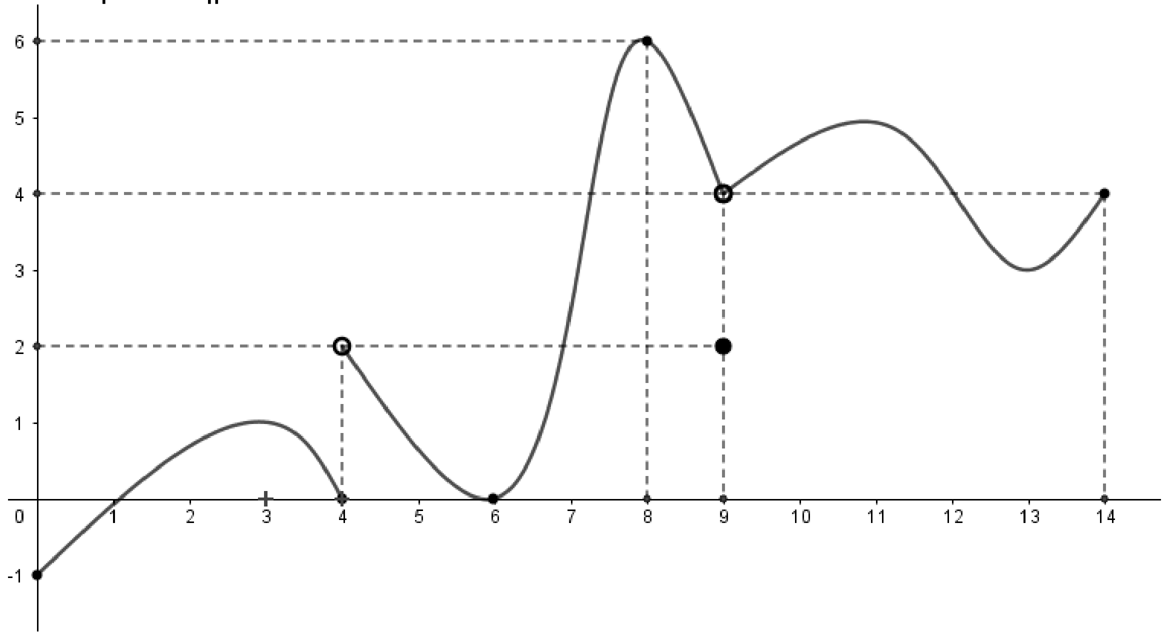
α) $f(1)=2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2 #27318

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$

ii. $\lim_{x\to 4} f(x)$

iii. $\lim_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim_{x\to 14} f(x)$

v. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2 #25749

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

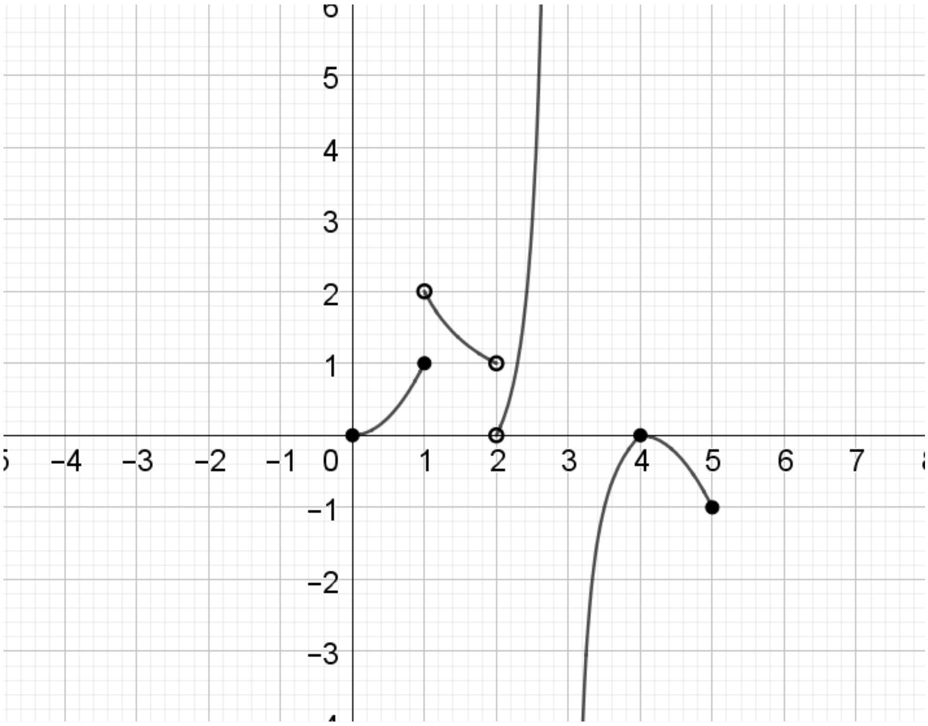
(Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 3 #28684

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$$

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left|f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3 #24761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 #29838

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει :

$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ (Μονάδες 4)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 #26640

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το R. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = 0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 #23106

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x\in[0,\pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f. (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x\to 0} h(x)$$

(Μονάδες 07)